ISSN 2519–206X

ДОСЛІДЖЕННЯ в МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Том 30. Випуск 2(46).

Volume 30. Issue 2(46).

2025

RM&M RM&M RM&M RM&M RM&M

ISSN 2519–206X

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ДОСЛІДЖЕННЯ в МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

Науковий журнал

Виходить 2 рази на рік

Журнал заснований у січні 1997 р.

Том 30. Випуск 2(46). 2025

Одеса
«Астропринт»
2025

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

Редакційна колегія журналу

Головний редактор — О. М. Станжицький, д. ф.-м. н., проф. (Україна)
Заступник головного редактора — В. М. Євтухов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)
Відповідальний редактор — О. Д. Кічмаренко, д. ф.-м. н., доц. (Україна)

A. Alifov, д. ф.-м. н., проф. (Азербайджан)
A. Ashyralyev, д. ф.-м. н., проф. (Туреччина)
S. Dashkovskiy, Dr. habil., проф. (Німеччина)
F. Iacoviello, PhD, проф. (Італія)
I. T. Kiguradze, д. ф.-м. н., проф. (Грузія)
С. К. Асланов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)
Н. Д. Вайсфельд, д. ф.-м. н., проф. (Україна)
Д. В. Дмитришин, д. т. н., проф. (Україна)
А. А. Дороговцев, д. ф.-м. н., проф. (Україна)
О. В. Капустян, д. ф.-м. н., проф. (Україна)
П. І. Когут, д. ф.-м. н., проф. (Україна)
Ан. О. Кореновський, д. ф.-м. н., проф. (Україна)
О. Ф. Кривий, д. ф.-м. н., проф. (Україна)
В. Є. Круглов, к. ф.-м. н., проф. (Україна)
О. Меньшиков, д. ф.-м. н., проф. (Шотландія)
А. В. Плотніков, д. ф.-м. н., проф. (Україна)
В. Г. Попов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)
Н. В. Скрипник, д. ф.-м. н., доц. (Україна)
І. М. Черевко, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Відповідальний за випуск — О. О. Максимов

Згідно з Рішенням Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення № 1407 від 26.06.2025 р. журнал зареєстрований як друковане медіа і внесений до Реєстру суб'єктів у сфері медіа з ідентифікатором R30-06164

Журнал внесений до переліку наукових фахових видань наказами Міністерства освіти і науки України № 527 від 24.05.2018 р. та № 775 від 16.07.2018 р.

© Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2025

ISSN 2519–206X

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Scientific journal

Published twice a year

Journal founded in January, 1997

Volume 30. Issue 2(46). 2025

Odesa
«Astroprint»
2025

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

Editorial board of the journal

Editor-in-Chief — O. M. Stanzhytskyi, DSc, Prof. (Ukraine)
Deputy Editor-in-Chief — V. M. Evtukhov, DSc, Prof. (Ukraine)
Executive Editor — O. D. Kichmarenko, DSc, Assoc. Prof. (Ukraine)

A. Alifov, DSc, Prof. (Azerbaijan)
A. Ashyralyev, DSc, Prof. (Turkey)
S. K. Aslanov, DSc, Prof. (Ukraine)
I. M. Cherevko, DSc, Prof. (Ukraine)
S. Dashkovskiy, Dr. habil., Prof. (Germany)
D. V. Dmitrishin, DSc, Prof. (Ukraine)
A. A. Dorogovtsev, DSc, Prof. (Ukraine)
O. V. Kapustyan, DSc, Prof. (Ukraine)
I. T. Kiguradze, DSc, Prof. (Georgia)
P. I. Kogut, DSc, Prof. (Ukraine)
An. O. Korenovskyi, DSc, Prof. (Ukraine)
V. Ye. Kruglov, CandSc, Prof. (Ukraine)
O. F. Kryvyi, DSc, Prof. (Ukraine)
F. Iacoviello, DSc, Prof. (Italy)
O. Menshykov, DSc, Prof. (Scotland)
A. V. Plotnikov, DSc, Prof. (Ukraine)
V. G. Popov, DSc, Prof. (Ukraine)
N. V. Skripnik, DSc, Assoc. Prof.(Ukraine)
N. D. Vaysfeld, DSc, Prof. (Ukraine)

Publication Editor — O. O. Maksymov

According to the Resolution of the National Council of Ukraine on Television and Radio Broadcasting No 1407 dated 06.26.2025, the journal is registered as a print media and included in the Registry of Media with identifier R30-06164.

The journal is included in the List of Scientific Specialized Publications by Orders of the Ministry of Education and Science of Ukraine No 527 dated May 24, 2018, and No 775 dated July 16, 2018.

© Odesa I. I. Mechnikov National University, 2025

ЗМІСТ

CONTENTS

Дослідження в математиці і механіці. – 2025. – Т. 30, вип. 2(46). – С. 7–17

УДК 517.925

Л. Г. Коваленко, *кандидат фіз.-мат. наук, доцент*
Одеськй національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра математичного аналізу
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
e-mail: baier@ukr.net
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0007-9284-0881

АНАЛОГИ НЕРІВНОСТІ МАЛЕРА ДЛЯ ДРОБОВО-ЛОГАРИФМІЧНИХ ПОХІДНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ ПОЛІНОМІВ У ПРОСТОРІ L_0

Дробові похідні широко вивчають та застосовують при моделюванні багатьох процесів. Це сприяє виникненню всіляких узагальнень поняття дробової похідної для різних класів функцій. Дослідження розв'язків інтегральних рівнянь зі степенево-логарифмічними ядрами, а також задачі, пов'язані з рядами Фур'є вимірних функцій, призвели до поняття дробових степенево-логарифмічних похідних. В означеннях таких похідних, окрім степеневих множників, з'являються також логарифмічні. У статті вивчаються дробові суто-логарифмічні (без степеневих множників) похідні алгебраїчних поліномів у просторі L_0. Встановлені аналоги нерівності Малера для дробово-логарифмічних похідних алгебраїчних поліномів у просторі L_0. Отримано інтегральні зображення коефіцієнтів дробово-логарифмічної похідної і дробово-логарифмічну похідну алгебраїчного полінома подано як інтеграл.
MSC: 34A34, 34C41, 34E99.
Ключові слова: міра полінома за Малером, нерівність Малера, дробово-логарифмічна похідна, алгебраїчний поліном, композиція Сеге.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.2(46).354144

Вступ

Нехай $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ – алгебраїчний поліном точного степеня n з комплексними коефіцієнтами, $c_n \neq 0$, $c_0 \neq 0$ і $\mathcal{P}_n$ – множина таких поліномів.

Вздовж одиничного кола $z = e^{i\varphi}$, $P_n(e^{i\varphi})$ – тригонометричний поліном степеневого виду і, за Малером [1], *міру* P_n визначає функціонал

$$\mathcal{M}(P_n) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|P_n(e^{i\varphi})|d\varphi\right). \tag{1}$$

Надійшла 17.09.2025 © Коваленко Л. Г., 2025

Добре відомо (див., напр., [2], п. 6.7), що

$$\mathcal{M}\left(P_n\right) = \lim_{p \to 0+} \|P_n\|_p \tag{2}$$

де

$$\|P_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P_n(e^{i\varphi})|^p d\varphi \right)^{1/p}$$

– норми у просторах $L_p(-\pi, \pi)$ при $p > 0$ (квазінорми для $0 < p < 1$).

У зв'язку з (2), міру $\mathcal{M}\left(P_n\right)$ ще називають "L_0 - *нормою*"(квазінормою) полінома P_n і позначають $\|P_n\|_0 = \mathcal{M}\left(P_n\right)$.

За формулою Йенсена для мероморфних в одиничному крузі $|z| \le 1$ функцій (див., напр. [3], відд. III, задача 175), функціонал (1) на поліномі $P_n(z) = c_n \prod\limits_{k=1}^{n} (z - \alpha_k)$ приймає значення

$$\mathcal{M}\left(P_n\right) = |c_n| \prod_{k=1}^{n} \max\{1, |\alpha_k|\}. \tag{3}$$

Таким чином, міра $\mathcal{M}\left(P_n\right)$ є певною характеристикою нулів полінома P_n, що знаходяться поза межами одиничного круга $|z| > 1$.

В роботі [1] Малер вивчав поведінку нулів похідної полінома P_n' шляхом порівняння мір $\mathcal{M}\left(P_n'\right)$ та $\mathcal{M}\left(P_n\right)$ і отримав точну оцінку

$$\mathcal{M}\left(P_n'\right) \le n \mathcal{M}\left(P_n\right), \quad \forall P_n \in \mathcal{P}_n. \tag{4}$$

Нерівність (4), згідно з (3), ще можна переписати в альтернативній формі:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \max\{1, |\beta_k|\} \le \prod_{k=1}^{n} \max\{1, |\alpha_k|\},$$

де $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – нулі полінома P_n, а $\beta_1, \ldots, \beta_n$ – нулі P_n'.

Наразі, якщо нулі полінома $P_n \in \mathcal{P}_n$ належать одиничному кругу, то всі нулі його похідної P_n' також знаходяться в цьому крузі – відома теорема Гаусса. А от для поліномів $P_n \in \mathcal{P}_n$ та P_n', що мають нулі поза межами одиничного круга, згідно з (4), добуток таких нулів для P_n' не більше ніж відповідний добуток для P_n.

В [1] показано, що рівність в (4) можлива тоді і тільки тоді, коли всі нулі P_n належать одиничному колу $|z| = 1$.

Доведення співвідношення (4) в [1] проводилось від супротивного, на основі факторизації полінома P_n і властивості неперервності міри $\mathcal{M}(P_n)$ та є доволі непростим. В інший спосіб оцінку (4) можна отримати за допомогою одного результату статті [4] де Брейна та Спрінгера для композиції поліномів, який відкриває також можливості узагальнення нерівності (4) на оператори більш широкого класу ніж диференціювання.

Композицією (*композицією Сеге*) поліномів

$$\Lambda_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda_k z^k \qquad \text{і} \qquad P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k z^k \tag{5}$$

називають поліном

$$\Lambda_n(z) \otimes P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda_k a_k z^k \tag{6}$$

(див. [5], відд. V, задача 151).

Зокрема,

$$P_n'(z) = n(1+z)^{n-1} \otimes P_n(z). \tag{7}$$

Як узагальнення задач про нулі похідної полінома, в роботі [4] вивчались співвідношення між нулями композиції $\Lambda_n(z) \otimes P_n(z)$ та нулями поліномів Λ_n і P_n, Ключовою для другої частини цієї роботи стала теорема 7, яку в наших позначеннях можна записати так:

Теорема A. *Для будь-яких полиномів Λ_n і P_n виконується нерівність*

$$\mathcal{M}\left(\Lambda_n(z) \otimes P_n(z)\right) \leq \mathcal{M}\left(\Lambda_n\right) \mathcal{M}\left(P_n\right). \tag{8}$$

Легко бачити, що оцінка (8) на поліномах $P_n(z) = c(1+z)^n$, де $c \in \mathbb{C}$ є точною.

Тепер нерівність Малера (4) миттєво випливає з подання (7) похідної P_n' та теореми A, оскільки поліном $(1+z)^{n-1}$ має всі нулі на одиничному колі і, за формулою (3), $\mathcal{M}\left((1+z)^{n-1}\right) = 1$.

Загалом, міра $\mathcal{M}(\Lambda_n)$ в (8) є нормою оператора, значення якого на поліномі P_n задає композиція (6). У такому разі кажуть, що поліном $\Lambda_n(z)$ *утворює* оператор композиції Λ_n (оператор і поліном, що його утворює, позначають однаковим символом).

Незважаючи на те, що теорема A надає спосіб обчислення норм операторів композиції, точна оцінка величин $\mathcal{M}(P_n)$, коли нулі полінома Λ_n

не відомі, є проблемою. У цьому напрямку в [6] опубліковані дослідження Арестова у просторах, більш загальних до L_p, $p \geq 0$. Обмежимось формулюванням основного результату з [6] для випадку L_p, $p \geq 0$.

Нехай Λ_n^o – клас операторів Λ_n, утворених поліномами $\Lambda_n(z)$, нулі котрих знаходяться в одиничному крузі $|z| \leq 1$. А через Λ_n^∞ – клас операторів, для яких поліноми $\Lambda_n(z)$ мають усі нулі поза межами одиничного круга $|z| \geq 1$. Оператори з Λ_n^o, Λ_n^∞ та $\Lambda_n^o \cap \Lambda_n^\infty$ характеризуються тим, що образи поліномів P_n, усі нулі яких знаходяться в одиничному крузі $|z| \leq 1$, в області $|z| \geq 1$ і на одиничному колі $|z| = 1$ мають таке ж розташування нулів ([5], відд. V, задачі 151, 152, 116, 117).

Теорема B. *Для будь-якого оператора* $\Lambda_n \in \Lambda_n^o \cup \Lambda_n^\infty$ *на множині* $\mathcal{P}_n$ *справедлива нерівність*

$$\|\Lambda_n P_n\|_p \leq \alpha(\Lambda_n)\|P_n\|_p, \quad p \geq 0, \tag{9}$$

де $\alpha(\Lambda_n) = \max\{|\lambda_0|, |\lambda_n|\}$.

Для операторів Λ_n *з класів* Λ_n^o *і* $\Lambda_n^o \cap \Lambda_n^\infty$ *нерівність* (9) *є точною і на поліномах* az^n *та* $az^n + b$ $(a, b \in \mathbb{C})$, *відповідно, перетворюється в рівність.*

Проте для багатьох класичних операторів на множині $\mathcal{P}_n$ відповідний оператор композиції не належить класу $\Lambda_n^o \cup \Lambda_n^\infty$. Такими є, приміром, оператори дробового степенево-логарифмічного диференціювання

$$J^{\alpha,\beta} P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k k^\alpha \log^\beta (k+1) z^{k-1}, \quad \alpha, \beta \geq 0$$

(див., наприклад, [7], стор. 330).

Для операторів $J^{\alpha,\beta}$ аналоги нерівності (4) виду

$$\mathcal{M}\left(J^{\alpha,\beta} P_n\right) \leq A(n,\alpha,\beta)\mathcal{M}(P_n), \quad \text{де } A(n,\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \tag{10}$$

досліджувались в роботах [8] $(0 \leq \alpha < 1, \beta = 1)$ та [10] $(\alpha = 0, \beta = 1)$.

В даній статті вивчається нерівність (10) для дробово-логарифмічної похідної $(\alpha = 0)$ порядку $\beta \in (0, 1)$,

$$J^\beta P_n(z) \equiv J^{0,\beta} P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k \log^\beta (k+1) z^{k-1}, \quad \beta \in (0,1). \tag{11}$$

У разі граничних значень $\beta = 0$ та $\beta = 1$, тобто для похідної нульового порядку $J^0 P_n(z) = \frac{1}{z}(P_n(z) - c_0)$ та дробово-логарифмічної похідної першого порядку $J^1 P_n(z)$ відомі такі теореми:

Теорема C([8], част. вип. теореми 1). *Для будь-якого полінома $P_n \in \mathcal{P}_n$ степеня $n \geq 1$ справедлива нерівність*

$$\mathcal{M}\left(P_n(z) - c_0\right) \leq A(n)\mathcal{M}(P_n),$$

де

$$A(n) = \prod_{n/6<k<5n/6} 2\sin\frac{\pi k}{n}.$$

Оцінка теореми C на поліномах $P_n(z) = (1+z)^n$ є точною, оскільки як раз $\mathcal{M}\left((1+z)^n - 1\right) = A(n)$. При малих n не складно порахувати, що $A(n) = n$ для $n = 2, 3, 4, 5, 6$. Асимптотику $A(n) \approx (1,4)^n$ див., наприклад, в [9].

Теорема D ([10], теорема 1). *Для будь-якого полінома $P_n \in \mathcal{P}_n$ степеня $n \geq 1$ виконується нерівність*

$$\mathcal{M}\left(J^1 P_n\right) \leq A(n)\mathcal{M}(P_n), \qquad \text{де } A(n) \leq 2,9(1,4)^n \ln^{2/3} n.$$

Основні результати

Теорема. *Для будь-якого полінома $P_n \in \mathcal{P}_n$, $n \geq 1$ та його дробово-логарифмічної похідної $J^\beta P_n$ порядка $0 < \beta < 1$ виконується нерівність*

$$\mathcal{M}\left(J^\beta P_n\right) \leq A(n)\mathcal{M}(P_n), \quad \text{де } A(n) \leq 3,1(1,4)^n \ln^{2\beta/3}(n+1).$$

Доведення теореми базується на зображенні логарифмічних множників перетворення (11) у вигляді інтегралів.

Лема. *Для будь-якого $0 < \beta < 1$ і $k \in N$ справедлива рівність*

$$\ln^\beta(k+1) = \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1+\beta}\Gamma(u)} \int_0^1 \frac{1-t^k}{\ln^{1-u}(1/t)}\, dt.$$

Доведення. Скористаємось інтегральними формами степеневої функції: якщо $p > 0$, то

$$p^\beta = \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-pu}}{u^{1+\beta}}\, du, \quad \text{коли} \quad 0 < \beta < 1 \tag{12}$$

(див. [8], лема 1) та

$$p^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} u^{\beta-1} e^{-pu}\, du \quad \text{для } \beta > 0 \tag{13}$$

(випливає з означення гамма-функції Ейлера).

Послідовним застосування інтегралів (12), (13) маємо:

$$\ln^{\beta}(k+1) = \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \frac{1}{(k+1)^u}}{u^{1+\beta}}\, du =$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1+\beta}\Gamma(u)} \int_0^{+\infty} t^{u-1} \left(1 - e^{-kt}\right) e^{-t}\, dt =$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1+\beta}\Gamma(u)} \int_0^{1} \frac{1 - t^k}{\ln^{1-u}(1/t)}\, dt,$$

що і треба було довести.

Доведення теореми. Нехай $0 < \beta < 1$. Запишемо полиноми $P_n \in \mathcal{P}_n$ та $J^{\beta} P_n$ у вигляді, як того потребує композиція:

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k z^k \quad \text{і} \quad J^{\beta} P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k a_k \log^{\beta}(k+1) z^{k-1}.$$

Легко бачити, що $J^{\beta} P_n(z) = \frac{1}{z} J^{\beta}(1+z)^n \otimes P_n(z)$ і, згідно з нерівністю (8), доведення теореми зводиться до оцінки мір поліномів $\mathcal{M}\left(J^{\beta}(1+z)^n\right)$.

За лемою, запишемо поліном $J^{\beta}(1+z)^n$ в інтегральній формі:

$$J^{\beta}(1+z)^n = \sum_{k=1}^{n} c_k \log^{\beta}(k+1) z^{k-1} =$$

$$= \frac{\beta}{z \ln^{\beta} 2\Gamma(1-\beta)} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1+\beta}\Gamma(u)} \int_0^{1} \frac{(1+z)^n - (1+tz)^n}{\ln^{1-u}(1/t)}\, dt$$

і на одиничному колі $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ маємо: $\left|J^{\beta}(1+e^{i\varphi})^n\right| \le$

$$\le \frac{\beta}{\ln^{\beta} 2\Gamma(1-\beta)} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1+\beta}\Gamma(u)} \int_0^{1} \frac{\left|(1+e^{i\varphi})^n - (1+te^{i\varphi})^n\right|}{\ln^{1-u}(1/t)}\, dt. \tag{14}$$

Далі, для будь-якого $t \in (0,1)$ і $\varphi \in (-\pi, \pi)$ правдива нерівність

$$\left|(1+e^{i\varphi})^n - (1+te^{i\varphi})^n\right| < (1-t) \sum_{k=0}^{n-1} |1+te^{i\varphi}|^{n-k-1} |1+e^{i\varphi}|^k. \tag{15}$$

Оскільки

$$|1+te^{i\varphi}|^2 = |1+e^{i\varphi}|^2 t + (1-t)^2 < 1-(1-|1+e^{i\varphi}|^2)t, \tag{16}$$

то для тих значень φ, за яких $|1+e^{i\varphi}|<1$, також і $|1+te^{i\varphi}|<1$.

Таким чином, для будь-якого $t\in(0,1)$ і $\varphi : |1+e^{i\varphi}|<1$ з (15) маємо:

$$\left|(1+e^{i\varphi})^n-(1+te^{i\varphi})^n\right| < (1-t)\sum_{k=0}^{n-1}|1+e^{i\varphi}|^k < \frac{1-t}{1-|1+e^{i\varphi}|}. \tag{17}$$

Звідси продовжимо оцінку (14) на множині значень $\varphi : |1+e^{i\varphi}|<1$:

$$\left|J^\beta(1+e^{i\varphi})^n\right| < \frac{\ln^{1-\beta}2}{1-|1+e^{i\varphi}|}, \quad \forall\varphi : |1+e^{i\varphi}|<1 \tag{18}$$

(скористались також лемою "справа наліво"при $k=1$).

Якщо ж $|1+e^{i\varphi}|>1$, проведемо необхідну оцінку в інший спосіб. Легко бачити, що

$$(1+e^{i\varphi})^n-(1+te^{i\varphi})^n = ne^{-i\varphi}\int_t^1 \left(1+xe^{i\varphi}\right)^{n-1}dx,$$

Тоді (у пригоді стане також нерівність (16)) маємо:

$$\left|(1+e^{i\varphi})^n-(1+te^{i\varphi})^n\right| \le n\int_t^1 \left|1+xe^{i\varphi}\right|^{n-1}dx <$$

$$< n\int_t^1 \left(1+(|1+e^{i\varphi}|^2-1)x\right)^{\frac{n-1}{2}}dx = \frac{2n}{n+1}\left.\frac{\left(1+(|1+e^{i\varphi}|^2-1)x\right)^{\frac{n+1}{2}}}{|1+e^{i\varphi}|^2-1}\right|_t^1 <$$

$$< 2\frac{|1+e^{i\varphi}|^{n+1}-\left(|1+e^{i\varphi}|^2t+1-t\right)^{\frac{n+1}{2}}}{|1+e^{i\varphi}|^2-1} <$$

$$< 2\frac{|1+e^{i\varphi}|^n(1-t^{\frac{n+1}{2}})}{|1+e^{i\varphi}|-1}, \ \forall t\in(0,1),\ \varphi : |1+e^{i\varphi}|>1 \tag{19}$$

і

$$\left|J^\beta(1+e^{i\varphi})^n\right| < \frac{2}{\ln^\beta 2}\frac{|1+e^{i\varphi}|^n\ln^\beta\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}{|1+e^{i\varphi}|-1}, \quad \forall\varphi : |1+e^{i\varphi}|>1. \tag{20}$$

Залишається розв'язати елементарну нерівність

$$|1+e^{i\varphi}|^2 = \left|e^{-i\varphi/2}+e^{i\varphi/2}\right|^2 = 4\cos^2\varphi/2 > 1 \ \Leftrightarrow\ \varphi\in(-2\pi/3, 2\pi/3)$$

і перейти до оцінки міри $\mathcal{M}\left(J^{\beta}(1+z)^{n}\right)$.

Опорними для подальшого стануть нерівності (18) та (20). За означенням міри,

$$\mathcal{M}\left(J^{\beta}(1+z)^{n}\right)=\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|J^{\beta}(1+e^{i\varphi})^{n}\right|d\varphi\right)<$$

$$<\frac{\left(2\ln^{\beta}(n+1)\right)^{\frac{2}{3}}}{\ln^{(\beta-1)/3}2}\exp\left(\frac{n}{\pi}\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}}\ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\ln\left|1-2\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi\right)<$$

$$<3,1(1,4)^{n}\ln^{2\beta/3}(n+1).$$

Теорема доведена.

Зауваження. *Питання про точність отриманої оцінки міри дробово-логарифмічної похідної полінома* $(1+z)^{n}$, *яка і визначає коефіцієнт* $A(n,\beta)$ *теореми, доки залишається без відповіді. Зазначимо, що нерівності* (17) *та* (19) *дозволяють оцінити міру поліномів* $(1+z)^{n}-(1+tz)^{n}$ *для будь-якого* $t\in(0,1)$. *А саме,*

$$\mathcal{M}\left((1+z)^{n}-(1+tz)^{n}\right)=\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|(1+e^{i\varphi})^{n}-(1+te^{i\varphi})^{n}\right|d\varphi\right)<$$

$$<3,6(1-t^{n})^{\frac{2}{3}}(1-t)^{1/3}(1,4)^{n}<3,6(1-t^{n})(1,4)^{n}. \tag{21}$$

Оцінка (21) *стане у пригоді в подальших дослідженнях. Міри поліномів* $(1+z)^{n}-(1+tz)^{n}$ *визначають, наприклад, коефіцієнт в обернених нерівностях, коли міру приросту полінома вздовж радіуса одиничного кола оцінюють мірою його похідної (див. [11]).*

Висновки

Оцінка мір поліномів у випадку, коли нулі поліномів невідомі, складає певні труднощі. У статті за допомогою інтегрального зображення дробово-логарифмічної похідної алгебраїчного полінома отримано аналог нерівності Малера у просторі L_0. Дослідження продовжують тематику роботи [10].

Список літератури

1. **Mahler K.** On the zeros of the derivative of a polinomial/K. Mahler// Proc. Roy. Soc. London Ser. A. - 1961. - V. 264. №1317. - P. 145-154.

2. **Харди Г., Литлвуд Д., Полиа Г.** Неравенства / Г. Харди , Д. Литлвуд , Г. Полиа. - М.: ИЛ, 1948. - 456 с.

3. **Полиа Г.** Задачи и теоремы из анализа/ Г. Полиа, Г. Сеге. Т. I – М.: Наука, 1978. – 391 с.

4. **De Bruijn N. J., Springer T. A.** On the zeros of compasition polynomials/ N. J. De Bruijn, T. A. Springer // Jndag. Math. - 1947, V. 9. - P. 406-414.

5. **Полиа Г.** Задачи и теоремы из анализа/ Г. Полиа, Г. Сеге. Т. II– М.: Наука, 1978. – 431 с.

6. **Арестов В. В.** Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности / В. В. Арестов // Матем. заметки. - 1990. - Т. 48, № 4. - С. 7-18.

7. **Самко С. Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения/ С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск.: Наука и техника, 1987. – 688 с.

8. **Стороженко Э. А., Коваленко Л. Г.** О дробном интегродифференцировании комплексных полиномов в L_0/ Э. А. Стороженко, Л. Г. Коваленко // Укр. мат. журн. - 2017. - Т. 69, №5. - С. 705-710.

9. **Стороженко Э. А.** К одной задаче Малера о нулях полинома и его производной / Э. А. Стороженко // Матем. сборник. - 1996. - Т. 187, № 5. - С. 111-120.

10. **Стороженко Э. А., Коваленко Л. Г.** Неравенство типа Бернштейна для дробно-логарифмических производных полиномов в L_0/ Э. А. Стороженко, Л. Г. Коваленко // Дослідження в математиці і механіці. - 2015. - Т. 20, вип. 2(26). - С. 43-51.

11. **Storoženko E., Saprikin S.** On some analogs of converse Bernstein inequalities on L_0/ E. Storoženko, S. Saprikin // Functiones et approximatio XXV, Adam Mickiewicz University Pres. - 1997. - P. 111-119. ISBN 83-232-0844-1, ISSN 0208-6573.

Kovalenko L. G.

Analogues of Mahler's inequality for fractional logarithmic derivatives of algebraic polynomials in the space L_0

Summary

Fractional derivatives are widely studied and used in modeling many processes. This leads to the appearance of various generalizations of the concept of a fractional derivative for different classes of functions. Studies of solutions of integral equations with power-log kernels, as well as problems related to Fourier series of measurable functions, led to the concept of fractional power-log derivatives. In addition to power factors, logarithmic ones also appear in the definitions. The article studies fractional purely logarithmic (without power factors) derivatives of algebraic polynomials in the space L_0. Analogues of Mahler's inequality for fractional logarithmic derivatives of algebraic polynomials in the space L_0 are established. Integral representations of the coefficients of the fractional logarithmic derivative are obtained, and the fractional logarithmic derivative of the algebraic polynomial is represented as an integral.

Keywords: Mahler's measure of a polynomial, Mahler's inequality, a fractional logarithmic derivative, an algebraic polynomial, the composition Sege.

References

1. Mahler K. (1961). On the zeros of the derivative of a polinomial. Proc. Roy. Soc. London Ser. A., V. 264, №1317, P. 145-154.
2. Hardy, G., Littelwood D., Polia, G. (1948). *Neravenstva* M.: IL, 456 p.
3. Polia, G., Sege, G. (1978). *Zadachi i teoremy iz analiza [Problems and theorems from calculus], Vol I.* M: Nauka, 391 p.
4. De Bruijn, N. J., Springer, T. A. (1947). On the zeros of compasition polynomials. Jndag. Math., Vol. 9, P. 406-414.
5. Polia, G., Sege, G. (1978). *Zadachi i teoremy iz analiza [Problems and theorems from calculus], Vol II.* M: Nauka, 431 p.
6. Arestov, V. V. (1990). Integralnie neravenstva dlya algebraicheskikh mnogochlenov na edinichnoj okruzhnosti [Integral inequalities for algebraic polynomials on the unit circle]. Matem. zametki.,Vol. 48, № 4, P. 7-18.
7. Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. (1987). *Integraly i proizvodnye drobnoho poryadka i nekotorye ih prilozheniya [Fractional integrals and derivatives with some applications].* Minsk: Nauka i tekhnika, 688 p.

8. Storozhenko, E. A., Kovalenko, L. G. (2017). O drobnom integrodiferenzirivanie kompleksnykh polinomov v L_0 [On fractional integrodifferentiation of complex polynomials in space L_0]. Matem. zapiski, Vol. 96, №5.– P. 705–710.

9. Storozhenko, E. A. (1996). K odnoi zadache Malera o nulyakh polinoma i ego proi zvodnoy [For one Mahler's prooblem about zeros of polinomial and its derivative]. Matem. sbornik, Vol. 187, №5, P. 111–120.

10. Storozhenko, E. A., Kovalenko, L. G. (2015). Neravenstvo tipa Bernstiena dla drobno-logarifmicheskich proizvodnih polinomov v prostranstvah L_0 [Bernstein type inequalities for fractional logarithmic derivatives of polynomials in space L_0]. Visnyk Odes'kogo Natzional'nogo universitetu. Researches in Mathematics and Mechanics, Vol. 2, №2(26).– P. 43–51.

11. Storozhenko E., Saprikin S. (1997). On some analogs of converse Bernstein inequalities on L_0. Functiones et approximatio XXV, Adam Mickiewicz University Pres. P. 111-119. ISBN 83-232-0844-1, ISSN 0208-6573.

Дослідження в математиці і механіці. – 2025. – Т. 30, вип. 2(46). – С. 18–30

УДК 517.764

І. М. Курбатова, *кандидат фіз.-мат. наук, доцент*
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
e-mail: irina.kurbatova27@gmail.com
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0215-6060

F-ПЛАНАРНІ ВІДОБРАЖЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ МАЙЖЕ КОМПЛЕКСНИХ ПРОСТОРІВ

Розглядаються деякі питання теорії F-планарних відображень многовидів, які наділені афінорною структурою певного типу. В теорії майже комплексних многовидів такі простори називають квазі-келеровими. Вони містять в собі відомі класи майже комплексних многовидів, таких як келерові, K-, H-простори. Розглянуто деякі властивості квазі-келерових просторів. Далі досліджуються їх F-планарні відображення. Доведено, що не існує нетривіальних геодезичних і канонічних F-планарних відображень між двома квазі-келеровими просторами. Побудовано низку геометричних об'єктів, інваріантних відносно F-планарних відображень основного типу.

Знайдено структуру тензора Рімана, яка є необхідною для того, щоб квазі-келеровий простір допускав F-планарне відображення на плоский рімановий простір, тобто був F-плоским.
MSC: 57R30.
Ключові слова: рімановий простір, тензор Рімана, тензор Річчі, майже комплексна структура, келеровий простір, квазі-келеровий простір, F-планарне відображення.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.2(46).354145

1. Вступ

Ми розглядаємо F-планарні відображення многовидів, що наділені деякою афінорною спеціальною структурою ([2; 5; 6]). Цей тип дифеоморфізмів ввели в розгляд М.С.Синюков і Й.Мікеш ([3; 6]) як одне з узагальнень геодезичних відображень ріманових просторів та голоморфно-проективних відображень келерових просторів.

Розглянемо простір афінної зв'язності без скруту A_n, віднесений до системи координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$, в якому визначена афінорна структура

Надійшла 10.10.2025 © Курбатова І. М., 2025

$F_i^h(x) \neq a\delta_i^h$, де δ_i^h- символи Кронекра, а- деякий інваріант.

Крива L, визначена рівняннями

$$x^h = x^h(t),$$
$$\lambda^h(t) = \frac{dx^h}{dt},$$

де t- параметр, називається F*-планарною*, якщо вздовж неї виконуються диференціальні рівняння

$$\lambda^h_{,\alpha}\lambda^\alpha = \rho_1\lambda^h + \rho_2 F^h_\alpha \lambda^\alpha.$$

Тут ρ_1, ρ_2- деякі (довільні) функції параметра t, комою позначається коваріантна похідна за зв'язністю A_n.

F-планарні криві містять в собі такі характерні класи кривих, як геодезичні лінії ріманових просторів ([1]) і голоморфно-проективні криві келерових просторів ([4]).

Нехай $(A_n, \Gamma^h_{ij}, F^h_i)$, $(\overline{A}_n, \overline{\Gamma}^h_{ij}, \overline{F}^h_i)$ - два простори афінної зв'язності з афінорними структурами F^h_{ij}, $\overline{F}^h_i$ і об'єктами афінної зв'язності Γ^h_{ij}, $\overline{\Gamma}^h_{ij}$, відповідно.

Відображення

$$(A_n, \Gamma^h_{ij}, F^h_i) \longrightarrow (\overline{A}_n, \overline{\Gamma}^h_{ij}, \overline{F}^h_i)$$

називається F*-планарним*, якщо в результаті його будь-яка F– планарна крива A_n переходить в $\overline{F}$ - планарну криву $\overline{A_n}$.

Говорять, що F- планарне відображення $f : A_n \longrightarrow \overline{A}_n$ *зберігає структуру*, якщо у загальній відносно відображення системі координат (x)

$$F^h_i(x) = \overline{F}^h_i(x)$$

.

В ([3]) доведено, що за умови $n > 3$ в загальній за відображенням системі координат (x^i) основні рівняння F-планарного відображення мають вигляд

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \psi_{(i}\delta^h_{j)} + \phi_{(i}F^h_{j)}, \tag{1}$$

$$F^h_i(x) = \overline{F}^h_i(x), \tag{2}$$

де ψ_i, ϕ_i - деякі ковектори; дужками позначена операція симетрування по відповідних індексах.

Далі ми розглядаємо F-планарні відображення ріманових просторів з майже комплексною структурою спеціального типу.

Дослідження проводяться в тензорній формі, локально, в класі достатньо гладких функцій.

Основні результати

2. F-планарні відображення квазі-келерових просторів

1°. Домовимось операцію згортання з афінором позначати таким чином:

$$A^{\cdots}_{\bar{i}\ldots} = A^{\cdots}_{\alpha\ldots} F^{\alpha}_{i}, \qquad A^{\bar{i}\ldots}_{\ldots} A^{\alpha\ldots}_{\ldots} F^{i}_{\alpha}$$

і називати *сполученням* по відповідному індексу. До речі вважаємо, що

$$A^{h}_{\bar{i},j} = A^{h}_{\alpha,j} F^{\alpha}_{i},$$

тобто сполучення проводиться після коваріантного диференціювання.

2°. Розглянемо ріманoвий простір (V_n, g_{ij}, F^h_i) з метричним тензором g_{ij} і афінорною структурою F^h_i.

За умови

$$F^h_\alpha F^\alpha_i = -\delta^h_i \tag{3}$$

структура називається *майже комплексною*, а при

$$g_{i\alpha} F^\alpha_j = -g_{j\alpha} F^\alpha_i \tag{4}$$

майже ермітовою. Якщо майже ермітова структура задовольняє умови

$$F^h_{i,j} = -F^h_{\alpha,\beta} F^\alpha_i F^\beta_j, \tag{5}$$

вона називається *квазі-келеровою*, а ріманoвий простір V_n з такою структурою - *квазі-келеровим*.

Легко довести, що квазі-келеровий простір з інтегровною структурою є келеровим. Дійсно, як відомо одним з критеріїв інтегровності афінорної структури F^h_i є рівність нулю її тензора Нейєнхейса ([1]):

$$N^h_{ij} = F^h_{\bar{i},j} - F^h_{j,\bar{i}} - F^h_{\bar{j},i} + F^h_{i,\bar{j}} = 0.$$

Після сполучення з афінором по індексу j і опускання індекса h в V_n з урахуванням (3)-(5) звідси отримуємо:

$$F_{hi,j} - F_{hj,i} = 0,$$

де

$$F_{hi} = g_{h\alpha} F_i^\alpha.$$

Порівнюючи цю рівність з результатом її циклюювання по індесах h, i, j, знаходимо

$$F_{hi,j} = 0,$$

а отже і

$$F_{i,j}^h = 0,$$

тобто наша афінорна структура - келерова.

Очевидно, що для келерової структури $N_{ij}^h = 0$.

Має місце

Теорема 1. *Квазі-келерова структура є інтегровною тоді і тільки тоді, коли вона келерова.*

Зауважимо також, що з (5) витікає $F_{i.\alpha}^\alpha = 0$. Структура, що задавольняє цю умову разом з (3),(4), називається *майже аптовою.*

3°. Розглянемо квазі-келерові простори (V_n, g_{ij}, F_i^h) і $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$. В загальній за відображенням системі координат (x^i) F-планарне відображення

$$(V_n, g_{ij}, F_i^h) \longrightarrow (\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h),$$

характеризується основними рівняннями:

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}\delta_{j)}^h + \phi_{(i}F_{j)}^h,$$

$$F_i^h(x) = \overline{F}_i^h(x),$$

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = -\delta_i^h,$$

$$F_{ij} = -F_{ji}, \qquad \overline{F}_{ij} = -\overline{F}_{ji}, \tag{6}$$

$$F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^\alpha = g_{i\bar{j}}, \qquad \overline{F}_{ij} = \overline{g}_{i\alpha} F_j^\alpha = \overline{g}_{i\bar{j}},$$

$$F_{i,j}^h = -F_{\alpha,\beta}^h F_i^\alpha F_j^\beta, \qquad F_{i|j}^h = -F_{\alpha|\beta}^h F_i^\alpha F_j^\beta, \tag{7}$$

де $\Gamma^h_{ij}, \overline{\Gamma}^h_{ij}$ символи Кристофеля $V_n, \overline{V}_n$, відповідно; $\psi_i(x)$, $\phi_i(x)$ - деякі ковектори; дужками (i, j) позначено операцію симетрування ; кома «,» і вертикальна риска «|» - знаки коваріантної похідної відносно зв'язності V_n і $\overline{V}_n$, відповідно.

F-планарне відображення вважається тривіальним, якщо $\psi_i = \phi_i = 0$. Тому нетривіальні F-планарні відображення (V_n, g_{ij}, F^h_i) на $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}^h_i)$ з основними рівняннями (1) можуть бути такими:

$$I \quad \psi_i = 0, \quad \phi_i \neq 0;$$

$$II \quad \psi_i \neq 0, \quad \phi_i = 0;$$

$$III \quad \psi_i \neq 0, \quad \phi_i \neq 0.$$

У випадку I F-планарне відображення називають *канонічним;* у випадку II воно є геодезичним відображенням ([1; 6]); відображення III називають *F-планарними основного типу.*

Запишемо зв'зок між коваріантними похідними афінора в просторах V_n і $\overline{V}_n$, використовуючи (1):

$$F^h_{i|j} = F^h_{i,j} + \delta^h_j(\psi_{\bar{i}} + \phi_i) - F^h_j(\psi_i - \phi_{\bar{i}}).$$

Враховуючи те, що будь-який квазі-келеровий простір є майже аптовим, після згортання останньої рівності по індексах h, j маємо:

$$\psi_{\bar{i}} = -\phi_i, \qquad \phi_{\bar{i}} = \psi_i \tag{8}$$

Звідси очевидно, що у випадку F-планарних відображень квазі-келерових просторів і I, і II приводять нас до тривіального відображення. Отже має місце

Теорема 2. *Квазі-келерові простори не допускають нетривіальних геодезичних і канонічних F-планарних відображень.*

Зауважимо, що (8) слід додати до основних рівнянь F-планарних відображень квазі-келерових просторів.

Більш того, за умови (8) з рівнянь (1) маємо:

$$\psi_i = \frac{1}{n+2}\left(\overline{\Gamma}^\alpha_{i\alpha} - \Gamma^\alpha_{i\alpha}\right). \tag{9}$$

Це свідчить про те, що вектор ψ_i є градієнтним, тобто існує інваріант $\psi(x)$ такий, що

$$\psi_i = \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^i}.$$

3. Геометричні об'єкти, інваріантні відносно F-планарних відображень квазі-келерових просторів

1°. Нехай квазі-келерові простори (V_n, g_{ij}, F_i^h) і $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$ знаходяться в F-планарному відображенні. Тоді мають місце співвідношення (1), в яких вектор ψ_i має вигляд (9). Підставимо вираз ψ_i в співвідношення (1), після чого представимо їх таким чином:

$$\overset{1}{T}{}^h_{ij} = \overset{1}{\overline{T}}{}^h_{ij},$$

$$\overset{1}{T}{}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \frac{1}{n+2}\left(\Gamma^\alpha_{\alpha(i}\delta^h_{j)} - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}F^\beta_{(i}F^h_{j)}\right). \tag{10}$$

Компоненти $\overset{1}{\overline{T}}{}^h_{ij}$ мають в $\overline{V}_n$ аналогічний вигляд.

$\overset{1}{T}{}^h_{ij}$ - нетензорний геометричний об'єкт, інваріантний відносно F-планарних відображень квазі-келерових просторів (типу параметрів Томаса в теорії геодезичних відображень ріманових просторів). Його збереження при деякому дифеоморфізмі квазі-келерових просторів є необхідною і достатньою умовою того, щоб він був F-планарним відображенням.

З огляду на (8) з (1) також очевидно, що

$$\overset{2}{T}{}^h_{ij} = \overset{2}{\overline{T}}{}^h_{ij},$$

$$\overset{2}{T}{}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \Gamma^{\overline{h}}_{\overline{ij}}. \tag{11}$$

Компоненти $\overset{2}{\overline{T}}{}^h_{ij}$ мають в $\overline{V}_n$ аналогічний вигляд.

$\overset{2}{T}{}^h_{ij}$ - нетензорний геометричний об'єкт, інваріантний відносно F-планарних відображень квазі-келерових просторів . Його збереження при деякому дифеоморфізмі квазі-келерових просторів є лише необхідною умовою того, щоб він був F-планарним відображенням.

2°. Далі знайдемо залежність між компонентами тензорів Рімана просторів V_n і $\overline{V}_n$, використовуючи відому формулу:

$$\overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + P^h_{ik,j} - P^h_{ij,k} + P^\alpha_{ik}P^h_{\alpha j} - P^\alpha_{ij}P^h_{\alpha k},$$

де P^h_{ij} - тензор деформації зв'язності. В нашому випадку

$$P^h_{ij} = \psi_{(i}\delta^h_{j)} + \phi_{(i}F^h_{j)}.$$

Отже з огляду на (3), (8) і градієнтність вектора ψ_i залежність між компонентами тензорів Рімана просторів V_n, $\overline{V}_n$ представляємо у вигляді:

$$\begin{aligned} \overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \psi_{ij}\delta^h_k - \psi_{ik}\delta^h_j - \\ -\big(\psi_{\bar{i}j} + \psi_\alpha F^\alpha_{i,j}\big)F^h_k + \big(\psi_{\bar{i}k} + \psi_\alpha F^\alpha_{i,k}\big)F^h_j + \\ +\big(\psi_{\bar{j}k} - \psi_{\bar{k}j} + \psi_\alpha F^\alpha_{j,k} - \psi_\alpha F^\alpha_{k,j}\big)F^h_i + \\ +\psi_{\bar{i}}\big(F^h_{j,k} - F^h_{k,j}\big) + \psi_{\bar{j}}F^h_{i,k} - \psi_{\bar{k}}F^h_{i,j}, \end{aligned} \tag{12}$$

де

$$\psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i\psi_j + \psi_{\bar{i}}\psi_{\bar{j}}.$$

З огляду на симетричність тензора ψ_{ij} залежність між компонентами тензорів Річчі просторів V_n і $\overline{V}n$ приймає вигляд:

$$\overline{R}_{ij} = R_{ij} + n\psi_{ij} + 2\psi_{\overline{i}\overline{j}} + \psi_\alpha\big(F^\alpha_{\bar{i},j} + F^\alpha_{j,\bar{i}}\big).$$

Звідси з урахуванням (3) і (5) витікає:

$$\overline{R}_{ij} + \overline{R}_{\overline{i}\overline{j}} = R_{ij} + R_{\overline{i}\overline{j}} + (n+2)\big(\psi_{ij} + \psi_{\overline{i}\overline{j}}\big).$$

Два останні співвідношення і (9) дають змогу виключити ψ_{ij} і ψ_i з (12) та представити їх наступним чином:

$$\overset{3}{T}{}^h_{ijk} = \overset{3}{\overline{T}}{}^h_{ijk},$$

де

$$
\begin{aligned}
\overset{3}{T}{}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \frac{1}{n^2-4}\Bigg[\delta^h_j\Big(nR_{ik} - 2R_{\bar i\bar k} - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Big(F^\beta_{\bar i,k} + F^\beta_{k,\bar i}\Big)\Big) - \\
-\delta^h_k\Big(nR_{ij} - 2R_{\bar i\bar j} - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Big(F^\beta_{\bar i,j} + F^\beta_{j,\bar i}\Big)\Big) - \\
-F^h_j\Big(nR_{\bar i k} + 2R_{i\bar k} + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Big(F^\alpha_{k,i} + (n-1)F^\alpha_{i,k}\Big)\Big) + \\
+F^h_k\Big(nR_{\bar i j} + 2R_{i\bar j} + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Big(F^\alpha_{j,i} + (n-1)F^\alpha_{i,j}\Big)\Big)\Bigg] + \\
+\frac{1}{n+2}\Bigg[F^h_i\Big(R_{\bar k j} - R_{\bar j k} - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Big(F^\beta_{j,k} - F^\beta_{k,j}\Big)\Big) + \\
+\Gamma^\alpha_{\alpha\bar i}\Big(F^h_{j,k} - F^h_{k,j}\Big) + \Gamma^\alpha_{\alpha\bar k}F^h_{i,j} - \Gamma^\alpha_{\alpha\bar j}F^h_{i,k}\Bigg]
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Компоненти $\overset{3}{\overline{T}}{}^h_{ijk}$ мають в $\overline{V}_n$ аналогічний вигляд.

$\overset{3}{T}{}^h_{ijk}$ - нетензорний геометричний об'єкт, інваріантний відносно F-планарних відображень квазі-келерових просторів . Його збереження при деякому дифеоморфізмі квазі-келерових просторів є лише необхідною умовою того, щоб він був F-планарним відображенням.

3°. Для квазі-келерових просторів диференціальні умови (5) на жаль не дають можливості отримати властивості тензорів Рімана і Річчі такі, як, скажемо, для келерових просторів. Тому побудувати тензорний об'єкт, інварантний відносно F-планарних відображень квазі-келерових просторів за допомогою (12), як це робиться зазвичай, було б важко. Ми оберемо інший спосіб і скористаємось об'єктом $\overset{3}{T}{}^h_{ijk}$. Очевидно, що з

$$\overset{3}{T}{}^h_{ijk} = \overset{3}{\overline{T}}{}^h_{ijk}$$

витікає

$$Q^h_{ijk} = \overline{Q}^h_{ijk},$$

де

$$Q^h_{ijk} = \overset{3}{T}{}^h_{ijk} - \overset{3}{T}{}^{\bar h}_{\bar i jk} + \overset{3}{T}{}^h_{i\bar j\bar k} - \overset{3}{T}{}^{\bar h}_{\bar i\bar j\bar k}. \tag{14}$$

Якщо обчислити компоненти Q^h_{ijk} з урахуванням (13) і(3)-(5), то виявляється, що це тензор типу (1,3):

$$\begin{aligned} Q^h_{ijk} = R^h_{ijk} - R^{\overline{h}}_{\overline{i}jk} + R^h_{i\overline{j}\overline{k}} - R^{\overline{h}}_{\overline{i}\overline{j}\overline{k}} + \\ + \frac{2}{n+2}\Big[\delta^h_j \tilde{R}_{ik} - \delta^h_k \tilde{R}_{ij} - \\ - F^h_j \tilde{R}_{i\overline{k}} + F^h_k \tilde{R}_{i\overline{j}} + F^h_i\big(\tilde{R}_{j\overline{k}} - \tilde{R}_{k\overline{j}}\big)\Big], \end{aligned} \tag{15}$$

де

$$\tilde{R}_{ij} = R_{ij} + R_{\overline{i}\overline{j}}.$$

Отже Q^h_{ijk} - тензорний геометричний об'єкт, інваріантний відносно F-планарних відображень квазі-келерових просторів . Його збереження при деякому дифеоморфізмі квазі-келерових просторів є лише необхідною умовою того, щоб він був F-планарним відображенням.

Q^h_{ijk} є узагальненням тензора голоморфно-проективної кривини, інваріантного відносно аналітично планарних відображень келерових просторів:

$$\begin{aligned} P^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n+2}\Big[\delta^h_j R_{ik} - \delta^h_k R_{ij} - \\ - F^h_j R_{i\overline{k}} + F^h_k R_{i\overline{j}} + 2F^h_i R_{j\overline{k}}\Big], \end{aligned} \tag{16}$$

Отже має місце

Теорема 3. *Геометричні об'єкти квазі-келерового простору, визначені формулами (10), (11), (13), (15), інваріантні відносно F-планарних відображень, що зберігають майже комплексну структуру.*

4°. Будемо називати *F-плоским* квазі-келеровий простір (V_n, g_{ij}, F^h_i), який допускає F-планарне відображення на плоский простір $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}^h_i)$. З огляду на $\overline{R}^h_{ijk} = 0$ і (15) в $\overline{V}_n$ маємо $\overline{Q}^h_{ijk} = 0$, тому в F-плоскому просторі V_n також $Q^h_{ijk} = 0$, тобто

$$\begin{aligned} R^h_{ijk} - R^{\overline{h}}_{\overline{i}jk} + R^h_{i\overline{j}\overline{k}} - R^{\overline{h}}_{\overline{i}\overline{j}\overline{k}} = \frac{-2}{n+2}\Big[\delta^h_j \widetilde{R}_{ik} - \delta^h_k \widetilde{R}_{ij} \\ - F^h_j \widetilde{R}_{i\overline{k}} + F^h_k \widetilde{R}_{i\overline{j}} + F^h_i\big(\widetilde{R}_{j\overline{k}} - \widetilde{R}_{k\overline{j}}\big)\Big]. \end{aligned} \tag{17}$$

Результат згортання останньої рівності по індексах h, k має вигляд:

$$R_{ij} - R^{\alpha}_{\bar{i}j\overline{\alpha}} + R^{\alpha}_{\bar{i}\bar{j}\overline{\alpha}} + R_{\overline{i}\overline{j}} = \frac{2n}{n+2}\tilde{R}_{ij}.$$

В той же час згортаючи (17) з g^{ij} по i, j і опускаючи індекс h в V_n, отримуємо:

$$R_{hk} - R^{\alpha}_{\overline{h}k\overline{\alpha}} + R^{\alpha}_{\overline{h}\overline{k}\overline{\alpha}} + R_{\overline{h}\overline{j}} = \frac{4R}{n+2}g_{hk},$$

де R - скалярна кривина V_n.

Порівнюючи два останні співвідношення, знаходимо:

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{2R}{n}g_{ij}.$$

Отже (17) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} R^{h}_{ijk} - R^{\overline{h}}_{\overline{i}jk} + R^{h}_{\overline{i}\overline{j}k} - R^{\overline{h}}_{\overline{i}\overline{j}k} = \frac{4R}{n(n+2)}\Big[\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik} - \\ - F^h_j F_{ik} + F^h_k F_{ij} + 2F^h_i F_{kj}\Big]. \end{aligned} \tag{18}$$

Будемо називати квазі-келерові простори, тензор Рімана яких задовольняє умови (18), *узагальнено F-плоскими*. Підсумовуючи результати останнього пункту, доходимо висновку, що справедливі

Теорема 4. *Для того, щоб квазі-келеровий простір (V_n, g_{ij}, F^h_i) допускав F-планарне відображення на плоский простір, необхідно, щоб в ньому тензор Рімана задовольняв умови (18).*

Теорема 5. *Клас узагальнено F-плоских квазі-келерових просторів (V_n, g_{ij}, F^h_i)є замкнутим відностно F-планарних відображень.*

Легко довести, що відомі в теорії аналітично-планарних відображень майже комплексних многовидів *голоморфно-плоскі простори*, тензор Рімана яких характеризується властивістю:

$$R^h_{ijk} = \frac{R}{n(n+2)}\Big[\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_k g_{ij} - F^h_j F_{ik} + F^h_k F_{ij} + 2F^h_i F_{jk}\Big],$$

будуть також і узагальнено F-плоскими, але не навпаки.

Висновки

Ми розглядали деякі питання теорії F-планарних відображень многовидів, які наділені афінорною структурою певного типу і в теорії майже комплексних многовидів називають квазі-келеровими. Вони містять в собі відомі класи майже комплексних многовидів, таких як келерові, K-, H-простори.

Розглянуто деякі властивості квазі-келерових просторів.

Доведено,що квазі-келерова структура є інтегровною тоді і тільки тоді, коли вона - келерова.

Також доведено, що будь-який квазі-келеровий простір є майже аптовим. Тому не існує нетривіальних геодезичних і канонічних F-планарних відображень між двома квазі-келеровими просторами, а вектори, що беруть участь в основних рівняннях F-планарних відображень, між собою пов'язані.

Побудовано низку геометричних об'єктів, інваріантних відносно F-планарних відображень основного типу.

Знайдено структуру тензора Рімана, яка є необхідною для того, щоб квазі-келеровий простір допускав F-планарне відображення на плоский рімановий простір, тобто був F-плоским.

Доведено, що клас F-плоских квазі-келерових просторів є замкненим відносно F-планарних відображень.

Список літератури

1. **Синюков Н.С.** Геодезичекие отображения римановых пространств / Н.С.Синюков – М.: Наука, 1979. – 255 с.
2. **Широков А.П.** Структуры на дифференцируемых многообразиях / А.П.Широков //Итоги науки.Сер. Мат. Алгебра. Топол. Геом. 1967 – 1969. – С. 127–188.
3. **Микеш Й.** О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности/ Й.Микеш, Н.С.Синюков // Sov. Math.– 1983. – Т. 27, № 1. – С. 63–70.
4. **Otsuki T.** On curves in Kahlerian spaces/T.Otsuki, Y.Tashiro // Math. J. Okayama Univ.–1954.–vol. 4, –P. 57-78.
5. **Grey A.** The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariant / A.Grey, L.M.Hervella. – Annali di Matematica pura ed applicate (IV). - Vol.CXXIII. – 1980. – pp.35-58.

6. **Mikes J.** Differential Geometry of Special Mappings / J. Mikes, E.Stepanova, A.Vanzurova. – Palacky Univ. Press: Olomouc, Czech Republic, 2019. – 320 p.

Kurbatova I. M.

F-PLANAR MAPPINGS OF SPECIAL ALMOST COMPLEX SPACES

Summary

Some questions of the theory of F-planar mappings of manifolds endowed with an affine structure of a certain type are considered. In the theory of almost complex manifolds, such spaces are called quasi-Kahlerian spaces. They contain well-known classes of almost complex manifolds, such as Kahlerian, K-, H-spaces. Some properties of quasi-Kahlerian spaces are considered. Next, their F-planar mappings are investigated. It is proved that there are no nontrivial geodesic and canonical F-planar mappings between two quasi-Kahlerian spaces. A number of geometric objects invariant with respect to F-planar mappings of the basic type are constructed. The structure of the Riemannian tensor is found, which is necessary for a quasi-Kahlerian space to admit an F-planar mapping onto a flat Riemannian space, i.e., to be F-flat.
Keywords: Riemannian space, Riemannian tensor, Ricci tensor, almost complex structure, Kahlerian space, quasi-Kahlerian space, F-planar mapping.

REFERENCES

1. Sinyukov N.S. (1979). *Geodesicheskiye otobrazheniya rimanovikh prostranstv [Geodesic mappings of Riemannian spaces].* M.: Nauka,, 255 p.
2. Shirokov, A.P. (1969). Structures on differentiable manifolds [Struktury na differehtsiruyemykh mnogoobraziyakh] *Itogi nauki. Ser. Mat. Algebra. Topol. Geom. 1967* , P. 127–188.
3. Mikes, J., Sinyukov, N.S. (1983). O quasi-planarnykh otobrazheniyakh prostranstv affinnoy svyaznosty [On quasiplanar mappings of spaces of affine connection]. *Sov.Math.*, Vol. 27, №1. – P. 63–70.
4. Otsuki T., Tashiro Y. (1954) On curves in Kahlerian spaces. *Math. J. Okayama Univ.*,vol. 4,–1954.–p.p. 57-78.
5. Grey,A., Hervella,L.M. (1980) The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariant. *Annali di Matematica pura ed applicate (IV)*, Vol.CXXIII. - 1980. – pp.35-58.
6. Mikes,J., Stepanova,E., Vanzurova,A., (2019). *Differential Geometry of Special Mappings* Palacky Univ. Press: Olomouc, Czech Republic– 320 p.

Дослідження в математиці і механіці. – 2025. – Т. 30, вип. 2(46). – С. 31–47

УДК 519.83:519.217.2

С. В. Мартинюк, *кандидат фіз.-мат. наук, асистент*
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
кафедри алгебри та інформатики
вул. Коцюбинського, 2, м. Чернівці, 58012, Україна
e-mail: s.martyniuk@chnu.edu.ua
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0009-5118-0658
В. І. Цуркан, *аспірант*
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
кафедри алгебри та інформатики
вул. Коцюбинського, 2, м. Чернівці, 58012, Україна
e-mail: tsurkan.viacheslav.i@chnu.edu.ua
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0005-4025-4392

ПОБУДОВА СТОХАСТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДИНАМІЧНОЇ КООПЕРАТИВНОЇ ГРИ З ВИКОРИСТАННЯМ МАТРИЦЬ РЕЗУЛЬТАТУ

З розвитком обчислювальних ресурсів, ШІ, відбувається розширення використання теорії ігор в соціології, економіці та інших прикладних науках. Це дозволяє обробляти великі об'єми інформації, будувати математичні моделі та знаходити оптимальні стратегії для різноманітних задач та різних рівнів їх складності. Військова сфера, організація всіх рівнів безпеки, включаючи кіберпростір, використовують концепції теорії ігор. Гра передбачає дії двох або більше раціональних гравців чи команд, що мають певну стратегію і змагаються за певну винагороду. Теорія ігор забезпечує побудову оптимальної стратегії для таких ігор. Крім того, теоретико-ігрові підходи можна поширити на розробку алгоритмів, які дозволяють розробникам систем передбачати результати ігор на користь групи гравців, використовуючи складні ігрові конструкції. У даній статті продовжується дослідження теорії ігор в розділі дискретних динамічних кооперативних ігор. Група гравців виконуючи послідовно дії прагнуть досягнути максимального результату за обмежену кількість кроків. Використання зібраних статистичних даних та сформованих по них матриць результату, дає змогу на практичному рівні розглянути оптимальні стратегії. В роботі запропоновано узагальнення матриць результату, як інструменту формування початкових стохастичних даних для динамічної кооперативної гри, побудовано Марківську модель переходів між станами гри та сформульовано алгоритм визначення оптимальної стратегії.
MSC: 91A06, 91A12, 91A25, 60J10, 60J85, 05B20, 37M05, 03H05.

Надійшла 21.11.2025 © Мартинюк С. В., Цуркан В. І., 2025

Ключові слова: теорія ігор, статистика, система прийняття, рішення, модель Маркова, матриця результату, моделювання, машинне навчання.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.2(46).354146

Вступ

У сучасних умовах високої конкуренції та швидких змін ринкового середовища дискретні динамічні кооперативні ігри стають надзвичайно важливим інструментом для моделювання стратегічної поведінки компаній та груп у бізнес-середовищі. У реальному бізнесі рішення часто приймаються не неперервно, а через певні проміжки часу (наприклад, щокварталу визначаються бюджети, раз на рік — стратегічні плани). Дискретний підхід дозволяє чітко моделювати послідовні етапи прийняття рішень. Динамічність ринкового середовища характеризується швидкими змінами технологій, законодавства, появою нових конкурентів. Динамічні ігри дозволяють враховувати зміни стану системи від етапу до етапу і передбачати їхній вплив на стратегії гравців. У корпоративному середовищі важливо враховувати наслідки дій у довгостроковій перспективі, а не тільки миттєву вигоду, тому з допомогою дискретних динамічних ігор можна моделювати ситуації, коли теперішні рішення впливають на майбутні можливості. Крім того, сучасні компанії мають доступ до значних обсягів статистичної інформації (Big Data), яка дозволяє створювати більш реалістичні динамічні моделі, а застосування теорії ігор допомагає оптимізувати рішення на основі аналізу накопичених даних. Ігрові моделі допомагають компаніям будувати адаптивні стратегії в умовах невизначеності, коли поведінка конкурентів або зовнішніх факторів непередбачувана. Дискретні динамічні ігри знаходять застосування в економіці, фінансах, кібербезпеці, енергетиці, логістиці, розвитку IT-рішень, в системах прийняття рішень.

Динамічна дискретна кооперативна гра є моделлю в теорії ігор, яка використовується для аналізу стратегічної взаємодії між компаніями або підрозділами всередині організації. У цій моделі час розглядається як дискретний, тобто поділений на окремі періоди (наприклад, квартали або роки), а учасники приймають рішення на кожному з цих етапів, враховуючи як поточну ситуацію, так і можливі майбутні наслідки своїх дій.

Розглянемо характеристики динамічних дискретних кооперативних ігор такі як: *дискретність часу, багатоетапність та стратегічна взаємодія.*

Дискретність часу означає, що рішення гравцями приймаються в окремі моменти часу, що дозволяє моделювати послідовність стратегічних кроків. Дії розділені проміжками часу, а результати дій накопичуються або змінюються крок за кроком. Це дає змогу структурувати гру, легко моделювати стратегії та передбачати наслідки дій. Полегшує застосування математичних методів, таких як динамічне програмування, Марковські процеси, теорія оптимізації. Відповідає реальним сценаріям, де рішення приймаються не неперервно, а періодично (наприклад, щоденні торги на біржі, поетапні переговори, хід за ходом у грі).

Багатоетапність (або багатокроковість) - учасники гри послідовно приймають рішення на кількох етапах, і результати їхніх рішень впливають на подальший хід гри. На кожному етапі гравці можуть змінювати свої стратегії, адаптуватися до нових обставин і враховувати, як власні минулі рішення, так і дії інших гравців та суперників. При цьому гра розбита на певну кількість етапів або ходів, рішення на кожному етапі залежать від поточного стану гри та історії попередніх кроків. Мета таких ігор оптимізувати сумарний виграш або досягти певного результату до кінця гри, а гравці мають враховувати не тільки поточний виграш, але й майбутні наслідки своїх дій. Розглядають два типи багатоетапних ігор: з фіксованою кількістю етапів (*скінченна гра*), коли гравці знають, скільки всього буде ходів, та з нескінченною кількістю етапів (*нескінченна або стохастична гра*), коли гра триває без кінця або з певною ймовірністю закінчення на кожному етапі.

У кооперативних іграх, які моделюють діяльність компаній або груп у бізнес-середовищі, *стратегічна взаємодія* означає процес прийняття рішень кількома учасниками (компаніями, підрозділами, групами), де кожен учасник враховує не лише власні цілі, але й поведінку конкурентів, партнерів чи клієнтів. Виграш одного гравця залежить не тільки від його дій, а й від дій інших гравців. Тому кожен учасник намагається передбачити, як інші відреагують на його стратегію, і коригує свою поведінку відповідно. Гравці можуть або конкурувати (наприклад, за частку ринку), або співпрацювати (наприклад, створювати альянси). Для таких ігор важливо формалізувати гравців, а саме визначити хто є учасниками гри, опис стратегій, які доступні кожному гравцю, пошук стану рівноваги, де жоден з гравців не має стимулу змінювати свою стратегію односторонньо (наприклад, рівновага Неша). Серед особливостей кооперативних ігор слід зазначити важливу роль інформації (повна, неповна, асиметрична), довгострокові наслідки рішень, часте виникнення змішаних стратегій (планування дій з певними ймовірностями) та можливі коаліції або колаборації між гравцями. Отже, *стратегічна взаємодія* в кооперативних іграх — це процес, коли компанії чи групи приймають рішення, враховуючи можливі дії конкурентів і партнерів, для максимізації власного виграшу в умовах взаємозалежності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Останні дослідження в галузі теорії ігор демонструють її ефективність у вирішенні різноманітних корпоративних задач.

Основні положення теорії ігор заклали Е. Борель, А. Курно, Ж. Бертран, Дж. Нейман, О. Моргенштерн, Дж. Харшані, Р. Зельтен, Т. Шеллінг, Р. Ауман. Вагомий внесок у її розроблення зробили В. В. Вітлінський, В. М. Альгін, Т. Бойдель, Є. С. Вентцель, Е. Й. Вілкас, О. П. Гранатуров, С. І. Наконечний, В. А. Соколов та інші. Проте саме завдяки Дж. Нейману відбулося остаточне становлення цієї теорії ("До теорії стратегічних ігор", 1928)[1]. Йому вдалося математично обґрунтувати загальну стратегію для гри двох учасників в умовах мінімізації та максимізації. Книга Дж. Неймана та О. Моргенштерна "Теорія ігор і економічна поведінка"[2] демонструють можливість застосування теорії ігор для певної кількості учасників, що уможливило її застосування в економіці для моделювання поведінки підприємств у конкурентному середовищі, тобто формування і вибору стратегії розвитку підприємств. Особливо важлива запропонована у цій книзі стратегія "мінімакс", або мінімізація максимальних втрат. Така стратегія дає змогу раціоналізувати витрати підприємств в умовах невизначеності [3–5].

Зоряна Коваль у своїй роботі пропонує методику вибору та оцінювання стратегій підприємств за допомогою теорії ігор [6]. Цей підхід дозволяє враховувати стратегії конкурентів або стан ринку, що сприяє прийняттю оптимальних рішень у конфліктних ситуаціях. Авторка аналізує переваги та недоліки застосування методів теорії ігор у цій сфері, а також досліджує особливості використання критеріїв вибору стратегій. Вона розглянула вибір та пошук можливостей застосування методів теорії ігор для аналізу ефективності стратегій підприємств, розробила методики оцінювання ефективності стратегій підприємства за допомогою моделювання ситуації із використанням теорії ігор та формування висновків і рекомендацій щодо застосування методів та інструментарію теорії ігор у сфері оцінюванні ефективності стратегій підприємств.

В. В. Казімко досліджує застосування теорії ігор для моделювання інформаційних проблем безпеки.[7] Він зазначає, що концепції теорії ігор можуть бути використані для розробки механізмів, які дозволяють розробникам систем змінювати баланс та передбачати результати на користь захисників, використовуючи складні ігрові конструкції. Використовуючи ігри можна розробляти та аналізувати оптимальні дії гравців та знаходити можливі математичні рішення безпекових задач. З точки зору безпеки, поєднання кіберпростору та фізичного простору призводить до кіберфізичної безпеки, або поєднання елементів безпеки та економіки створює кіберстрахування. Для вирішення проблем безпеки та конфіденційності в нових сферах найбільш підходящими інструментами є теоретичні ігрові методи, оскільки вони надають різноманітні перевірені математичні методи для створення багатокористувацьких стратегій з використанням різних способів для охоплення аспектів конфіденційності та безпеки взаємодії гравців. Представлені теорії показують ефективність та доцільність використання теорії ігор та теорії диференціальних ігор у сфері захисту інформації.

Основні результати

Дослідження спрямоване на узагальненні поняття матриць результату та їх практичне використання для формування початкових матриць для дискретної динамічної кооперативної гри. Відповідно до поставленої мети вирішуються такі основні задачі:

1. Узагальнення поняття матриць результату.
2. Побудова стохастичної математичної моделі гри з використанням матриць результату для побудови вхідних даних.
3. Побудови оптимальної стратегії гри.

Узагальнений варіант матриць результатів

Розглянемо узагальнений варіант матриць результату, у якому *ігрова поверхня* дискретизується у вигляді прямокутної сітки розмірністю m x n. Кожен елемент цієї сітки відповідає конкретному просторовому положенню на ігровій поверхні (рис. 2).

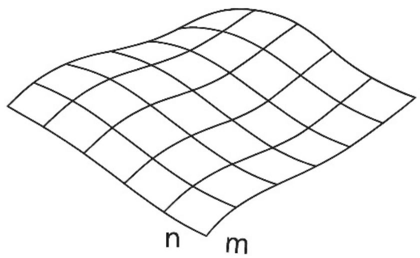

Рис.2 Ігрова поверхня.

Таким чином, *матриця розташування гравців або дій* має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де кожен елемент a_{ij} однозначно відповідає фіксованій ділянці ігрової поверхні.

У цьому формулюванні матриця A виступає *матрицею результатів* для заданої ігрової поверхні. Вміст елементів матриці результатів може бути різним залежно від поставленої задачі та доступних даних.

Матриці результатів в абсолютних величинах відображають в a_{ij} кількість виконаних ігрових дій гравцем з ділянки (i, j) ігрової поверхні (наприклад кількість спроб, передач, помилок тощо). Такі матриці результатів корисні для первинного статистичного аналізу, побудови емпіричних моделей, агрегації даних.

Матриці результатів у відносних величинах в a_{ij} інтерпретуються як ймовірність успішного чи ні виконання певної ігрової дій гравцем з ділянки (i, j) ігрової поверхні (наприклад ймовірності виграшу, програшу, помилок тощо). Такі матриці безпосередньо придатні для використання в ігрових і стохастичних моделях.

Для кожного гравця, ми будуємо персоналізовані матриці результату елементами яких є відносні показники, що будуть відображати ефективність гравця при виконанні дії з певної частини ігрової поверхні (наприклад матриця виграшів, програшів, напрямків тощо).[8]

Джерелами побудови матриць результату можуть бути: статистична інформація (історія виконання ігрових дій гравцем чи командою), прогнозований або емпіричний метод збору даних, комбінований метод оцінювання.

Сформовані матриці результатів слугуватимуть вхідними даними для розв'язання дискретної динамічної кооперативної гри, моделей типу MDP або стохастичної гри з просторовою залежністю.

Побудова стохастичної математичної моделі гри з використанням матриць результату для побудови вхідних даних

Розглянемо задачу:

Існує команда N гравців, які виконують дії послідовно. Початковий гравець вибирається випадковим чином, після чого гравці по черзі приймають рішення виконати дію чи передати хід наступному гравцю (передавати хід собі заборонено). Гра може максимально мати M етапів. Якщо до останнього етапу ніхто не виконав дію, то гравець до якого на останньому етапі перейшов хід зобов'язаний виконати дію. Гравці перебувають в різних позиціях ігрової поверхні. Конкретна позиція в конкретний момент часу визначається відповідною матрицею.

Правила гри. Кожен гравець має дві основні опції виконати дію або передати хід іншому гравцю.

Виконання дії може призвести до:

- виграшу з ймовірністю P_{win}, що приносить команді 1 бал і завершує гру;

- програшу з ймовірністю P_{loss} , що призводить до втрати командою 1 бала і також завершує гру;

- зупинки гри з ймовірністю $P_{stop} = 1 - \ P_{win} \ - \ P_{loss}$, що приносить команді 0 балів і завершує гру;

Передача ходу іншому гравцю. Гравець передає хід одному з N-1 інших з ймовірністю P_{pass}, та продовжує гру. Заборонено передавати хід самому собі. Дозволено передавати хід гравцю, що вже приймав участь в грі.

Ймовірність виграшу для кожного гравця є змінною на кожному етапі.

Послідовність ходів. Після кожного ходу гравця наступний гравець також обирає між виконанням дії або передачею ходу. Гравець може передати хід будь-якому з інших гравців (крім себе).

Багатоетапна структура гри. Гра відбувається в M етапів:

1 етап: Перший гравець (випадково обраний) приймає рішення виконати дію або передати хід іншому гравцеві.

2 етап: Наступний гравець приймає рішення. Він може виконати дію або передати хід іншому гравцеві, у тому числі повернути хід попередньому гравцеві.

...

M етап: На останньому етапі гравець зобов'язаний виконати дію.

Зупинка гри. Гра зупиняється після виконання дії будь-яким гравцем.

Ціль гри. Потрібно обчислити ймовірність виграшу гравців на будь-якому етапі при виконанні дії, що передбачає врахування всіх можливих рішень гравців на попередніх етапах. Вибрати стратегію для кожного гравця на кожному з етапів та побудувати оптимальну стратегію гри для отримання максимальної ймовірності виграшу команди.[9]

Побудуємо стохастичну модель у вигляді Марковського процесу прийняття рішень (MDP) для описаної гри, а також підхід до обчислення ймовірностей виграшу та знаходження оптимальних стратегій [10; 11].

Марковський процес прийняття рішень визначимо п'ятіркою:

$$M = \langle S, A, P, R, \gamma \rangle$$

де:

S - множина станів,

A - множина дій,

P - ймовірності переходів,

R - функція винагород,

γ -коефіцієнт дисконтування (у скінченній грі можна взяти ($\gamma = 1$)).

Нехай ігрова поверхня дискретизована у вигляді матриці розмірності $m \times n$. Кожна клітина цієї матриці однозначно відповідає конкретній просторовій позиції.

Позначимо множину клітин: $X = \{ x_{ij} \mid i \in 1, \ldots, m, j \in 1, \ldots, n \}$

Для кожного гравця $k \in 1, \ldots, N$ задано матриці результатів:

матриця виграшу $W^{(k)} = \left[w_{ij}^{(k)} \right], w_{ij}^{(k)} = P_{win}^{(k)} (x_{ij}, t)$, матриця програшу $L^{(k)} = \left[l_{ij}^{(k)}\right], l_{ij}^{(k)} = P_{loss}^{(k)}(x_{ij}, t)$, при чому $w_{ij}^{(k)} + l_{ij}^{(k)} \leq 1$.

Таким чином, кожна клітина ігрової поверхні несе повну інформацію про результативність усіх гравців.

З умов задачі визначимо простір станів. Стан повинен містити всю інформацію, необхідну для прийняття оптимального рішення. Тому нетермінальний стан матиме вигляд:

$s = (k, t, \mathbf{x_{ij}})$.

де: $k \in 1, \ldots, N$ – поточний гравець у якого зараз хід,

$t \in 1, \ldots, M$ – номер етапу,

$\mathbf{x_{ij}}$– позиція гравця на ігровій поверхні.

Отже множина нетермінальних станів:

$S_{NT} = (k, t, \mathbf{x_{ij}})$.

Також введемо множину термінальних станів. Термінальний стан відповідає факту виконання дії конкретним гравцем, що призводить до завершення гри.

$S_T = \{s_{win}^k, \ s_{loss}^k, \ s_{stop}^k \mid k \in 1, \ldots, N\}$,

де s_{win}^k – гравець k виконав дію на етапі t і команда виграла, відповідно s_{loss}^k – програла та s_{stop}^k – гра завершилася без результату.

Тоді повна множина станів: $S = S_{NT} \cup S_T$

Множина дій A задається в залежності від поточного стану гри, визначається активним гравцем та змінюється залежно від етапу гри. Нехай поточний стан $s_t = (k, t, \mathbf{x_{ij}})$, де k – активний гравець. Тоді гравець k може виконати дію з позиції $\mathbf{x_{ij}}$, з імовірностями, заданими матрицями результатів, відбувається перехід у відповідний термінальний стан та гра завершується. Виконання дії завжди дозволено, а на останньому етапі при $t = M$ є обов'язковою. Інше рішення при $t < M$, передача ходу іншому гравцю. При передачі ходу гравець k передає хід гравцю l, номер етапу збільшується $t \to t + 1$, гра продовжується.

$$A(s_t) = \begin{cases} \{act, \ \ pass(l) \mid l \neq k\}, & \&t < M \\ act, t = M \end{cases},$$

де act – виконати дію, pass(l) – передати хід гравцю l, але не самому собі $l \neq k$.

Розглянемо функцію переходів для заданої задачі. Узагальнено її можна зобразити у вигляді:

$P\left(s^{'}\middle|s,a\right), s\in S, a\in A(s)$.

Виконання дії призводить до завершення гри з переходом у термінальні стани, тому для стану $s_t = (k,t,\mathbf{x_{ij}})$:

$P\left(s^k_{win}\middle|s_t,act\right) = P^{(k)}_{win}\left(x_{ij},t\right)$,

$P\left(s^k_{loss}\middle|s_t,act\right) = P^{(k)}_{loss}\left(x_{ij},t\right)$,

$P\left(s^k_{stop}\middle|s_t,act\right) = 1 - P^{(k)}_{win}\left(x_{ij},t\right) - P^{(k)}_{loss}\left(x_{ij},t\right)$.

Якщо ж в стані $s_t = (k,t,\mathbf{x_{ij}})$ обрано дію $pass(l)$, де $l\neq k$, то вибір гравця є детермінованим:

$P\left(k_{t+1} = l|s_t, pass(l)\right) = 1$.

Позиція на наступному етапі змінюється відповідно до функції переходів ігрової поверхні:

$P\left(\left(l,t+1,x_{i^{'}j^{'}}\right)\middle|\left(k,t,x_{ij}\right), pass(l)\right) = P\left(x_{i^{'}j^{'}}\middle|x_{ij}\right)$.

Для будь-якого нетермінального стану s і допустимої дії a:

$\sum_{s'\,\in\,S} P\left(s^{'}\middle|s,a\right) = 1, \quad P\left(s^{'}\middle|s,a\right) \geq 0$.

Розглянемо функцію винагороди для даної задачі. Миттєва винагорода визначається як функція: $R\ :\ S\times A\times S\rightarrow\ \mathbb{R}$.

Якщо в нетермінальному стані $s_t = (k,t,\mathbf{x_{ij}})$ виконується дія *act,*то :

$$R\left(s,act,s^{'}\right) = \begin{cases} 1, & s' =\ s^k_{win}, \\ -1, & s' =\ s^k_{loss}, \\ 0, & s' =\ s^k_{stop}. \end{cases}$$

Якщо обрано дію *pass(l)*:

$R\left(\left(k,t,x_{ij}\right), pass(l), \left(l,t+1,x_{i^{'}j^{'}}\right)\right) = 0$, для всіх допустимих $x_{i^{'}j^{'}}$.

Для термінальних станів: $R\left(s,a,s^{'}\right) = 0, \forall s\in S_T$.

Для кожного гравця k вводимо функцію цінності:

$V_k(s)\!=\mathbb{E}\left[\sum_{\tau=t}^{T} R(s_\tau,a_\tau,s_{\tau+1})\ |\ s_t = s\right]$,

де $T\ \leq\ M$- момент завершення гри, а очікування береться за оптимальної кооперативної політики команди.

Оскільки гра кооперативна і винагорода спільна, то:

$V_1(s) = V_2(s) =\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ = V_N(s)\ = V(s)$.

Рекурентне визначення функції цінності для стану $s_t = (k,t,\mathbf{x_{ij}})$ матиме вигляд:

$V\left(k,t,x_{ij}\right) = max\left\{P^{(k)}_{win}\left(x_{ij},t\right) - P^{(k)}_{loss}\left(x_{ij},t\right),\ \max_{l\neq k}\sum_{x_{i^{'}j^{'}}} P(x_{i'j'}|x_{ij})V(l,t+1,x_{i'j'})\right\}$,

Функція цінності дії (Q-функція):

$Q(s,a) = \sum_{s'} P\left(s' \middle| s,a\right)\left[R\left(s,a,s'\right) + V(s')\right].$

Зокрема для дії *act:*

$Q\left((k,t,x_{ij}),act\right) = P_{win}^{(k)}(x_{ij},t) - P_{loss}^{(k)}(x_{ij},t),$

А для дії *pass(l)*:

$$Q\left((k,t,x_{ij}),pass(l)\right) = \sum_{x_{i'j'}} P(x_{i'j'}|x_{ij})V(l,t+1,x_{i'j'}).$$

Побудова оптимальної стратегії гри

Обчислимо ймовірність виграшу гравців на будь-якому етапі з урахуванням усіх попередніх рішень. Оскільки гра кооперативна, винагорода нараховується лише один раз у момент виконання дії, а передача ходу не змінює результат безпосередньо, то ймовірність виграшу команди з будь-якого стану дорівнює функції цінності цього стану, обмеженій інтервалом [0,1]. Для стану $s = (k,t,\mathbf{x_{ij}})$ ймовірність виграшу команди, якщо гравець k виконує дію на етапі *t:*

$P_{win}(k,t,x_{ij}) = P_{win}^{(k)}(x_{ij},t).$

Це локальна (миттєва) ймовірність, яка не враховує передачі ходу. Для знаходження ймовірності виграшу з урахуванням всіх майбутніх рішень позначимо: $W(k,t,x_{ij})$ – оптимальну ймовірність виграшу команди, якщо на етапі t хід має гравець k, що перебуває в клітині x_{ij}. Гранична умова для останнього етапу при $t = M$ передача ходу заборонена, тому:

$W(k,M,x_{ij}) = P_{win}^{(k)}(x_{ij},M).$

Рекурентне обчислення ймовірності виграшу для будь-якого етапу $t < M$:

$W(k,t,x_{ij}) = max\,\{\,P_{win}^{(k)}(x_{ij},t)\,,\,\max_{l\neq k}\sum_{x_{i'j'}} P(x_{i'j'}|x_{ij})W(l,t{+}1,x_{i'j'}).$

Це рівняння оптимальної ймовірності виграшу, яке враховує всі можливі рішення гравців на попередніх і наступних етапах, реалізовує зворотну індукцію і є рівнянням Беллмана для ймовірнісної цілі[11].

Оптимальна стратегія гравців визначається через рівняння оптимальності Беллмана як така, що реалізує максимум у цьому рівнянні для кожного гравця на кожному етапі гри. Зокрема, для гравця k у клітині x_{ij} на кроці t оптимальна дія (або розподіл над діями) полягає в тому, щоб обрати таку клітину x_{ij}, яка максимізує виграш $W(k,t,x_{ij})$. Тобто оптимальна стратегія — це правило вибору ходу, яке одночасно максимізує негайну ймовірність виграшу поточного гравця $P_{win}^{(k)}(x_{ij},t)$ і враховує найкращу можливу відповідь усіх інших гравців, тобто припускає, що інші гравці самі будуть діяти оптимально на наступному кроці, максимізуючи свої власні виграші W(l, ·). У термінах принципу оптимальності Беллмана це означає що будь-який фрагмент оптимальної траєкторії гри, починаючи з будь-якого проміжного стану та етапу t, також є оптимальним. Оптимальне рішення залежить лише від поточного стану x_{ij} та номера етапу t, стратегія є стаціонарною в тому сенсі, що в однакових станах на однакових етапах гравець обирає однакові дії, якщо гра детермінована по переходах — детерміновану дію, якщо стохастична — оптимальний розподіл. Таким чином, оптимальна стратегія для кожного гравця — це аргумент максимуму в рівнянні Беллмана, тобто той вибір x_{ij}, який досягає значення функції оптимальної ймовірності виграшу $W(k,t,x_{ij})$ за умови, що всі інші учасники гри також дотримуються своїх оптимальних стратегій на всіх наступних етапах. Це забезпечує субігрову перфектну рівновагу (subgame perfect equilibrium) у сенсі зворотної індукції, тому що ніхто з гравців не має стимулу відхилятися від цієї стратегії в жодному досяжному стані гри, якщо інші продовжують грати оптимально [11].

З умов задачі, гравець виконує дію, якщо його поточна ймовірність виграшу не менша, ніж очікувана користь від передачі ходу. Передавати хід потрібно тому гравцю, який має найбільшу майбутню цінність з урахуванням ігрової поверхні та етапу. Тому для стану $(k,t,\mathbf{x_{ij}})$:

$$\pi^*\left(k,t,\mathbf{x_{ij}}\right)=\begin{cases} act, \quad P_{win}^{(k)}\left(x_{ij},t\right)\geq \max_{l\neq k}\sum_{x_{i'j'}}P(x_{i'j'}|x_{ij})W(l,t+1,x_{i'j'}), \\ \qquad\qquad\qquad pass(l^*), \quad i, \end{cases}$$

де

$l^*=\ arg\max_{l\neq k}\sum_{x_{i'j'}}P(x_{i'j'}|x_{ij})W(l,t+1,x_{i'j'})$.

Таким чином:

$$\mathbb{P}(\text{виграш команди} \mid k,t,x_{ij})=W(k,t,x_{ij}).$$

А ймовірність того, що саме на етапі t буде виграшна дія:

$$\mathbb{P}(\text{виграш команди на етапі } t)=\sum_{k,x_{i'j'}}\mathbb{P}\left(s_t=(k,x_{ij})\right)\cdot 1\left\{\pi^*(k,t,x_{ij})=act\right\}\cdot P_{win}^{(k)}(x_{ij},t).$$

Приклад використання стохастичної моделі гри

Наведемо повністю конкретний числовий приклад для N=2, M=3 та ігрової площини 3x3, що ілюструє роботу всієї моделі, матриці результатів, випадкові переходи між клітинами, обчислення ймовірностей виграшу та оптимальної стратегії.

Отже, множина гравців N={1,2}, етапи t={1,2,3}, ігрова поверхня $X = \{ x_{ij} \}, \ i,j \in \{1,2,3\}$, стани $s = (k,t,\mathbf{x_{ij}})$. На етапах t=1,2 гравець може виконати дію або передати хід, при t=3 – обов'язково виконується дія.

Матриці результату для кожного гравця та етапу:

$$P^{(1)}_{win}(\bullet,1) = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.10 & 0 \\ 0.10 & 0.15 & 0.05 \\ 0 & 0.05 & 0.10 \end{pmatrix} \ P^{(2)}_{win}(\bullet,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0.05 & 0.10 \\ 0.05 & 0.10 & 0.15 \\ 0.10 & 0 & 0.05 \end{pmatrix}$$

$$P^{(1)}_{win}(\bullet,2) = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.20 & 0 \\ 0.15 & 0.30 & 0.10 \\ 0 & 0.10 & 0.20 \end{pmatrix} \ P^{(2)}_{win}(\bullet,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0.15 & 0.25 \\ 0.10 & 0.20 & 0.30 \\ 0.20 & 0 & 0.10 \end{pmatrix}$$

$$P^{(1)}_{win}(\bullet,3) = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.40 & 0 \\ 0.30 & 0.60 & 0.25 \\ 0 & 0.20 & 0.35 \end{pmatrix} \ P^{(2)}_{win}(\bullet,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0.30 & 0.50 \\ 0.25 & 0.45 & 0.65 \\ 0.40 & 0 & 0.20 \end{pmatrix}$$

Розглянемо рівномірну функцію переходу $P\left(x' \middle| x\right) = \frac{1}{8}, x \neq x'$.

Оскільки на t=3 дія обов'язкова то функція цінності: $W(k,x,\ 3) = P^{(k)}_{win}(x,3)$.

Для стану $(k,x,\ 2)$: $W(k,x,\ 2) = max\left\{P^{(k)}_{win}(x,2), \mathbb{E}\left[W(3-k,\bullet,3)\right]\right\}$, тоді очікуване значення при передачі для гравця 1: $\mathbb{E}\left[W(2,\bullet,3)\right] = \frac{1}{8}\sum_{x\neq x'} P^{(2)}_{win}(x',3) \approx 0.34$ (однакове для всіх клітин через рівномірність).

Для клітини x_{22} для гравця 1: дія 0.30, передача 0.34, оптимально передати хід.

Для гравця 2: дія 0.20, передача 0.34, оптимально передати хід.

Для стану $(k,x,\ 1)$: $W(k,x,\ 1) = max\left\{P^{(k)}_{win}(x,1), \mathbb{E}\left[W(3-k,\bullet,2)\right]\right\}$, тоді очікуване значення при передачі для гравця 1: $\mathbb{E}\left[W(1,\bullet,2)\right] = \frac{1}{8}\sum_{x\neq x'} P^{(2)}_{win}(x',2) \approx 0.32$

Для будь-якої клітини на етапі 1: $P_{win} \leq 0.15$, очікуване майбутнє > 0.30, тобто завжди передавати хід.

Тоді оптимальну стратегію можемо сформулювати так:

- етап 1 ніколи не виконувати дію, завжди передавити хід іншому гравцю;

- етап 2 виконувати дію лише в клітинах $P_{win}(x, 2) \geq 0.34$, в інших клітинах – передача ходу;

- етап 3 завжди виконувати дію, найкращі клітини для гравця 1 – центр (2,2), для гравця 2 – (2,3).

Результат прикладу можна так інтерпретувати, що пізніші етапи стратегічно цінніші, навіть якщо поточна позиція слабка, нульові клітини природньо виключаються зі стратегії, випадкові переходи стимулюють передачу ходу та роблять оптимальну стратегію менш «жадібною».

Тобто, навіть у простій конфігурації N=2, M=3 та ігрової площини 3x3 оптимальна стратегія є динамічною, просторово залежною та нетривіальною, а рішення на ранніх етапах повністю визначаються очікуваною командною цінністю майбутніх станів.

Висновки

Ми сформулювали узагальнене поняття матриць результату та запропонували метод формування початкових даних, базований на матрицях результату, для розв'язання динамічної дискретної кооперативної гри. Стратегії гравців та команди визначені для оптимального розв'язку даної гри.

Також розглянуто використання даної гри для побудови стохастичної математичної моделі. Використання матриць результату для початкових даних гри. При умові що ймовірнісні дані формуються базуючись на аналізі дій гравців протягом попередніх аналогічних ігор, вони будуть чітко задавати початкові умови для гри.

Дана динамічна дискретна кооперативна гра є базовою частиною для побудови математичної моделі гри та побудови оптимальних стратегій для гравців. В подальших дослідженнях важливо розглянути якісний вплив виконання дії чи передачі ходу на побудовану гру, а також динаміку зміни початкових даних для гри відповідно до математичної моделі.

Список літератури

1. **von Neumann, John** "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele"[On the Theory of Games of Strategy] / von Neumann, John Mathematische Annalen [Mathematical Annals] (in German). – 1928.– 100 (1): 295–320.
2. **von Neumann, John; Morgenstern, Oskar** Theory of Games and Economic Behavior. / von Neumann, John; Morgenstern, Oskar – Princeton University Press. ISBN 978-0-691-13061-3.
3. **Dixit A., Nalebuff B.** Thinking Strategically: The Competitive Edge in Business, Politics and Everyday Life. / Dixit A., Nalebuff B. – N.Y.: Norton., 1991. – 394 c.
4. **Baranovska L. V., Bukovskiy O. M.** Mixed strategy Nashnequilibrium in one game and rationality. International Scientific and Practical Conference "WORLD SCIENCE"./ Baranovska L. V., Bukovskiy O. M. // Proceedings of the III International Scientific and Practical Conference "Scientific Issues of the Modernity" (April 27, 2017, Dubai, UAE), № 5(21),Vol. 1, May, pp.4–8.
5. **Чан Кім В., Моборн Р.** Стратегія блакитного океану. / Чан Кім В., Моборн Р. – Пер. з англ. Київ: Клуб сімейного дозвілля., 2016. – 383 с.
6. **Коваль З. О.** Оцінювання стратегії підприємства методом теорії ігор. / Коваль З. О. – Менеджмент та підприємництво в Україні: етапи становлення і проблеми розвитку, 2021.– № 2 (6).
7. **Казімко В.В.** Застосування теорії ігор для моделювання інформаційних проблем безпеки. / Казімко В.В. – Телекомунікаційні та інформаційні технології., 2022.– № 1 (74).
8. **Мартинюк Сергій, Цуркан Вячеслав.** Побудова математичної моделі гравця з використанням матриці результатів. / Мартинюк Сергій, Цуркан Вячеслав. – Збірник статей, «Математика.Інформаційні технології. Освіта», №11 (2024) - м. Луцьк – С. 86.
9. **Sergiy Martyniuk, Viacheslav Tsurkan** Choosing the optimal strategy for a discrete dynamic cooperative game. / Sergiy Martyniuk, Viacheslav Tsurkan – Вісник Київського Національного Університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки. 2025. – №2 (81). – С.182-186. DOI:https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/2.28
10. **Birge, J.R., Louveaux, F.** Introduction to Stochastic Programming. 2nd ed./ Birge, J.R., Louveaux, F. – N.Y.: Springer, 2011.
11. **Kirk, D.E.** Optimal Control Theory: An Introduction./ Kirk, D.E. – N.Y.: Dover Publications, Mineola, 2004.

Martyniuk S. V., Tsurkan V. I.

Construction of a stochastic mathematical game model using outcome matrix for input data

Summary

With the development of computing resources and AI, the use of game theory in sociology, economics, and other applied sciences is expanding. This enables the processing of large amounts of information, the construction of mathematical models, and the identification of optimal strategies for various tasks and at different levels of complexity. The military sphere and security organizations at all levels, including those in cyberspace, utilize game theory concepts. A game involves the actions of two or more rational players or teams that have a specific strategy and compete for a specific reward. Game theory provides the foundation for developing optimal strategies in such games. In addition, game theory approaches can be extended to the development of algorithms that allow system developers to predict game outcomes in favor of a group of players using complex game structures. This article continues the study of game theory in the section on discrete dynamic cooperative games. A group of players performing actions sequentially strives to achieve the maximum result in a limited number of steps. The use of collected statistical data and the resulting matrices allows for the practical consideration of optimal strategies. The paper proposes a generalization of outcome matrices as a tool for forming initial stochastic data for a dynamic cooperative game, constructs a Markov model of transitions between game states, and formulates an algorithm for determining the optimal strategy.

Keywords: games theory, statistics, decision-making system, Markov model, outcome matrix, simulation, machine learning.

References

1. **von Neumann, John** "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele"[On the Theory of Games of Strategy] / von Neumann, John Mathematische Annalen [Mathematical Annals] (in German). – 1928.– 100 (1): 295–320.
2. **von Neumann, John; Morgenstern, Oskar** Theory of Games and Economic Behavior. / von Neumann, John; Morgenstern, Oskar – Princeton University Press. ISBN 978-0-691-13061-3.

3. **Dixit A., Nalebuff B.** Thinking Strategically: The Competitive Edge in Business, Politics and Everyday Life. / Dixit A., Nalebuff B. – N.Y.: Norton., 1991. – 394 c.
4. **Baranovska L. V., Bukovskiy O. M.** Mixed strategy Nashnequilibrium in one game and rationality. International Scientific and Practical Conference "WORLD SCIENCE"./ Baranovska L. V., Bukovskiy O. M. // Proceedings of the III International Scientific and Practical Conference "Scientific Issues of the Modernity" (April 27, 2017, Dubai, UAE), № 5(21),Vol. 1, May, pp.4–8.
5. **Kim W. Chan, Mauborgne R.** Stratehiia blakytnoho okeanu [Blue Ocean Strategy]. Per. z anhl. Kyiv: Klub Simeinoho Dozvillia, 2016. 383 p. [in Ukrainian]
6. **Koval Z. O.** Otsiniuvannia stratehii pidpryiemstva metodom teorii ihor [Evaluation of enterprise strategy using game theory]. Menedzhment ta pidpryiemnytstvo v Ukraini: etapy stanovlennia i problemy rozvytku, 2021, No. 2(6). [in Ukrainian]
7. **Kazimko V. V.** Zastosuvannia teorii ihor dlia modeliuvannia informatsiinykh problem bezpeky [Application of game theory for modeling information security problems]. Telekomunikatsiini ta informatsiini tekhnolohii, 2022, No. 1(74). [in Ukrainian]
8. **Martyniuk S., Tsurkan V.** Pobudova matematychnoi modeli hravtsia z vykorystanniam matrytsi rezultativ [Construction of a mathematical model of a player using an outcome matrix]. Zbirnyk statei "Matematyka. Informatsiini tekhnolohii. Osvita", No. 11, Lutsk, 2024, p. 86. [in Ukrainian]
9. **Martyniuk S., Tsurkan V.** Choosing the optimal strategy for a discrete dynamic cooperative game. Visnyk Kyivskoho Natsionalnoho Universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Fizyko-matematychni nauky, 2025, No. 2(81), pp. 182–186. DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/2.28
10. **Birge, J.R., Louveaux, F.** Introduction to Stochastic Programming. 2nd ed./ Birge, J.R., Louveaux, F. – N.Y.: Springer, 2011.
11. **Kirk, D.E.** Optimal Control Theory: An Introduction./ Kirk, D.E. – N.Y.: Dover Publications, Mineola, 2004.

Дослідження в математиці і механіці. – 2025. – Т. 30, вип. 2(46). – С. 48–67

УДК 517.764

І. В. Потапенко, *викладач*
Одеській національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
e-mail: potapenko@onu.edu.ua
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0007-9477-5921

ПРО КАНОНІЧНІ ДЕФОРМАЦІЇ ТРИВИМІРНИХ МЕТРИК РІМАНОВОГО ПРОСТОРУ

В роботі вводиться поняття канонічних деформацій тривимірних метрик ріманового простору. Використовуючи апарат тензорного аналізу та теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних, доводиться на прикладі геодезичних деформацій, що це більш широкий клас інфінітезимальних деформацій, він не пустий і цікавий для подальшого вивчення.
MSC: 57R30.
Ключові слова: ріманів простір, варіація метрики, канонічні деформації, тензор кривини, геодезичні деформації.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.2(46).355050

Вступ

Традиційно в літературі [1-26] добре вивчені і мають важливе прикладне значення геодезичні відображення та деформації ріманових та псевдоріманових просторів та гіперповерхонь. В роботі вводиться поняття канонічних деформацій метрик ріманового простору. Обмежуючись розмірністю три, для якої тензор Рімана має чітко виражений вигляд, вивчається питання структури варіації метрики тривимірного ріманового простору, що допускає нетривіальні інфінітезимальні спеціальні деформації. На прикладі геодезичних деформацій тривимірних метрик показано, що вони складають важливий клас канонічних деформацій, що в свою чергу свідчить про те, що клас канонічних деформацій не є пустим і достатньо більш широким, оскільки включає в себе клас геодезичних деформацій.

Надійшла 13.12.2025 © Потапенко І. В., 2025

Основні результати

Нехай (V_n, g_{ij}) — рімановий простір, віднесений до локальних координат

$$(x^1, x^2, \dots, x^n).$$

Нехай $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n)$ деяке контраваріантне векторне поле (V_n, g_{ij}).

Індекси $\alpha, \beta, \dots$ а також $i, j, \dots$ із множини $\{1, 2, \dots, n\}$.

Означення 1. Рімановий простір $(\widetilde{V}_n, \widetilde{g}_{ij})$ називається інфінітезимальною деформацією ріманового простору (V_n, g_{ij}), якщо його локальні координати $(\widetilde{x}^1, \widetilde{x}^2, \dots, \widetilde{x}^n)$ визначаються формулою

$$\widetilde{x}^\alpha = x^\alpha + t\,\xi^\alpha(x) \tag{1}$$

де t — малий числовий параметр. Вектор $\xi^\alpha(x)$ називається вектором зміщення.

Означення 2. Нехай $R(x)$ та $R_t(x,t)$ — певна характеристика ріманових просторів (V_n, g_{ij}) та $(\widetilde{V}_n, \widetilde{g}_{ij})$ відповідно. Припустимо, що приріст

$$\Delta R(x,t) = R_t(x,t) - R(x)$$

функції $R(x)$ при деформації лінійно залежить від t. Тоді у розкладі

$$R_t(x,t) = R(x) + t\,\delta R(x) \tag{2}$$

коефіцієнт δR називають варіацією геометричної величини $R(x)$.

З (2) отримуємо формулу обчислення варіації

$$\delta R(x) = \left.\frac{\partial R_t(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}. \tag{3}$$

Надалі обмежуємося розглядом виключно інфінітезимальних деформацій виду (1). Відмітимо, що геометрична характеристика об'єкта зберігається при інфінітезимальній деформації (1), якщо її приріст є величиною не менш ніж другого порядку відносно t.

Надалі розглядатимемо виключно інфінітезимальні деформації (1).

Твердження 1. Нехай рімановий простір (V_n, g_{ij}) зазнає інфінітезимальної деформації (1) і $T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ та $U^{j_1 j_2 \dots j_s}_{i_1 i_2 \dots i_r}$ регулярні тензорні поля в (V_n, g_{ij})

типу (p,q) та (r,s) відповідно, тоді мають місце наступні формули:

$$\delta\left(\frac{\partial T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\delta T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\right), \tag{4}$$

$$\delta\Big(T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\, U^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r}\Big) = \Big(\delta T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\Big)\, U^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r} + T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\,\Big(\delta U^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r}\Big). \tag{5}$$

Доведення.

Доведення формул (4) та (5) випливає з означення 1 та формули (3).

Твердження доведено.

Відмітимо, що з (3), як наслідок, маємо, що операція варіювання тензора не змінює його тип.

Означення 3. Коваріантною похідною тензорного поля $T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ типу (p,q), яке задане в рімановому просторі (V_n, g_{ij}), називається тензорне поле $T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p; l}$ типу $(p+1,q)$, яке визначається за формулою

$$\begin{aligned} T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p; l} = \frac{\partial T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}}{\partial x^l} &+ T^{\alpha j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\Gamma^{j_1}_{\alpha l} + T^{j_1 \alpha \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\Gamma^{j_2}_{\alpha l} + \cdots + T^{j_1 j_2 \ldots \alpha}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\Gamma^{j_q}_{\alpha l} \\ &- T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{\alpha i_2 \ldots i_p}\Gamma^{\alpha}_{i_1 l} - T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 \alpha \ldots i_p}\Gamma^{\alpha}_{i_2 l} - \cdots - T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots \alpha}\Gamma^{\alpha}_{i_p l}. \end{aligned} \tag{6}$$

де Γ^h_{ij} — коефіцієнти рімановї зв'язності, які визначаються на базі метричного тензора g_{ij} за формулою

$$\Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) g^{kh}. \tag{7}$$

Твердження 2. Нехай рімановий простір (V_n, g_{ij}) зазнає інфінітезимальної деформації (1) і $T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ — тензорне поле типу (p,q), що задане в ньому.

Тоді варіація коваріантної похідної $\delta\Big(T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p; l}\Big)$ цього поля задовольняє співвідношенню

$$\begin{aligned} \delta\Big(T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p; l}\Big) = (\delta T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p})_{;l} &+ T^{\alpha j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\,\delta\Gamma^{j_1}_{\alpha l} + T^{j_1 \alpha \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\,\delta\Gamma^{j_2}_{\alpha l} + \cdots + T^{j_1 j_2 \ldots \alpha}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\,\delta\Gamma^{j_q}_{\alpha l} \\ &- T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{\alpha i_2 \ldots i_p}\,\delta\Gamma^{\alpha}_{i_1 l} - T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 \alpha \ldots i_p}\,\delta\Gamma^{\alpha}_{i_2 l} - \cdots - T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots \alpha}\,\delta\Gamma^{\alpha}_{i_p l}. \end{aligned} \tag{8}$$

де $\delta\Gamma^h_{ij}$ — варіація рімановой зв'язності.

Доведення

Нехай рімановий простір (V_n, g_{ij}) зазнає інфінітезимальної деформації (1), та всі об'єкти мають ненульові варіації. Знайдемо варіацію тензорного поля $T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p, l}$ типу $(p, q+1)$. Для цього скористаємося означенням 3 та формулою (6).

Зваріюємо (6), та користуємося (4), (5) та твердженням 1. Маємо

$$\begin{aligned}\delta\Big(T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p, l}\Big) = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\delta T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\right) &+ \delta T^{\alpha j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\Gamma^{j_1}_{\alpha l} + T^{\alpha j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\delta\Gamma^{j_1}_{\alpha l} \\ &+ \delta T^{j_1 \alpha \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\Gamma^{j_2}_{\alpha l} + T^{j_1 \alpha \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\delta\Gamma^{j_2}_{\alpha l} + \ldots \\ &- \delta T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{\alpha i_2 \ldots i_p}\Gamma^{\alpha}_{i_1 l} - T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{\alpha i_2 \ldots i_p}\delta\Gamma^{\alpha}_{i_1 l} \\ &- \delta T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 \alpha \ldots i_p}\Gamma^{\alpha}_{i_2 l} - T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 \alpha \ldots i_p}\delta\Gamma^{\alpha}_{i_2 l} - \ldots \\ &- \delta T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots \alpha}\Gamma^{\alpha}_{i_p l} - T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots \alpha}\delta\Gamma^{\alpha}_{i_p l}.\end{aligned} \tag{9}$$

Збираючи в правій частині (9) доданки, що містять вираз $\delta T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, та користуємося означенням 3 коваріантної похідної, отримаємо (8).

Твердження доведено.

Твердження 3. Коваріантна похідна варіації метричного тензора ріманового простору (V_n, g_{ij}) при інфінітезимальній деформації (1) визначається за формулою

$$(\delta g_{ij})_{,k} = g_{mj}\,\delta\Gamma^m_{ik} + g_{mi}\,\delta\Gamma^m_{jk}. \tag{10}$$

Доведення

Для метричного тензора g_{ij} має місце рівність

$$g_{ij;k} = 0. \tag{11}$$

Застосувавши до метричного тензора, який є тензором типу $(2, 0)$, формулу (9) твердження 2, отримаємо (10).

Твердження доведено.

Твердження 4. Варіація рімановой зв'язності при інфінітезимальній деформації (1) ріманового простору (V_n, g_{ij}) визначається за формулою

$$\delta\Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2}g^{\alpha h}\left(\delta g_{i\alpha,\,j} + \delta g_{j\alpha,\,i} - \delta g_{ij,\,\alpha}\right), \tag{12}$$

і є тензором типу $(2,1)$.

Доведення

Застосуємо до кожного доданку в дужках правої частини формули (10) твердження 3. Матимемо

$$(\delta g_{i\alpha})_{,j} = g_{m\alpha}\,\delta\Gamma^m_{ij} + g_{mi}\,\delta\Gamma^m_{\alpha j},$$

$$(\delta g_{j\alpha})_{,i} = g_{m\alpha}\,\delta\Gamma^m_{ji} + g_{mj}\,\delta\Gamma^m_{\alpha i},$$

$$(\delta g_{ij})_{,\alpha} = g_{mj}\,\delta\Gamma^m_{i\alpha} + g_{mi}\,\delta\Gamma^m_{j\alpha}.$$

Або

$$(\delta g_{i\alpha})_{,j} + (\delta g_{j\alpha})_{,i} - (\delta g_{ij})_{,\alpha} = 2\,g_{m\alpha}\,\delta\Gamma^m_{ij}. \tag{13}$$

Згортаючи вираз (13) з метричним тензором $g^{\alpha h}$, помноженим на $\frac{1}{2}$, отримаємо (12). Оскільки в правій частині (12) маємо тензор, то варіація Γ^h_{ij} ріманової зв'язності є тензором типу $(2,1)$.

Твердження доведено.

Тензор кривини Рімана типу $(3,1)$ визначається через коефіцієнти ріманової зв'язності за формулою

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^h_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^\alpha_{ik}\Gamma^h_{\alpha j} - \frac{\partial \Gamma^h_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^\alpha_{ij}\Gamma^h_{\alpha k}. \tag{14}$$

Твердження 5. Варіацію тензора кривини Рімана типу $(3,1)$ при інфінітезимальній деформації (1) ріманового простору (V_n, g_{ij}) можна визначати за формулами

$$\delta R^h_{ijk} = \left(\delta\Gamma^h_{ik}\right)_{,j} - \left(\delta\Gamma^h_{ij}\right)_{,k}, \tag{15}$$

$$\delta R^h_{ijk} = \frac{1}{2} g^{\alpha h}\Big(\delta g_{k\alpha,\,ij} + \delta g_{j\alpha,\,ik} - \delta g_{ik,\,\alpha j} - \delta g_{j\alpha,\,ik} - \delta g_{m\alpha} R^m_{ijk} - \delta g_{im} R^m_{\alpha jk}\Big). \tag{16}$$

Доведення

Зваріювавши (14), використовуючи (5) твердження 1 та означення 3 коваріантної похідної, матимемо (15).

Для доведення формули (16) підставимо в (15) вирази варіації ріманової зв'язності за формулою (12), використовуючи, що

$$g^{\alpha h}_{\ \ ,l} = 0$$

матимемо:

$$\delta R^h_{ijk} = \frac{1}{2} g^{\alpha h}\Big(\big((\delta g_{i\alpha})_{,kj} + (\delta g_{k\alpha})_{,ij} - (\delta g_{ik})_{,\alpha j}\big) - \big((\delta g_{i\alpha})_{,jk} + (\delta g_{j\alpha})_{,ik} - (\delta g_{ij})_{,\alpha k}\big)\Big). \tag{17}$$

За тотожністю Річчі:

$$(\delta g_{i\alpha})_{,jk} - (\delta g_{i\alpha})_{,kj} = \delta g_{m\alpha}\, R^m_{ijk} + \delta g_{im}\, R^m_{\alpha jk}. \tag{18}$$

Підставимо (18) в (17), отримаємо (16).

Твердження доведено.

Твердження 6. Варіацію метричного тензора типу $(0,2)$, тензора Річчі та скалярної кривини при інфінітезимальній деформації (1) ріманового простору (V_n, g_{ij}) можна визначати за формулами

$$\delta g^{ij} = -\, g^{i\alpha} g^{j\beta}\, \delta g_{\alpha\beta}, \tag{19}$$

$$\delta R_{ij} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\Big((\delta g_{\rho\alpha})_{,j\beta} + (\delta g_{ij})_{,\alpha\beta} - (\delta g_{i\rho})_{,\alpha j} - (\delta g_{j\alpha})_{,i\beta} - \delta g_{m\alpha}\, R^m_{ij\beta} - \delta g_{im}\, R^m_{\alpha j\beta}\Big), \tag{20}$$

$$\delta R = g^{ij} g^{\alpha\beta}\, (\delta g_{ij})_{,\alpha\beta} - g^{ij} g^{\alpha\beta}\, (\delta g_{j\alpha})_{,i\beta} - g^{ij} g^{\alpha\beta} R^m_{ij\beta}\, \delta g_{m\alpha} - g^{i\alpha} g^{j\beta} R_{ij}\, \delta g_{\alpha\beta}. \tag{21}$$

Доведення

При будь-якій інфінітезимальній деформації ріманового простору (1) має місце рівність

$$\delta\big(g^{i\alpha} g_{\alpha\beta}\big) = 0.$$

Або

$$\delta g^{i\alpha}\, g_{\alpha\beta} = -\, g^{i\alpha}\, \delta g_{\alpha\beta}. \tag{22}$$

Згортаючи (22) з $g^{\beta j}$, отримаємо (19).

(20) отримаємо, згортаючи (16) за індексами h та k та користуючись тим, що операції згортки та варіювання комутують.

Для доведення (21) розглянемо

$$\delta R = \delta\big(g^{ij} R_{ij}\big) = \delta g^{ij} R_{ij} + g^{ij} \delta R_{ij}. \tag{23}$$

Підставимо в (23) з (19), (20) вирази для δg^{ij} та δR_{ij}:

$$\delta R = -\, g^{i\alpha} g^{j\beta}\, \delta g_{\alpha\beta}\, R_{ij} + \, g^{ij}\, \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\Big((\delta g_{\beta\alpha})_{,ij} + (\delta g_{ij})_{,\alpha\beta} - (\delta g_{i\beta})_{,\alpha j} -$$

$$- (\delta g_{j\alpha})_{,i\beta} - \delta g_{m\alpha}\, R^{m}_{ij\beta} - \delta g_{im}\, R^{m}_{\alpha j\beta}\Big) =$$

$$= g^{ij} g^{\alpha\beta}\, (\delta g_{ij})_{,\alpha\beta} - g^{ij} g^{\alpha\beta}\, (\delta g_{j\alpha})_{,i\beta} - g^{ij} g^{\alpha\beta} R^{m}_{ij\beta}\, \delta g_{m\alpha} - g^{i\alpha} g^{j\beta} R_{ij}\, \delta g_{\alpha\beta}.$$

Отримаємо (21).

Твердження доведено.

Означення 4. Похідною Лі в напрямі вектора $\xi^{\alpha}(x)$ від тензорного поля $T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ типу (p, q), що задані в рімановому просторі (V_n, g_{ij}), називається тензорне поле типу (p, q), що визначається за формулою

$$\begin{aligned} L_{\xi}\left(T^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\right) = {} & \xi^{\alpha}\, \partial_{\alpha} T^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} \\ & - \partial_{\alpha}\xi^{j_1}\, T^{\alpha j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} - \cdots - \partial_{\alpha}\xi^{j_q}\, T^{j_1 j_2 \ldots \alpha}_{i_1 i_2 \ldots i_p} \\ & + \partial_{i_1}\xi^{\alpha}\, T^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{\alpha i_2 \ldots i_p} + \cdots + \partial_{i_p}\xi^{\alpha}\, T^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \ldots \alpha}. \end{aligned} \tag{24}$$

або

$$\begin{aligned} L_{\xi}\left(T^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\right) = {} & \xi^{\alpha} T^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p,\, \alpha} \\ & - \xi^{j_1}_{,\,\alpha} T^{\alpha j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} - \cdots - \xi^{j_q}_{,\,\alpha} T^{j_1 j_2 \ldots \alpha}_{i_1 i_2 \ldots i_p} \\ & + \xi^{\alpha}_{,\, i_1} T^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{\alpha i_2 \ldots i_p} + \cdots + \xi^{\alpha}_{,\, i_p} T^{j_1 j_2 \cdots j_q}_{i_1 i_2 \ldots \alpha}. \end{aligned} \tag{25}$$

Твердження 7. Нехай рімановий простір (V_n, g_{ij}) зазнає інфінітезимальної деформації (1) і

$$\begin{aligned} L_{\bar\lambda}\Big(T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p}\Big) = {} & \lambda^{\alpha}\partial_{\alpha} T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} - \partial_{\alpha}\lambda^{j_1} T^{\alpha j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots i_p} - \cdots - \partial_{\alpha}\lambda^{j_q} T^{j_1 j_2 \ldots \alpha}_{i_1 i_2 \ldots i_p} \\ & + \partial_{i_1}\lambda^{\alpha} T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{\alpha i_2 \ldots i_p} + \cdots + \partial_{i_p}\lambda^{\alpha} T^{j_1 j_2 \ldots j_q}_{i_1 i_2 \ldots \alpha}. \end{aligned} \tag{26}$$

Похідна Лі вздовж векторного поля $\bar\lambda^{\alpha}(x)$, тоді

$$\delta L_{\bar\lambda}\left(T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}\right)=L_{\delta\bar\lambda}\left(T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}\right)+L_{\bar\lambda}\left(\delta T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}\right). \tag{27}$$

Доведення.

Зваріюємо (24), з урахуванням (5) та тим фактом, що операції диференціювання та варіювання мають комутативну властивість, отримаємо

$$\begin{aligned}\delta\Big(L_{\bar\xi}\left(T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}\right)\Big)&=(\delta\lambda^\alpha)\partial_\alpha T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}+\lambda^\alpha\partial_\alpha(\delta T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p})\\&-\partial_\alpha(\delta\lambda^{j_1})T^{\alpha j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}-\partial_\alpha\lambda^{j_1}(\delta T^{\alpha j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p})\\&-\cdots-\partial_\alpha(\delta\lambda^{j_q})T^{j_1j_2\ldots\alpha}_{i_1i_2\ldots i_p}-\partial_\alpha\lambda^{j_q}(\delta T^{j_1j_2\ldots\alpha}_{i_1i_2\ldots i_p})\\&+\partial_{i_1}(\delta\lambda^\alpha)T^{j_1j_2\ldots j_q}_{\alpha i_2\ldots i_p}+\partial_{i_1}\lambda^\alpha(\delta T^{j_1j_2\ldots j_q}_{\alpha i_2\ldots i_p})\\&+\cdots+\partial_{i_p}(\delta\lambda^\alpha)T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots\alpha}+\partial_{i_p}\lambda^\alpha(\delta T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots\alpha}).\end{aligned} \tag{28}$$

Вводячи позначення, згідно (24),

$$\begin{aligned}L_{\delta\bar\lambda}\left(T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}\right)&=(\delta\lambda^\alpha)\partial_\alpha T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}-\partial_\alpha(\delta\lambda^{j_1})T^{\alpha j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}\\&-\cdots-\partial_\alpha(\delta\lambda^{j_q})T^{j_1j_2\ldots\alpha}_{i_1i_2\ldots i_p}+\partial_{i_1}(\delta\lambda^\alpha)T^{j_1j_2\ldots j_q}_{\alpha i_2\ldots i_p}\\&+\cdots+\partial_{i_p}(\delta\lambda^\alpha)T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots\alpha},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{\bar\lambda}\left(\delta T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}\right)&=\lambda^\alpha\partial_\alpha(\delta T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p})-\partial_\alpha\lambda^{j_1}(\delta T^{\alpha j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p})\\&-\cdots-\partial_\alpha\lambda^{j_q}(\delta T^{j_1j_2\ldots\alpha}_{i_1i_2\ldots i_p})+\partial_{i_1}\lambda^\alpha(\delta T^{j_1j_2\ldots j_q}_{\alpha i_2\ldots i_p})\\&+\cdots+\partial_{i_p}\lambda^\alpha(\delta T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots\alpha}).\end{aligned}$$

Отримаємо (27).

Твердження доведено.

Наслідок. Нехай рімановий простір (V_n,g_{ij}) зазнає інфінітезимальної деформації (1) з вектором зміщення $\xi^\alpha(x)$, тоді має місце співвідношення

$$\delta L_{\bar\xi}\left(T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}\right)=L_{\bar\xi}\left(\delta T^{j_1j_2\ldots j_q}_{i_1i_2\ldots i_p}\right). \tag{29}$$

Доведення.

Оскільки в напрямі вектора $\xi^\alpha(x)$ варіація $\delta(\xi^\alpha(x))=0$, то з (27) отримуємо (29).

Наслідок доведено.

З наслідку випливає, що вздовж вектора зміщення операції варіювання тензорного поля та взяття похідної Лі комутують. Отже результат варіювання тензорного поля при інфінітезимальній деформації (1) можна трактувати, як взяття похідної Лі вздовж вектора зміщення.

Твердження 8. В тривимірному рімановому просторі тензор кривини Рімана завжди можна виразити через симетричний тензор 2 рангу за формулою

$$R_{ijkl} = R_{lk}g_{ij} - R_{lj}g_{ik} + R_{ij}g_{lk} - R_{ik}g_{lj} + \frac{R}{2}\left(g_{lj}g_{ik} - g_{lk}g_{ij}\right). \tag{30}$$

Доведення.

Шукаємо R_{ijkl} у вигляді

$$R_{ijkl} = A_{lk}g_{ij} - A_{lj}g_{ik} + A_{ij}g_{lk} - A_{ik}g_{lj}. \tag{31}$$

де A_{ij} — деякий симетричний тензор, зв'язок з R_{ij} визначається шляхом згортки написаного виразу з g^{lk}. Таким чином знаходимо:

$$R_{ij} = Ag_{ij} - A_{ij} + 3A_{ij} - A_{ij},$$

тобто

$$R_{ij} = Ag_{ij} + A_{ij}. \tag{32}$$

Згортаючи (32) з g^{ij} отримаємо:

$$R = 4A,$$

або

$$A = \frac{R}{4}. \tag{33}$$

Отже

$$A_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{4} g_{ij}. \tag{34}$$

Підставимо (34) в (31), отримаємо (30).

Твердження доведено.

Наслідок. В тривимірному просторі тензор Рімана можна подати у вигляді (31), де A_{ij} — деякий симетричний тензор вигляду (34). Або для тензору Рімана $(3,1)$ у вигляді

$$R^h_{ijk} = A^h_{\ k} g_{ij} - A^h_{\ j} g_{ik} + A_{ij}\delta^h_k - A_{ik}\delta^h_j.$$

2. Канонічні інфінітезимальні деформації тривимірних ріманових просторів.

Означення 5. Інфінітезимальна деформація виду (1) ріманового простору (V_n, g_{ij}) називається канонічною, якщо варіацію метрики δg_{ij} можна подати у вигляді

$$\delta g_{ij} = \tau_1 g_{ij} + \tau_2 R_{ij}, \tag{35}$$

де τ_1, τ_2 — довільні інваріантні функції, що підлягають визначенню.

Твердження 9. Коваріантна похідна варіації метричного тензора, варіації взаємного метричного тензора, ріманової зв'язності, тензора кривини Рімана типу $(3,1)$, тензора Річчі та скалярної кривини ріманового простору (V_n, g_{ij}) при канонічній інфінітезимальній деформації (35) визначається через варіацію метрики за формулами

$$(\delta g_{ij})_{,k} = (\tau_1)_{,k}\, g_{ij} + (\tau_2)_{,k}\, R_{ij} + \tau_2\, R_{ij,k}. \tag{36}$$

$$\delta g^{ij} = -\tau_1 g^{ij} - \tau_2 g^{i\alpha} g^{j\beta} R_{\alpha\beta}, \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2}\Big(&(\tau_1)_{,j}\delta^h_i + (\tau_1)_{,i}\delta^h_j - (\tau_1)^{,h} g_{ij} \\ &+ (\tau_2)_{,j} R^h_i + (\tau_2)_{,i} R^h_j - (\tau_2)^{,h} R_{ij} \\ &+ \tau_2 (R^h_{i,j} + R^h_{j,i} - g^{\alpha h} R_{ij,\alpha})\Big),\end{aligned} \tag{38}$$

$$\delta R^h_{ijk} = \frac{1}{2}\Big((\tau_1)_{,ij}\,\delta^h_k - (\tau_1)_{,ik}\,\delta^h_j + (\tau_1)^{,h}_{,k}\,g_{ij} - (\tau_1)^{,h}_{,j}\,g_{ik}$$
$$+ (\tau_2)_{,ij}\,R^h_k - (\tau_2)_{,ik}\,R^h_j + (\tau_2)^{,h}_{,k}\,R_{ij} - (\tau_2)^{,h}_{,j}\,R_{ik}$$
$$+ (\tau_2)_{,j}\Big(R^h_{k,i} - g^{\alpha h}R_{ik,\alpha}\Big) - (\tau_2)_{,k}\Big(R^h_{j,i} - g^{\alpha h}R_{ij,\alpha}\Big)$$
$$+ (\tau_2)_{,i}\Big(R^h_{k,j} - R^h_{j,k}\Big)$$
$$+ \tau_2\Big(R^h_{k,ij} - R^h_{j,ik} + R^h_{i,kj} - R^h_{i,jk} + g^{\alpha h}(R_{ij,\alpha k} - R_{ik,\alpha j})\Big)\Big). \tag{39}$$

$$\delta R_{ij} = \frac{1}{2}\Big((\tau_1)_{,ij} + (\tau_1)_{,\alpha}^{\ \alpha} g_{ij} + (\tau_2)_{,ij}R - (\tau_2)_{,i\alpha}R^\alpha_j + (\tau_2)^\alpha R_{ij} - (\tau_2)^\alpha_{,j}R_{i\alpha}$$
$$+ (\tau_2)_{,j}(R_{,i} - R^\alpha_{k,\alpha}) - (\tau_2)_{,\alpha}(R^\alpha_{j,i} - g^{\beta\alpha}R_{ij,\beta})$$
$$+ (\tau_2)_{,\alpha}(R^\alpha_{k,j} - R^\alpha_{j,k})$$
$$+ \tau_2\big(R_{ij} - R^\alpha_{j,i\alpha} + R^\alpha_{i,\alpha j} - R^\alpha_{i,j\alpha} + g^{\alpha\beta}(R_{ij,\alpha\beta} - R_{i\beta,\alpha j})\big)\Big). \tag{40}$$

$$\begin{aligned} \delta R = {} & 2(\tau_1)_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta} - 2(\tau_1)R - 2(\tau_2)R^m_\beta R^\beta_m + (\tau_2)^\beta R_{,\beta} + (\tau_2)R_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta} \\ & - (\tau_2)_{,i\beta}R^\beta_j g^{ij} - (\tau_2)_{,j}R^\beta_{j,\beta} - (\tau_2)_{,\beta}R^\beta_{j,i}g^{ij} + (\tau_2)_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta}R. \end{aligned} \tag{41}$$

Де

$$(\tau_1)^h = (\tau_1)_{,\alpha}g^{\alpha h}, \qquad (\tau_2)^h = (\tau_2)_{,\alpha}g^{\alpha h}.$$

Доведення.
(36) отримуємо коваріантним диференціюванням (35),
(37) отримуємо підстановкою (35) в (19),

Для доведення (39) в (15) підставимо (38).

$$\delta R^h_{ijk} = (\delta\Gamma^h_{ik})_{,j} - (\delta\Gamma^h_{ij})_{,k} =$$
$$= \Big(\frac{1}{2}\Big((\tau_1)_{,k}\delta^h_i + (\tau_1)_{,i}\delta^h_k - (\tau_1)^h g_{ik} + (\tau_2)_{,k}R^h_i + (\tau_2)_{,i}R^h_k - (\tau_2)^h R_{ik} +$$
$$+\tau_2\big(R^h_{i,k} + R^h_{k,i} - g^{\alpha h}R_{ik,\alpha}\big)\Big)\Big)_{,j} - \frac{1}{2}\Big(\Big((\tau_1)_{,j}\delta^h_i + (\tau_1)_{,i}\delta^h_j - (\tau_1)^h g_{ij} +$$
$$+(\tau_2)_{,j}R^h_i + (\tau_2)_{,i}R^h_j - (\tau_2)^h R_{ij} + \tau_2\big(R^h_{i,j} + R^h_{j,i} - g^{\alpha h}R_{ij,\alpha}\big)\Big)\Big)_{,k} =$$
$$= \frac{1}{2}\Big((\tau_1)_{,kj}\delta^h_i + (\tau_1)_{,ij}\delta^h_k - (\tau_1)^h_{,j}g_{ik} + (\tau_2)_{,kj}R^h_i + (\tau_2)_{,k}R^h_{i,j} + (\tau_2)_{,ij}R^h_k + (\tau_2)_{,i}R^h_{k,j} -$$
$$-(\tau_2)^h_{,j}R_{ik} - (\tau_2)^h R_{ik,j} + (\tau_2)_{,j}\big(R^h_{i,k} + R^h_{k,i} - g^{\alpha h}R_{ik,\alpha}\big) + \tau_2\big(R^h_{i,k} + R^h_{k,i} - g^{\alpha h}R_{ik,\alpha}\big)_{,j}\Big) -$$
$$-\frac{1}{2}\Big((\tau_1)_{,jk}\delta^h_i + (\tau_1)_{,ik}\delta^h_j - (\tau_1)^h_{,k}g_{ij} + (\tau_2)_{,jk}R^h_i + (\tau_2)_{,j}R^h_{i,k} + (\tau_2)_{,ik}R^h_j + (\tau_2)_{,i}R^h_{j,k} -$$
$$-(\tau_2)^h_{,k}R_{ij} - (\tau_2)^h R_{ij,k} + (\tau_2)_{,k}\big(R^h_{i,j} + R^h_{j,i} - g^{\alpha h}R_{ij,\alpha}\big) + \tau_2\big(R^h_{i,j} + R^h_{j,i} - g^{\alpha h}R_{ij,\alpha}\big)_{,k}\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big((\tau_1)_{,ij}\delta^h_k - (\tau_1)^h_{,j}g_{ik} + (\tau_2)_{,kj}R^h_i + (\tau_2)_{,k}R^h_{i,j} + (\tau_2)_{,ij}R^h_k + (\tau_2)_{,i}R^h_{k,j} - (\tau_2)^h_{,j}R_{ik} - (\tau_2)^h R_{ik,j} +$$
$$+(\tau_2)_{,j}\big(R^h_{i,k} + R^h_{k,i} - g^{\alpha h}R_{ik,\alpha}\big) + \tau_2\big(R^h_{i,k} + R^h_{k,i} - g^{\alpha h}R_{ik,\alpha j}\big) - (\tau_1)_{,ik}\delta^h_j + (\tau_1)^h_{,k}g_{ij} -$$
$$-(\tau_2)_{,jk}R^h_i - (\tau_2)_{,j}R^h_{i,k} - (\tau_2)_{,ik}R^h_j - (\tau_2)_{,i}R^h_{j,k} + (\tau_2)^h_{,k}R_{ij} + (\tau_2)^h R_{ij,k} -$$
$$-(\tau_2)_{,k}\big(R^h_{i,j} + R^h_{j,i} - g^{\alpha h}R_{ij,\alpha}\big) - \tau_2\big(R^h_{i,jk} + R^h_{j,ik} - g^{\alpha h}R_{ij,\alpha k}\big)\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big((\tau_1)_{,ij}\delta^h_k - (\tau_1)_{,ik}\delta^h_j + (\tau_1)^h_{,k}g_{ij} - (\tau_1)^h_{,j}g_{ik} + (\tau_2)_{,ij}R^h_k - (\tau_2)_{,ik}R^h_j + (\tau_2)^h_{,k}R_{ij} - (\tau_2)^h_{,j}R_{ik} +$$
$$+(\tau_2)_{,j}\big(R^h_{k,i} - g^{\alpha h}R_{ik,\alpha}\big) - (\tau_2)_{,k}\big(R^h_{j,i} - g^{\alpha h}R_{ij,\alpha}\big) + (\tau_2)_{,i}\big(R^h_{k,j} - R^h_{j,k}\big) +$$
$$+\tau_2\Big(R^h_{k,ij} - R^h_{j,ik} + R^h_{i,kj} - R^h_{i,jk} + g^{\alpha h}\big(R_{ij,\alpha k} - R_{ik,\alpha j}\big)\Big)\Big).$$

(39) доведено.

Для доведення (40) згорнемо (39) за індексами h та k.

Для доведення (41), підставимо (21), в вирази (35), (37).

$$\delta R = g^{ij}g^{\alpha\beta}(\delta g_{ij})_{,\alpha\beta} - g^{ij}g^{\alpha\beta}(\delta g_{j\alpha})_{,i\beta} - g^{ij}g^{\alpha\beta}R^m_{ij\beta}\,\delta g_{m\alpha} - g^{i\alpha}g^{j\beta}R_{ij}\,\delta g_{\alpha\beta}$$
$$(\delta g_{ij})_{,\alpha\beta} = (\tau_1)_{,\alpha\beta}\,g_{ij} + (\tau_2)_{,\alpha\beta}\,R_{ij} + (\tau_2)_{,\alpha}\,R_{ij,\beta} + (\tau_2)_{,\beta}\,R_{ij,\alpha} + \tau_2\,R_{ij,\alpha\beta}$$
$$(\delta g_{j\alpha})_{,i\beta} = (\tau_1)_{,i\beta}\,g_{j\alpha} + (\tau_2)_{,i\beta}\,R_{j\alpha} + (\tau_2)_{,i}\,R_{j\alpha,\beta} + (\tau_2)_{,\beta}\,R_{j\alpha,i} + \tau_2\,R_{j\alpha,i\beta}$$

$$\delta g_{m\alpha} = (\tau_1)g_{m\alpha} + (\tau_2)R_{m\alpha}$$

матимемо

$$
\begin{aligned}
\delta R = &\big(3(\tau_1)_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + (\tau_2)_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta}R + 2(\tau_2)^{\beta}R_{,\beta} + (\tau_2)R_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta}\big) \\
&- \big((\tau_1)_{,ij}g^{ij} + (\tau_2)_{,i\beta}R^{\beta}_{j}g^{ij} + (\tau_2)^{j}R^{\beta}_{j,\beta} + (\tau_2)_{,\beta}R^{\beta}_{j,i}g^{ij} + (\tau_2)R^{\beta}_{j,i\beta}g^{ij}\big) \\
&- 2(\tau_1)R - 2(\tau_2)R^{m}_{\beta}R^{\beta}_{m} \\
= &\, 2(\tau_1)_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + (\tau_2)_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta}R + 2(\tau_2)^{\beta}R_{,\beta} + (\tau_2)R_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta} \\
&- (\tau_2)_{,i\beta}R^{\beta}_{j}g^{ij} - (\tau_2)^{j}R^{\beta}_{j,\beta} - (\tau_2)_{,\beta}R^{\beta}_{j,i}g^{ij} - (\tau_2)R^{\beta}_{j,i\beta}g^{ij} \\
&- 2(\tau_1)R - 2(\tau_2)R^{m}_{\beta}R^{\beta}_{m}.
\end{aligned}
$$

Твердження доведено.

Означення 6. Ріманів простір $(\widetilde{V}_n, \widetilde{g}_{ij})$ називається інфінітезимальною геодезичною деформацією ріманового простору (V_n, g_{ij}), якщо в результаті деформації зберігаються, в головному, геодезичні лінії простору (V_n, g_{ij}).

Твердження 10. Будь-яка інфінітезимальна геодезична деформація тривимірного ріманового простору (V_n, g_{ij}) є канонічною інфінітезимальною деформацією (35), при цьому функції τ_1, τ_2 пов'язані формулою

$$\lambda = \frac{1}{8}\left(3\tau_1 + R\tau_2\right). \tag{42}$$

де λ — функція трьох змінних.

Доведення.

При геодезичній деформації ріманового простору

$$\delta\Gamma^{m}_{ik} = \lambda_i\delta^{m}_{k} + \lambda_k\delta^{m}_{i},$$

λ_i — градієнтний вектор.

Підставимо в (10) матимемо

$$
\begin{aligned}
(\delta g_{ij})_{,k} &= g_{kj}\lambda_i + g_{ki}\lambda_j + 2g_{ij}\lambda_k, \\
(\delta g_{ij})_{,kl} &= g_{kj}\lambda_{i,l} + g_{ki}\lambda_{j,l} + 2g_{ij}\lambda_{k,l}, \\
(\delta g_{ij})_{,lk} &= g_{lj}\lambda_{i,k} + g_{li}\lambda_{j,k} + 2g_{ij}\lambda_{l,k}, \\
(\delta g_{ij})_{,kl} - (\delta g_{ij})_{,lk} &= \lambda_{(i,j)k} - \lambda_{k,(i,j)l}.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

За тотожністю Річчі

$$\begin{aligned}\delta g_{ij,kl} - \delta g_{ij,lk} &= \delta g_{\sigma j} R^{\alpha}_{ikl} + \delta g_{i\alpha} R^{\alpha}_{jkl} \\ &= \delta g_{\sigma j}\left(A^{\alpha}_{l} g_{ik} - A^{\alpha}_{k} g_{il} + A_{ik}\delta^{\alpha}_{l} - A_{il}\delta^{\alpha}_{k}\right) \\ &\quad + \delta g_{i\alpha}\left(A^{\alpha}_{l} g_{jk} - A^{\alpha}_{k} g_{jl} + A_{jk}\delta^{\alpha}_{l} - A_{jl}\delta^{\alpha}_{k}\right) \\ &= \lambda_{l,i} g_{jk} + \lambda_{l,j} g_{ik} - \lambda_{k,i} g_{jl} - \lambda_{k,j} g_{il}\end{aligned}$$

Або у вигляді

$$\begin{aligned}g_{jk}\big(\delta g_{i\alpha} A^{\alpha}_{l} - \lambda_{l,i}\big) + g_{ik}\big(\delta g_{\alpha j} A^{\alpha}_{l} - \lambda_{l,j}\big) - g_{jl}\big(\delta g_{i\alpha} A^{\alpha}_{k} - \lambda_{k,i}\big) \\ -g_{il}\big(\delta g_{\alpha j} A^{\alpha}_{k} - \lambda_{k,j}\big) + \delta g_{il} A_{jk} + \delta g_{lj} A_{ik} - \delta g_{kj} A_{il} - \delta g_{ik} A_{jl} = 0.\end{aligned} \tag{44}$$

$$R^{h}_{ijk} = A^{h}{}_{k} g_{ij} - A^{h}{}_{j} g_{ik} + A_{ij}\delta^{h}_{k} - A_{ik}\delta^{h}_{j}$$

$$R^{\alpha}_{ikl} = A^{\alpha}{}_{l} g_{ik} - A^{\alpha}{}_{k} g_{il} + A_{ik}\delta^{\alpha}_{l} - A_{il}\delta^{\alpha}_{k}$$

$$R^{\alpha}_{jkl} = A^{\alpha}{}_{l} g_{jk} - A^{\alpha}{}_{k} g_{jl} + A_{jk}\delta^{\alpha}_{l} - A_{jl}\delta^{\alpha}_{k}$$

Введемо в розгляд симетричний тензор

$$G_{il} = \delta g_{i\alpha} A^{\alpha}_{l} - \lambda_{l,i} \tag{45}$$

Маємо

$$g_{jk}G_{il} + g_{ik}G_{jl} - g_{jl}G_{ik} - g_{il}G_{jk} + \delta g_{il}A_{jk} + \delta g_{lj}A_{ik} - \delta g_{kj}A_{il} - \delta g_{ik}A_{jl} = 0 \tag{46}$$

(46) проальтернуємо за індексами $j \leftrightarrow k$ отримаємо

$$g_{ik}G_{jl} - g_{ij}G_{kl} - g_{jl}G_{ik} + g_{kl}G_{ij} + \delta g_{lj}A_{ik} - \delta g_{lk}A_{ij} - \delta g_{ik}A_{jl} + \delta g_{ij}A_{kl} = 0 \tag{47}$$

В (47) робимо заміну індексів $i \leftrightarrow k$ матимемо

$$g_{ik}G_{jl} - g_{kj}G_{il} - g_{jl}G_{ik} + g_{il}G_{kj} + \delta g_{lj}A_{ik} - \delta g_{li}A_{kj} - \delta g_{ik}A_{jl} + \delta g_{kj}A_{il} = 0 \tag{48}$$

До рівності (46) додаємо (48), матимемо

$$2g_{ik}G_{jl} - 2g_{jl}G_{ik} + 2\delta g_{lj}A_{ik} - 2\delta g_{ik}A_{jl} = 0 \tag{49}$$

Розділивши (49) на 2 матимемо

$$g_{ik}G_{jl} - g_{jl}G_{ik} + \delta g_{lj}A_{ik} - \delta g_{ik}A_{jl} = 0 \tag{50}$$

(50) згорнемо з g^{ik}

Отримаємо

$$3G_{jl} - g_{jl}G + \delta g_{lj}A - \delta g A_{jl} = 0$$

$$G_{jl} = \frac{1}{3}\left(G g_{jl} - A\delta g_{jl} + \mu A_{jl}\right) \tag{51}$$

$$\mu = g^{ik}\delta g_{ik}$$

(51) підставимо в (50) матимемо

$$g_{ik}\frac{1}{3}\left(G g_{jl} - A\delta g_{jl} + \mu A_{jl}\right) - g_{jl}\frac{1}{3}\left(G g_{ik} - A\delta g_{ik} + \mu A_{ik}\right) + \delta g_{lj}A_{ik} - \delta g_{ik}A_{jl} = 0 \tag{52}$$

(52) перепишемо у вигляді

$$g_{ik}\frac{1}{3}\left(G g_{jl} - A\delta g_{jl} + \mu A_{jl}\right) - g_{jl}\frac{1}{3}\left(G g_{ik} - A\delta g_{ik} + \mu A_{ik}\right) + \delta g_{lj}A_{ik} - \delta g_{ik}A_{jl} = 0 \tag{53}$$

$$\left(\frac{\mu}{3}g_{ik} - \delta g_{ik}\right)A_{jl} - \left(\frac{\mu}{3}g_{jl} - \delta g_{jl}\right)A_{ik} + \frac{A}{3}\left(g_{jl}\delta g_{ik} - g_{ik}\delta g_{lj}\right) = 0$$

Рівність (53) згорнемо з ненульовим вектором $\xi^i\xi^j$, та введемо позначення

$$\begin{aligned} \nu_1 &= A_{ij}\xi^i\xi^j, \\ \nu_2 &= g_{ij}\xi^i\xi^j, \\ \nu_3 &= \delta g_{ij}\xi^i\xi^j, \end{aligned} \tag{54}$$

Матимемо

$$\left(\frac{\mu}{3}g_{ik} - \delta g_{ik}\right)\nu_1 - \left(\frac{\mu}{3}\nu_2 - \nu_3\right)A_{ik} + \frac{A}{3}\left(\nu_2\delta g_{ik} - g_{ik}\nu_3\right) = 0 \tag{55}$$

(55) перепишемо у вигляді

$$\left(\frac{A}{3}\nu_2 - \nu_1\right)\delta g_{ik} = \left(\frac{A}{3}\nu_3 - \frac{\mu}{3}\nu_1\right) g_{ik} + \left(\frac{\mu}{3}\nu_2 - \nu_3\right) A_{ik} \qquad (56)$$

Введемо позначення

$$\tau_1 = \frac{\frac{A}{3}\nu_3 - \frac{\mu}{3}\nu_1}{\frac{A}{3}\nu_2 - \nu_1}, \qquad \tau_2 = \frac{\frac{\mu}{3}\nu_2 - \nu_3}{\frac{A}{3}\nu_2 - \nu_1},$$

отримаємо

(35), що доводить канонічність геодезичних деформацій.

Перейдемо до зв'язку між інваріантами τ_1, τ_2. Прирівняємо праві частини (36) та (43) матимемо:

$$(\tau_1)_{,k} g_{ij} + (\tau_2)_{,k} R_{ij} + \tau_2 R_{ij,k} = g_{kj}\lambda_i + g_{ki}\lambda_j + 2g_{ij}\lambda_k \qquad (57)$$

Згортаємо (57) з g^{ij} матимемо;

$$3(\tau_1)_{,k} + (\tau_2 R)_{,k} = 8\lambda_k \qquad (58)$$

З (58) випливає (42) з точністю до довільної сталої.

Твердження 10. доведено.

Висновки

Отже клас введених канонічних деформацій не пустий. У випадку тривимірних псевдо ріманових просторів до цього класу належить вивчені раніше [1] геодезичні деформації.

Список літератури

1. **Гаврильченко М., Киосак В., Микеш Й.** Геодезические деформации гиперповерхностей римановых пространств // Известия вузов. Математика. — 2004. — № 5. — С. 23–29.
English version: Geodesic deformations of hypersurfaces of Riemannian spaces // Applied Mathematics and Computation. — 2012. — Vol. 218, No. 13. — P. 6999–7004.

2. **Doikov D., Kiosak V.** On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe // AIP Conference Proceedings. — 2020. — Vol. 2302. — 040001. doi: 10.1063/5.003
3. **Eisenhart L. P.** Riemannian Geometry. — Princeton: Princeton University Press, 1997.
4. **Hinterleitner I., Kiosak V.** Special Einstein's equations on Kahler manifolds // Archivum Mathematicum. — 2010. — Vol. 46, No. 5. — P. 333–337.
5. **Каган В. Ф.** Субпроективные пространства. — М.: Физматгиз, 1961.
6. **Kiosak V., Kovalova G.** Geodesic mappings of quasi-Einstein spaces with a constant scalar curvature // Matematychni Studii. — 2020. — Vol. 53, No. 2. — P. 212–217. doi: 10.30970/ms.53.2.212-217
7. **Kiosak V., Matveev V.** Complete Einstein metrics are geodesically rigid // Communications in Mathematical Physics. — 2009. — Vol. 289, No. 1. — P. 383–400. doi: 10.1007/s00220-008-0719-7
8. **Kiosak V., Matveev V.** Proof of the projective Lichnerowicz conjecture for pseudo-Riemannian metrics with degree of mobility greater than two // Communications in Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 297, No. 2. — P. 401–426. doi: 10.1007/s00220-010-1037-4
9. **Kiosak V., Matveev V.** There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor // Journal of Geometry and Physics. — 2014. — Vol. 78. — P. 1–11. doi: 10.1016/j.geomphys.2014.01.002
10. **Kiosak V., Matveev V., Mikes J., Shandra I.** On the degree of geodesic mobility for Riemannian metrics // Mathematical Notes. — 2010. — Vol. 87, No. 3–4. — P. 586–587. doi: 10.1134/S000143461003037
11. **Kiosak V., Prishlyak O., Lesechko O.** On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor // Proceedings of the International Geometry Center. — 2021. — Vol. 14, No. 4. — P. 243–256. doi: 10.15673/tmgc.v14i4.2140
12. **Kiosak V., Savchenko A., Kamienieva A.** Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces with constant scalar curvature // AIP Conference Proceedings. — 2020. — Vol. 2302. — 040002. doi: 10.1063/5.0033661
13. **Kiosak V., Savchenko A., Khniunin S.** On the typology of quasi-Einstein spaces // AIP Conference Proceedings. — 2020. — Vol. 2302. — 040003. doi: 10.1063/5.0033700
14. **Kiosak V., Savchenko A., Kovalova G.** Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I // Proceedings of the International Geometry Center. — 2020. — Vol. 13, No. 1. — P. 35–48. doi: 10.15673/tmgc.v13i1.1711

15. **Kiosak V., Savchenko A., Latysh O.** Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II // Proceedings of the International Geometry Center. — 2021. — Vol. 14, No. 1. — P. 81–92.
doi: 10.15673/tmgc.v14i1.1936

16. **Кручкович Г. И.** Римановы и псевдоримановы пространства // Итоги науки и техники. Сер. Математика. Алгебра. Топология. Геометрия. — 1968. — С. 191–220.

17. **Levi-Civita T.** Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche // Annali di Matematica Pura ed Applicata. — 1896. — Ser. 2, Vol. 24. — P. 255–300.
doi: 10.1007/bf02419530

18. **Mikes J.** Geodesic mappings of Einstein spaces // Mathematical Notes. — 1981. — Vol. 28. — P. 922–923.

19. **Mikes J., Hinterleitner I., Kiosak V.** On the theory of geodesic mappings of Einstein spaces and their generalizations // AIP Conference Proceedings. — 2006. — Vol. 861. — P. 428–435.
doi: 10.1063/1.2399606

20. **Mikes J., Kiosak V., Vanzurova O.** Geodesic mappings of manifolds with affine connection. — Olomouc: Palacky University Press, 2008.

21. **Потапенко И. В.** О восстановлении вариации метрического тензора поверхности по заданной вариации символов Кристоффеля второго рода при инфинитезимальных деформациях поверхности в евклидовом пространстве E^3 // Украинский математический журнал. — 2011. — Т. 63, № 4. — С. 523–530.

22. **Синюков Н. С.** Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.

23. **Собчук В. С.** Римановы пространства, допускающие обобщённо-рекуррентный симметрический тензор второго порядка // Доклады АН СССР. — 1969. — Т. 185, № 6. — С. 1247–1250.

24. **Собчук В. С.** Римановы пространства с обобщённо-симметрическим тензором Риччи допускают нетривиальные геодезические отображения // Доклады АН СССР. — 1982. — Т. 267, № 4. — С. 793–795.

25. **Собчук В. С.** Геодезические отображения некоторых классов римановых пространств // Известия вузов. Математика. — 1990. — Т. 34, № 4. — С. 56–59.

26. **Собчук В. С.** Геодезические отображения римановых пространств с четырёхсимметрическим тензором Риччи // Известия вузов. Математика. — 1991. — Т. 35, № 4. — С. 68–69.

Potapenko I. V.

On Canonical Deformations of Three-Dimensional Riemannian Metrics

Summary

In this paper, the notion of canonical deformations of three-dimensional Riemannian metrics is introduced. Using the apparatus of tensor analysis and the theory of partial differential equations, it is shown, by the example of geodesic deformations, that this is a broader class of infinitesimal deformations; it is non-empty and of interest for further study.
Keywords: Riemannian space, metric variation, canonical deformations, curvature tensor, geodesic deformations.

References

1. M.Gavrilchenko, V. Kiosak, J. Mikes Geodesic deformations of hypersurfaces of Riemannian spaces// (Iz. VUZ),. Math.Kazan.2004 г. т.500. с. 23-29. //Applied Mathemat ics and Computation – 2012.– №218(13).– С. 6999–7004
2. D. Doikov and V. Kiosak. On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe.AIP Conference Proceedings, 2302(040001), 2020. doi:10.1063/5.0033657
3. L. P. Eisenhart. Riemannian geometry. Princeton University Press, 1997.
4. I. Hinterleitner and V. Kiosak. Special Einstein's equations on Kahler manifolds. Archivum Mathematicum, 46(5):333–337, 2010.
5. V. F. Kagan Subprojective spaces. Moscow:Fizmatgiz, 1961.
6. V. Kiosak and G. Kovalova. Geodesic mappings of quasi-Einstein spaces with a constant scalar curvature.Matematychni Studii, 53(2):212–217, 2020. doi:10.30970/ms.53.2.212-217
7. V. Kiosak and V. Matveev. Complete Einstein metrics are geodesically rigid. Communications in Mathematical Physics, 289(1):383–400, 2009. doi:10.1007/s00220-008-0719-7
8. V. Kiosak and V. Matveev. Proof of projective Lichnerowicz conjecture for pseudo-Riemannian metrics with degree of mobility greater than two. Communications in Mathematical Physics, 297(2):401–426, 2010. doi:10.1007/s00220-010-1037-4
9. V. Kiosak and V. Matveev. There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor. Journal of Geometry and Physics, 78:1–11,2014. doi:10.1016/j.geomphys.2014.01.002
10. V. Kiosak, V. Matveev, J. Mikes, and I. Shandra. On the degree of geodesic mobility for Riemannian metrics.Mathematical Notes, 87(3-4):586–587, 2010. doi:10.1134/S0001434610030375

11. V. Kiosak, O. Prishlyak, and O. Lesechko. On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. Proceedings of the International Geometry Center, 14(4):243–256, 2021. doi:10.15673/tmgc.v14i4.2140
12. V. Kiosak, A. Savchenko, and A. Kamienieva. Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces with constant scalar curvature. AIP Conference Proceedings,2302(040002), 2020. doi:10.1063/5.0033661
13. V. Kiosak, A. Savchenko, and S. Khniunin. On the typology of quasi-Einstein spaces. AIP Conference Proceedings, 2302(040003), 2020. doi:10.1063/5.0033700
14. V. Kiosak, A. Savchenko, and G. Kovalova. Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, l. Proceedings of the International Geometry Center, 13(1):35–48,2020. doi:10.15673/tmgc.v13i1.1711
15. V. Kiosak, A. Savchenko, and O. Latysh. Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II.Proceedings of the International Geometry Center, 14(1):81–92, 2021. doi:10.15673/tmgc.v14i1.1936
16. G. I. Kruchkovich. Riemannian and pseudo-Riemannian spaces. Itogi Nauki. Ser. Mat. Algebra. Topol. Geom., pages 191–220, 1968.
17. T. Levi-Civita. Sulle transformationi delle equazioni dinamiche. Ann. Mat. Milano, Ser. 2., 24:255–300, 1896. doi:10.1007/bf02419530
18. J. Mikes. Geodesic mappings of Einstein spaces. Math. Notes, 28:922–923, 1981.
19. J. Mikes, I. Hinterleitner, and V. Kiosak. On the theory of geodesic mappings of Einstein spaces and their generalizations. AIP Conference Proceedings, 861:428–435, 2006. doi:10.1063/1.2399606
20. J. Mikes, V. Kiosak, and O. Vanzurova. Geodesic mappings of manifolds with affine connection. Palacky University Press, Olomouc, 2008.
21. I.V. Potapenko On the reconstruction of the variation of the metric tensor surface by the given variation of Christoffel symbols of the second kind under infinitesimal deformations of the surface in the Euclidean space E3 //Ukrainian Mathematical Journal. - 2011. - Vol. 63, No. 4. - C.523-530.
22. N. S. Sinyukov. Geodesic mappings of Riemannian spaces. Nauka, 1979.
23. V. S. Sobchuk. Riemannian spaces which admit a generalized-recurrent symmetric tensor of the second order. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 185(6):1247–1250, 1969.
24. V. S. Sobchuk. Ricci generalized symmetric Riemannian spaces admit nontrivial geodesic mappings. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 267(4):793–795, 1982.
25. V. S. Sobchuk. Geodesic mappings of some classes of Riemannian spaces. Soviet Math.(Iz. VUZ), 34(4):56–59, 1990.
26. V. S. Sobchuk. Geodesic mapping of Ricci 4-symmetric Riemannian spaces. Soviet Math. (Iz. VUZ), 35(4):68–69, 1991.

Дослідження в математиці і механіці. – 2025. – Т. 30, вип. 2(46). – С. 68–79

УДК 517.9

Г. Є. Самкова, *кандидат фіз.-мат. наук, доцент*
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м.Одеса, 65082, Україна
e-mail: SamkovaGalina@i.ua
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0000-1340-6067
Н. В. Шарай, *кандидат фіз.-мат. наук, доцент*
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м.Одеса, 65082, Україна
e-mail: sharay@onu.edu.ua
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0003-4007-651
О. О. Драгун, *студентка*
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м.Одеса, 65082, Україна
e-mail: o.drahun@stud.onu.edu.ua

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З РЕГУЛЯРНИМИ ТА СИНГУЛЯРНИМИ ЖМУТКАМИ МАТРИЦЬ

Дана стаття присвячена дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків систем диференціальних рівнянь, побудованих на основі регулярних та сингулярних матричних жмутків. Такі системи виникають у процесі моделювання складних динамічних явищ і характеризуються поєднанням диференціальних, алгебраїчних та функціональних співвідношень.
У роботі проаналізовано структурні властивості матричних жмутків, встановлено умови їх еквівалентних перетворень та побудовано відповідні канонічні форми. Основну увагу зосереджено на дослідженні задачі Коші для сингулярних систем та впливі алгебраїчної структури жмутка на існування, єдиність і характер асимптотичної поведінки розв'язків. Отримані результати дозволяють описати локальну поведінку розв'язків і можуть бути застосовані до аналізу широкого класу диференціально-алгебраїчних систем.
MSC: 34A09, 34A30, 15A22.

Надійшла 17.07.2025 © Самкова Г. Є., Шарай Н. В., Драгун О. О., 2025

Ключові слова: система диференціальних рівнянь, задача Коші, диференціально-алгебраїчні системи, матричний жмуток, регулярний жмуток, сингулярний жмуток, канонічна форма.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.2(46).352812

Вступ

Диференціальні системи, побудовані на основі регулярних і сингулярних матричних жмутків, є важливим об'єктом сучасної теоретичної та прикладної математики. Такі системи природно виникають під час моделювання динамічних процесів, у яких еволюція стану визначається не лише диференціальними рівняннями, а й алгебраїчною структурою відповідних матричних операторів. Подібні моделі застосовуються в математичній фізиці, теорії керування, технічній механіці, біології та економічній динаміці.

Початок систематичного дослідження диференціальних систем, пов'язаних із матричними жмутками, пов'язують із роботами Ф. Р. Гантмахера, який встановив зв'язок між алгебраїчною структурою жмутка $A + \lambda B$ та властивостями розв'язків системи

$$Ax + B\frac{dx}{dt} = f(t),$$

де A і B — сталі матриці. Надалі ці результати були розширені на випадок жмутків зі змінними елементами, що сприяло розвитку теорії функціональних матриць і сингулярних операторів.

Значний внесок у класифікацію матричних жмутків, побудову канонічних форм і дослідження спектральних характеристик зробили S. Campbell, R. Marz, M. Hanke, а також українські науковці А. М. Самойленко, Н. І. Шкіль, В. П. Яковець та інші. У випадку сингулярних або прямокутних матриць задача Коші може втрачати стандартні властивості розв'язності, що зумовлює необхідність застосування спеціальних методів редукції та декомпозиції системи.

Розглядається задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} Ax + B\dfrac{dx}{dt} = f(t,x), \\ x(t) \to 0, \quad t \to 0, \end{cases} \tag{1}$$

де $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, а вектор-функція f є неперервною в деякій області $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Основну увагу зосереджено на аналізі структури жмутка $A + \lambda B$, побудові канонічних форм і дослідженні впливу регулярних та сингулярних компонентів на розв'язність системи. Поєднання алгебраїчних і аналітичних методів дозволяє встановити умови існування та кількості розв'язків задачі Коші й описати їхню локальну поведінку.

Основні результати

1. Регулярні та сингулярні матричні жмутки: структура і канонічні перетворення

Означення. Жмуток $A + \lambda B$ називається *регулярним*, якщо виконуються такі умови:

1. A і B — квадратні матриці одного й того ж порядку n;
2. визначник $|A + \lambda B|$ не є тотожно нульовим многочленом.

У випадках, коли хоча б одна з умов порушується, тобто $m \neq n$ або $|A + \lambda B| \equiv 0$, жмуток називають *сингулярним.*

Означення. Два жмутки прямокутних матриць $A + \lambda B$ і $A_1 + \lambda B_1$ одного і того ж розміру $m \times n$ називаються *строго еквівалентними*, якщо існують квадратні матриці P та Q зі сталими ненульовими визначниками такі, що

$$P(A + \lambda B)Q = A_1 + \lambda B_1,$$

де P та Q — сталі квадратні невироджені матриці порядків m і n, які не залежать від λ.

Теорема про еквівалентність жмутків матриць. Для того щоб два довільних жмутка прямокутних матриць $A+\lambda B$ і $A_1+\lambda B_1$ тієї ж самої розмірності $m \times n$ були строго еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб ці жмутки мали одні і ті ж мінімальні індекси і одні і ті ж «кінцеві» та «нескінченні» елементарні дільники.

Теорема про еквівалентність регулярного жмутка матриць. Будь-який регулярний жмуток $A + \lambda B$ строго еквівалентний квазідіагональному жмутку вигляду

$$\{N^{u_1}, N^{u_2}, \ldots, N^{u_s},\ J + \lambda E\} \quad \left(N^{(u)} = E^{(u)} + \lambda H^{(u)}\right),$$

де блоки $N^{u_1}, \ldots, N^{u_s}$ відповідають нескінченним елементарним дільникам $\mu^{u_1}, \ldots, \mu^{u_s}$, а блок $J + \lambda E$ — кінцевим елементарним дільникам жмутка.

Теорема про еквівалентність сингулярного жмутка матриць. Кожний сингулярний жмуток $A + \lambda B$ може бути строго еквівалентним перетворений до канонічного квазідіагонального вигляду

$$\operatorname{diag}\Big\{0_{h\times g},\, L_{\varepsilon_{g+1}}, \ldots, L_{\varepsilon_p};\, L'_{\eta_{h+1}}, \ldots, L'_{\eta_g};\, N^{(u_1)}, \ldots, N^{(u_s)};\, J + \lambda E\Big\},$$

де $N^{(u)} = E^{(u)} + \lambda H^{(u)}$, матриця J має жорданову форму, а L'_η — транспонована до L_η.

Наведемо вигляд блока L_ε:

$$L_\varepsilon = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{розмір } \varepsilon \times (\varepsilon + 1).$$

2. Функціонально-диференціальні властивості сингулярної підсистеми

З урахуванням канонічного вигляду жмутка матриць задача (1) зводиться до функціонально-диференціальної задачі вигляду

$$\begin{cases} \psi(t, z_1, z_2) = 0, \\ \dfrac{d}{dt} z_2 = \varphi(t, z_1, z_2), \\ z_1(t) \to 0, \quad t \to 0, \\ z_2(t) \to 0, \quad t \to 0, \end{cases} \tag{2}$$

для якої виконуються умови:

$$t \in \mathbb{R},\ z_1 : (0; t_0] \to \mathbb{R}^p,\ z_2 : (0; t_0] \to \mathbb{R}^l, \quad p + l = n,$$

$$\psi : (0; t_0] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k, \qquad \varphi : (0; t_0] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l, \quad k + l = m.$$

Дослідження починаємо з питання про розв'язання функціонального блоку:

$$\begin{cases} \psi(t, z_1, z_2) = 0, \\ z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Розглядається, за яких умов цю задачу можна розв'язати щодо z_1, або щодо z_2, або щодо частини компонент z_1, z_2.

Нехай

$$D_1 = \{(t, z_1, z_2):\ t \in (0, t_0],\ \|z_1\| < \alpha,\ \|z_2\| < \beta\}, \qquad \alpha, \beta > 0,$$

де $D_1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Означення. Нехай вектор-функція ψ неперервна в D_1. Будемо говорити, що функція ψ задовольняє умові S_1, якщо:

1. функція ψ доозначена в точці $(0,0,0)$, причому $\psi(0,0,0) = 0$;
2. існують неперервні в D_1 часткові похідні ψ за всіма компонентами z_1 і z_2.

Означення. Нехай вектор-функція φ неперервна в D_1. Будемо говорити, що функція φ задовольняє умові S_2, якщо:

1. функція φ доозначена в точці $(0,0,0)$, причому $\varphi(0,0,0) = 0$;
2. φ неперервна за t і неперервно диференційовна за z_1 та z_2 в D_1.

Теорема 1. Припустимо, що $k = j$ та $1 \le j < p$, а ψ і φ задовольняють умови S_1 і S_2 відповідно. Якщо додатково виконується

$$\left.\frac{D(\psi)}{D(z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{1j})}\right|_{(0,\ldots,0)} \neq 0, \tag{4}$$

то задача (2) має принаймні один розв'язок на сегменті $t \in [0, t_1]$, де $0 < t_1 \le t_0$.

Доведення. Оскільки ψ та φ задовольняють S_1 і S_2 та виконується (4), то за теоремою про неявну функцію система $\psi(t, z_1, z_2) = 0$ розв'язується відносно перших j компонент z_1, тобто

$$z_{1i} = \xi_i(t, z_{1j+1}, \ldots, z_{1p}, z_2), \qquad i = 1, \ldots, j.$$

Функції ξ_i неперервні за t та мають неперервні частинні похідні за змінними $z_{1j+1}, \ldots, z_{1p}, z_2$ на множині

$$D_3 = \{(t, z_1, z_2) : t \in [0, t_3],\ \|z_1\| < \alpha_3,\ \|z_2\| < \beta_3,\ 0 < t_3 \le t_0\},$$

де $0 < \alpha_3 \leq \alpha$, $0 < \beta_3 \leq \beta$, причому

$$\xi_i(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Підставивши z_{1i} у диференціальну частину (2), одержуємо задачу Коші

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} z_2 = \varphi\bigl(t, \xi_1(t, \cdot), \dots, \xi_j(t, \cdot), z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_2\bigr), \\ z_2(0) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Для кожного фіксованого набору параметрів існує єдиний розв'язок цієї задачі; отже розв'язок вихідної задачі (3) утворює $(p - j)$-параметричну сім'ю, що залежить від $(p - j)$ довільних C^1-функцій.

Теорему доведено.

Тепер перейдемо до диференціальної підсистеми:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} z_2 = \varphi(t, z_1, z_2), \\ z_1(t) \to 0, \quad t \to 0, \\ z_2(t) \to 0, \quad t \to 0. \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 2. Нехай:

1. φ неперервна в $T \times Z_1 \times Z_2$ і виконується умова Ліпшиця за z_2:

   $$\|\varphi(t, z_1, \widetilde{z}_2) - \varphi(t, z_1, \widetilde{\widetilde{z}}_2)\| \leq L \, \|\widetilde{z}_2 - \widetilde{\widetilde{z}}_2\|$$

   рівномірно для $t \in (0, t_0]$ та кожної $z_1(t) \in C$, $z_1(t) \to 0$ при $t \to 0$;

2. існує $q \in (0, 1)$ таке, що

   $$L \left| \int_0^t d\tau \right| \leq q, \qquad t \in (0, t_0];$$

3. для всіх $t \in (0, t_0]$ маємо $\varphi(t, z_1(t), 0) = 0$.

Тоді задача Коші (6) має єдиний розв'язок $z_2^*(t, z_1(t))$.

Доведення. Визначимо оператор

$$\Phi(z_2)(t) = \int_0^t \varphi(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau)) \, d\tau.$$

За умовами теореми Φ неперервний, відображає замкнену кулю в себе та є стискуючим:

$$\|\Phi(\widetilde{z}_2) - \Phi(\widetilde{\widetilde{z}}_2)\| \le L \left| \int_0^t d\tau \right| \|\widetilde{z}_2 - \widetilde{\widetilde{z}}_2\| \le q\|\widetilde{z}_2 - \widetilde{\widetilde{z}}_2\|.$$

За принципом стискуючих відображень існує єдина нерухома точка, тобто єдиний розв'язок.

Теорему доведено.

3. Обмеженість та особливості поведінки розв'язків задачі Коші

Розглянемо задачу Коші у векторній формі:

$$\begin{cases} Ax + B\dfrac{dx}{dt} = f(t,x), \\ x(t) \to 0, \quad t \to 0, \end{cases} \tag{7}$$

де $t \in T$, $T = (0, t_0]$, $t_0 > 0$, а $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \ne n$.

Позначимо $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ і нехай f неперервна на $T \times X$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Нехай також $f(t,x) = F(t,x) + x(t)$, де F неперервна. Тоді

$$x(t) = Ax(t) + B\frac{dx}{dt} - F(t, x(t)).$$

Отже, задача набуває форми

$$\begin{cases} Ax + B\dfrac{dx}{dt} = F(t,x) + x(t), \\ x(t) \to 0, \quad t \to 0. \end{cases} \tag{8}$$

Перейдемо до рівносильного інтегрального рівняння:

$$x(t) = \int_0^t \big(Ax(\tau) + B\dot{x}(\tau) - F(\tau, x(\tau))\big)\, d\tau. \tag{9}$$

Теорема 3. Нехай:

1. для будь-яких $x_1(t), x_2(t) \in C(\mathbb{R}^n)$, що $x_1(t) \to 0$, $x_2(t) \to 0$ при $t \to 0$, виконується

$$\|F(t,x_1) - F(t,x_2)\| \le L\,\|x_1 - x_2\|, \qquad L > 0;$$

2. існує $q \in (0,1)$ таке, що для всіх $t \in (0, t_0]$

$$\big(\|A\| + \|B\| + L\big)\left|\int_0^t d\tau\right| \le q;$$

3. $F(t,0) \equiv 0$ для всіх $t \in [0, t_0]$.

Тоді задача Коші (7) має єдиний розв'язок $x^*(t)$.

Доведення. Нехай V — простір неперервних вектор-функцій $x(t)$ на $(0, t_0]$ з нормою

$$\|x\| = \max\left\{\sup_{k=1,\dots,n;\, t\in(0,t_0]} |x_k(t)|, \sup_{k=1,\dots,n;\, t\in(0,t_0]} |x'_k(t)|\right\}. \qquad (10)$$

Введемо оператор

$$M(x)(t) = \int_0^t \big(Ax(\tau) + B\dot{x}(\tau) - F(\tau, x(\tau))\big)\, d\tau.$$

За умовами теореми M відображає кулю $\{x : \|x\| \le c\}$ у себе та є стискуючим, отже має єдину нерухому точку $x^*(t)$, яка і є єдиним розв'язком задачі.

Теорему доведено.

Теорема 4. Нехай:

1. $$\|F(t,x_1) - F(t,x_2)\| \le L(t)\|x_1 - x_2\|$$

   для $t \in (0, t_0]$, де $L(t) > 0$ неперервна на $T = (0, t_0]$, і $x_1(t) \to 0$, $x_2(t) \to 0$ при $t \to 0$;

2. існує $q \in (0,1)$ таке, що

$$\left|\int_0^t (\|A\| + \|B\| + L(\tau))\, d\tau\right| \le q, \qquad t \in (0, t_0];$$

3. $F(t,0) \equiv 0$ для всіх $t \in [0, t_0]$.

Тоді задача Коші (7) має єдине розв'язання $x^*(t)$.

Доведення. Доведення аналогічне теоремі 3, з урахуванням змінної функції Ліпшиця $L(t)$ і оцінки інтеграла з умови 2).

Теорему доведено.

ВИСНОВКИ

У роботі досліджено задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь з алгебраїчно-диференціальною структурою

$$\begin{cases} Ax + B\dfrac{dx}{dt} = f(t,x), \\ x(t) \to 0, \quad t \to 0, \end{cases}$$

де $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а вектор-функція $f : D \to \mathbb{R}^m$ є неперервною на множині

$$D = \{(t,x) :\ 0 < |t| \le a,\ \|x\| \le b\}.$$

Показано, що алгебраїчна структура жмутка $A + \lambda B$ визначає можливість редукції вихідної системи до еквівалентної, яка поєднує диференціальні та функціональні співвідношення. Встановлено умови коректності задачі Коші залежно від типу блокової структури жмутка; доведено можливість єдиності або параметричності розв'язків. Для диференціальної підсистеми застосовано метод нерухомої точки, що забезпечує конструктивне доведення існування та єдиності розв'язку.

Список літератури

1. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
2. **Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.** Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — К.: Вища школа, 2000. — 294 с.
3. **Campbell S. L.** Singular Systems of Differential Equations. — San Francisco: Pitman, 1980. — 240 p.
4. **Campbell S. L.** Singular Systems of Differential Equations II. — San Francisco: Pitman, 1982. — 234 p.
5. **Brenan K. E., Campbell S. L., Petzold L. R.** Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. Philadelphia: SIAM, 1995. — xii+251 p.
6. **Campbell S. L.** Index two linear time-varying singular systems of differential equations // SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods. — 1983. — Vol. 4, No. 2. — P. 237–243.
7. **Lamour R., Marz R., Winkler R.** How Floquet theory applies to index-1 differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1998. — Vol. 217, No. 2. — P. 372–394.
8. **Kunkel P., Mehrmann V.** Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution. — Zurich: EMS Press, 2006. — 385 p.

9. **Antoulas A. C.** Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. — Philadelphia: SIAM, 2005. — 507 p.

10. **Berger T., Reis T.** Observers and dynamic controllers for linear differential-algebraic systems // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2017. — Vol. 55, No. 6. — P. 3564–3591.
doi: 10.1137/15M1035355

11. **Шарай Н. В.** Об асимптотике решений полуявніх систем дифференциальных уравнений // Нелінійні коливання. — 2005. — Т. 8, № 1. — С. 132–144.

12. **Самкова Г. Е., Шарай Н. В.** Об исследовании некоторой полуявной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц // Нелінійні коливання. — 2002. — Т. 5, № 2. — С. 224–236.

13. **Самкова Г. Є., Шарай Н. В., Драгун О. О.** Дослідження систем звичайних диференціальних рівнянь з регулярними та сингулярними жмутками матриць // Perspectives of contemporary science : proceedings of VII International scientific and practical conference (Lviv, 19–21 August 2024). — Львів, 2024. — С. 282–288.

Samkova G. Ye., Sharai N. V., Drahun O. O.

Asymptotic behavior of solutions of systems of differential equations with regular and singular matrix pencils

Summary

This article is devoted to the study of the asymptotic behavior of solutions of systems of differential equations generated by regular and singular matrix pencils. Such systems arise in the mathematical modeling of complex dynamical processes and are characterized by a combination of differential and algebraic relations. The structural properties of matrix pencils are analyzed, conditions for their strict equivalence transformations are established, and corresponding canonical forms are constructed. Special attention is paid to the investigation of the Cauchy problem for singular systems and to the influence of the algebraic structure of the pencil on the existence, uniqueness, and asymptotic behavior of solutions. The obtained results make it possible to describe the local behavior of solutions and can be applied to the analysis of a wide class of differential-algebraic systems.

Keywords: system of differential equations, Cauchy problem, differential-algebraic systems, matrix pencil, regular pencil, singular pencil, canonical form.

References

1. Gantmacher, F. R. (1988) Teoriya matrits [The theory of matrices]. Moscow, 552 p. [in Russian].
2. Samoylenko A. M., Shkil M. I. and Yakovets V. P. (2000) Liniini systemy dyferentsialnykh rivnian z vyrodzhenniamy [Linear systems of differential equations with degeneracies]. Kyiv: Vyshcha shkola, 294 p. [in Ukrainian].
3. Campbell S. L. (1980) Singular systems of differential equations. San Francisco: Pitman, 240 p.
4. Campbell S. L. (1982) Singular systems of differential equations 2. San Francisco: Pitman, 234 p.
5. Brenan K. E., Campbell S. L. and Petzold L. R. (1995) Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations. Classics in Applied Mathematics, Vol. 14. Philadelphia: SIAM, xii+251 p.
6. Campbell S. L. (1983) 'Index two linear time-varying singular systems of differential equations', *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 4(2), 237–243.

7. Lamour, R., Marz, R. and Winkler, R. (1998) 'How Floquet theory applies to index-1 differential equations', Journal of Mathematical Analysis and Applications, 217(2), 372–394.

8. Kunkel, P. and Mehrmann, V. (2006) Differential-algebraic equations: Analysis and numerical solution. Zurich: EMS Press, 385 p.

9. Antoulas A. C. (2005) Approximation of large-scale dynamical systems. Advances in Design and Control, Series No 6. Philadelphia: SIAM, 2005. 507 p.

10. Berger T. and Reis T. (2017) 'Observers and dynamic controllers for linear differential-algebraic systems', SIAM Journal on Control and Optimization, 55(6), 3564–3591. https://doi.org/10.1137/15M1035355

11. Sharai N. V. (2005) 'Ob asimptotike resheniy poluyavnykh sistem differentsialnykh uravneniy' [On the asymptotic of solutions to semi-explicit systems of differential equations], *Neliniini Kolyvannia* [Nonlinear Oscillations], 8(1), 132–144. [in Russian].

12. Samkova, G. Ye. and Sharay, N. V. (2002) 'Ob issledovanii nekotoroy poluyavnoy sistemy differentsialnykh uravneniy v sluchaye peremennogo puchka matrits' [On a study of a certain semi-explicit system of differential equations with a changing matrix bundle], *Neliniini Kolyvannia* [Nonlinear Oscillations], 5(2), 224–236. [in Russian].

13. Samkova, G. Ye., Sharai, N. V. and Drahun, O. O. (2024) Doslidzhennia system zvychainykh dyferentsialnykh rivnian z rehuliarnymy ta synhuliarnymy zhmutkamy matryts [Investigation of systems of ordinary differential equations with regular and singular matrix pencils], in Perspectives of contemporary science: proceedings of VII International scientific and practical conference (Lviv, 19–21 August 2024). Lviv, pp. 282–288. [in Ukrainian].

Дослідження в математиці і механіці. – 2025. – Т. 30, вип. 2(46). – С. 80–91

УДК 517.925

О. О. Чепок *кандидат фіз-мат наук,*
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»
Кафедра вищої математики і статистики
вул Старопортофранківська 26, м. Одеса, Україна, 65020
e-mail: olachtpok@ukr.net
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-8514-2769

УМОВИ ІСНУВАННЯ ТА АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ЯКІ МІСТЯТЬ ДОБУТОК РІЗНОГО ТИПУ НЕЛІНІЙНОСТЕЙ

У роботі розглядається нелінійне диференціальне рівняння другого порядку, права частина якого містить добуток правильно змінної функції від невідомої функції та швидко змінної нелінійної функції від першої похідної невідомої функції. Дослідження фокусується на поведінці нелінійних функцій при прямуванні невідомої функції та її похідної до нуля або нескінченності. Для даного класу рівнянь вперше отримано необхідні й достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язків, а також знайдено асимптотичні зображення таких розв'язків та їхніх похідних першого порядку. Такі $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язки досліджуваного рівняння є швидко змінними при прямуванні аргументу до нуля або нескінченності, що ускладнює їх дослідження порівняно з іншими типами розв'язків досліджуваного рівняння. Також визначено кількість таких $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язків в залежності від умов на коефіцієнти рівняння. Результати для $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язків для рівнянь досліджуваного типу є новими.
MSC: 34A34, 34C41, 34E99.
Ключові слова: нелінійні диференціальні рівняння другого порядку, асимптотичні зображення швидко змінних розв'язків, $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язки, швидко змінні функції, правильно змінні функції.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.2(46).354147

Вступ

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y')\varphi_1(y), \tag{1}$$

Надійшла 01.12.2025 © Чепок О. О., 2025

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$ визначає знак правої частини, функція $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$ у неперервною у своїй області визначення, функції $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(i \in \{0, 1\})$ є неперервними на проміжках Δ_{Y_i}, де Δ_{Y_i} — або проміжок $[y_i^0, Y_i$, або — $]Y_i, y_i^0]$, тобто, деякий однобічний окіл точки $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$. При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ вважаємо, що $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ відповідно, $i \in \{0, 1\}$.

Крім того, будемо вважати, що функція $\varphi_1 \colon \Delta_{Y_1} \to]0, +\infty[$ є правильно змінною (див. [1], с. 17) порядку σ_1 при $y \to Y_1$, а функція $\varphi_0 \colon \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ двічі неперервно диференційовна на Δ_{Y_0} та задовольняє умови:

$$\lim_{\substack{s \to Y_0 \\ s \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_0(s) \in \{0, +\infty\}, \quad \varphi_0'(s) \neq 0 \text{ при } s \in \Delta_{Y_0}, \qquad \lim_{\substack{s \to Y_0 \\ s \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(s)\varphi_0''(s)}{\left(\varphi_0'(s)\right)^2} = 1. \tag{2}$$

З умов (2) випливає, що функція φ_0 та її похідна першого порядку є швидко змінними при прямуванні аргументу до Y_0 (див. [6], С. 91-92).

Розглянемо наступний клас ров'язків для рівнянь типу (1).

Означення 1 ([5])**.** Розв'язок y рівняння (1), визначений на $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, називається $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язком $(-\infty \le \lambda_0 \le +\infty)$, якщо виконуються наступні умови

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \ \ (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t) y(t)} = \lambda_0. \tag{3}$$

Теоретичне підґрунтя дослідження такого класу розв'язків рівняння (1) базується на загальній класифікації розв'язків диференціальних рівнянь n-го порядку типу Емдена-Фаулера (див., наприклад, [5]). У межах цієї класифікації, адаптованої для рівнянь другого порядку, встановлено фундаментальний розподіл $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків $(-\infty \le \lambda_0 \le +\infty)$ рівнянь другого порядку на чотири непересічні класи залежно від значень параметру λ_0: $\lambda_0 \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_0 = \pm\infty$.

Для кожного із зазначених випадків було визначено (див., наприклад, [5]) специфічні апріорні асимптотичні властивості, що дозволяють ідентифікувати динаміку розв'язків при наближенні аргументу до граничної точки ω.

Дана робота присвячена дослідженню умов існування у рівняння (1) особливого класу $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язків. Специфіка досліджуваного випадку $(\lambda_0 = 1)$ полягає в тому, що такі розв'язки та їх похідні першого порядку є швидко змінними функціями при $t \uparrow \omega$. Ця властивість зумовлює принципову відмінність у методології дослідження порівняно з неособливими випадками $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ та випадком нескінченного параметра $\lambda_0 = \pm\infty$, результати щодо яких викладені у роботах [3] та [2]. На відміну від згаданих випадків, випадок $\lambda_0 = 1$ потребує залучення апарату теорії швидко змінних функцій та спеціальних методів асимптотичного інтегрування.

Метою даної роботи є встановлення необхідних і достатніх умов існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язків, а також знаходження асимптотичних зображень при $t \uparrow \omega$ для цих розв'язків та їх похідних першого порядку.

Основні результати

Наведемо наступні означення.

Означення 2. Нехай $Y \in \{0, \infty\}$, Δ_Y — деякий однобічний окіл Y. Неперервно диференційовна функція $L : \Delta_Y \to]0; +\infty[$ називається нормалізованою повільно змінною функцією при $y \to Y \quad (y \in \Delta_Y)$ ([6], с.2-3), якщо

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{yL'(y)}{L(y)} = 0.$$

Означення 3. Говорять, що повільно змінна при $y \to Y \quad (y \in \Delta_Y)$ функція $\theta : \Delta_Y \to]0; +\infty[$ задовільняє умову S при прямуванні аргументу до Y(див., наприклад, у [5]), якщо для будь-якої нормалізованої повільно змінної при $y \to Y \quad (y \in \Delta_Y)$ функції $L : \Delta_Y \to]0; +\infty[$ має місце співвідношення

$$\theta(yL(y)) = \theta(y)(1 + o(1)) \quad \text{при } y \to Y \quad (y \in \Delta_Y).$$

Введемо наступні позначення

$$\Phi(y') = \int_B^{y'} \frac{1}{\varphi_0^{\frac{1}{\sigma_1+1}}(s)\theta_1^{\frac{1}{\sigma_1+1}}(y(t(s)))|s|^{\frac{2\sigma_1}{\sigma_1+1}}} ds,$$

$$B = \begin{cases} y_0^0, & \text{якщо } \int_{y_0^0}^{Y_0} \frac{1}{\varphi_0^{\frac{1}{\sigma_1+1}}(s)\theta_1^{\frac{1}{\sigma_1+1}}(y(t(s)))|s|^{\frac{2\sigma_1}{\sigma_1+1}}} ds = \pm\infty, \\ \\ Y_0, & \text{якщо } \int_{y_0^0}^{Y_0} \frac{1}{\varphi_0^{\frac{1}{\sigma_1+1}}(s)\theta_1^{\frac{1}{\sigma_1+1}}(y(t(s)))|s|^{\frac{2\sigma_1}{\sigma_1+1}}} ds = const, \end{cases}$$

$$\theta_1(z) = \varphi_1(z)|z|^{-\sigma_1}, \quad Z_0 = \lim_{\substack{y' \to Y_0 \\ y' \in \Delta_{Y_0}}} \Phi(y'),$$

$$F(t) = \frac{(\Phi^{-1}(I(t)))^2 \cdot \Phi'(\Phi^{-1}(I(t)))}{I_1(t) \cdot I'(t)},$$

а якщо $\lim\limits_{t \uparrow \omega} I(t) = Z_0$, то

$$I(t) = \alpha_0 \int_A^t p^{\frac{1}{1+\sigma_1}}(\tau)d\tau, \quad A = \begin{cases} b, & \text{якщо} \int_b^\omega p^{\frac{1}{1+\sigma_1}}(\tau)d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \int_b^\omega p^{\frac{1}{1+\sigma_1}}(\tau)d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$I_1(t) = \int_{A_0}^t \Phi^{-1}(I(\tau))))d\tau, \quad A_0 = \begin{cases} b, & \text{якщо} \int_b^\omega \Phi^{-1}(I(\tau))))d\tau = \pm\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \int_b^\omega \Phi^{-1}(I(\tau))))d\tau = const, \end{cases}$$

де $b \in [a;\omega[$ обирається так, щоб $I(t)$ належала області визначення функції Φ^{-1}.

Зауваження 1. З умов (2) на функцію φ_0 випливає, що $Z_0 \in \{0, +\infty\}$ та

$$\lim_{\substack{y' \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\Phi''(y') \cdot \Phi(y')}{(\Phi'(y'))^2} = 1, \tag{4}$$

звідки випливає, що функція $\Phi(y')$ є швидко змінною при $y' \to Y_0$ $(y' \in \Delta_{Y_0})$, та в силу монотонності функції $\Phi(y')$ існує функція $\Phi^{-1}(y')$, яка є повільно змінною функцією при $y' \to Y_0$ $(y' \in \Delta_{Y_0})$.

Зауваження 2. Зауважимо також, що має місце співвідношення

$$\lim_{z \to Z_0} \frac{(\Phi'(\Phi^{-1}(z)))'z}{\Phi'(\Phi^{-1}(z))} = \lim_{z \to Z_0} \frac{\Phi''(\Phi^{-1}(z))z}{(\Phi'(\Phi^{-1}(z)))^2} = \lim_{y \to Y_0} \frac{\Phi''(\Phi^{-1}(\Phi(y)))\Phi(y)}{\big(\Phi'(\Phi^{-1}(\Phi(y)))\big)^2} = \lim_{y \to Y_0} \frac{\Phi''(y)\Phi_1(y)}{\big(\Phi'(y)\big)^2} = 1.$$

Звідси випливає, що функція $\Phi'(\Phi^{-1}(z)$ є правильно змінною порядку 1 при при прямуванні аргументу до Z_0.

Зауваження 3. Також, має місце співвідношення

$$\lim_{z\to Z_1}\frac{z\cdot\left(\dfrac{\Phi'(\Phi^{-1}(z))}{\Phi(\Phi^{-1}(z))}\right)'}{\dfrac{\Phi'(\Phi^{-1}(z))}{\Phi(\Phi^{-1}(z))}}=\lim_{y\to Z_1}\frac{\Phi''(\Phi^{-1}(z))z}{(\Phi'(\Phi^{-1}(z)))^2}-1=0.$$

Отже, функція $\dfrac{\Phi'}{\Phi}(\Phi^{-1})$ є повільно змінною при прямуванні аргументу до Z_0.

Справедливою є наступна теорема

Теорема 1. *Нехай $\sigma_1\in R\backslash\{-1\}$, функції θ_1 та Φ^{-1} задовольняють умову S та існує скінченна чи нескінченна границя*

$$\lim_{t\uparrow\omega}F(t). \tag{5}$$

Тоді для існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$- розв'язків необхідно та достатньо виконання умов

$$y_0^1\alpha_0>0,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\Phi^{-1}(I(t))=Y_0,\quad \lim_{t\uparrow\omega}I(t)=Z_0, \tag{6}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}I_1(t)=Y_1 \tag{7}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}F(t)=1, \tag{8}$$

Більш того, якщо

$$\sigma_1>-1,$$

диференціальне рівняння (1) має двопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$-розв'язків та має однораметричну сім'ю $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$-розв'язків у супротивному випадку.

Для кожного такого $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-розв'язку мають місце при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення

$$y(t)=I_1(t)[1+o(1)],\quad y'(t)=\Phi^{-1}(I(t))[1+o(1)]. \tag{9}$$

Доведення.

Необхідність. Нехай $y:[t_0,\omega[\to\Delta_{Y_0}$ є $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-розв'язком рівняння (1). Тоді, у силу (3), маємо

$$y(t) = \frac{(y'(t))^2}{y''(t)}[1 + o(1)] \text{ при } \ t \uparrow \omega, \tag{10}$$

звідки, з урахуванням (1), отримаємо виконання першої з умов (7), а також співвідношення

$$\frac{|y''(t)|^{1+\sigma_1}}{\varphi_0(y'(t))|y'(t)|^{2\sigma_1}\theta_1(y(t(y'(t))))} = p(t)[1 + o(1)] \ \text{ при } \ t \uparrow \omega. \tag{11}$$

Зауважимо, що функція $y(t(y'))$, де $t(y')$- обернена функція до $y'(t)$, є правильно змінною порядку 1 при $y' \to Y_0$; $y' \in \Delta_{Y_0}$. Дійсно,

$$\lim_{y \to Y_0} \frac{y' \cdot (y(t(y')))'}{y(t(y'))} = \lim_{y' \to Y_0} \frac{(y'(t(y)))^2}{y''(t(y')) \cdot y(t(y'))} = 1.$$

Звідси випливає, що $\theta_1(y(t(y')))$ є повільно змінною функцією при $y' \to Y_0$ $y' \in \Delta_{Y_0}$ як композиція правильно та повільно змінних функцій $y' \to Y_0$ $y' \in \Delta_{Y_0}$.

З (11) маємо

$$\frac{y''(t)}{\varphi_0^{\frac{1}{\sigma_1+1}}(s)\theta_1^{\frac{1}{\sigma_1+1}}(y(t(y')))|y'|^{\frac{2\sigma_1}{\sigma_1+1}}} = \alpha_0(p(t))^{\frac{1}{1+\sigma_1}}[1 + o(1)] \ \text{ при } \ t \uparrow \omega. \tag{12}$$

Проінтегруємо обидві частини співвідношення (12) від b до ω, з урахуванням того, що $y' \to Y_0$ $(y' \in \Delta_{Y_0})$ та вибору A випливає, що

$$\Phi(y'(t)) = I(t)[1 + o(1)] \ \text{ при } \ t \uparrow \omega. \tag{13}$$

Тоді, так як функція Φ^{-1} задовольняє умову S, з (13) маємо

$$y'(t) = \Phi^{-1}(I(t))[1 + o(1)] \ \text{ при } \ t \uparrow \omega. \tag{14}$$

З (14) випливає друга та третя з умов (6), а також друге з асимптотичних зображень (9).

Проінтегруємо обидві частини співвідношення (14), маємо

$$y(t) = I_1(t)[1 + o(1)] \ \text{ при } \ t \uparrow \omega, \tag{15}$$

звідки випливає перше з асимптотичних зображень (9) та умова (7).

Доведемо справедливість умови (8). Дійсно, з умови (3), а також з (12) та (13) випливає, що

$$\frac{(y'(t))^2}{y(t)} \cdot \frac{\Phi'(y'(t))}{\Phi(y'(t))} = \frac{I'(t)}{I(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{16}$$

З (14), (15) та (16), а також з зауважень 1 та 2 випливає, що

$$\frac{(\Phi^{-1}(I(t)))^2}{I_1(t)} \cdot \frac{\Phi'}{\Phi}(\Phi^{-1}(I(t))) = \frac{I'(t)}{I(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{16}$$

звідки і випливає виконання умови (8).

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай виконуються умови (5)-(8) теореми.

До рівняння (1) застосуємо перетворення

$$y(t) = I_1(t) \cdot [1 + v_1(t)], \tag{17}$$

$$y'(t) = \Phi^{-1}(I(t)) \cdot [1 + v_2(t)], \tag{18}$$

Зведемо рівняння (1) до еквівалентної системи диференціальних рівнянь

$$v_1' = h_1(t) \cdot [-v_1 + v_2], \tag{19}$$

$$v_2' = h_2(t) \cdot \left[\frac{N(t, v_2)}{(F(t))^{\sigma_1}} \cdot [1+v_1]^{\sigma_1}[1+v_2]^{-3\sigma_1 - 1} - [1+v_2]\right], \tag{20}$$

де

$$h_1(t) = \frac{I_1'(t)}{I_1(t)}, \quad h_2(t) = \frac{I'(t)}{\Phi'(\Phi^{-1}(I(t))) \cdot \Phi^{-1}(I(t))},$$

$$N(t, v_2) = \left(\frac{\Phi'(\Phi^{-1}(I(t)))}{\Phi'(Y_2(t, v_2))}\right)^{\sigma_1 + 1} \cdot [1 + v_2]^{\sigma_1 + 1},$$

$$Y_1(t, v_1) = I_1(t) \cdot [1 + v_1(t)], \quad Y_2(t, v_2) = \Phi^{-1}(I(t) \cdot [1 + v_2(t)]).$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (19) –(20) на множині

$$\Omega = [t_0, \omega[\times D, \quad \text{де} \quad D = \left\{(v_1, v_2) : |v_i| \le \frac{1}{2},\ i = 1, 2\right\}.$$

Перепишемо систему (19) –(20) у виді

$$v_1' = h_1(t) \cdot [A_{11} v_1 + A_{12} v_2], \tag{21}$$

$$v_2' = h_2(t) \cdot [A_{21} v_1 + A_{22} v_2 + R_1(t, v_1, v_2) + R_2(t, v_1, v_2)], \tag{22}$$

де

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = 1, \quad A_{21} = \sigma_1, \quad A_{22} = -3\sigma_1 - 2,$$

$$R_1(t, v_1, v_2) = \left(\frac{N(t, v_2)}{(F(t))^{\sigma_1}} - 1\right)(\sigma_1 v_1 - (3\sigma_1 + 2)v_2)$$

$$R_2(t, v_1, v_2) = \frac{N(t, v_2)}{(F(t))^{\sigma_1}} \cdot (-\sigma_1(3\sigma_1+1)v_1 v_2 + (1-(3\sigma_1+1)v_2)\cdot([1+v_1]^{\sigma_1} - 1 - \sigma_1 v_1) +$$

$$+[1 + v_1]^{\sigma_1} \cdot ([1 + v_2]^{-3\sigma_1 - 1} - 1 + (3\sigma_1 + 1)v_2)).$$

Зауважимо, що в силу зауваження 2 маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} N(t, v_2) \quad = 1 \text{ рівномірно за } \quad (v_1, v_2) \in D.$$

а в силу умови (8)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{N(t, v_2)}{(F(t))^{\sigma_1}} = 1 \text{ рівномірно за } \quad (v_1, v_2) \in D.$$

Тоді

$$\lim_{t\uparrow\omega} R_1(t, v_1, v_2) \quad = 0 \text{ рівномірно за } \quad (v_1, v_2) \in D.$$

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{R_2(t, v_1, v_2)}{|v_1| + |v_2|} = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad t \in [t_0, \omega[,$$

Характеристичне рівняння матриці:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \sigma_1 & -3\sigma_1 - 2 \end{pmatrix}$$

має вид

$$\mu^2 + (3\sigma_1 + 3)\mu + 2\sigma_1 + 2 = 0.$$

У силу умови $\sigma_1 \neq -1$ у цього рівняння немає коренів з нульовою дійсною частиною.

З урахуванням виду $I_1(t)$ маємо
$\int\limits_{t_0}^{\omega} h_1(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{\omega} \frac{I_1'(\tau)}{I_1(t)} d\tau = \ln |I_1(t)|_{t_0}^{\omega} = \pm\infty.$
Також зауважимо, що в силу

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{h_1(t)}{h_2(t)} = \lim_{t\uparrow\omega} F(t) = 1,$$

тоді $\int\limits_{t_0}^{\omega} h_2(\tau)d\tau = \pm\infty$.

Отримуємо, що для системи диференціальних рівнянь(21)-(22) виконано всі умови теореми 2.5 з [4]. Відповідно до цієї теореми система (21)-(22) при $\sigma_1 > -1$ має двопараметричну, а при при $\sigma_1 < -1$ має однопарамтеричну сім'ю розв'язків $\{v_i\}_{i=1}^{2} : [t_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(t_1 \geq t_0)$, які прямують до нуля при $t \uparrow \omega$. Цим розв'язкам у силу перетворень (17)-(18) відповідають розв'язки y рівняння (1), що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (9).

В силу цих зображень випливає, що отримані розв'язки є $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язками рівняння (1). Теорему повністю доведено.

Висновки

У роботі встановлено умови існування швидко змінних $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язків для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку з добутком правильно та швидко змінних нелінійностей при прямуванні аргунментів до нуля або нескінченності від невідомої функції та її похідної відповідно. Побудовано явні асимптотичні зображення для знайдених розв'язків та їхніх перших похідних в околі граничної точки ω, встановлено кількість таких розв'язків в залежності від умов на коефіцієнти рівняння. Отримані результати є новими та є основною для подальших досліджень нелінійних рівнянь другого порядку та їх розв'язків.

Список літератури

1. **Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.** (1978) Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications.// Cambridge university press. Cambridge. 494p.

2. **Chepok, O.** (2023). Asymptotic behavior of $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-solutions of the second order differential equations with the product of different types of nonlinearities from an unknown function and its first derivative. Bukovinian Math. Journal. 11, No. 2, 33 – 40. 10.31861/bmj2023.02.04

3. **Chepok, O** (2023) Asymptotic representations of regularly varying $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$–solutions of a differential equation of the second order containing the product of different types of nonlinearities of the unknown function and its derivative. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 274, No. 1, July, P 142-155

4. **Evtukhov, V.,Samoilenko, A.** (2010). Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular

point // Ukrainian Mathematical Journal - UKR MATH J. 62. 56-86. 10.1007/s11253-010-0333-7.

5. **Evtukhov, V.,Samoilenko, A.** (2011). Asymptotic Representations of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities // Differential Equations, Vol. 47, No. 5, pp. 627–649
6. **Maric V.** (2000) Regular Variation and differential equations // Springer (Lecture notes in mathematics, 1726). 127p.
7. **Seneta E.** (1976) *Regularly varying functions* Lecture Notes in Math., vol. 508, Berlin: Springer-Verlag.

Chepok O. O.

EXISTENCE CONDITIONS AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-SOLUTIONS OF SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS CONTAINING A PRODUCT OF DIFFERENT TYPES OF NONLINEARITIES

Summary

The paper provides a detailed study of a second-order nonlinear differential equation, the right-hand side of which contains a product of a regularly varying nonlinear function of an unknown function and a rapidly varying nonlinear function of its first derivative. The research focuses on the behavior of the nonlinear functions as the unknown function and its derivative tend to zero or infinity. For this class of equations, necessary and sufficient conditions for the existence of $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-solutions have been obtained for the first time, and asymptotic representations for such solutions and their first-order derivatives have been established. These $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-solutions of the equation under study are rapidly varying as the argument tends to zero or infinity, which complicates their investigation compared to other types of solutions. The number of such $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-solutions is also determined depending on the conditions on the coefficients of the equation. The results regarding $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-solutions for the equations of the type under study are novel.

Keywords: nonlinear second-order differential equations, asymptotic representations of rapidly varying solutions, $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-solutions, rapidly varying functions, regularly varying functions.

REFERENCES

1. **Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.** (1978) Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications.// Cambridge university press. Cambridge. 494p.

2. **Chepok, O.** (2023). Asymptotic behavior of $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-solutions of the second order differential equations with the product of different types of nonlinearities from an unknown function and its first derivative. Bukovinian Math. Journal. 11, No. 2, 33 – 40. 10.31861/bmj2023.02.04

3. **Chepok, O** (2023) Asymptotic representations of regularly varying $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$–solutions of a differential equation of the second order containing the product of different types of nonlinearities of the unknown function and its derivative. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 274, No. 1, July, P 142-155

4. **Evtukhov, V.,Samoilenko, A.** (2010). Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point // Ukrainian Mathematical Journal - UKR MATH J. 62. 56-86. 10.1007/s11253-010-0333-7.

5. **Evtukhov, V.,Samoilenko, A.** (2011). Asymptotic Representations of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities // Differential Equations, Vol. 47, No. 5, pp. 627–649

6. **Maric V.** (2000) Regular Variation and differential equations // Springer (Lecture notes in mathematics, 1726). 127p.

7. **Seneta E.** (1976) *Regularly varying functions* Lecture Notes in Math., vol. 508, Berlin: Springer-Verlag.

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ
(скорочений варіант)

Журнал «Дослідження в математиці і механіці» має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень, огляди з актуальних проблем за тематикою видання, а також повідомлення про ювілеї, знаменні дати та події.

Статті публікуються українською або англійською мовою.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Електронну версію рукопису слід надсилати на e-mail журналу

rmm-journal@onu.edu.ua

або завантажувати через сайт журналу

www.rmm-journal.onu.edu.ua

Вона повинна складатися з

1) вихідного TEX-файла,
2) PDF-файла,
3) всіх допоміжних файлів (графіки, рисунки, ілюстрації тощо),
4) документа з анкетними даними авторів (прізвище, ім'я, по батькові, місце роботи, e-mail, адреса для листування та телефон).

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LATEX відповідно до вимог та з використанням шаблону, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті. Також вимоги можна отримати в редакційній колегії журналу.

Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 25 сторінок.

Структура статті:

— УДК;
— список авторів;
— місце роботи авторів;
— назва статті;
— резюме мовою оригіналу обсягом не менше 100 слів;
— Mathematical Subject Classification (2010);

— список ключових слів мовою оригіналу;

— основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України «Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України» від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується подана стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером у квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформлюється відповідно до Державного стандарту України ДСТУ 7.1:2006 «Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання» та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008);

— анотація іншою мовою повинна містити назву, список авторів, резюме обсягом не менше 100 слів та список ключових слів;

— додатково, якщо стаття написана українською мовою, після анотації англійською мовою додається список літератури у транслітерації, оформлений у відповідності до міжнародного стандарту *Harvard* (зразок та правила оформлення можна знайти в шаблоні статті на сайті).

Усі надіслані статті проходять анонімне рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу «Дослідження в математиці і механіці».

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, зокрема й у співавторстві.

Редакційна колегія журналу
«Дослідження в математиці і механіці»
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Змієнка Всеволода, 2
м. Одеса, 65082

Українською та англійською мовами

Згідно з Рішенням Національної ради України з питань телебачення
і радіомовлення № 1407 від 26.06.2025 р. журнал зареєстрований
як друковане медіа і внесений до Реєстру суб'єктів у сфері медіа
з ідентифікатором R30-06164

Затверджено до друку вченою радою
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова
Протокол № 5 від 23 грудня 2025 р.

Відповідальний за випуск *О. О. Максимов*
Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*
Технічний редактор *М. М. Бушин*

Наклад 100 пр. Зам. № 337(78).

Адреса редколегії:
65082, м. Одеса, вул. Змієнка Всеволода, 2
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
astro_print@ukr.net
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Дослідження в математиці і механіці. — 2025. — Т. 30, вип. 2(46). —
С. 1–94.