



ISSN 2519–206X

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

# ДОСЛІДЖЕННЯ В МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

Науковий журнал

Виходить 2 рази на рік

Журнал заснований у січні 1997 р.

**Том 30. Випуск 1(45). 2025**

Одеса  
«Астропринт»  
2025

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

*Редакційна колегія журналу*

Головний редактор — О. М. Станжицький, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Заступник головного редактора — В. М. Євтухов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Відповідальний редактор — О. Д. Кічмаренко, д. ф.-м. н., доц. (Україна)

A. Alifov, д. ф.-м. н., проф. (Азербайджан)

A. Ashyralyev, д. ф.-м. н., проф. (Туреччина)

S. Dashkovskiy, Dr. habil., проф. (Німеччина)

F. Iacoviello, PhD, проф. (Італія)

I. T. Kiguradze, д. ф.-м. н., проф. (Грузія)

С. К. Асланов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Н. Д. Вайсфельд, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Д. В. Дмитришин, д. т. н., проф. (Україна)

A. A. Дороговцев, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. В. Капустян, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

П. І. Когут, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Ан. О. Кореновський, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. Ф. Кривий, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

В. Є. Круглов, к. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. Меньшиков, д. ф.-м. н., проф. (Шотландія)

A. В. Плотніков, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

В. Г. Попов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Н. В. Скрипник, д. ф.-м. н., доц. (Україна)

I. М. Черевко, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

*Відповідальний за випуск — О. О. Максимов*

*Згідно з Рішенням Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення № 1407 від 26.06.2025 р. журнал зареєстрований як друковане медіа і внесений до Реєстру суб'єктів у сфері медіа з ідентифікатором R30-06164*

*Журнал внесений до переліку наукових фахових видань наказами Міністерства освіти і науки України № 527 від 24.05.2018 р. та № 775 від 16.07.2018 р.*

ISSN 2519–206X

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE  
Odesa I. I. Mechnikov National University

RESEARCHES  
in MATHEMATICS  
and MECHANICS

Scientific journal

Published twice a year

Journal founded in January, 1997

**Volume 30. Issue 1(45). 2025**

Odesa  
«Astroprint»  
2025

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

*Editorial board of the journal*

Editor-in-chief — O. M. Stanzhytskyi, DSc., Prof. (Ukraine)

Deputy Editor-in-chief — V. M. Evtukhov, DSc., Prof. (Ukraine)

Executive Editor — O. D. Kichmarenko, DSc., Assoc. Prof. (Ukraine)

A. Alifov, DSc, Prof. (Azerbaijan)

A. Ashyralyev, DSc, Prof. (Turkey)

S. K. Aslanov, DSc, Prof. (Ukraine)

I. M. Cherevko, DSc, Prof. (Ukraine)

S. Dashkovskiy, Dr. habil., Prof. (Germany)

D. V. Dmitrishin, DSc, Prof. (Ukraine)

A. A. Dorogovtsev, DSc, Prof. (Ukraine)

O. V. Kapustyan, DSc, Prof. (Ukraine)

I. T. Kiguradze, DSc, Prof. (Georgia)

P. I. Kogut, DSc., Prof. (Ukraine)

An. O. Korenovskyi, DSc, Prof. (Ukraine)

V. Ye. Kruglov, CandSc, Prof. (Ukraine)

O. F. Kryvyi, DSc, Prof. (Ukraine)

F. Iacoviello, DSc, Prof. (Italy)

O. Menshykov, DSc, Prof. (Scotland)

A. V. Plotnikov, DSc, Prof. (Ukraine)

V. G. Popov, DSc, Prof. (Ukraine)

N. V. Skripnik, DSc, Assoc. Prof.(Ukraine)

N. D. Vaysfeld, DSc, Prof. (Ukraine)

*Publication Editor* — O. O. Maksymov

*According to the Resolution of the National Council of Ukraine on Television and Radio Broadcasting No 1407 dated 06.26.2025, the journal is registered as a print media and included in the Registry of Media with identifier R30-06164.*

*The journal is included in the List of Scientific Specialized Publications by Orders of the Ministry of Education and Science of Ukraine No 527 dated May 24, 2018, and No 775 dated July 16, 2018.*

## ЗМІСТ

<i>Воробйова А. В.</i> Асимптотичні властивості повільно змінних розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями близькими до правильно змінних . . . . .	7
<i>Коренкова Г. В., Орловська С. Г., Зуй Д. В.</i> Математичне моделювання впливу розміру частинок на динаміку тепломасообміну та горіння вуглецевого газозавису . . . . .	20
<i>Круглов В. Є.</i> Твірні функції систем поліноміальних власних функцій лінійних диференціальних рівнянь другого порядку . . . . .	34
<i>Bondarenko K. S., Tairova M. S., Kichmarenko O. D., Verbitskyi V. V.</i> Algorithms for constructing a set-valued mapping in $R^3$ . . . . .	45
<i>Yakimova N. A., Sharai N. V.</i> Algebraic implementation of binary operations on graphs . . . . .	64
Інформація для авторів . . . . .	81

## CONTENTS

<i>Vorobiova A. V.</i> Asymptotic properties of slowly varying solutions to second-order differential equations with nonlinearities close to regularly varying . . . . .	7
<i>Korenkova H., Orlovska S., Zui D.</i> Mathematical modeling of the effect of particle size on the heat and mass transfer dynamics and combustion of a carbon gas suspension . . . . .	20
<i>Kruglov V. E.</i> Generating functions for systems of polynomial eigenfunctions of second-order linear differential equations . . . . .	34
<i>Bondarenko K. S., Tairova M. S., Kichmarenko O. D., Verbitskyi V. V.</i> Algorithms for constructing a set-valued mapping in $R^3$ . . . . .	45
<i>Yakimova N. A., Sharai N. V.</i> Algebraic implementation of binary operations on graphs . . . . .	64
Information for authors . . . . .	81

УДК 517.925

**А. В. Воробйова, аспірант**

*Одеський національний університет імені І. І. Мечникова*

*кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь*

*вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна*

*e-mail: alla.vorobyova@stud.onu.edu.ua*

*ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0009-7664-3399>*

## **АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПОВІЛЬНО ЗМІННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З НЕЛІНІЙНОСТЯМИ БЛИЗЬКИМИ ДО ПРАВИЛЬНО ЗМІННИХ**

У роботах В. М. Євтухова було започатковано методу дослідження асимптотичних властивостей розв'язків широких класів істотно нелінійних диференціальних рівнянь з нелінійностями різних типів, зокрема правильно змінних в околі особливої точки. У представленій статті цей підхід застосовано для дослідження асимптотичної поведінки  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків класу істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Основну увагу приділено знаходженню асимптотичних зображень цих розв'язків та їх похідних першого порядку у складних випадках, коли  $\lambda_0 = 0$ . За таких умов розв'язки або їх похідні виявляються повільно змінними функціями при  $t \uparrow \omega$ , що істотно ускладнює процес дослідження порівняно зі стандартними випадками. У роботі отримано асимптотичні зображення для особливого класу повільно змінних розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, що містять нові класи нелінійностей близьких до правильно змінних. Крім того отримано необхідні і достатні умови існування таких розв'язків.

*MSC: 2000: 34C41, 34A10.*

*Ключові слова: диференціальні рівняння другого порядку, асимптотичний, повільно змінні розв'язки, правильно змінні нелінійності,  $P_\omega$ -розв'язки.*

*DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.1\(45\).352809](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.1(45).352809)*

### **Вступ**

У працях В. М. Євтухова та численних представників його наукової школи (див., наприклад, [1]–[3],[4]) було сформовано цілісний підхід до аналізу широких класів розв'язків рівнянь із правильно змінними нелінійностями. При дослідженні введених В. М. Євтуховим відомих класів

розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь особливі складнощі виникають під час розгляду специфічних випадків, зокрема таких, які є повільно змінними функціями при прямуванні аргументу до особливої точки. Для класу диференціальних рівнянь з нелінійностями нових типів досліджується саме такий клас розв'язків.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y') \exp(R(|\ln |\pi_\omega(t) y y'| |)) \quad (1)$$

де  $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ ,  $p : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ),  $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow ]0, +\infty[$  — неперервні функції,  $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$ ,  $\Delta_{Y_i}$  — проміжок або  $[y_i^0, Y_i[$ , \* або  $]Y_i, y_i^0]$  (для кожного  $i \in \{0, 1\}$ ), а  $R$  — неперервно диференційовна, з монотонною похідною, правильно змінна на нескінченності функція порядку  $\mu$ ,  $0 < \mu < 1$ .

Крім того, вважається, що кожна з функцій  $\varphi_i(z)$  (для кожного  $i \in \{0, 1\}$ ) є правильно змінною функцією при  $z \rightarrow Y_i$  ( $z \in \Delta_{Y_i}$ ) порядку  $\sigma_i$ ,  $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$ .

Також будемо вважати

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при } \omega < +\infty, \end{cases} \quad \Theta_i(z) = \varphi_i(z) |z|^{-\sigma_i} \quad (\forall i \in \{0, 1\}).$$

**Означення 1.** Розв'язок  $y$  рівняння (1) будемо називати  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язком, якщо він заданий на  $[t_0, \omega[ \subset [a, \omega[$  та для кожного  $i \in \{0, 1\}$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \quad (2)$$

Розглянемо  $L_0 : \Delta_{Y_0} \rightarrow ]0, +\infty[$ ,  $L_1 : \Delta_{Y_1} \rightarrow ]0, +\infty[$  — нескінченно диференційовні повільно змінні при прямуванні аргументу до  $Y_0, Y_1$  відповідно функції та такі, що для кожного  $i \in \{0, 1\}$

$$L_i(z) = \Theta_i(z)[1 + o(1)] \text{ при } z \rightarrow Y_i \ (z \in \Delta_{Y_i}), \quad \lim_{\substack{z \rightarrow Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{z L_i'(z)}{L_i(z)} = 0. \quad (3)$$

\*При  $Y_i = +\infty$  ( $Y_i = -\infty$ ) вважаємо  $y_i^0 > 0$  ( $y_i^0 < 0$ ) відповідно.

**Означення 2.** Будемо говорити, що функція  $\varphi_i$ , де  $i \in \{0, 1\}$ , задовольняє умову  $S$ , якщо для будь-якої неперервно диференційовної функції  $L_i: \Delta_{Y_i} \rightarrow ]0, +\infty[$  такої, що

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Y_i \\ z \in \Delta_{Y_i}}} \frac{zL_i'(z)}{L_i(z)} = 0, \quad (4)$$

мають місце співвідношення

$$\Theta_i(zL_i(z)) = \Theta_i(z)[1 + o(1)] \quad \text{при } z \rightarrow Y_i \ (z \in \Delta_{Y_i}). \quad (5)$$

Введемо необхідні позначення

$$I(t) = \alpha_0 \int_{A_\omega}^t p(\tau) d\tau, \quad A_\omega = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau) d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau) d\tau < +\infty, \end{cases}$$

У випадку, коли  $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\text{sign } y_1^0}{|\pi_\omega(t)|} = Y_1$ ,

$$J(t) = \int_{B_\omega}^t \left| I(\tau) \Theta_1 \left( \frac{\text{sign } y_1^0}{|\pi_\omega(t)|} \right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau,$$

$$B_\omega = \begin{cases} b, & \text{якщо } \int_b^\omega \left| I(\tau) \Theta_1 \left( \frac{\text{sign } y_1^0}{|\pi_\omega(t)|} \right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_b^\omega \left| I(\tau) \Theta_1 \left( \frac{\text{sign } y_1^0}{|\pi_\omega(t)|} \right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau < +\infty, \end{cases}$$

Має місце наступна теорема.

**Теорема.** Нехай у рівнянні (1)  $\sigma_1 \neq 1$ , функція  $\varphi_1$  задовольняє умову  $S$  і

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{R(|2 \ln |\pi_\omega(t)||) J(t)}{\pi_\omega(t) \ln |\pi_\omega(t)| J'(t)} = 0. \quad (6)$$

Тоді, для існування у рівняння (1)  $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ -розв'язків, для яких існує скінченна чи нескінченна границя

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)},$$

необхідно і достатньо виконання умов

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \omega} y_0^0 |J(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y_1^0 |I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} = Y_1, \\ \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} = \sigma_1 - 1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

і нерівностей

$$\frac{I(t)}{y_1^0(1-\sigma_1)} > 0 \text{ при } t \in ]a, \omega[, \quad \frac{y_0^0 y_1^0 (1-\sigma_1)J(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1} > 0 \text{ при } t \in ]a, \omega[. \quad (8)$$

Крім того, для кожного такого розв'язку мають місце наступні асимптотичні зображення при  $t \uparrow \omega$

$$\begin{aligned} \frac{y(t)}{|\exp(R(|\ln |\pi_\omega(t)y(t)y'(t)|)|))\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} &= \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} |1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} J(t)[1+o(1)], \\ \frac{y(t)}{y'(t)} &= \frac{(1-\sigma_0-\sigma_1)J(t)}{(1-\sigma_1)J'(t)} [1+o(1)]. \end{aligned} \quad (9)$$

**Доведення. Необхідність.** Нехай  $y: [t_0, \omega[ \rightarrow \Delta_{Y_0} - P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$ -розв'язок рівняння (3.1). Із умов на функцію  $R$  з урахуванням [6] (розділ 5, пункт 1, ст. 116) випливає, що

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{zR'(z)}{R(z)} = \mu, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} R'(z) = 0. \quad (10)$$

Введемо функції  $L_0, L_1$ , які визначені в (3) і розглянемо рівність

$$\begin{aligned} &\left( \frac{y'(t)|y(t)|^{-\sigma_0}|y'(t)|^{-\sigma_1}}{L_0(y(t))L_1(y'(t))\exp(R(|\ln |\pi_\omega(t)y(t)y'(t)|)|)} \right)' = \\ &= \frac{y''(t)|y(t)|^{-\sigma_0}|y'(t)|^{-\sigma_1}}{L_0(y(t))L_1(y'(t))\exp(R(|\ln |\pi_\omega(t)y(t)y'(t)|)|)} \times \left( 1 - \sigma_1 - R'(|\ln |\pi_\omega(t)y(t)y'(t)|)| - \right. \\ &\quad \left. - \frac{y'(t)L_1'(y'(t))}{L_1(y'(t))} - \frac{y'(t)}{\pi_\omega(t)y''(t)} R'(|\ln |\pi_\omega(t)y(t)y'(t)|)| - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} \left( \sigma_0 + \frac{y(t)L_0'(y(t))}{L_0(y(t))} + R'(|\ln |\pi_\omega(t)y(t)y'(t)|)| \right) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Оскільки при  $t \uparrow \omega$

$$\begin{aligned} \frac{y''(t)|y(t)|^{-\sigma_0}|y'(t)|^{-\sigma_1}}{\Theta_0(y(t))\Theta_1(y'(t))\exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||)))} &= \\ &= \frac{y''(t)|y(t)|^{-\sigma_0}|y'(t)|^{-\sigma_1}[1+o(1)]}{L_0(y(t))L_1(y'(t))\exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||))}, \end{aligned}$$

то, з використанням тверджень 1 і 2 з [6] (розділ 5, §1, ст. 115), враховуючи вибір  $A_\omega$  отримаємо із (11)

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1} \cdot \Theta_1(y'(t))\exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||))} = (1-\sigma_1)I(t)[1+o(1)]. \quad (12)$$

Зауважимо, що (12) може бути переписано при  $t \uparrow \omega$  у виді

$$\begin{aligned} \frac{y'(t)\text{sign } y_1^0}{|\varphi_0(y(t))\Theta_1(y'(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} &= |1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \times \\ &\times \exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}[1+o(1)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Крім того, з урахуванням виду рівняння (1), маємо

$$\frac{y''(t)}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1} \cdot \Theta_1(y'(t))\exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||))} = \alpha_0 p(t), \quad (14)$$

а розділивши (14) на (12) отримаємо при  $t \uparrow \omega$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{\alpha_0 p(t)}{(1-\sigma_1)I(t)}[1+o(1)]. \quad (15)$$

Звідси, так як існує скінченна або нескінченна границя  $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$ , яка в силу леми 10.6 із [4] дорівнює  $(-1)$ , отримаємо другу із умов (7) і першу із умов (8). Крім того, оскільки функція  $\varphi_1$  задовольняє умову  $S$ , з (15) випливає, що при  $t \uparrow \omega$

$$\Theta_1(y'(t)) = \Theta_1\left(\frac{\text{sign } y_1^0}{|\pi_\omega(t)|}\right)[1+o(1)]. \quad (16)$$

З першої з наведених умов (8) випливає, що існує така повільно змінна неперервно диференційовна функція  $K : \Delta_{Y_0} \rightarrow ]0, +\infty[$ , що  $y'(t) = \frac{K(\pi_\omega(t))}{\pi_\omega(t)}$ . Тому, з урахуванням властивостей логарифмічної функції і функції  $R$ , зокрема, (10), маємо при  $t \uparrow \omega$

$$R(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||) = R(|2\ln|\pi_\omega(t)||)[1+o(1)]. \quad (17)$$

Нехай

$$W(t) := \int_{B_\omega}^t J'(\tau) \exp(R(|\ln |\pi_\omega(\tau)y(\tau)y'(\tau)|||)) d\tau,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} J(t) = J_0.$$

Покажемо, що функція

$$\exp(R(|\ln |\pi_\omega(J^{-1}(z))y(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))|||)),$$

де  $J^{-1}$  — функція, обернена до  $J$ , є повільно змінною функцією при  $z \rightarrow J_0$ . Дійсно, з урахуванням умов (6) і (17) маємо

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow J_0} \frac{z(\exp(R(|\ln |\pi_\omega(J^{-1}(z))y(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))|||)))'}{\exp(R(|\ln |\pi_\omega(J^{-1}(z))y(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))|||))} = \\ = \lim_{z \rightarrow J_0} \left[ \frac{zR'(|\ln |\pi_\omega(J^{-1}(z))y(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))|||)}{R(|\ln |\pi_\omega(J^{-1}(z))y(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))|||)} \cdot \right. \\ \cdot \frac{R(|\ln |\pi_\omega(J^{-1}(z))y(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))|||)}{\pi_\omega(J^{-1}(z))J'(J^{-1}(z))} \times \\ \left. \times \left( 1 + \frac{\pi_\omega(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))}{y(J^{-1}(z))} + \frac{\pi_\omega(J^{-1}(z))y''(J^{-1}(z))}{y'(J^{-1}(z))} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Звідси, з використанням теорем про інтегрування правильно змінних функцій (твердження 1 і 2 з [6] (розділ 5, §1, ст. 116)), випливає, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{W(t)}{\exp(R(|\ln |\pi_\omega(t)y(t)y'(t)|||))J(t)} = 1.$$

Тому, із (13) з урахуванням (16) випливає перше з асимптотичних зображень (9), а звідси отримаємо другу із умов (8) і першу із (7). З першого зображення (9) з використанням (13) отримаємо друге зображення (9) і другу із умов (7). Також з першого зображень (9), (13) та (2) отримаємо четверту з умов (7).

*Достатність.* Припустимо, що функція  $\varphi_1$  задовольняє умову  $S$ , а також виконується умова (6). Позначимо  $g(t, v_0, v_1) = \exp(R(|\ln |\pi_\omega(t)v_0v_1|||))L_0(v_0)L_1(v_1)$ , де  $L_0, L_1$  визначені в (3) і розглянемо функцію

$$F(s_0, s_1) = \begin{pmatrix} \frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0, s_1)} \\ \frac{s_1}{s_0} \end{pmatrix},$$

яка задана на множині  $\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$ . При цьому для функції  $g$  мають місце граничне співвідношення

$$\lim_{\substack{v_i \rightarrow Y_i \\ v_i \in \Delta_{Y_i}}} \frac{v_i \frac{\partial g}{\partial v_i}(t, v_0, v_1)}{g(t, v_0, v_1)} = 0 \quad \text{рівномірно по } v_j \in \Delta_{Y_j}, \quad j \neq i, \quad \forall i, j \in \{0, 1\}. \quad (18)$$

Можна вибрати множини  $\tilde{\Delta}_{Y_i} \subset \Delta_{Y_i}$  ( $\forall i \in \{0, 1\}$ ) так, щоб

$$\left| \frac{\pi_\omega(t) \frac{\partial g}{\partial t}(t, v_0, v_1)}{g(t, v_0, v_1)} \right| < \zeta, \quad (\forall i \in \{0, 1\}) \quad \text{при } (v_0, v_1) \in \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}, \quad (19)$$

$$\left| \frac{v_i \frac{\partial g}{\partial v_i}(t, v_0, v_1)}{g(t, v_0, v_1)} \right| < \zeta, \quad (\forall i \in \{0, 1\}) \quad \text{при } (v_0, v_1) \in \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}, \quad (20)$$

де  $0 < \zeta < \frac{|1 - \sigma_0 - \sigma_1|}{4}$ ,  $\zeta$  – достатньо мало.

Покладемо

$$\begin{cases} \frac{y(t)|y(t)|^{\frac{\sigma_0}{\sigma_1-1}}}{|\exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)|))\Theta_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}})} = \frac{c_1}{c} J(t)[1 + z_1(x)], \\ \frac{y(t)}{y'(t)} = \frac{1}{c} \frac{J(t)}{J'(t)} [1 + z_2(x)], \end{cases} \quad (21)$$

де

$$\begin{aligned} c &= \frac{1 - \sigma_1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1}, \quad c_1 = |1 - \sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}, \\ x &= \beta \ln |I(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \lim_{t \uparrow \omega} I(t) = +\infty, \\ -1, & \text{якщо } \lim_{t \uparrow \omega} I(t) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

зведемо рівняння (1) до системи

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1'(x) = \beta H(x)[1 + z_1] \left( \frac{c}{1 + z_2} - 1 - \frac{G_1(x, z_1, z_2) R'(|2 \ln |\pi_\omega(x)||)}{(1 - \sigma_1) \cdot H(x)} \times \right. \\ \quad \times \left( G_3(x, z_1, z_2) + \frac{cH(x)}{1 + z_2} + \frac{G_0(x, z_1, z_2)}{1 - \sigma_1} \left| \frac{1 + z_2}{1 + z_1} \right|^{1 - \sigma_1} \right) - \\ \quad \left. - \frac{c \cdot G_2(x, z_1, z_2)}{(1 - \sigma_1)[1 + z_2]} \right), \\ z_2' = \beta[1 + z_2] \left( \frac{cH(x)}{1 + z_2} + K(x) - H(x) - \frac{G_0(x, z_1, z_2)}{1 - \sigma_1} \left| \frac{1 + z_2}{1 + z_1} \right|^{1 - \sigma_1} \right), \end{array} \right. \quad (23)$$

де

$$\Psi_0(x, z_1, z_2) = F_0^{-1} \left( \frac{c_1}{c} J(t(x))[1 + z_1], \frac{J(t(x))}{cJ'(t(x))} [1 + z_2] \right),$$

$$\Psi_1(x, z_1, z_2) = F_1^{-1} \left( \frac{c_1}{c} J(t(x))[1 + z_1], \frac{J(t(x))}{cJ'(t(x))} [1 + z_2] \right),$$

$$G_0(x, z_1, z_2) = \frac{\Theta_1(\Psi_1(x, z_1, z_2))}{\Theta_1\left(\frac{\text{sign } y_1^0}{|\pi_\omega(t(x))|}\right)}, \quad G_3(x, z_1, z_2) = \frac{I(t)}{\pi_\omega(t)I'(t)},$$

$$G_1(x, z_1, z_2) = \frac{R'(|\ln |\pi_\omega(t)\Psi_0(x, z_1, z_2)\Psi_1(x, z_1, z_2)||)}{R'(|2 \ln |\pi_\omega(t(x))||)},$$

$$G_2(x, z_1, z_2) = \frac{\Psi_0(x, z_1, z_2)L_0'(\Psi_0(x, z_1, z_2))}{L_0(\Psi_0(x, z_1, z_2))},$$

$$H(x) = \frac{I(t(x))J'(t(x))}{I'(t(x))J(t(x))}, \quad K(x) = H(t(x)) \frac{J''(t(x))J(t(x))}{(J'(t(x)))^2}.$$

В силу умови (6)

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{R'(|2 \ln |\pi_\omega(t)||)}{H(t)} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi_0(x, z_1, z_2) = Y_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi_1(x, z_1, z_2) = Y_1$$

рівномірно по  $z_1, z_2 : |z_j| < \frac{1}{2}, \forall j \in \{1, 2\}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G_2(x, z_1, z_2) = 0, \quad \text{рівномірно по } z_1, z_2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G_0(x, z_1, z_2) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} G_3(x, z_1, z_2) = \frac{1}{\sigma_1 - 1}.$$

Так як  $R$  — правильно змінювана функція при прямуванні аргументу до  $\infty$  порядку  $\mu$ , то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G_1(x, z_1, z_2) = 1.$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (23) на множині

$$\Omega = [x_0, +\infty[ \times D, \quad \text{де } x_0 = \beta \ln |I(t)|,$$

$$D = \left\{ (z_1, z_2) : |z_i| \leq \frac{1}{2}, i \in \{1, 2\} \right\}.$$

Перепишемо систему (23) у виді

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dx} = (A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + R_1(x, z_1, z_2) + R_2(z_1, z_2))H(x), \\ \frac{dz_2}{dx} = A_{21}z_1 + A_{22}z_2 + R_3(x) + R_4(z_1, z_2), \end{cases} \quad (24)$$

де

$$A_{11} = 0, \quad A_{12} = -c\beta, \quad A_{21} = \beta, \quad A_{22} = (1 - c)\beta,$$

$$\begin{aligned} R_1(x, z_1, z_2) &= \beta[1 + z_1] \left( \frac{G_1(x, z_1, z_2)R'(|2 \ln |\pi_\omega(x)||)}{(1 - \sigma_1) \cdot H(x)} \times \right. \\ &\times \left. \left( G_3(x, z_1, z_2) + \frac{cH(x)}{1 + z_2} + \frac{G_0(x, z_1, z_2)}{1 - \sigma_1} \left| \frac{1 + z_2}{1 + z_1} \right|^{1 - \sigma_1} \right) + \frac{c \cdot G_2(x, z_1, z_2)}{(1 - \sigma_1)[1 + z_2]} \right), \end{aligned}$$

$$R_2(z_1, z_2) = \beta \frac{z_2^2 - z_1 z_2}{1 + z_2},$$

$$\begin{aligned} R_3(x, z_1, z_2) &= \beta[1 + z_2] \left( \frac{cH(x)}{1 + z_2} + K(x) - H(x) - \frac{1}{1 - \sigma_1} \times \right. \\ &\times \left. \left( 1 + (G_0(x, z_1, z_2) - 1) \left| \frac{1 + z_2}{1 + z_1} \right|^{1 - \sigma_1} \right) \right), \end{aligned}$$

$$R_4(z_1, z_2) = \beta \frac{1}{1 - \sigma_1} \left( \frac{|1 + z_2|^{2 - \sigma_1}}{|1 + z_1|^{1 - \sigma_1}} - ((2 - \sigma_1)z_2 + (1 - \sigma_1)z_1 - 1) \right).$$

За третьою з умов (7)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H(x) = 0, \quad (25)$$

а звідси

$$\lim_{x \rightarrow \infty} K(x) = \frac{1}{1 - \sigma_1}.$$

Отже, з урахуванням (23)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R_i(x, z_1, z_2) = 0 \quad (i \in \{1, 3\})$$

рівномірно по  $z_1, z_2 : (z_1, z_2) \in D$ ,

$$\lim_{|z_1| + |z_2| \rightarrow 0} R_j(z_1, z_2) = 0 \quad (\forall j \in \{2, 4\})$$

рівномірно по  $x : x \in [x_0, +\infty[$ .

Зауважимо, що характеристичне рівняння матриці

$$\begin{pmatrix} 0 & -c\beta \\ \beta & (1-c)\beta \end{pmatrix}$$

має вигляд

$$\mu^2 - (1-c)\beta\mu + c\beta^2 = 0. \quad (26)$$

У цього рівняння немає коренів з нульовою дійсною частиною. Отримуємо, що у цих випадках для системи диференціальних рівнянь (23) виконано всі умови теореми з [4]. Відповідно до цієї теореми система (23) має розв'язки  $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $x_1 \geq x_0$ ), які прямують до нуля при  $x \rightarrow +\infty$ . Цим розв'язкам у силу заміні (21), (22) відповідають розв'язки  $y$  рівняння (1), що допускають при  $t \uparrow \omega$  асимптотичні зображення (9).

Теорему доведено.

## Висновки

Для диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями загального вигляду, що є близькими до правильно змінних, було отримано необхідні та достатні умови існування достатньо широкого класу повільно змінних розв'язків. Крім того, знайдено асимптотичні формули для цих розв'язків та їх похідних першого порядку.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Білозерова М. О. Асимптотичні зображення особливих розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з правильно змінними нелінійностями. *Буковинський математичний журнал*. 2015. Т. 3, № 2. С. 7–12.
2. Білозерова М. О., Гержановська Г. А. Асимптотична поведінка розв'язків, що є близькими до лінійних функцій, істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку. *Нелінійні коливання*. 2022. Т. 25, № 1. С. 3–13.
3. Гержановська Г. А. Властивості повільно змінних розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. *Буковинський математичний журнал*. 2017. Т. 5, № 3–4. С. 39–46.
4. Евтухов В. М., Самойленко А. М. Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений. *Укр. мат. журн.* 2010. Т. 62, № 1. С. 52–80.
5. Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. *Regular Variation*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 494 p.
6. Marić V. Regular variation and differential equations. *Lecture notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 2000. 128 p.

Vorobiova A. V.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SLOWLY VARYING SOLUTIONS TO SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NONLINEARITIES CLOSE TO REGULARLY VARYING

*Summary*

The works of V. M. Evtukhov initiated a methodology for studying the asymptotic properties of solutions for wide classes of substantially nonlinear differential equations with various types of nonlinearities, specifically regularly varying ones in the neighborhood of a singular point. In the presented article, this approach is applied to study the asymptotic behavior of  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solutions for a class of substantially nonlinear second-order differential equations. Main attention is paid to finding asymptotic representations of these solutions and their first-order derivatives in complex cases when  $\lambda_0 = 0$ . Under such conditions, the solutions or their first-order derivatives turn out to be slowly varying functions as  $t \uparrow \omega$ , which significantly complicates the research process compared to standard cases. The paper obtains asymptotic representations for a special class of slowly varying solutions of substantially nonlinear second-order differential equations containing new classes of nonlinearities close to regularly varying ones. Furthermore, necessary and sufficient conditions for the existence of such solutions are obtained.

*Keywords:* second-order differential equations, asymptotic, slowly varying solutions, regularly varying nonlinearities,  $P_\omega$ -solutions.

**REFERENCES**

1. **Bilozeroва М. О.** Asymptotic representations of singular solutions of second-order differential equations with regularly varying nonlinearities. *Bukovinian Mathematical Journal*. 2015. Vol. 3, № 2. P. 7–12. [in Ukrainian].
2. **Bilozeroва М. О., Gerzhanovska Г. А.** Asymptotic behavior of solutions close to linear functions of essentially nonlinear nonautonomous second-order differential equations. *Nonlinear Oscillations*. 2022. Vol. 25, № 1. P. 3–13. [in Ukrainian].
3. **Gerzhanovska Г. А.** Properties of slowly varying solutions of essentially nonlinear second-order differential equations. *Bukovynskyi matematychnyi zhurnal*. 2017. Vol. 5, № 3–4. P. 39–46. [in Ukrainian].

- 
4. **Evtukhov V. M., Samoilenko A. M.** Conditions of existence of disappearing in the critical point solutions to real nonautonomous systems of quasilinear differential equations. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2010. Vol. 62, № 1. P. 52–80. [in Russian].
  5. **Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.** *Regular Variation*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 494 p.
  6. **Mari'c V.** Regular variation and differential equations. *Lecture notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 2000. 128 p.

УДК 517.9

**Г. В. Коренкова**, кандидат фіз-мат. наук, доцент  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
кафедра комп'ютерних систем та технологій  
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна  
e-mail: korenkova@onu.edu.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-7207-3688>

**С. Г. Орловська**, кандидат фіз-мат. наук, доцент  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
кафедра фізики та астрономії  
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна  
e-mail: svetor25@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-1203-6978>

**Д. В. Зуй**, здобувач освіти спеціальності «Прикладна математика»  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
Фаховий коледж ОНУ імені І. І. Мечникова  
вул. Добровольців, 4, м. Одеса, 65063, Україна  
e-mail: zui.denis@stud.onu.edu.ua

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ РОЗМІРУ ЧАСТИНОК НА ДИНАМІКУ ТЕПЛОМАСООБМІНУ ТА ГОРІННЯ ВУГЛЕЦЕВОГО ГАЗОЗАВИСУ**

У статті виконано математичне дослідження тепломасообміну та динаміки горіння монодисперсного газозавису поруватих вуглецевих частинок з урахуванням взаємодії хімічних, теплових і дифузійних процесів. Побудовано узгоджену нелінійну модель, що включає рівняння теплового та масового балансу частинок, еволюцію їх геометричних параметрів, а також енергетичний і дифузійний баланси газової фази. Особливу увагу приділено аналізу впливу початкового діаметра частинок на характер режимних переходів: індукційного періоду, займання, стаціонарного горіння та затухання. Чисельна реалізація моделі здійснена методом Рунге–Кутта четвертого порядку. Отримано часові залежності температури, густини, діаметра та швидкості тепломасообмінних процесів, що дозволило ідентифікувати критичні параметри системи. Виявлено колективні ефекти газозавису, які призводять до зміни температурних профілів і згладжування теплових біфуркацій, характерних для поодиноких частинок. Результати мають значення для подальшого розвитку математичних моделей дисперсних реактивних середовищ і оптимізації теплотехнічних процесів.

MSC: 65L05.

Ключові слова: математичне моделювання, газозавис, вуглецеві частинки, тепломасообмін, кінетика горіння, теплові бифуркації, дисперсні реакційні системи.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.1\(45\).352811](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.1(45).352811)

## Вступ

Газозавис вуглецевих частинок — це дисперсна система, де тверді частинки (сажа, пил, вугілля) знаходяться у зваженому стані в газовому середовищі. Такі системи поширені в енергетиці, промисловості та природних явищах. Вивчення їхньої поведінки є критичним для техногенної безпеки та екології. Математичне моделювання цих процесів дозволяє досліджувати механізми займання, горіння та згасання без проведення дорогартісних експериментів [1; 2]. Це забезпечує точне прогнозування температурних полів та оцінку повноти згоряння. Мета роботи: чисельний аналіз впливу колективної взаємодії частинок на тепломасообмінні характеристики та критичні умови горіння газозавису при варіюванні початкового діаметра частинок.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

**1. Постановка задачі та математична модель.** Процес горіння газозавису характеризується складною взаємодією нестационарного тепломасообміну (ТМО) та хімічних реакцій (I) та (II) на поверхні та в порах частинок:



Задача зводиться до розв'язання системи диференціальних рівнянь для визначення функцій температури частинки  $T$ , діаметра  $d$ , густини  $\rho$ , температури газу  $T_g$  та концентрації кисню  $n_{\text{O}_2}$ .

Основні рівняння балансу (при  $B_i < 1$ ).

### 1. Рівняння теплового балансу частинки:

$$\frac{\rho c d}{6} \frac{\partial T}{\partial t} = q_{\text{ch}} - q_{\lambda} - q_w, \quad T(0) = T_b. \quad (1)$$

де  $c$  — питома теплоємність частинки;  $t$  — час;  $T_b$  — початкова температура;  $q_{\text{ch}}$  — сумарна густина хімічного тепловиділення на поверхні і в порах частинки;  $q_{\lambda}$  — тепловий потік, обумовлений молекулярно-конвективним

механізмом перенесення;  $q_w$  — радіаційна складова густини теплового потоку, спрямована від частинки до стінок реакційної установки.

Хімічне тепловиділення  $q_{ch}$  враховує реакції на зовнішній поверхні  $q_{ch,s}$  та внутрішнє реагування в порах  $q_{ch,v}$ :

$$\begin{aligned} q_{ch} &= q_{ch,v} + q_{ch,s}, \\ q_{ch} &= (k_1 q_1 + k_2 q_2) P_v \rho_g n_{O_2,s}, \\ P_v &= 1 + \frac{k_v}{k_1 + k_2}, \\ k_i &= k_{0i} \exp\left(-\frac{E_i}{RT}\right), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

де  $P_v$  — величина, яка враховує внутрішнє реагування [3]; при його відсутності  $P_v = 1$ ;  $q_1, q_2$  — питома теплота хімічних реакцій (I) та (II);  $k_i$  — константи швидкостей хімічних реакцій (I) і (II);  $\rho_g$  — густина газової суміші;  $n_{O_2,s}$  — відносна масова концентрація кисню на поверхні вуглецевої частинки;  $k_{0i}$  — передекспоненціальні множники для (I) і (II) реакцій;  $E_i$  — енергії активації для (I) і (II) реакцій;  $R$  — універсальна газова стала;  $k_v$  — ефективна константа внутрішнього реагування. Щільність теплового потоку на поверхні частинки  $q_\lambda$ , що описує молекулярно-конвективний механізм, визначається співвідношенням:

$$q_\lambda = \alpha(T - T_g) = \frac{Nu\lambda_g}{d}(T - T_g) \quad (3)$$

де  $\lambda_g$  — коефіцієнт теплопровідності газу;  $\alpha$  — коефіцієнт теплообміну частинки;  $Nu$  — критерій Нусельта. Радіаційний теплообмін  $q_w$  [1]: тепловий потік випромінюванням з одиниці поверхні частинки до стінок реакційної установки визначається у вигляді:

$$q_w = \varepsilon\sigma(T^4 - T_w^4). \quad (4)$$

2. Кінетика зміни геометричних та фізичних параметрів: Зміна діаметра частинки:

$$-\frac{1}{2}\rho \frac{\partial d}{\partial t} = \frac{M_C}{M_{O_2}}(k_1 + 2k_2)n_{O_2,s}\rho_g, \quad d(t=0) = d_b. \quad (5)$$

Зміна густини частинки:

$$-\frac{1}{6}d \frac{\partial(\rho)}{\partial t} = \frac{M_C}{M_{O_2}}(k_1 + 2k_2)n_{O_2,s} \frac{k_v}{k_1 + k_2} \rho_g, \quad \rho(t=0) = \rho_b \quad (6)$$

$M_C, M_{O_2}$ - значення молярних мас вуглецю (C) і кисню (O);  $\rho_g$  - густина газової суміші.

3. Рівняння для газової фази: Зміна температури газу (враховує теплообмін з частинками та середовищем):

$$c_g \rho_g \frac{\partial T_g}{\partial t} = \alpha S C_N (T - T_g) - \alpha_g F_g (T_g - T_{g\infty}), \quad T_g(t=0) = T_{g\infty} \quad (7)$$

$$\alpha_g = \frac{Nu \lambda_g}{d_g}, \quad F_g = \frac{S_g}{V_g}$$

де:  $\alpha_g$  — коефіцієнт теплообміну газозавису з навколишнім середовищем;  $c_g$  — питома теплоємність газу;  $C_N$  — чисельна концентрація;  $S_g$  — поверхня газозавису;  $F_g$  — питома поверхня газозавису;  $V_g$  — об'єм газозавису.

Зміна концентрації кисню (баланс витрати на реакції та дифузійного надходження):

$$-\frac{\partial n_{O_2}}{\partial t} = C_N S n_{O_2,s} (k_1 + k_2 + k_v) - F_g \beta_g (n_{O_2,\infty} - n_{O_2}), \quad n_{O_2}(t=0) = n_{O_2,\infty} \quad (8)$$

$$\beta_g = \frac{Sh_g D_g}{d_g}, \quad D_g = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_g} \quad (9)$$

де:  $n_{O_2,\infty}$  — відносна масова концентрація кисню в середовищі, що оточує газозавис;  $\beta_g$  — коефіцієнт дифузійного обміну масою між газозависом і навколишнім газовим середовищем;  $Sh_g$  — Критерій Шервуда.

Розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) (1), (5)–(8) є чисельно нетривіальним завданням [4], оскільки вона належить до класу жорстких систем. Жорсткість обумовлена значною різницею в часових масштабах процесів, які описує модель:

1. Повільні процеси: тепломасообмін (ТМО).
2. Швидкі процеси: хімічна кінетика, яка має сильну експоненційну залежність від температури  $T$  та зміна макропараметрів (діаметр  $d$ , густина  $\rho$ ).

Ця різниця вимагає використання стійких та точних чисельних методів для інтегрування.

Для чисельної реалізації використовувався метод Рунге–Кутта 4-го порядку [2]. Незважаючи на те, що для жорстких систем часто застосовують неявні схеми, успішна інтеграція досягається завдяки адаптивному

керуванню кроком інтегрування. Початковий крок інтегрування  $\Delta t_0 = 10^{-6} \dots 10^{-5}$ . При інтенсивному розвитку процесу, особливо під час займання (коли швидкість  $\frac{\partial T}{\partial t}$  зростає експоненційно), система автоматично зменшувала крок.

Побудова математичної моделі базується на таких припущеннях:

- частинки є монодисперсними та сферичними;
- внутрішня температура частинки рівномірна (критерій  $Bi < 1$ );
- газова фаза однорідна, її теплопровідність і теплоємність вважаються сталими;
- хімічні реакції відбуваються як на зовнішній поверхні частинки, так і в її порах;
- радіаційний теплообмін описується узагальненим законом Стефана-Больцмана;
- частинки не взаємодіють механічно між собою, а впливають одна на одну лише через тепло- та масообмін з газовим середовищем.

Ці припущення дозволяють сформуванню узгоджену фізико-математичну модель, достатньо точну для аналізу динаміки займання, активного горіння та режимів затухання газозавису.

При моделюванні враховувалися початкові умови:

$$T(t = 0) = T_b$$

$$T_g(t = 0) = T_{g\infty}$$

$$d(t = 0) = d_b$$

$$\rho(t = 0) = \rho_b$$

$$n_{O_2}(t = 0) = n_{O_2,\infty}$$

Тоді система набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = f_1(T, T_g, d, \rho, n_{O_2}), \\ \frac{\partial(d)}{\partial t} = f_2(T, d, \rho), \\ \frac{\partial(\rho)}{\partial t} = f_3(\rho, T, n_{O_2}), \\ \frac{\partial(T_g)}{\partial t} = f_4(T, T_g, n_{O_2}), \\ \frac{\partial(n_{O_2})}{\partial t} = f_5(n_{O_2}, T, d, \rho). \end{cases}$$

**2. Аналіз динаміки займання та горіння.** На основі чисельного моделювання проведено порівняльний аналіз поведінки поодинокі частинки та газозавису (сукупності частинок).

На рис. 1 наведено часові профілі температур частинок і газу, а також зміни похідної температури, діаметра та густини для окремої частинки й частинок газозавису.

Екстремуми на кривих похідної температури свідчать про зміну режимів тепломасообміну та кінетики реакцій, визначаючи моменти займання і згасання частинок [5; 6].

Основні величини для спостереження: Період індукції ( $t_{ind}$ ): Це той час, коли частинка починає стійко й різко нагріватися, тобто переходить від повільного нагріву до швидкого зростання температури. Момент займання визначають за поведінкою похідної температури  $\frac{\partial T(t)}{\partial t}$ . Вона має локальний максимум перед стійким підйомом температури частинки.

Для визначення часу займання, береться інтервал часу від початку процесу до максимального значення похідної температури за часом. На цьому інтервалі шукають час, коли швидкість нагріву найбільша, цей час — і є момент займання (рис. 1, точка I). Тобто: момент займання дорівнює часу, коли температура росте найшвидше перед піком похідної температури  $\frac{\partial T}{\partial t}$ .

$$t_{ind} = \arg \max_{t \leq t_{max}} \frac{dT(t)}{dt}, \quad \left. \frac{dT}{dt} \right|_{t=t_{ind}} = 0, \quad \left. \frac{d^2T}{dt^2} \right|_{t=t_{ind}} < 0,$$

де  $t_{max} = \arg \max \frac{dT(t)}{dt}$  — час максимуму температури.

Для практичної реалізації додають поріг  $\varepsilon$ :  $\frac{\partial T(t)}{\partial t} > \varepsilon$ , щоб уникнути

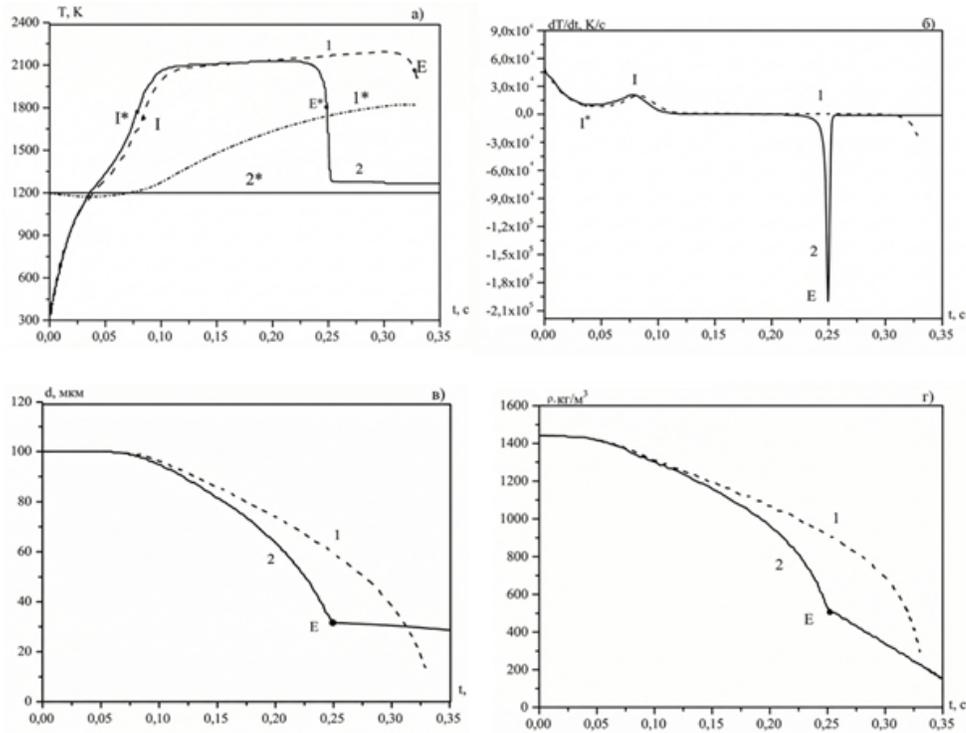


Рис. 1: Залежності:  $T$ ,  $d$ ,  $\rho$ ,  $\frac{dT}{dt}$  від часу;  $d_b = 100 \mu\text{м}$ ,  $T_{g\infty} = T_w = 1200 \text{ K}$ ,  $C_N = 1,9 \cdot 10^7 \text{ м}^{-3}$ ,  $\eta = 2,8$ ,  $C_{m0} = 0,0144 \text{ кг/м}^3$ ,  $F_v = 3 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ . Умовні позначення на графіках:

1 - газозавис частинок; 2 - поодинокі частинки;  $1^*$  -  $T_g$  газозавису;  $2^*$  -  $T_g$  поодинокі частинки.

фальш-піків від чисельного шуму. У реальних даних похідна може мати маленькі коливання, фальш-піки через шум, чисельну похибку. Тому вводять поріг  $\varepsilon$  (дуже маленьке позитивне число), щоб ігнорувати дрібні сплески, які не є справжнім займанням.

Період індукції  $t_{ind}$  — інтервал часу, який відповідає проміжку від початку прогрівання частинки до її займання.

Аналіз залежностей, поданих на рис. 1 а і б, показує, що займання ізольованої частинки відбувається швидше, ніж у газозависі:  $t_{ind}^{\text{поодинокі}} < t_{ind}^{\text{газозавис}}$ , це видно як лівіше розташований інфлексійний період на кривій 2.

Для газозавису  $T_g(t)$  (крива  $1^*$ ) знижується в початковій фазі через

відбір теплоти великою кількістю частинок — математично це слідує з рівняння для  $T_g$  (7). Тобто збільшення  $C_N$  сприяє охолодженню газу та збільшенню часу інертного розігрівання частинок, який являється складовою частиною періоду індукції (до  $t^*$ , рис. 1, а). Математичне пояснення впливу колективного ефекту: зменшення  $T_g$  на ранній фазі відбувається через відбір теплоти багатьма частинками, отже відбувається зростання інертної складової періоду індукції.

$$t_{\text{ind}} = \int_{T_0}^{T_{\text{ind}}} \frac{mc}{q_{\text{ch}}(T) - q_{\lambda}(T, T_g) - q_w(T, T_g)} dT \quad (10)$$

зменшення  $T_g$  робить знаменник меншим, отже інтеграл більший.

Високотемпературна стадія ( $t_{\text{bur}}$ ): Час горіння ( $t_{\text{bur}}$ ) — це тривалість між займанням ( $t_{\text{ind}}$ ) і затуханням ( $t_E$ ). Тобто: скільки часу частинка реально горіла, від моменту займання (точка І,  $t_{\text{ind}}$ ) до початку інтенсивного охолодження (точка Е,  $t_E$ ):

$$t_{\text{bur}} = t_E - t_{\text{ind}} \quad (11)$$

Високотемпературна стадія у газозависі триває довше:

$$t_{\text{bur}}^{\text{газозавис}} \approx t_{\text{bur}}^{\text{поодинокі}} + \Delta t,$$

де за графіком  $\Delta t \approx 40$  мс — це зумовлено "колективним ефектом": підвищенням температури газу ( $T_g$ ) і відповідно підвищенням хімічного тепло-виділення ( $q_{\text{ch}}$ ) та зменшенням градієнта ( $T - T_g$ ), що знижує тепловтрати та дозволяє частинкам горіти довше при менш інтенсивному окисненні.

Саме під час високотемпературної стадії відбувається інтенсивне зменшення густини  $\rho(t)$  та діаметра  $d(t)$  частинок. У газозависі ці параметри (рис. 1, в, г) зменшуються сильніше (крива 1), ніж у поодинокі частинки (крива 2) за той самий проміжок часу. Це означає, що інтегральна швидкість витрат палива (інтеграл  $\int R(T, n_{\text{O}_2}) dt$ ) за весь період горіння більша у газозависі.

Режим затухання (Extinction):

Момент затухання ( $t_E$ ) — перший час, коли швидкість зміни температури частинки  $\left(\frac{\partial T(t)}{\partial t}\right)$  після піку займання ( $t_{\text{ind}}$ ) починає падати й

досягає локального мінімуму із від'ємним значенням, що відповідає найінтенсивнішому охолодженню:

$$t_E = \arg \min_{t > t_{ind}} \left( \frac{\partial T(t)}{\partial t} \right),$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{t=t_E} = 0 \quad \left. \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right|_{t=t_E} > 0$$

Критичні значення при затуханні:

$$d_E = d(t_E), \quad \rho_E = \rho(t_E) \quad (12)$$

На рис. 1,б — глибокий мінімум у  $\frac{\partial T}{\partial t}$  (точка Е) відповідає моменту, коли тепловтрати перевищують теплоприхід; це математично виражається умовою:

$$\frac{\partial T}{\partial t} < 0$$

і швидкість охолодження в цій точці максимальна.

Для однієї частинки відбувається чіткий «стрибок» у похідній швидкості витрати (зміна режиму окиснення), що відображає перехід у дифузійно-обмежений режим — це математично проявляється як зміна характеру залежності  $R(T, n_{O_2})$  від  $T$  і  $n_{O_2}$  (з кінетичного на дифузійний обмежувач) (рис. 1, в, г). Відсутність класичної «точки переходу» у газозависі можна пояснити тим, що коли  $T \approx T_g$  на кінцевій стадії, функція  $q_{ef}(T) = q_{ch} - q_{\lambda} - q_w$  вже не змінює знак різко, тому не відбувається явного потухання (вона «вироджена»): з математичної точки зору це означає, що рівновага перетворюється поступово, без перетину через  $q_{ef}(T) = 0$  з великою похідною.

Вплив початкового розміру ( $d_b$ ): Збільшення початкового діаметру частинок  $d_b$  газозавису, призводить до зміни параметрів задачі в рівняннях горіння. Зокрема, для системи диференціальних рівнянь, що описує еволюцію: температури частинок  $T$ , температури газу  $T_g$ , діаметра частинки  $d$  та густини  $\rho$  (рис. 2) спостерігається, що відмінність характеристик горіння частинок в умовах газозавису і окремо взятої частинки зростає.

Зі збільшенням початкового діаметра  $d_b$ , максимальна температура частинок зменшується:  $T_{\max} \downarrow$ . Великі частинки нагріваються повільніше, тому їх температура менша. Але час досягнення максимуму зростає при

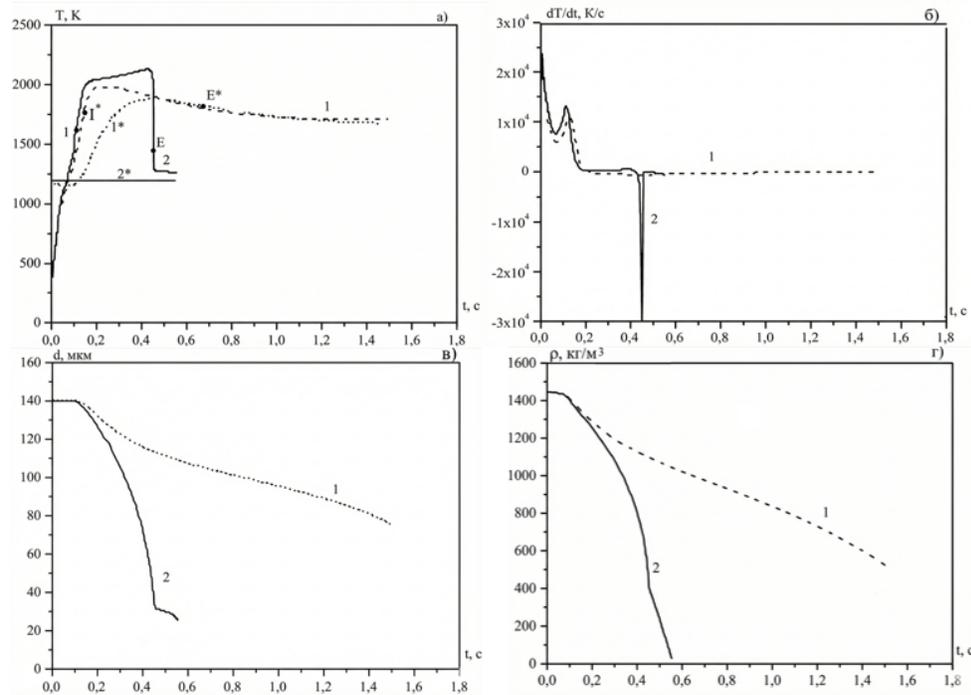


Рис. 2: Залежності:  $T$ ,  $d$ ,  $\rho$ ,  $\frac{dT}{dt}$  від часу;  $d_b = 140 \mu m$ ,  $T_{g\infty} = T_w = 1200 K$ ,  $C_N = 1,9 \cdot 10^7 m^{-3}$ ,  $\eta = 1,026$ ,  $C_{m0} = 0,0395 kg/m^3$ ,  $F_v = 3 \cdot 10^7 m^{-1}$ . Умовні позначення на графіках:  
 1 — газозавис частинок; 2 — поодинокі частинки;  $1^*$  —  $T_g$  газозавису;  $2^*$  —  $T_g$  поодинокі частинки.

зростанні  $d_b$ . Зростає характерний час горіння, це означає, що процес горіння газозавису триває довше для більших частинок.

На стадії активного горіння газозавис характеризується зниженням швидкості хімічного реагування порівняно з поодинокі частинкою, що пояснюється колективними ефектами взаємодії частинок між собою та з навколишнім газом.

При збільшенні початкового діаметра частинки, збільшується час горіння, так як великі частинки горять довше і не досягають рівноважної температури з газом, що впливає на ефективність процесу.

## Висновки

Реалізація побудованої нелінійної моделі тепломасообміну (1)–(8) дозволила ідентифікувати характерні динамічні режими еволюції системи: займання, горіння та згасання.

Збільшення часу займання пояснюється жорстким зв'язком між рівняннями температур частинки ( $T$ ) та газу ( $T_g$ ). У рівнянні для газу домінує від'ємний доданок (джерело втрат), який ефективно зменшує похідну температури за часом  $\left(\frac{dT(t)}{dt}\right)$ . Це сповільнює систему, не дозволяючи їй швидко досягти критичної точки, де вмикається сильна нелінійність (експонента Арреніуса) і починається стрімке зростання температури.

Виявлено зміну топології розв'язку на стадії згасання. На відміну від поодинокі частинки, яка має точку біфуркації (теплового зриву), для газозавису спостерігається «виродження» критичного режиму: температура частинок асимптотично наближається до температури газу, забезпечуючи стійкість процесу до повного вигорання маси.

Встановлено, що збільшення початкового діаметру частинок ( $d_b$ ) призводить до зменшення амплітуди температурного максимуму, але суттєво розширює часову область існування розв'язку, пролонгуючи високотемпературну стадію.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Lieberman M.A., Ivanov M.F, Kiverin A. D.** Effects of thermal radiation heat transfer on flame acceleration and transition to detonation in particle-cloud flames / Journal of Loss Prevention in the Process Industries. Volume 38, November 2015, Pages 176-186
2. **Шевчук В. Г., Калінчак В. В., Черненко О. С., Орловська С. Г.** Прикладна теплофізика і газодинаміка горіння дисперсних систем : навч. посіб. – Одеса : Одес. нац. унів. ім. І. І. Мечникова, 2020. – 228 с.
3. **Orlovskaya S.G., Zuj O.M., Chernyak V.Ya.** Features of ignition and combustion of a two-component gas suspension of coal particles / Problems of Atomic Science and Technology.- 2018.- No. 6 (118).- P. 245-248.
4. **Коновалов Ю.І., Кутирло І.В., Рижков І.М.** Чисельні методи: підручник. – К.: Вища школа, 2009. – 415 с.
5. **Єлагін Г. І., Тищенко Є. О., Алексеєв А. Г., Нуязін В.М., Майборода А.О.** Припинення горіння: підручник – Черкаси: 2020. – 430 с.

- 
6. **Ткаченко С. Й., Степанов Д. В., Боднар Л. А.** Котельні установки : навчальний посібник . – Вінниця : ВНТУ, 2016. – 185 с.

*Korenkova H., Orlovska S., Zui D.*

MATHEMATICAL MODELING OF THE EFFECT OF PARTICLE SIZE ON THE HEAT AND MASS TRANSFER DYNAMICS AND COMBUSTION OF A CARBON GAS SUSPENSION

*Summary*

The paper presents a mathematical study of heat and mass transfer and the combustion dynamics of a monodisperse gas suspension of porous carbon particles, taking into account the interaction of chemical, thermal, and diffusive processes. A consistent nonlinear model is developed, incorporating the thermal and mass balance equations of the particles, the evolution of their geometric parameters, as well as the energy and diffusion balances of the gas phase. Special attention is given to analyzing the influence of the initial particle diameter on the nature of regime transitions, including the induction period, ignition, steady combustion, and extinction. The numerical implementation of the model is carried out using the fourth-order Runge–Kutta method. Time-dependent profiles of temperature, density, particle diameter, and the rates of heat and mass transfer were obtained, allowing the identification of critical system parameters. Collective effects specific to gas suspensions were revealed, including modifications of temperature profiles and the smoothing of thermal bifurcations characteristic of isolated particles. The results are significant for advancing mathematical models of dispersed reactive media and for optimizing thermal engineering processes.

*Keywords:* *mathematical modelling, gas suspension, porous particles, heat and mass transfer, combustion kinetics, thermal bifurcations, dispersed reactive systems.*

**REFERENCES**

1. **Liberman M.A., Ivanov M.F, Kiverin A. D.** Effects of thermal radiation heat transfer on flame acceleration and transition to detonation in particle-cloud flames / Journal of Loss Prevention in the Process Industries. Volume 38, November 2015. P. 176-186
2. **Shevchuk V. H., Kalinchak V. V., Chernenko O. S., Orlovska S. H.** Applied Thermophysics and Gas Dynamics of Disperse System Combustion: Textbook. – Odesa : Odesa I. I. Mechnikov National University, 2020. – 228 p.

3. **Orlovskaya S.G., Zuj O.M., Chernyak V.Ya.** Features of ignition and combustion of a two-component gas suspension of coal particles / Problems of Atomic Science and Technology.- 2018.- No. 6 (118).- P. 245-248.
4. **Konovalov Yu. I., Kutyrlo I. V., Ryzhkov I. M.** Numerical Methods: Textbook. – Kyiv : Vyshcha Shkola, 2009. – 415 p.
5. **Yelagin H. I., Tyshchenko Ye. O., Aliksieiev A. H., Nuyanzin V. M., Mayboroda A. O.** Termination of Combustion: Textbook – Cherkasy: 2020. – 430 p.
6. **Tkachenko S. Y., Stepanov D. V., Bodnar L. A.** Boiler Plants: Study Guide. – Vinnytsia : VNTU, 2016. – 185 p.

УДК 517.929.2:517.925.4

**В. Є. Круглов**, кандидат фіз-мат. наук, професор  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
кафедра методів математичної фізики  
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна  
e-mail: viktorkruglov935@gmail.com

## ТВІРНІ ФУНКЦІЇ СИСТЕМ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Побудовані твірні функції систем основних поліноміальних власних функцій лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Встановлені умови, при яких побудовані твірні функції відповідних систем поліноміальних власних функцій виокремлюють ортогональні системи.

MSC: 39A06.

Ключові слова: твірні функції, самоспряжене диференціальне рівняння, поліноміальні власні функції.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.1\(45\).352810](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.1(45).352810)

### Вступ

Відшукуються поліноміальні власні функції (ПВФ) диференціального рівняння

$$(A_1 z^2 + B_1 z + C_1) y_n''(z) + (A_2 z + B_2) y_n'(z) - n(A_2 + (n-1)A_1) y_n(z) = 0, \quad (1)$$

де  $z$  – комплексна змінна, коефіцієнти  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2$  можуть приймати довільні дійсні або комплексні значення.

Рівняння (1) можна звести до самоспряженого вигляду

$$[(A_1 z^2 + B_1 z + C_1) \rho(z) y_n(z)]' - n(A_2 + (n-1)A_1) \rho(z) y_n(z) = 0,$$

де функція  $\rho(z)$  задовольняє рівняння

$$\frac{\rho'(z)}{\rho(z)} = \frac{(A_2 - 2A_1)z + B_2 - B_1}{A_1 z^2 + B_1 z + C_1}. \quad (2)$$

Для дійсної змінної  $z = x$  функція  $\rho(x)$ , яка задана на деякому інтервалі  $(a, b)$ , щоб стати ваговою, повинна задовольняти слідуючим умовам

$$\lim_{x \rightarrow a+0} [\rho(x)(A_1x^2 + B_1x + C_1)] = \lim_{x \rightarrow b-0} [\rho(x)(A_1x^2 + B_1x + C_1)] = 0. \quad (3)$$

Якщо, наприклад, параметр  $b = \infty$ , то потрібно, щоб

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\rho(x)(A_1x^2 + B_1x + C_1)x^k] = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Існують наступні методи знаходженн поліноміальних розв'язків  $y_n(z)$  рівняння (1): метод рекурентних співвідношень між коефіцієнтами цього рівняння, формула Родріга та метод твірних функцій.

В цій роботі розглядається метод твірних функцій. Теоретичну основу цього метода взято з монографії [1.ст.33].

Функція  $\Phi(z, t)$  називається твірною для систем ПВФ  $y_n(z)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , якщо вона розкладається в ряд по степеням  $t$  в достатньо малому околі точки  $t = 0$ :

$$\Phi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(z) \frac{t^n}{n!}. \quad (4)$$

Після деяких перетворень формули Родріга

$$y_n(z) = \frac{\rho(s)}{\rho(z)} \frac{1}{1 - (2A_1s + B_1)t} \Big|_{s=\xi_1(z,t)}, \quad (5)$$

де  $s = \xi_1(z, t)$  той корінь рівняння

$$s - z - (A_1s^2 + B_1s + C_1)t = 0, \quad (6)$$

який при  $t \rightarrow 0$  наближається до  $z$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} \xi_1(z, t) = z$ .

Другий корінь, якщо він існує, наближається до нескінченності при  $t \rightarrow 0$ . Ряд (4) збігається в досить малому околі точки  $t = 0$  при фіксованому  $z$ .

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Усі побудовані твірні функції стосуються системи нестандартизованих ПВФ  $y_n(z)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , з одиничним старшим коефіцієнтом, а довільну мультиплікативну константу, яка виникає при знаходженні функції  $\rho(z)$ , вважаємо рівною тотожній одиниці.

### 1. В рівнянні (1) $C_1 = 0$ .

Функція  $\rho(z)$  дорівнює

$$\rho(z) = z^\alpha (A_1 z + B_1)^{\beta/A_1}, \quad \alpha = B_2/B_1 - 1, \quad \beta/A_1 = A_2/A_1 - B_2/B_1 - 1, \quad (7)$$

аналітична на комплексній площині з розрізом від точки  $z = 0$  через  $z = \infty$  до точки  $z = -B_1/A_1$ . Розв'язок  $s = \xi_1(z, t)$  рівняння (6) при  $C_1 = 0$  визначається формулою

$$s = \xi_1(z, t) = \frac{1 - B_1 t - T(z, t)}{2A_1 t} = -\frac{2z}{1 - B_1 t + T(z, t)}, \quad (8)$$

де

$$T(z, t) = \sqrt{(1 - B_1 t)^2 - 4A_1 t z},$$

і розуміється як головне значення квадратного кореня,  $\lim_{t \rightarrow 0} \xi_1(z, t) = z$ .

Тоді

$$\Phi(z, t) = \left( \frac{\xi_1(z, t)}{z} \right)^\alpha \left( \frac{A_1 \xi_1 + B_1}{A_1 z + B_1} \right)^{\beta/A_1} \frac{1}{1 - (2A_1 \xi_1 + B_1)t}.$$

Спростимо цей вираз. З квадратного рівняння (6) при  $C_1 = 0$  маємо

$$A_1 \xi_1 + B_1 = (1 - z/\xi_1)/t = [1 + B_1 t - T(z, t)]/2t,$$

$$1 - (2A_1 \xi_1 + B_1)t = 1 + B_1 t - 2t(A_1 \xi_1 + B_1) = T(z, t).$$

Таким чином,

$$\Phi(z, t) = 2^{\alpha - \beta/A_1} [t(A_1 z + B_1)]^{-\beta/A_1} \frac{1}{T(z, t)} \frac{[1 + (B_1 t - T(z, t))]^{\beta/A_1}}{[1 - (B_1 t - T(z, t))]^\alpha}.$$

ПВФ рівняння (1) при  $C_1 = 0$  подані формулою

$$y_n(z) = z^n + \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{(B_2 + (n-1)B_1) \dots (B_2 + (n-k)B_1)}{(A_2 + (2n-2)A_1) \dots (A_2 + (2n-k-1)A_1)} z^{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Якщо перейти до дійсної змінної  $z = x$ , і всі коефіцієнти в рівнянні (1) також дійсні числа, то

$$\rho(x) = x^\alpha (A_1 x + B_1)^{\beta/A_1},$$

і якщо  $B_2/B_1 > 0$  і  $A_2/A_1 - B_2/B_1 > 0$ , то  $\rho(x)$  – вагова функція для поліномів  $y_n(x)$  на відрізку  $(-B_1/A_1, 0)$ .

**2. В рівнянні (1)  $B_1 = 0$ ,  $A_1 \neq 0$ ,  $C_1 \neq 0$ .**

Маємо диференціальне рівняння

$$(A_1 z^2 + C_1) y_n''(z) + (A_2 z + B_2) y_n'(z) - n(A_2 + (n-1)A_1) y_n(z) = 0, \quad (9)$$

2.1. Нехай  $A_1 < 0$ ,  $C_1 > 0$ . Тоді це рівняння узагальнює диференціальне рівняння, розв'язками якого є поліноми Якобі.

Функція  $\rho(z)$  дорівнює

$$\rho(z) = (\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}z)^{-\delta_1} (\sqrt{C_1} + \sqrt{-A_1}z)^{\delta_2}, \quad (10)$$

де

$$\delta_1 = \left[ (A_2 - 2A_1) / \sqrt{-A_1} + B_2 / \sqrt{C_1} \right] / 2\sqrt{-A_1},$$

$$\delta_2 = \left[ B_2 / \sqrt{C_1} - (A_2 - 2A_1) / \sqrt{-A_1} \right] / 2\sqrt{-A_1}.$$

Функція  $\rho(z)$  аналітична на комплексній площині з розрізом від точки  $z = -\sqrt{-C_1/A_1}$  через точку  $z = \infty$  до точки  $z = \sqrt{-C_1/A_1}$ .

Рівняння (6) має вигляд

$$s - z - (A_1 s^2 + C_1)t = 0. \quad (11)$$

Позначимо

$$R(z, t) = \sqrt{1 - 4A_1 t(z + C_1 t)}, \quad (12)$$

де під коренем розуміється його головне значення. Тоді розв'язок  $s = \xi_1(z, t)$  рівняння (9) дорівнює

$$\xi_1(z, t) = \frac{1 - R(z, t)}{2A_1 t} = \frac{2(z + C_1 t)}{1 + R(z, t)}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \xi_1(z, t) = z \quad (13)$$

Твірні функція

$$\Phi(z, t) = \left( \frac{\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1} \xi_1}{\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1} z} \right)^{-\delta_1} \left( \frac{\sqrt{C_1} + \sqrt{-A_1} \xi_1}{\sqrt{C_1} + \sqrt{-A_1} z} \right)^{\delta_2} \frac{1}{1 - 2A_1 \xi_1 t}.$$

Зробимо наступні перетворення. Згідно з (9) та (11)

$$\begin{aligned}\xi_1 - z &= t(\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}\xi_1)(\sqrt{C_1} + \sqrt{-A_1}\xi_1), \quad 1 - 2A_1\xi_1 t = R(t, z), \\ (\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}z) &= (\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}\xi_1) + (\sqrt{-A_1}\xi_1 - \sqrt{A_1}z) = \\ &= (\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}\xi_1) + \sqrt{-A_1}t(\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}\xi_1)(\sqrt{C_1} + \sqrt{-A_1}\xi_1) = \\ &= (\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}\xi_1)(1 + t\sqrt{-A_1}C_1 - tA_1\xi_1) = \\ &= (\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}\xi_1)[(1 + R(z, t))/2 + t\sqrt{-A_1}C_1].\end{aligned}$$

Аналогічно

$$(\sqrt{C_1} + \sqrt{-A_1}z) = (\sqrt{C_1} + \sqrt{-A_1}\xi_1)[(1 + R(z, t))/2 - t\sqrt{-A_1}C_1].$$

Таким чином,

$$\Phi(z, t) = [R(z, t)]^{-1} \left[ (1 + R(z, t))/2 + t\sqrt{-A_1}C_1 \right]^{\delta_1} \left[ (1 + R(z, t))/2 - t\sqrt{-A_1}C_1 \right]^{-\delta_2}. \quad (14)$$

Твірна функція (12) співпадає з твірною функцією для нестандартизованих поліномів Якобі [2, с.69], а саме: для диференціального рівняння (7) з коефіцієнтами  $A_1 = -1$ ,  $C_1 = 1$ ,  $A_2 = -(\alpha + \beta + 2)$ ,  $B_2 = \beta - \alpha$  (диференціальне рівняння Якобі),  $R(z, t) = \sqrt{1 + 4zt + 4t^2}$ ,  $\delta_1 = -\alpha$ ,  $\delta_2 = \beta$  твірна функція

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{R(z, t)} \left[ \frac{1 + R(z, t)}{2} + t \right]^{-\alpha} \left[ \frac{1 + R(z, t)}{2} - t \right]^{-\beta}.$$

2.2. Нехай  $A_1 > 0$ ,  $C_1 > 0$ . Тоді функція

$$\rho(z) = (A_1 z^2 + C_1)^\alpha \exp \left[ \frac{B_2}{\sqrt{A_1 C_1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C_1}{A_1}} z \right]$$

визначена для кожного значення  $z$ ,  $\alpha = A_2/2A_1 - 1$ .

За формулою (5), враховуючи елементарні дії з арктангенсами, отримуємо

$$\Phi(z, t) = \left( \frac{A_1 \xi_1^2 + C_1}{A_1 z^2 + C_1} \right)^\alpha \exp \frac{B_2}{\sqrt{A_1 C_1}} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sqrt{A_1/C_1}(\xi_1 - z)}{1 + A_1 z \xi_1 / C_1} \right] \frac{1}{1 - 2A_1 t \xi_1},$$

де  $s = \xi_1(z, t)$  визначається формулами (9)–(11).

Далі, за формулою (9)

$$A_1 \xi_1^2 + C_1 = (\xi_1 - z)/t,$$

$$A_1 z^2 + C_1 = A_1(z^2 - \xi_1^2) + A_1 \xi_1^2 + C_1 = (\xi_1 - z)[1 - A_1 t(z + \xi_1)]/t.$$

Тоді

$$\frac{A_1 \xi_1^2 + C_1}{A_1 z^2 + C_1} = \frac{1}{1 - A_1 t(z + \xi_1)} = \frac{1}{[1 + R(t, z)]/2 - A_1 t z}.$$

Спростимо вираз

$$C_1 + A_1 z \xi_1 = C_1 + A_1 z(\xi_1 - z) + A_1 z^2 = (\xi_1 - z)(1 - A_1 t \xi_1)/t,$$

$$A_1 t \xi_1 = [1 - R(z, t)]/2.$$

Таким чином,

$$\frac{\xi_1 - z}{1 + A_1 z \xi_1 / C_1} = \frac{2C_1 t}{1 + R(z, t)}$$

та

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{R(z, t)} \left[ \frac{R(z, t) + 1}{2} - A_1 t z \right]^{-\alpha} \exp \left[ \frac{B_2}{\sqrt{A_1 C_1}} \arctan \left( \frac{2\sqrt{A_1 C_1} t}{1 + R(z, t)} \right) \right]. \quad (15)$$

При змінній дійсній  $z = x$  функція  $\rho(x)$  не може стати ваговою, бо не виконується умова (3) при  $x = \infty$ .

Наведемо приклади ПВФ рівняння (7):

$$y_1(z) = z + \frac{B_2}{A_2}, \quad y_2(z) = z^2 + \frac{2B_2}{A_2 + 2A_1} z + \frac{B_2^2}{(A_2 + 2A_1)(A_2 + A_1)} + \frac{C_1}{A_2 + A_1},$$

$$y_3(z) = z^3 + \frac{3B_2}{A_2 + 4A_1} z^2 + \frac{3}{A_2 + 3A_1} \left( \frac{B_2^2}{A_2 + 4A_1} + C_1 \right) z + \frac{B_2^3}{(A_2 + 4A_1)(A_2 + 3A_1)(A_2 + 2A_1)} + \frac{C_1}{A_2 + 2A_1} \left( \frac{B_2}{A_2 + 3A_1} + \frac{2B_2}{A_2 + 4A_1} \right).$$

При  $A_1 > 0, C_1 > 0$  для побудови ПВФ  $y_n(z)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  рівняння (7) використовується твірна функція (13), а при  $A_1 < 0, C_1 > 0$  – твірна функція (12). проаналізуємо детальніше випадок, коли  $A_1 < 0, C_1 > 0$ . Якщо змінна  $z$  змінюється на дійсній осі  $z = x$ , то функція  $\rho(x)$  з (8) також визначена на всій осі, окрім, можливо, двох точок цієї осі, і твірна функція  $\Phi(x, t)$  з (12) будує ПВФ  $y_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , які також визначені на всій дійсній осі, і залежать від фіксованих параметрів  $A_1, A_2, B_2, C_1$ . Зафіксуємо ці параметри таким чином, щоб числа  $\delta_1$  і  $\delta_2$  з (8) задовольняли умові  $\delta_1 < 1, \delta_2 > -1$ , що рівнозначно умовам  $A_2/A_1 > 0, B_2 > A_2 \sqrt{-C_1 A_1}$ . Завдяки цим умовам функція  $\rho(x)$  стає ваговою [3] для побудованої системи ПВФ на проміжку  $(-\sqrt{-C_1 A_1}, \sqrt{-C_1 A_1})$ .

Таким чином, область визначеності побудованих поліномів поділяється на три відрізки:  $(-\infty, -\sqrt{-C_1A_1}]$ ,  $(-\sqrt{-C_1A_1}, \sqrt{-C_1A_1})$ ,  $[\sqrt{-C_1A_1}, \infty)$ , в кожному з яких діє одна й та ж система ПВФ, і тільки ці поліноми утворюють ортогональну з вагою  $\rho(x)$  систему поліномів на проміжку  $(-\sqrt{-C_1A_1}, \sqrt{-C_1A_1})$ .

### 3. В рівнянні (1) $A_1 = 0$ , $B_1 \neq 0$ , $C_1 \neq 0$ .

Маємо диференціальне рівняння

$$(B_1z + C_1)y_n''(z) + (A_2z + B_2)y_n'(z) - nA_2y_n(z) = 0. \quad (16)$$

Функція  $\rho(z)$  дорівнює

$$\rho(z) = (B_1z + C_1)^\alpha \exp(A_2z/B_1), \quad \alpha = (B_2/B_1 - A_2/C_1)B_1^2 - 1$$

і аналітична на всій комплексній площині з розрізом від точки  $z = -C_1/B_1$  до точки  $z = \infty$ .

Рівняння (6) в цьому випадку лінійне і тому

$$\xi_1(z, t) = (z + C_1t)/(1 - B_1t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \xi_1(z, t) = z$$

Твірна функція

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{1 - B_1t} \left( \frac{B_1\xi_1 + C_1}{B_1z + C_1} \right)^\alpha \exp[A_2(\xi_1 - z)/B_1].$$

Легко здобути

$$\frac{B_1\xi_1 + C_1}{B_1z + C_1} = \frac{1}{1 - B_1t},$$

і таким чином

$$\Phi(z, t) = (1 - B_1t)^{-\alpha-1} \exp\{A_2t(B_1z + C_1)/[B_1(1 - B_1t)]\}.$$

За умови дійсної змінної  $z = x$  функція  $\rho(x)$  стає ваговою для ПВФ  $y_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  на відріжку  $(-C_1/B_1, \infty)$  при  $B_2/B_1 - A_2/C_1 > 0$ ,  $A_2/B_1 < 0$  [4].

#### 3.1. В рівнянні (14) $B_1 = 0$ , $C_1 \neq 0$ .

В цьому випадку маємо рівняння типу Ерміта

$$C_1 y_n''(z) + (A_2 z + B_2) y_n'(z) - n A_2 y_n(z) = 0.$$

Функція  $\rho(z)$  дорівнює

$$\rho(z) = \exp[(A_2 z + B_2)^2 / 2 A_2 C_1],$$

і вона аналітична на всій комплексній площині. Далі

$$\xi_1(z, t) = z + C_1 t,$$

тоді

$$\Phi(z, t) = \exp[t(A_2 z + B_2 + A_2 C_1 t / 2)].$$

Для дійсної змінної  $z = x$  функція

$$\rho(x) = \exp[(A_2 x + B_2)^2 / 2 A_2 C_1]$$

є ваговою при  $A_2 C_1 < 0$ .

3.2. В рівнянні (14)  $C_1 = 0$ ,  $B_1 \neq 0$ .

В цьому випадку маємо рівняння типу Лаггера

$$B_1 z y_n''(z) + (A_2 z + B_2) y_n'(z) - n A_2 y_n(z) = 0.$$

Функція  $\rho(z)$  дорівнює

$$\rho(z) = z^{B_2/B_1 - 1} \exp(A_2 z / B_1).$$

Вона аналітична на всій комплексній площині з розрізом від точки  $z = 0$  до точки  $z = \infty$ .

$$\xi_1(z, t) = z / (1 - B_1 t).$$

Тоді

$$\Phi(z, t) = (1 - B_1 t)^{-B_2/B_1} \exp[A_2 t z / (1 - B_1 t)].$$

Якщо змінна  $z$  дійсна,  $z = x$ , то

$$\rho(x) = x^{B_2/B_1} \exp(A_2 x / B_1)$$

і ця функція буде ваговою за умови  $B_2/B_1 > -1$ ,  $A_2/B_1 < 0$  на проміжку  $(0, \infty)$ .

4. В рівнянні (1)  $B_1 = 2\sqrt{A_1 C_1}$ ,  $A_1 > 0$ ,  $C_1 > 0$ .

Маємо диференціальне рівняння

$$(\sqrt{A_1}z + \sqrt{C_1})^2 y_n''(z) + (A_2 z + B_2) y_n'(z) - n(A_2 + (n-1)A_1) y_n(z) = 0.$$

Функція

$$\rho(z) = (\sqrt{A_1} + \sqrt{C_1})^\alpha \exp[-\beta/(\sqrt{A_1} + \sqrt{C_1})],$$

де  $\alpha = (A_2 - 2A_1)/A_1$ ,  $\beta = (B_2\sqrt{A_1} - A_2\sqrt{C_1})/A_1$ , аналітична на комплексній площині з розрізом від точки  $z = -\sqrt{C_1/A_1}$  до точки  $z = \infty$ .

З рівняння (6)

$$s - z - (\sqrt{A_1}s + \sqrt{C_1})^2 t = 0$$

знаходимо корінь

$$\begin{aligned} \xi_1(z, t) &= \left[ 1 - 2\sqrt{A_1 C_1} t - \sqrt{1 - 4\sqrt{A_1} t (\sqrt{C_1} + \sqrt{A_1} z)} \right] / 2A_1 t = \\ &= 2(C_1 t + z) \left[ 1 - 2\sqrt{A_1 C_1} t + \sqrt{1 - 4\sqrt{A_1} t (\sqrt{C_1} + \sqrt{A_1} z)} \right]^{-1}, \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \xi_1(z, t) = z.$$

$$\Phi(z, t) = \left( \frac{\sqrt{A_1} \xi_1 + \sqrt{C_1}}{\sqrt{A_1} z + \sqrt{C_1}} \right)^\alpha \exp \left[ -\beta \frac{\sqrt{A_1} (z - \xi_1)}{(\sqrt{A_1} \xi_1 + \sqrt{C_1})(\sqrt{A_1} z + \sqrt{C_1})} \right] \frac{1}{1 - 2\sqrt{A_1} t (\sqrt{A_1} \xi_1 + \sqrt{C_1})}.$$

Далі

$$\frac{z - \xi_1}{(\sqrt{A_1} \xi_1 + \sqrt{C_1})(\sqrt{A_1} z + \sqrt{C_1})} = \frac{-(\sqrt{A_1} \xi_1 + \sqrt{C_1})^2 t}{(\sqrt{A_1} \xi_1 + \sqrt{C_1})(\sqrt{A_1} z + \sqrt{C_1})} = \frac{-(\sqrt{A_1} \xi_1 + \sqrt{C_1}) t}{\sqrt{A_1} z + \sqrt{C_1}}.$$

Позначимо

$$M(z, t) = \sqrt{1 - 4\sqrt{A_1} t (\sqrt{A_1} z + \sqrt{C_1})}.$$

Під коренем квадратним розуміємо головне його значення.

Тоді

$$\begin{aligned} \sqrt{A_1} \xi_1 + \sqrt{C_1} &= \sqrt{A_1} (1 - 2\sqrt{A_1 C_1} t - M(z, t)) / 2A_1 t + \sqrt{C_1} = \\ &= \sqrt{A_1} (1 - M(z, t)) / 2A_1 t = 2(\sqrt{A_1} z + \sqrt{C_1}) / (1 + M(z, t)), \end{aligned}$$

$$1 - 2\sqrt{A_1} (\sqrt{A_1} \xi_1 + \sqrt{C_1}) = M(z, t).$$

Таким чином, отримали

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{M(z, t)} \left[ \frac{2}{1 + M(z, t)} \right]^\alpha \exp \left( \frac{2\beta\sqrt{A_1}t}{1 + M(z, t)} \right).$$

Система поліномів  $y_n(x)$  не є ортогональною, бо функція  $\rho(x)$  не є ваговою.

## ВИСНОВКИ

Побудовані твірні функції для ПВФ  $y_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  різних диференціальних рівнянь другого порядку. Знайдені умови, при яких ці твірні функції утворюють ортогональні ПВФ цих рівнянь.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.** Спеціальні функції математичної фізики / А.Ф.Никифоров, В.Б.Уваров. – М.: Фізматліт, 1984.
2. **Суетін П.К.** Класичні ортогональні многовиди / П.К.Суетін. – М.: Фізматліт, 1976.
3. **Kruglov V.E.** Construction of polynomial eigenfunctions of a second-order linear differential equation/ V.E.Kruglov// Differential Equations. – 2023. – Vol. 59. – No. 9. – PP. 1166–1174.
4. **Kruglov V.E.** Christoffel-Darboux formula for polynomial eigenfunctions of a second-order linear differential equation/ V.E.Kruglov// Differential Equations. – 2024. – Vol. 60. – No. 4 – PP. 436–444.

*Kruglov V. E.*

GENERATING FUNCTIONS FOR SYSTEMS OF POLYNOMIAL EIGENFUNCTIONS  
OF SECOND-ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

*Summary*

Generating functions are constructed for the main systems of polynomial eigenfunctions of second-order linear differential equations. Conditions are found under which the constructed generating functions from the corresponding system of polynomial eigenfunctions select orthogonal systems.

*Keywords: generating functions, self-conjugated differential equation, polynomial eigenfunctions.*

#### REFERENCES

1. **Nikiforov A.F., Uvarov V.B.** Spetsial'nye funktsii matematicheskoi fiziki: ucheb. posobie dlya vuzov (Special Functions of Mathematical Physics). – Moscow: Nauka, 1984.
2. **Suetin P.K.** Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny (Classical Orthogonal Polynomials). – Moscow: Nauka, 1976.
3. **Kruglov V.E.** Construction of polynomial eigenfunctions of a second-order linear differential equation/ V.E.Kruglov// Differential Equations. – 2023. – Vol. 59. – No. 9. – P. 1166–1174.
4. **Kruglov V.E.** Christoffel-Darboux formula for polynomial eigenfunctions of a second-order linear differential equation/ V.E.Kruglov// Differential Equations. – 2024. – Vol. 60. – No. 4 – P. 436–444.

UDC 517.9, 519.6

**K. S. Bondarenko**, *PhD Student, Lecturer*

*Odesa I. I. Mechnikov National University*

*Department of Optimal Control and Economic Cybernetics*

*2 Zmiiienka Vsevoloda St, Odesa, 65082, Ukraine*

*e-mail: kirill.bondarenko@onu.edu.ua*

*ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0009-6361-9365>*

**M. S. Tairova**, *CandSc (Physics & Mathematics), Assoc. Prof.*

*Odesa I. I. Mechnikov National University*

*Department of Optimal Control and Economic Cybernetics*

*2 Zmiiienka Vsevoloda St, Odesa, 65082, Ukraine*

*e-mail: mason@onu.edu.ua*

*ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0001-5609-2552>*

**O. D. Kichmarenko**, *DSc, Prof.*

*Odesa I. I. Mechnikov National University*

*Department of Optimal Control and Economic Cybernetics*

*2 Zmiiienka Vsevoloda St, Odesa, 65082, Ukraine*

*e-mail: o.kichmarenko@onu.edu.ua*

*ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7388-4922>*

**V. V. Verbitskyi**, *CandSc (Physics & Mathematics), Assoc. Prof.*

*Odesa I. I. Mechnikov National University*

*Department of Optimal Control and Economic Cybernetics*

*2 Zmiiienka Vsevoloda St, Odesa, 65082, Ukraine*

*e-mail: v.verbitskyi@onu.edu.ua*

*ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-5507-2736>*

## **ALGORITHMS FOR CONSTRUCTING A SET-VALUED MAPPING IN $R^3$**

In many applied problems, there is a need to construct convex sets, but if these sets are obtained as a solution to a mathematical model, then the concept of a support function is most often used. Although this function is defined only for convex sets, it can also be constructed for convex hulls of compact sets. With the help of this function, it is possible to introduce the concepts of differentiation and integration in the space of convex compact

sets. The problem arises of constructing a convex hull of a set if the values of its support function in some directions are known. Three algorithms can be used for this. The first uses the property of the support function and constructs the set through the intersections of hyperplanes defined by the support function. The second algorithm uses the values of the Minkowski functional, which is related to the support function. The third constructs the set according to the meaning of the deformation function, which is also related to the values of the support function. In this article, the task is to compare the construction speed for these three algorithms. The Intel Core i5-13450HX processor was used for calculations. Also in this article, a numerical method for constructing a solution for equations with a set-valued right-hand side, similar to the Euler method, is implemented.

*MSC:* 34A60, 34A99, 68W25.

*Keywords:* support function, deformation function, Minkowski functional, convex sets, initial problem with a multivalued right-hand side.

*DOI:* [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.1\(45\).352813](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.1(45).352813)

## INTRODUCTION

Differential equations with a multivalued right-hand side are widely used as mathematical models of processes and phenomena of various nature.

The solution of such an equation is a multivalued mapping in the space  $compR^n$ . Studies of the existence of solutions and their properties can be found, for example, in works [1–10]. At the same time, the issue of constructing solutions by numerical methods is actual. Since the solution of a differential equation with a multivalued right-hand side is a convex set, first of all, algorithms for constructing a set in space are needed. This can be done using the support function of the set [11–13], the deformation function [14; 15] or the Minkowski functional [15–19]. Secondly, it is necessary to construct an algorithm for constructing a sequence of sets that are solutions of the considered differential equation with a multivalued right-hand side at successive moments of time. An analogue of the Euler method is one of the most widely used numerical methods applied to this type of equations. In [20] was presented an estimate for the Hausdorff distance between the set of solutions of a differential inclusion and the set of solutions of its Euler discrete approximation, using an averaged modulus of continuity for multifunctions.

This article presents an algorithm for constructing solutions to differential equations with the Hukuhara derivative: in three-dimensional space by numerical methods that are based on the Euler method, but differ in the methods of

constructing the boundary points of the convex set - using support functions, deformation functions, and the Minkowski functional.

## MAIN RESULTS

### 1. CONSTRUCTION OF A CONVEX HULL USING THE INTERSECTION OF SUPPORT HYPERPLANES

Let's construct the boundary of a convex set in three-dimensional space  $F \in \text{comp}(R^3)$ . To construct it, we will use the value of the support function for the three-dimensional set.

The support function is determined

$$c(f, \psi) = \max_{f \in F} (f, \psi). \quad (1)$$

The maximum on the right-hand side is achieved because the scalar product  $(f, \psi)$  is continuous in  $f$  and the set  $F$  is compact.

#### 1.1. ALGORITHM FOR CONSTRUCTING THE CONVEX HULL OF A SET USING SUPPORT FUNCTION

Let's introduce the support vector

$$\psi = \begin{pmatrix} \sin \theta * \cos \varphi \\ \sin \theta * \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

is the set of all vectors of unit length expressed in spherical coordinates relative to two angles  $\theta, \varphi$ , where  $\theta \in [0, \pi]$   $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Let us take  $N/2$  uniformly distributed points from first interval  $\theta_i \in [0, \pi], i = \overline{0, N/2}$  and  $N$  points from second one, i.e.  $\varphi_j \in [0, 2\pi], j = \overline{0, N}$ .

There are vectors  $\psi$  on the sphere are arranged in rows, and the poles are represented by vectors  $\psi$  with  $\theta = 0, \theta = \pi$ . For first row we can construct the matrices with the values of vectors:

$$M = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$$

There is  $\psi_1 = \psi|_{\theta=0}$  and  $\psi_{2,3} = \psi|_{\theta=\frac{2\pi}{N}, \varphi=\overline{0, 2\pi}}$ .

Further, for each angles  $\theta = 0 + \frac{2\pi}{N}, \pi - \frac{2\pi}{N}$  we construct two matrices  $M_1, M_2$ . These matrices contain rows of points on a two-dimensional sphere that are the vertices of triangles from sphere triangulation.

$$M1 = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$$

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} \sin \theta_i * \cos \varphi_j \\ \sin \theta_i * \sin \varphi_j \\ \cos \theta_i \end{pmatrix}, \psi_2 = \begin{pmatrix} \sin \theta_{i+1} * \cos \varphi_j \\ \sin \theta_{i+1} * \sin \varphi_j \\ \cos \theta_{i+1} \end{pmatrix}, \psi_3 = \begin{pmatrix} \sin \theta_{i+1} * \cos \varphi_{i+1} \\ \sin \theta_{i+1} * \sin \varphi_{i+1} \\ \cos \theta_{i+1} \end{pmatrix},$$

$$M2 = (\psi_1, \overline{\psi_2}, \psi_3)^T \text{ where } \overline{\psi_2} = \begin{pmatrix} \sin \theta_i * \cos \varphi_{j+1} \\ \sin \theta_i * \sin \varphi_{j+1} \\ \cos \theta_i \end{pmatrix}$$

where  $\theta_i \in [0 + \frac{2\pi}{N}, \pi - \frac{2\pi}{N}]$ ,  $\varphi_j \in [0, 2\pi]$ .

Respectively, for the lower pole we have

$$M = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$$

There is  $\psi_1 = \psi|_{\theta=\pi}$  and  $\psi_{2,3} = \psi|_{\theta=\pi-\frac{2\pi}{N}, \varphi=0, 2\pi}$

For all matrices for each row, we calculate the value of the support function and we solve the systems of linear equations

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(F, \psi_1) \\ c(F, \psi_2) \\ c(F, \psi_3) \end{pmatrix}.$$

After solving the system of linear equation, we obtain a vector  $x$  that lies on the boundary of the convex hull of the set  $F$ . These points are the intersection points of hyperplanes with normal vectors  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ .

## 1.2. NUMERICAL CALCULATIONS FOR SUPPORT FUNCTION

**Construction of the convex hull of a set, using the support function. For which of the sets we use  $N=60$ . That means we have the 1800 support vectors for each set.**

The sphere  $F = S_3(5, -5, 5)$  are built

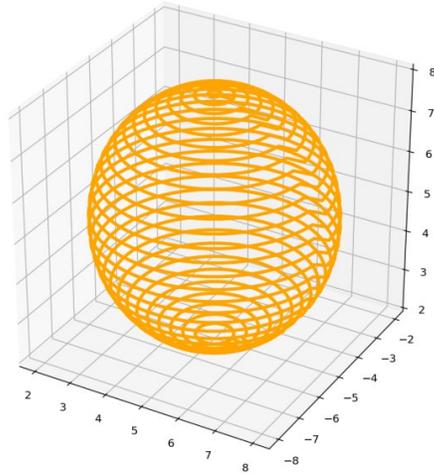


Рис. 1:  $c(F, \psi) = 3\|\psi\| + 5\psi_1 - 5\psi_2 + 5\psi_3$ .

The time it took to calculate all the points to construct the convex hull of the set is 0.2328968048095703.

The cube  $F = K_{3,3,3}(5, -5, 5)$  are built

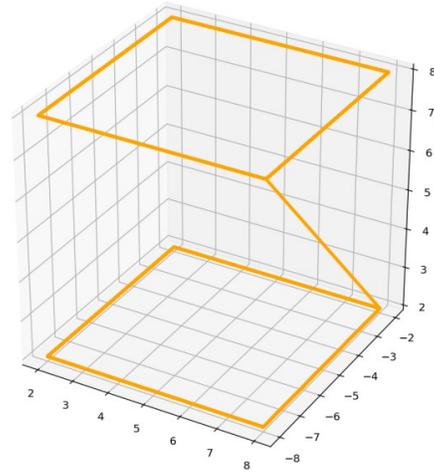


Рис. 2:  $c(F, \psi) = 3(|\psi_1| + |\psi_2| + |\psi_3|) + 5\psi_1 - 5\psi_2 + 5\psi_3$

The time it took to calculate all the points to construct the convex hull of the set is 0.2111680507659912.

Let us construct the convex hull of the sum of two sets  $S_3(5, -5, 5)$  and  $K_{3,3,3}(0, 0, 0)$  using the intersection of the supporting hyperplanes

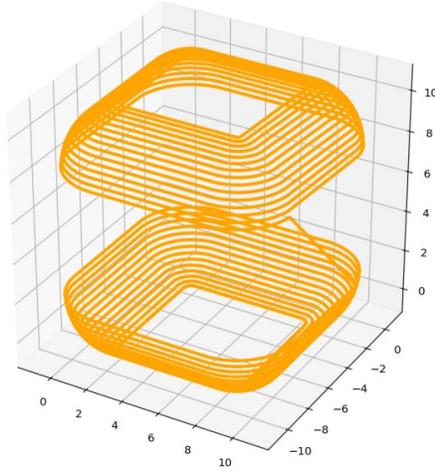


Рис. 3:  $c(F, \psi) = 3\|\psi\| + 3(|\psi_1| + |\psi_2| + |\psi_3|) + 5\psi_1 - 5\psi_2 + 5\psi_3$

The algorithm time working is 0.2328968048095703.

## 2. CONSTRUCTION OF A CONVEX HULL USING THE DEFORMATION FUNCTION

The deformation function of a convex set  $F \in \text{conv}(\mathbf{R}^n)$ ,  $0 \in \text{int}F$  is called the function

$$d(F, \psi) = \sup\{\lambda > 0 : \lambda\psi \in A\}, \psi \in S$$

The deformation function coincides with the inverse Minkowski functional on the unit sphere.

Using the deformation function, the set  $F \in \text{conv}(\mathbf{R}^n)$  can be represented in the form

$$A = \bigcup_{\varphi \in S} \{x \in \mathbf{R}^n : x = \lambda\varphi, \lambda \in [0, d(F, \varphi)]\}; S - \text{the unit sphere} \quad (3)$$

### 2.1. ALGORITHM FOR CONSTRUCTING THE CONVEX HULL OF A SET USING THE DEFORMATION FUNCTION

1. Generate a set of directions  $\psi$  uniformly distributed on the unit sphere. We set the values of the angles  $\theta, \varphi$ , where  $\theta \in [0, \pi]$   $\varphi \in [0, 2\pi]$  to determine the support vectors (2) in the spherical coordinate system.
2. Next we define the area of space in which the given set lies. This area is a rectangle for which we find the center. To do this, we find the values of the support function  $c(F, \psi)$  from support vectors (2) with  $\theta = 0, \theta = \pi$  and  $(\theta = \frac{\pi}{2}; \varphi = 0), (\theta = \frac{\pi}{2}; \varphi = \pi) (\theta = \frac{\pi}{2}; \varphi = \frac{\pi}{2}) (\theta = \frac{\pi}{2}; \varphi = \frac{3\pi}{2})$ , then we obtain the center point with the arithmetic mean of the values of the support function from opposite support vectors.
3. We use the algorithm for finding the deformation function. It calculates vector length in each given direction, so that it still remains inside the figure.
4. Next, for each support vector  $\psi$  we calculate values of support function minus support function from center point.
5. Fix the support vector  $\psi_i \in \psi$  and for each other support vector  $\psi$  if the  $(\psi_i, \psi) > 0$  calculate  $\lambda = \min_{\psi} \left\{ \frac{c(F, \psi)}{(\varphi, \psi)} \right\}$ . This lambda guarantees us that the vector will satisfy all conditions and will not go beyond the boundary of the convex hull in any direction.
6. We construct a vector  $\lambda \cdot \varphi + c$  that lies on the boundary of the convex hull, where  $c$  is a center vector.

### 2.2. NUMERICAL CALCULATIONS FOR DEFORMATION FUNCTION

**Construction of the convex hull of a set, using the deformation function. For which of the sets we use  $N=60$ . That means we have the 1800 support vectors for each set.**

The sphere  $F = S_3(5, -5, 5)$  are built

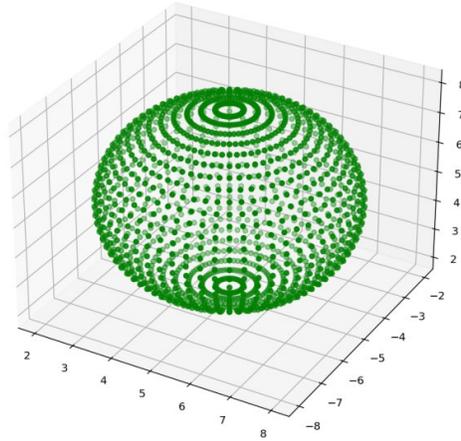


Рис. 4:  $c(F, \psi) = 3\|\psi\| + 5\psi_1 - 5\psi_2 + 5\psi_3$ .

The time it took to calculate all the points to construct the convex hull of the set is 9.219122409820557.

The cube  $F = K_{3,3,3}(5, -5, 5)$  are built

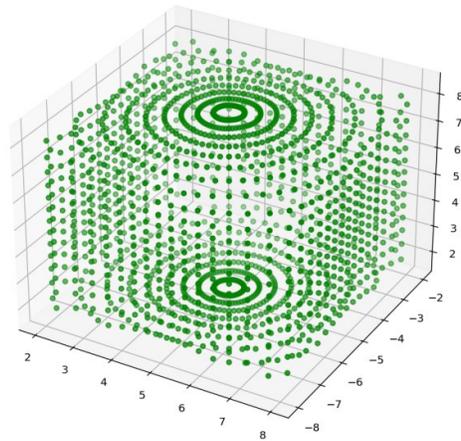


Рис. 5:  $c(F, \psi) = 3(|\psi_1| + |\psi_2| + |\psi_3|) + 5\psi_1 - 5\psi_2 + 5\psi_3$

The time it took to calculate all the points to construct the convex hull of the set is 9.053423881530762.

Let us construct the convex hull of the sum of two sets  $S_3(5, -5, 5)$  and  $K_{3,3,3}(0, 0, 0)$  using the deformation function

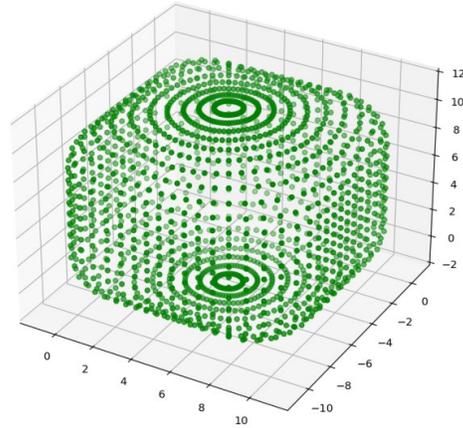


Рис. 6:  $c(F, \psi) = 3\|\psi\| + 3(|\psi_1| + |\psi_2| + |\psi_3|) + 5\psi_1 - 5\psi_2 + 5\psi_3$

The algorithm time working is 9.10199236869812.

Also, we construct the convex hull of the tetrahedron

$$\text{co} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2.5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

using the deformation function

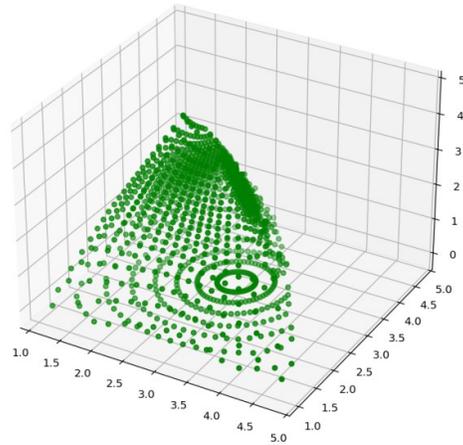


Рис. 7:  $c(F, \psi) = \max \{ \psi_1 + \psi_2; 5\psi_1 + \psi_2; 2.5\psi_1 + 5\psi_2; 2.5\psi_1 + 2.5\psi_2 + 5\psi_3 \}$

The algorithm time working in this case is 9.07657241821289.

### 3. MINKOWSKI FUNCTIONAL

The Minkowski functional of a convex set  $F \in \text{conv}(\mathbf{R}^n)$ ,  $0 \in \text{int}F$  is the function

$$m(x, F) = \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in F\}. \quad (4)$$

Using the Minkowski functional, the set  $F \in \text{conv}(\mathbf{R}^n)$  can be represented in the form

$$F = \{x \in \mathbf{R}^n : m(x, F) \leq 1\}. \quad (5)$$

It follows that it is necessary to check the inequality  $(x, \psi) \leq c(F, \psi)$ , for a certain set of points.

#### 3.1. ALGORITHM FOR CONSTRUCTING THE CONVEX HULL OF A SET USING THE MINKOWSKI FUNCTIONAL

1. We set the values of the angles  $\theta, \varphi$ , where  $\theta \in [0, \pi]$   $\varphi \in [0, 2\pi]$  to determine the support vectors (2) in the spherical coordinate system.
2. We define the support function  $c(F, \psi)$  of the set  $F \in \mathbf{R}^n$  we are constructing using a formula.
3. Next we define the area of space in which the given set lies. This area is a rectangle for which we find the center. To do this, we find the values of the support function in the directions (2) with  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$  and  $(\theta = \frac{\pi}{2}; \varphi = 0)$ ,  $(\theta = \frac{\pi}{2}; \varphi = \pi)$   $(\theta = \frac{\pi}{2}; \varphi = \frac{\pi}{2})$   $(\theta = \frac{\pi}{2}; \varphi = \frac{3\pi}{2})$ , then add 1 to each of the values found in the corresponding directions.
4. Next, we construct a grid of points lying between the planes defined by these constraints; this grid is specified using the step parameter. This parameter specifies the splitting step.
5. Next, for each direction  $\psi$ , we subtract the value of the support function of the center in this direction of the rectangle found earlier from the value of the support function of the set in this direction.
6. For each point  $x$ , we check for which support vectors  $\psi$  the inequality  $(x, \psi) \leq c(F, \psi)$ , if it is satisfied, and points with a value of the Minkowski functional less than or equal to one are saved for further construction.
7. We construct the resulting points.

### 3.2. NUMERICAL CALCULATIONS FOR THE MINKOWSKI FUNCTIONAL

Construction of the convex hull of a set, using the Minkowski functional. For which of the sets we use  $N=60$ . That means we have the 1800 support vectors for each set.

The sphere  $F = S_3(5, -5, 5)$  are built using the step  $=0.24$ , nearly 18000 points

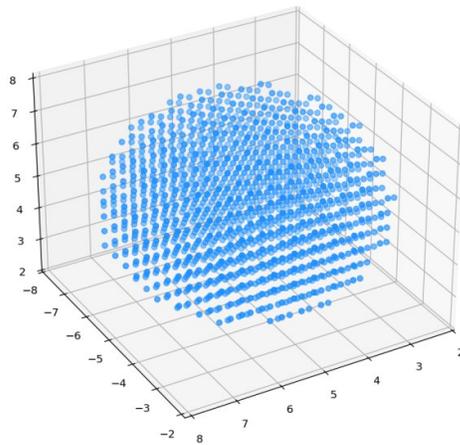


Рис. 4:  $c(F, \psi) = 3\|\psi\| + 5\psi_1 - 5\psi_2 + 5\psi_3$ .

The time it took to calculate all the points to construct the convex hull of the set is 7.376594305038452.

The cube  $F = K_{3,3,3}(5, -5, 5)$  are built using the step  $=0.24$ , nearly 18000 points

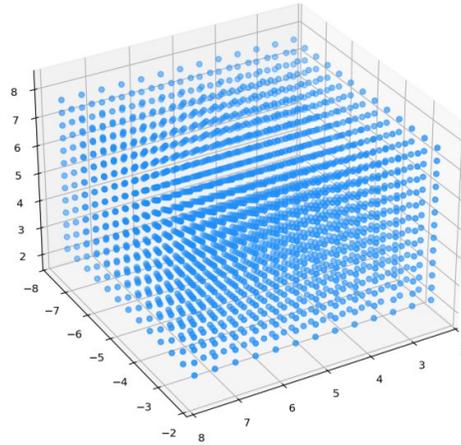


Рис. 5:  $c(F, \psi) = 3(|\psi_1| + |\psi_2| + |\psi_3|) + 5\psi_1 - 5\psi_2 + 5\psi_3$

The time it took to calculate all the points to construct the convex hull of the set is 10.607192277908325.

Let us construct the convex hull of the sum of two sets  $S_3(5, -5, 5)$  and  $K_{3,3,3}(0, 0, 0)$  using the step =0.7, nearly 18000 points

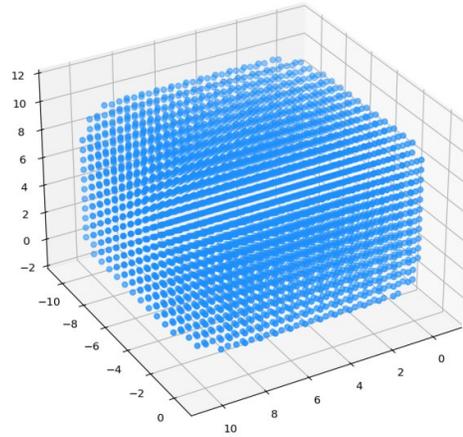


Рис. 6:  $c(F, \psi) = 3\|\psi\| + 3(|\psi_1| + |\psi_2| + |\psi_3|) + 5\psi_1 - 5\psi_2 + 5\psi_3$

The algorithm time working is 12.864967107772827.

Also, we construct the convex hull of the tetrahedron

$$\text{co} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2.5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

using the Minkowski functional with step =0.24, nearly 18000 points

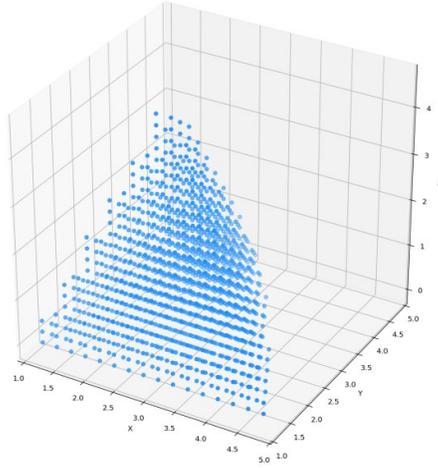


Рис. 7:  $c(F, \psi) = \max \{ \psi_1 + \psi_2; 5\psi_1 + \psi_2; 2.5\psi_1 + 5\psi_2; 2.5\psi_1 + 2.5\psi_2 + 5\psi_3 \}$

The algorithm time working in this case is 12.810363054275513.

But we can't see the upper point in this graphics, and we calculate some special case. It is 2016000 points (step=0.05) and for each we use the 60 support vectors

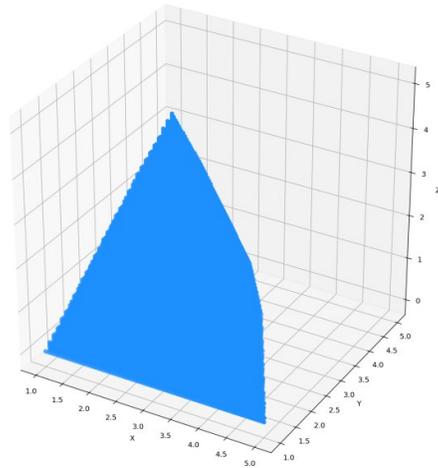


Рис. 8:  $c(F, \psi) = \max \{ \psi_1 + \psi_2; 5\psi_1 + \psi_2; 2.5\psi_1 + 5\psi_2; 2.5\psi_1 + 2.5\psi_2 + 5\psi_3 \}$

The algorithm time working in this case is 1249.7926468849182.

#### 4. CONSTRUCTING OF THE SOLVE OF THE HUKUHARA INITIAL PROBLEM

We define Hukuhara derivative as the setvalued mapping  $X : \mathbf{R}^1 \rightarrow \text{comp}(\mathbf{R}^n)$  which we call the Hukuhara derivative at the point  $t_0 \in \mathbf{R}^1$  if there exist differences  $X(t_0 + \Delta t) \overset{h}{\setminus} X(t_0)$  and  $X(t_0) \overset{h}{\setminus} X(t_0 - \Delta t)$  for all small  $\Delta t > 0$  and there exists an element  $D_h X(t_0) \in \text{conv}(\mathbf{R}^n)$  such that

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} h \left( \frac{X(t_0 + \Delta t) \overset{h}{\setminus} X(t_0)}{\Delta t}, D_h X(t_0) \right) = \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} h \left( \frac{X(t_0) \overset{h}{\setminus} X(t_0 - \Delta t)}{\Delta t}, D_h X(t_0) \right) \end{aligned}$$

Let's introduce the initial problem with a set-valued the right-hand side

$$\begin{aligned} D_h \chi &= A(t)\chi(t) + F(t), \\ \chi(0) &\equiv \chi_0. \end{aligned} \tag{6}$$

In the problem (6) the last term we take as:  $A(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $F(t)$  — setvalued convex mapping,  $t \in [0, T] \subset \mathbf{R}$ .

We divide the interval into  $k$  subintervals and represent the solve in integral form as

$$\begin{aligned} \chi_{k+1}(t) &= \chi_0 + \int_0^T [A(t)\chi(t) + F(t)] ds, \quad k = 0, 1, \dots \\ \chi_0(t) &\equiv \chi_0. \end{aligned}$$

Using the properties of the support function and applying Euler's method, we obtain

$$c(\chi_m(t_{k+1}), \psi_i) = c(\chi_m(t_k), \psi_i) + \delta \cdot [c(\chi_m(t_k), A^T(t_k) \psi_i) + c(F(t_k), \psi_i)],$$

where we define the second term as

$$c(\chi_m(t_k), A^T(t_k) \psi_i) = \begin{cases} 0 & \text{if } A^T(t_k) \psi_i = 0, \\ \|A^T(t_k) \psi_i\| c\left(\chi_m(t_k), \frac{A^T(t_k) \psi_i}{\|A^T(t_k) \psi_i\|}\right) & \text{if } A^T(t_k) \psi_i \neq 0. \end{cases}$$

Also, that  $A^T(t_k) \psi_i \neq 0$  we obtain

$$c(\chi_m(t_{k+1}), \psi_i) \approx c(\chi_m(t_k), \psi_i) + \delta \left[ \|A^T(t_k) \psi_i\| c(\chi_m(t_k), \tilde{\psi}_{ik}) + c(F(t_k), \psi_i) \right].$$

where  $\tilde{\psi}_{ik}$  we find from the condition

$$\left\| \tilde{\psi}_{ik} - \frac{A^T(t_k) \psi_i}{\|A^T(t_k) \psi_i\|} \right\| = \min_{j=0, p-1} \left\| \psi_j - \frac{A^T(t_k) \psi_i}{\|A^T(t_k) \psi_i\|} \right\|.$$

Let solve the example of this type of initial problem

$$D_h X = A(t)X + F(t)$$

with  $A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $X_0 = 5\|\psi\|$  is the initial set and  $F(t) = t\|\psi\|$  is a

set-valued mapping. In algorithm we use the value of parameters  $t=0.2$ ,  $\delta=0.2$ . In first case we use the 1800 support vectors for building a set in every step.

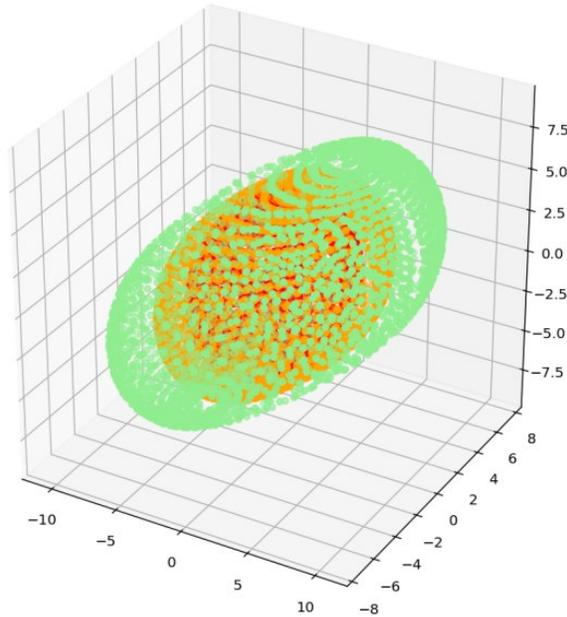


Рис. 9. The solution of initial problem using methods of intersection of support hyperplanes.

The algorithm time working in this case is 721.9192731380463.

Also, was built the case with 595 support vectors.

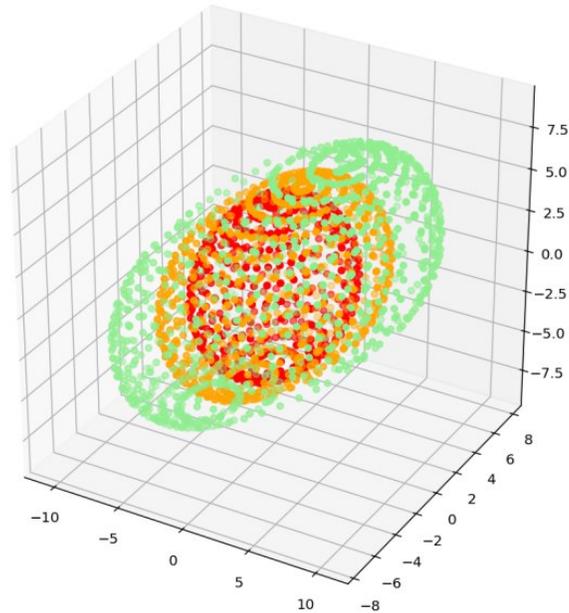


Рис. 10. The solution of initial problem using methods of intersection of support hyperplanes.

Thus, sets were constructed using three methods. The first used sequential hyperplane intersections, the second used the values of the Minkowski functional, and the third used the deformation function. Also, in the case of hyperplane intersections and the deformation function, solutions to the initial problems with a set-valued right-hand side and Hukuhara derivative were constructed using the Euler method and the scheme presented in the article by Plotnikov and Skripnik, only generalising it for the three-dimensional case.

#### REFERENCES

1. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe *Funkc. ekvacioj.* **10** (1967) 205–223.
2. **de Blasi F. S., Iervolino F.** Equazioni differenziali con soluzioni a valore compatto convesso, *Boll. Unione Mat. Ital.*, **2**, 4–5 (1969) 491–501.
3. **Plotnikov V., Plotnikov A., Vityuk A.** Differential equation with multivalued right-hand side: Asymptotic methods, *AstroPrint*, Odesa (1999). [in Russian]

4. **Plotnikov A. V., Skrypnyk N. V.** Differential'nye uravneniya s "chetkoy" i nechetkoy mnogoznachnoy pravoy chast'yu. Asimptoticheskie metody. Odesa: Astroprint, 2009. [in Russian].
5. **Lakshmikantham V., Granna Bhaskar T., Vasundhara Devi J.** Theory of set differential equations in metric spaces, Cambridge Sci. Publ. (2006).
6. **Martynyuk A.** Qualitative analysis of set-valued differential equations, Springer Nature Switzerland AG, Birk-haeuser, Cham (2019).
7. **N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. V. Skripnik.** Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities, De Gruyter Stud. Math., 40, Walter De Gruyter GmbH & Co, Berlin; Boston (2011).
8. **Komleva T. A., Plotnikov A. V., Skrypnyk N. V.** Differential'nye uravneniya s mnogoznachnymi resheniyami // Ukr. Mat. Zh., 60, No. 10 (2008), 1326–1337. [in Russian].
9. **Brandao Lopes, Pinto A. J., de Blast F. S., Iervolino F.** Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions // Ibid. 1970.— # 4.— P. 534— 538.
10. **O. Carja, T. Donchev, A.I. Lazu** Generalized Solutions of Semilinear Evolution Inclusions. // SIAM Journal on Optimization / Vol. 26, Iss. 2 — 2016.
11. **R. Schneider** Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory / Springer, 2nd edition — 2014.
12. **P.M. Gruber** Convex and Discrete Geometry — Springer — 2007.
13. **A. Bronstein** Approximation of Convex Sets by Polytopes / Mathematics of Computation, Vol. 45, 1985 — c. 241–256.
14. **A. Giannopoulos, V.D. Milman** Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory and Applications / Lecture Notes — 2000.
15. **E. Lutwak** Selected Affine Isoperimetric Inequalities // Handbook of Convex Geometry/ Vol. A —1993.
16. **R.J. Gardner** Geometric Tomography / Cambridge University Press, 2nd edition — 2006.
17. **Szilárd Révész, Y. Sarantopoulos** The Generalized Minkowski Functional with Applications in Approximation Theory // Journal of Convex Analysis / Vol. 11 (2004), No. 2 — c. 303–334.
18. **H. Hadwiger** H. Vorlesungen uber Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie - Springer. 1957.
19. **V. Milman, G. Schechtman** Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces / Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1200 — 1986.
20. **Dontchev, A.L., Farkhi, E.M.** Error estimates for discretized differential inclusions. // Computing 41, 1989 — pp. 349–358.

*Бондаренко К. С., Тайрова М. С., Кичмаренко О. Д., Вербіцький В. В.*

АЛГОРИМИ ПОВБУДОВИ МНОЖИННОЗНАЧНОГО ВІДБРАЖЕННЯ В  $R^3$

*Резюме*

У багатьох прикладних задачах виникає потреба будувати опуклі множини, але якщо ці множини отримуються, як розв'язок математичної моделі, то найчастіше використовується поняття опорної функції. Хоча ця функція визначається тільки для опуклих множин, її можна побудувати також і для опуклих оболонок компактних множин. За допомогою цієї функції можна на просторі опуклих компактів вводити поняття диференціювання та інтегрування. Виникає задача побудови опуклої оболонки множини, якщо відомі значення її опорної функції у деяких напрямках. Для цього можуть бути застосовані три алгоритми. Перший використовує властивість опорної функції і будує множину через перети визначених опорною функцією гіперплощин. Другий алгоритм використовує значення функціоналу Мінковського, який пов'язаний з опорною функцією. Третій будує множину по значенням функції деформації, яка також пов'язана зі значеннями опорної функції. У цій статті ставиться задача порівняти швидкість побудови опуклої для цих трьох алгоритмів. Для розрахунків використовувався процесор Intel Core i5-13450HX. Також у цій статті реалізовано числовий метод побудови розв'язку для рівнянь з множиннозначною правою частиною, аналогічний до методу Ейлера.

*Ключові слова:* опорна функція, функція деформації, функціонал Мінковського, опуклі множини, диференціальні рівняння із множиннозначною правою частиною, похідна Хуксгарі, алгоритм Ейлера.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Hukuhara M. (1967) Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe *Funkc. ekvacioj.* 10, 205–223.
2. de Blasi F. S., Iervolino F. (1969) Equazioni differenziali con soluzioni a valore compatto convesso, *Boll. Unione Mat. Ital.*, 2, 4–5, 491–501.
3. Plotnikov V., Plotnikov A., Vityuk A. (1999) Differential equation with multivalued right-hand side: Asymptotic methods, *AstroPrint*, Odesa. [in Russian].
4. Плотников А. В., Скрипник Н. В. (2009). Дифференциальные уравнения с „четкой” и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы, *Одесса: Астропринт*.
5. Lakshmikantham V., Granna Bhaskar T., Vasundhara Devi J. (2006). Theory of set differential equations in metric spaces, Cambridge Sci. Publ.
6. Martynyuk A. (2019). Qualitative analysis of set-valued differential equations, Springer Nature Switzerland AG, Birk-haeuser, Cham.
7. N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. V. Skripnik. (2011). Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities, *De Gruyter Stud. Math.*, 40, Walter De Gruyter GmbH & Co, Berlin; Boston

8. Т. А. Комлева, А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, (2008). Дифференциальные уравнения с многозначными решениями, Укр. мат. журн., 60, No. 10, 1326–1337.
9. Brandao Lopes, Pinto A. J., de Blast F. S., Iervolino F. (1970). Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions. Ibid. 4., P. 534–538.
10. O. Carja, T. Donchev, A.I. Lazu, (2016). Generalized Solutions of Semilinear Evolution Inclusions. SIAM Journal on Optimization Vol. 26, Iss. 2
11. R. Schneider (2014). Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory. *Springer*, 2nd edition
12. P.M. Gruber – \*Convex and Discrete Geometry\* - Springer, 2007.
13. A. Bronstein (1985). Approximation of Convex Sets by Polytopes. Mathematics of Computation, Vol. 45, p. 241–256.
14. A. Giannopoulos, V.D. Milman. (2000). Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory and Applications - Lecture Notes.
15. E. Lutwak. (1993). Selected Affine Isoperimetric Inequalities. Handbook of Convex Geometry, Vol. A.
16. R.J. Gardner. (2006). Geometric Tomography Cambridge University Press, 2nd edition.
17. Szilárd Révész, Y. Sarantopoulos. (2004). The Generalized Minkowski Functional with Applications in Approximation Theory Journal of Convex Analysis, Vol. 11, No. 2, p. 303–334.
18. H. Hadwiger (1957). Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie - Springer.
19. V. Milman, G. Schechtman. (1986). Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces\* - Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1200.
20. Dontchev, A.L., Farkhi, E.M. (1989). Error estimates for discretized differential inclusions. Computing 41, pp. 349–358.

UDC 519.177

**N. A. Yakimova**, *CandSc (Engineering), Assoc. Prof.*

*Odesa I. I. Mechnikov National University*

*Department of Algebra, Geometry and Differential Equations*

*2 Zmiiienka Vsevoloda St, Odesa, 65082, Ukraine*

*e-mail: nataliya\_yakimova@onu.edu.ua*

*ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0005-8577-2775>*

**N. V. Sharai**, *CandSc (Physics & Mathematics), Assoc. Prof.*

*Odesa I. I. Mechnikov National University*

*Department of Algebra, Geometry and Differential Equations*

*2 Zmiiienka Vsevoloda St, Odesa, 65082, Ukraine*

*e-mail: sharay@onu.edu.ua*

*ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0003-4007-651X>*

## **ALGEBRAIC IMPLEMENTATION OF BINARY OPERATIONS ON GRAPHS**

Graph theory is widely used from a practical point of view. Graphs play an important role in scientific research (for example, electrical diagrams), and also surround us in everyday life (for example, roads and paths maps). For everyday use, the geometric implementation of graphs is certainly the most convenient. But for computer processing of information, this is not rational. In these cases, an algebraic, namely matrix representation of graphs is used. Therefore, studies devoted to this topic are gaining more and more importance. This article considers the possibility of algebraic performing operations on adjacency matrices that represent graphs. These methods have their own characteristics and limitations.

*MSC: 03G05, 03G25, 03F52, 06E25, 15B34.*

*Keywords: directed and undirected graph, adjacency matrix, operations on graphs, elementary logical operations, Boolean matrix, multivalued logic.*

*DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.1\(45\).352814](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.1(45).352814)*

## **INTRODUCTION**

When studying a system of objects connected by some arbitrary types of relationships, both directed and undirected graphs can be used. Each such system is an ordered collection of elements with which certain changes can occur. Each such specific system can be represented graphically as a graph or

in digital format as an adjacency matrix or incidence matrix of such a graph. In any case, changes in system elements or the results of the interaction of different such systems are reflected by operations on the vertices or edges of the corresponding graphs. The geometric implementation of such operations has already been well studied and described [1]. But computer processing of information involves its digital representation in matrix form. Algebraic matrix apparatus is also widely represented in mathematical research [2]. This article aims to establish a correspondence between known operations on matrices and operations on elements of an arbitrary graph or operations that reflect the interaction of multiple graphs. In this way, a transition from a geometric to algebraic method of not only representing, but also processing various information can be made.

### PRELIMINARY RESULTS

If the matrices are Boolean, then with them it is possible to perform both ordinary algebraic operations on matrices and two-valued logic operations described in [3; 8]. If the matrices are not Boolean, then in order to perform the logical operations of disjunction and conjunction with them, it is necessary to use the apparatus of multi-valued logic. In this case, the operations of disjunction and conjunction of matrix elements are performed according to the following rules [4]:

$$x \vee y = \max\{x, y\} \tag{1}$$

$$x \wedge y = \min\{x, y\} \tag{2}$$

But both logical and arithmetic operations on matrices require certain conditions regarding their dimensionality. Different systems represented by geometric implementations of graphs do not always have the same number of objects (nodes). Therefore, the graphs corresponding to them will have a different number of vertices. This implies a different dimension of their adjacency matrices. Neither logical nor arithmetic operations can be performed on such matrices. This obstacle can be avoided by reducing both matrices to the same dimension by introducing additional identically named all-zero rows and columns into them. According to the characterization of graphs by their adjacency matrices, such pairs will correspond to isolated vertices [5; 9]. The new extended adjacency matrices of both graphs participating in the operation will

have the same dimension. As is known, an isomorphism is a relation between graphs that preserves the incidence relation up to the numbering of vertices.

**Theorem 1.** *Graphs are isomorphic if and only if their adjacency matrices can be obtained from each other by simultaneous permutations of the same-named rows and columns (i.e., simultaneously with the permutation of the  $i$ -th and  $j$ -th rows of the matrix, the permutation of the  $i$ -th and  $j$ -th columns of the matrix also occurs).*

**Proof.** Renumber the vertices of arbitrary graphs  $G_1 = (V_1, E_1)$  and  $G_2 = (V_2, E_2)$  ( $|V_1| = |V_2| = p$ ) by integers from 1 to  $p$ . If  $A'(G_1) = A''(G_2)$  then the statement of the theorem is true. In the opposite case, the graphs  $G_1$  and  $G_2$  differ only in the numbering of the vertices. This means that there exists a permutation  $S$  on the set of vertices  $V$  that preserves adjacency, i.e. if  $e_{ij}^1(v_i^1, v_j^1) \in E_1$ , then  $e_{s(i),s(j)}^2(s(v_i^1), s(v_j^1)) \in E_2$ . Then we have  $a''_{s(i)s(j)} = a'_{ij}$ . The theorem is proved.

This theorem implies that, using an isomorphism transformation for each graph in the extended adjacency matrix, new isolated vertices will be assigned row-column pair numbers that reflect vertices that are absent in one graph but present in the other.

### MAIN RESULTS

Let's consider the basic operations on graphs.

**Theorem 2.** *The adjacency matrix of the result of the graph union operation corresponds to the disjunction of the adjacency matrices of the graphs being joined.*

**Proof.** By definition, the graph  $H$  is the union of the graphs  $G_1 = (V_1, E_1)$  and  $G_2 = (V_2, E_2)$ , if  $H = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ . If the graphs being joined have the same number of vertices, then the set of vertices of the graph  $H$  coincides with the sets of vertices of the graphs  $G_1$  and  $G_2$ , i.e.  $V_1 \cup V_2 = V_1 = V_2$ . In this case, their adjacency matrices  $A(H)$ ,  $A(G_1)$  and  $A(G_2)$  will have the same dimension, so any operations can be performed with them without additional preliminary transformations. If the number of vertices in the graphs under study is different or has a different semantic load and, as a result, different numbering, then after introducing additional zero row-column pairs, we obtain matrices of the same dimension. By permutations, each of these matrices,

according to Theorem 1, can be reduced to matrices of graphs isomorphic to the original ones, where all vertices have the same numbering, which corresponds to their meaningful loading. The elements of the adjacency matrix correspond to the number of edges connecting the corresponding vertices. Therefore, if in at least one of the graphs the vertices are adjacent, i.e. connected by a certain number of edges, then in the adjacency matrix of the union of these graphs the specified vertices will be connected by the same number of edges. This corresponds to the definition of the disjunction operation in its multivalued sense according to formula (1). Thus, to calculate the adjacency matrix of the result of the union of two arbitrary graphs, it is necessary to perform the disjunction operation of the adjacency matrices of these graphs. The theorem is proved.

We will illustrate the result of this theorem with an example. Consider the two directed graphs shown in Fig. 1.

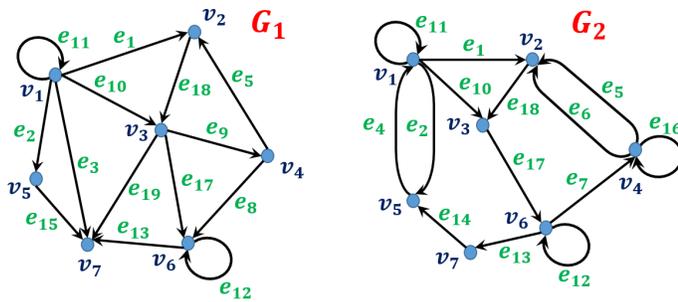


Figure 1: Directed graphs.

For both of these graphs, we can construct adjacency matrices in tabular form

		Final						
		v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>	v <sub>7</sub>
Initial	v <sub>1</sub>	1	1	1	0	1	0	1
	v <sub>2</sub>	0	0	1	0	0	0	0
	v <sub>3</sub>	0	0	0	1	0	1	1
	v <sub>4</sub>	0	1	0	0	0	1	0
	v <sub>5</sub>	0	0	0	0	0	0	1
	v <sub>6</sub>	0	0	0	0	0	1	1
	v <sub>7</sub>	0	0	0	0	0	0	0

		Final						
		v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>	v <sub>7</sub>
Initial	v <sub>1</sub>	1	1	1	0	1	0	0
	v <sub>2</sub>	0	0	1	0	0	0	0
	v <sub>3</sub>	0	0	0	0	0	1	0
	v <sub>4</sub>	0	2	0	1	0	0	0
	v <sub>5</sub>	1	0	0	0	0	0	0
	v <sub>6</sub>	0	0	0	1	0	1	1
	v <sub>7</sub>	0	0	0	0	1	0	0

or in the usual algebraic form

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A(G_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

These matrices are constructed assuming that the row number corresponds to the starting vertex and the column number corresponds to the final vertex of each edge. But these graphs can be defined by these matrices from the very beginning. Performing operations on such graphs does not require reproduction of their geometric implementation [6]. The graph  $G_1$  does not contain multiple edges, so its adjacency matrix is Boolean. Graph  $G_2$  contains strictly parallel edges  $e_5(v_4, v_2)$  and  $e_6(v_4, v_2)$ . Therefore, its adjacency matrix contains the element  $a_{42} = 2$ , i.e. it is not Boolean [3; 8]. But if we take into account that the disjunction operation for multivalued logic is performed according to rule (1), then the disjunction for these matrices takes the form [6; 7]:

$$\begin{aligned} A(G_1) \vee A(G_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\cup} \end{aligned}$$

If the union operation of the specified graphs is performed geometrically, then we will get the graph shown in Fig. 2.

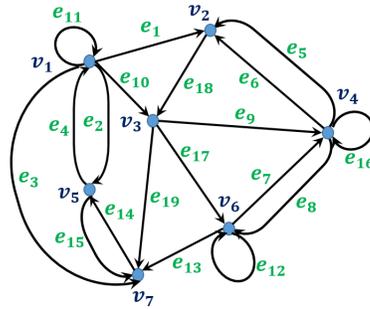


Figure 2: Graph  $G_1 \cup G_2$ .

It is easy to see that the adjacency matrix  $A_U$  corresponds to this graph.

**Theorem 3.** *The adjacency matrix of the result of the graph intersection operation corresponds to the conjunction of the adjacency matrices of the intersecting graphs.*

**Proof.** By definition, the graph  $F$  is the intersection of the graphs  $G_1 = (V_1, E_1)$  and  $G_2 = (V_2, E_2)$ , if  $F = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ . If the graphs being joined have the same number of vertices, then the set of vertices of the graph  $F$  coincides with the sets of vertices of the graphs  $G_1$  and  $G_2$ , i.e.  $V_1 \cap V_2 = V_1 = V_2$ . In this case, their adjacency matrices  $A(F)$ ,  $A(G_1)$  and  $A(G_2)$  will have the same dimension, so any operations can be performed with them without additional preliminary transformations. If the sets of vertices in the graphs under study do not coincide, then, as in the case of unification graphs, after introducing additional zero row-column pairs, we obtain matrices of the same dimension, which are transformed into matrices of graphs isomorphic to the original graphs. The elements of the adjacency matrix correspond to the number of edges connecting the corresponding vertices. Therefore, if in at least one of the graphs any two vertices are connected by a smaller number of edges than in the second graph, then in the adjacency matrix of the intersection of these graphs the specified vertices will be connected by the same smaller number of edges. This corresponds to the definition of the conjunction operation in its multivalued sense according to formula (2). Thus, to calculate the adjacency matrix of the result of the intersection of two arbitrary graphs, it is necessary to perform the conjunction operation of the adjacency matrices of these graphs. The theorem is proved.

Let us illustrate this theorem using the example of the graphs shown in Fig. 1. As already noted, for multivalued logic the conjunction operation is performed according to rule (2), so the conjunction for the matrices  $A(G_1)$  and  $A(G_2)$  takes the form:

$$\begin{aligned}
 A(G_1) \wedge A(G_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\cap}
 \end{aligned}$$

If the intersection of the specified graphs is performed geometrically, we will get the graph shown in Fig. 3.

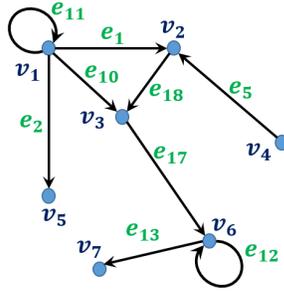


Figure 3: Graph  $G_1 \cap G_2$ .

It is easy to see that the adjacency matrix  $A_{\cap}$  corresponds to this graph [6].

**Theorem 4.** *The adjacency matrix of the result of performing the ring sum operation of graphs corresponds to the arithmetic subtraction of the adjacency*

matrices of the union and intersection of the graphs that participate in the specified operation.

**Proof.** By definition, a graph  $R$  is a ring sum of graphs  $G_1 = (V_1, E_1)$  and  $G_2 = (V_2, E_2)$  if it does not contain isolated vertices and consists of edges belonging to either graph  $G_1$  or graph  $G_2$ , but not to both simultaneously, i.e. [7]

$$E_{\oplus} = \{(E_{G_1} \cup E_{G_2}) \setminus (E_{G_1} \cap E_{G_2})\} \tag{3}$$

The set of edges  $E_{G_1} \cup E_{G_2}$  is the result of the graphs union operation, and the set  $E_{G_1} \cap E_{G_2}$  is the result of their intersection. This means that the matrix

$$A(R) = A_{\cup} - A_{\cap} = (A(G_1) \vee A(G_2)) - (A(G_1) \wedge A(G_2)) \tag{4}$$

will contain complete information about all edge-connected vertices of the graph  $R$ , i.e. will be its adjacency matrix in the extended sense. The theorem is proved.

By the definition of a ring sum of graphs, the graph obtained as a result of this operation cannot contain isolated vertices. Therefore, if they appear, they must be deleted from the resulting graph. Deleting a vertex from the graph entails deleting all edges incident to it, that is, deleting all connections of this object or node with other objects or nodes [7; 10]. This means that when deleting the vertex  $v_i$  from the adjacency matrix, it is necessary to delete the  $i$ -th row and  $i$ -th column. In this regard, the algorithm for performing the operation of deleting the vertex  $v_i$  from the graph in the matrix representation is similar to the algorithm for constructing the minor  $M_{ii}$  for the adjacency matrix of this graph. Let, for example, it is necessary to delete the vertex  $v_2$  from the graph  $G_2$ . Let's construct for the matrix  $A(G_2)$  the minor  $M_{22}$  [1]:

$$M_{22}(A(G_2)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_{22}(A(G_2)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Therefore, the following adjacency matrix will correspond to the new graph  $G'_2 = G_2 \setminus \{v_2\}$

$$A(G'_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

The algorithm for deleting rows and columns from the matrix is already computerized. In this case, the software implementation will provide two shifts: for rows and columns [6; 7]. A sign of an isolated vertex in the adjacency matrix is the presence of a row and column of the same name that are all zero [5]. According to the described algorithm, this zero row-column pair should be removed from the extended adjacency matrix of the ring sum of graphs if such a pair appeared as a result of the procedure described in Theorem 4. The final matrix obtained as a result of these actions will be the adjacency matrix of the ring sum of the graphs under study.

Let us illustrate the result of Theorem 4 using the example of the graphs shown in Fig. 1. For these graphs, the matrices  $A_U$  and  $A_\cap$  have already been obtained. Therefore,

$$A_U - A_\cap = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\oplus}$$

This matrix does not contain all zero row-column pairs. This means that the ring sum operation did not result in any isolated vertices that would be subsequently deleted from the resulting graph. Therefore, the obtained adjacency matrix does not require further processing by constructing its corresponding minor. Thus, the resulting matrix is the final adjacency matrix of the ring sum of the considered graphs. If we perform the ring sum operation of graphs  $G_1$  and  $G_2$  geometrically, we obtain the graph shown in Fig. 4.

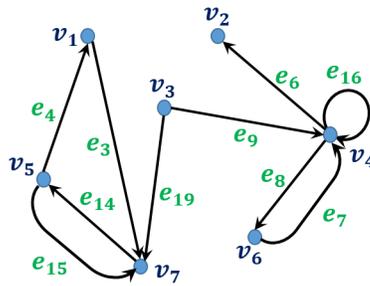


Figure 4: Graph  $G_1 \oplus G_2$ .

For this graph, it is also easy to see that the adjacency matrix  $A_{\oplus}$  corresponds to it.

**Theorem 5.** *If two graphs do not contain multiple edges, or their number between corresponding vertices in these graphs differs by no more than one, then the adjacency matrix of the ring sum of these graphs can be obtained as a result of the sum modulo 2 operation of their adjacency matrices.*

**Proof.** As in the cases of graph union and intersection, first, if necessary, it is necessary to construct extended adjacency matrices for both graphs in order to achieve their same dimension. After that, using the isomorphism transformation, they should be reduced to matrices corresponding to the graphs

under study. After that, the following situations are possible for the obtained adjacency matrices.

A). If the graphs do not contain multiple edges at all, then their adjacency matrices are Boolean. In this case, if two vertices are adjacent in both graphs (in the case of a directed graph, the vertices in both graphs are connected by the same directed edge), then in both matrices there will be ones at the corresponding place. But the given edge is not included in the result of the ring sum of these graphs. Therefore, in the adjacency matrix of the result, the corresponding element must be equal to zero. If two vertices are adjacent in only one graph, then such an edge will be an element of the ring sum of these graphs, that is, the corresponding element of the adjacency matrix of the result will be equal to one. If the vertices are not adjacent in any graph, then the result of the ring sum will also not be adjacent, i.e. the corresponding element of the result's adjacency matrix will be equal to zero. All this corresponds to the sum modulo 2 as an elementary Boolean operation.

B). In general, the sum modulo 2 is defined as the remainder of dividing the sum of the corresponding numbers by 2. If two vertices in both graphs are connected by the same number of  $q$ -multiple edges, then the sum of these edges will be equal to  $2q$ , which is an even number. The remainder of dividing such a number by 2 will always be zero, i.e. the corresponding matrix element will be equal to zero. This means that no multiple edge common to both graphs will be an element of the ring sum of graphs, which corresponds to the definition of this operation.

C). If any two vertices in both graphs are connected by multiple edges, and the number of these edges differs by more than one, then the number of multiple edges between the vertices when performing the ring sum of graphs must be equal to this number. This means that the corresponding element of the adjacency matrix of the result of this operation must be greater than one. But such a number cannot be the result of the sum modulo 2 operation. In this case, to calculate the adjacency matrix of the ring sum of graphs, we must use the formula (4) proposed by Theorem 4.

D). If the number of multiple edges connecting two vertices in both graphs differs by exactly one, then these numbers can be denoted as  $k$  and  $k + 1$ . It

follows from this that

$$(k + k + 1) \bmod 2 = (2k + 1) \bmod 2 = 1$$

So, in this situation, the result of the sum modulo 2 is indeed equal to the number of edges that are different among the multiple edges between the two vertices. Incidentally, situation A) can be considered a special case of this situation. The theorem is proven.

Let us illustrate the result of Theorem 5 with an example. Let us perform the sum modulo 2 operation with the given matrices  $A(G_1)$  and  $A(G_2)$ , keeping in mind its general definition as the remainder of dividing the corresponding sum by 2 [6]. The indicated matrices correspond to situation D) described in Theorem 5.

$$\begin{aligned}
 A(G_1) \oplus A(G_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\oplus}.
 \end{aligned}$$

This matrix coincides with the matrix  $A_{\oplus}$  for the ring sum of graphs  $G_1$  and  $G_2$ , calculated by formula (4), that is, the adjacency matrix of the graph obtained as a result of the ring sum of two graphs can be calculated in the this way. The results of Theorem 4 and Theorem 5 clearly shows that for matrix execution of operations on graphs, the simultaneous use of both arithmetic and logical operations is permissible.

## CONCLUSION

In the graphs considered as example, each edge is given a serial number. In practical application, these numbers may mean a certain content load. But with matrix display, this content can be lost. The matrix reflects the presence or absence of an edge, that is, the presence or absence of a connection between objects. Therefore, if in two graphs between two vertices the same edge has a different content load (for example, a road and a dirt road), then the adjacency matrix will only show the presence or absence of this connection without explaining its nature. But usually, in practical applications, information about the presence of a connection is sufficient, therefore, for binary operations on directed graphs [7], the use of elementary multivalued logic operations on adjacency matrices is an effective mathematical tool. The same algorithms have differences depending on whether directed or free graphs are involved in the considered operations. Depending on the types of graphs, there are also restrictions on the display of meaningful information by the matrices of these graphs. But in practical applications, these restrictions are usually insignificant. Therefore, for each operation on graphs and each type of graph, it is possible to propose a combination of algebraic operations (arithmetic and logical) that allow obtaining the matrix of a new graph, or a clear, easily programmable algorithm for transforming the matrices of the initial graphs [6; 11]. None of the considered operations on graphs is impossible in the matrix implementation. The proposed algorithms can significantly simplify the computer processing of graphs.

## REFERENCES

1. A.A. Zykov A.A. (2007). Lekcii z algebry [Lectures on algebra]. Odesa, Astroprint, 2007.
2. Gantmaker F. (2010). Teoriya matrytz [Matrix theory]. Kyiv: Nadrukovanovo v Ukraini, 560 p.
3. Yakimova N.A. (2019). Predykatni logichni matritzi [Predicative logical matrices]. Visnyk Odes 'kogo Natzional'nogo universitetu. Re-

- searches in Mathematics and Mechanics. Vol.24, issue 2(34), pp.67–74. [https://doi.org/10.18524/2519-206x.2019.2\(34\).190052](https://doi.org/10.18524/2519-206x.2019.2(34).190052)
4. Shaporev S.D. (2005). *Matematicheskaya logika* [Mathematical logic]. St-Peterburg: BHV- Peterburg, 416 p.
  5. Yakimova N.A. (2021). *Dyskretna matematyka. Chastyna 1. Teoriya mnozhin. Teoriya grafiv* [Discrete Math. Part 1. Set theory. Graf theory]. Odesa: ONU im. I. I. Mechnikova, 102 p.
  6. Yakimova N.A., Klishin M.E. (2022). *Matrichne podannya operaciy nad grafami* [Matrix representation of operations on graphs]. *Visnyk Odes 'kogo Natzional'nogo universitetu. Researches in mathematics and mechanics. Vol. 27, issue 1-2(39-40)*, pp. 111-131. [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2022.1-2\(39-40\).294314](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294314)
  7. Yakimova N.A., Sharai N.V. (2024). *Performing some operations on graphs using adjacency matrices. Proceedings of the 10th International Scientific and Practical Conference «Theory and Practice of Science: Key Aspects», Rome, Italy. P. 184-196.* <http://doi.org/10.51582/interconf.19-20.09.2024.019>
  8. Yakimova N.A. (2023). *Operacii nad blochnymy predikatnymy matrytzyamy* [Operations on block predicate matrices]. *Visnyk Odes 'kogo Natzional'nogo universitetu. Researches in mathematics and mechanics. Vol.28, issue 1-2(41-42)*, pp. 185-199. [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305269](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305269)
  9. Yakimova N.A., Klishin M.E. (2024). *Binary operations on graphs in matrix representation. Proceedings of the XXX International Scientific and Practical Conference «Youth, education and science through today's challenges», Porto, Portugal. P. 120-125.* <http://doi.org/10.46299/ISG.2024.1.30>
  10. Yakimova N.A. (2025). *Possibility of matrix representation of basic unary operations on graphs. SWorldJournal. Vol. 30, part 2, 147153.* <http://doi.org/10.30888/2663-5712.2025-30-02-013>

11. Kruglov V.E., Yakimova N.A. (2025). Predicate model of some operations on logic matrices. Proceedings of the 14<sup>th</sup> International Scientific and Practical Conference «International Forum: Problems and scientific solutions», Melbourne, Australia. P. 249-254. <http://doi.org/10.51582/interconf.2024.231>

Якімова Н. А., Шарай Н. В.

АЛГЕБРАІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ БІНАРНИХ ОПЕРАЦІЙ НАД ГРАФАМИ

*Резюме*

Теорія графів має широке розповсюдження з практичної точки зору. Графи відіграють важливу роль в наукових дослідженнях (наприклад, електросхеми), а також оточують нас у повсякденному житті (наприклад, карти доріг та шляхів). Для побутового застосування, безумовно, найзручнішою є геометрична реалізація графів. Але для комп'ютерної обробки інформації це не є раціональним. В цих випадках використовується алгебраїчне, а саме матричне подання графів. Тому все більшого значення набувають дослідження, присвячені саме цій темі. В даній статті розглядається можливість алгебраїчного виконання операцій над матрицями суміжності, якими подано графи. Ці методи мають свої особливості та обмеження.

*Ключові слова:* орієнтований та неорієнтований граф, матриця суміжності, операції над графами, елементарні логічні операції, булева матриця, багатозначна логіка.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Зиков А. А. Лекции по алгебре. — Одесса: Астропринт, 2007.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — К.: Наукова думка, 2010. — 560 с.
3. Якімова Н. А. Предикатні логічні матриці // Вісник Одеського національного університету. Дослідження в математиці і механіці. 2019. Т. 24, № 2(34). С. 67–74. [https://doi.org/10.18524/2519-206x.2019.2\(34\).190052](https://doi.org/10.18524/2519-206x.2019.2(34).190052)
4. Шапорев С. Д. Математическая логика. — Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005. — 416 с.
5. Якімова Н. А. Дискретна математика. Частина 1. Теорія множин. Теорія графів. — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2021. — 102 с.
6. Якімова Н. А., Клишин М. Є. Матричне подання операцій над графами // Вісник Одеського національного університету. Дослідження в Математиці і механіці. 2022. Т. 27, № 1–2(39-40). С. 111–131. [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2022.1-2\(39-40\).294314](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294314)
7. Yakimova N. A., Sharai N. V. Performing some operations on graphs using adjacency matrices // Proceedings of the 10th International Scientific and Practical Conference “Theory and Practice of Science: Key Aspects”, Rome, Italy, 2024. P. 184–196. <http://doi.org/10.51582/interconf.19-20.09.2024.019>
8. Якімова Н. А. Операції над блочними предикатними матрицями // Вісник Одеського національного університету. Дослідження в Математиці і механіці. 2023. Т. 28, № 1–2(41-42). С. 185–199. [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305269](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305269)

9. Yakimova N. A., Klishin M. E. Binary operations on graphs in matrix representation // Proceedings of the XXX International Scientific and Practical Conference “Youth, Education and Science through Today’s Challenges”, Porto, Portugal, 2024. P. 120–125. <http://doi.org/10.46299/ISG.2024.1.30>
10. Yakimova N. A. Possibility of matrix representation of basic unary operations on graphs // SWorldJournal. 2025. Vol. 30, Part 2. P. 147–153. <http://doi.org/10.30888/2663-5712.2025-30-02-013>
11. Kruglov V. E., Yakimova N. A. Predicate model of some operations on logic matrices // Proceedings of the 14th International Scientific and Practical Conference “International Forum: Problems and Scientific Solutions”, Melbourne, Australia, 2025. P. 249–254. <http://doi.org/10.51582/interconf.2024.231>

## ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ (скорочений варіант)

Журнал «Дослідження в математиці і механіці» має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень, огляди з актуальних проблем за тематикою видання, а також повідомлення про ювілеї, знаменні дати та події.

Статті публікуються українською або англійською мовою.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Електронну версію рукопису слід надсилати на e-mail журналу

[rmm-journal@onu.edu.ua](mailto:rmm-journal@onu.edu.ua)

або завантажувати через сайт журналу

[www.rmm-journal.onu.edu.ua](http://www.rmm-journal.onu.edu.ua)

Вона повинна складатися з

- 1) вихідного TeX-файла,
- 2) PDF-файла,
- 3) всіх допоміжних файлів (графіки, рисунки, ілюстрації тощо),
- 4) документа з анкетними даними авторів (прізвище, ім'я, по батькові, місце роботи, e-mail, адреса для листування та телефон).

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X відповідно до вимог та з використанням шаблону, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті. Також вимоги можна отримати в редакційній колегії журналу.

Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 25 сторінок.

Структура статті:

- УДК;
- список авторів;
- місце роботи авторів;
- назва статті;
- резюме мовою оригіналу обсягом не менше 100 слів;
- Mathematical Subject Classification (2010);

- список ключових слів мовою оригіналу;
- основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України «Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України» від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується подана стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером у квадратних дужках;
- список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформлюється відповідно до Державного стандарту України ДСТУ 7.1:2006 «Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання» та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008);
- анотація іншою мовою повинна містити назву, список авторів, резюме обсягом не менше 100 слів та список ключових слів;
- додатково, якщо стаття написана українською мовою, після анотації англійською мовою додається список літератури у транслітерації, оформлений у відповідності до міжнародного стандарту *Harvard* (зразок та правила оформлення можна знайти в шаблоні статті на сайті).

Усі надіслані статті проходять анонімне рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу «Дослідження в математиці і механіці».

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, зокрема й у співавторстві.

*Редакційна колегія журналу*  
*«Дослідження в математиці і механіці»*  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
вул. Змієнка Всеволода, 2  
м. Одеса, 65082

*Українською та англійською мовами*

Згідно з Рішенням Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення № 1407 від 26.06.2025 р. журнал зареєстрований як друковане медіа і внесений до Реєстру суб'єктів у сфері медіа з ідентифікатором R30-06164

Затверджено до друку вченою радою  
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова  
Протокол № 4 від 25 листопада 2025 р.

Відповідальний за випуск *О. О. Максимов*  
Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*  
Технічний редактор *М. М. Бушин*

Наклад 100 пр. Зам. № 346(69).

Адреса редколегії:  
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Видавництво і друкарня «Астропринт»  
вул. Разумовська, 21, м. Одеса, 65091, Україна  
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855

astro\_print@ukr.net

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Дослідження в математиці і механіці. — 2025. — Т. 30, вип. 1(45). —  
С. 1–83.