УДК 517.764

І. В. Потапенко, *викладач*
Одеськiй національний унiверситет iменi I. I. Мечникова
кафедра алгебри, геометрiї та диференцiальних рiвнянь
вул. Змiєнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
e-mail: potapenko@onu.edu.ua
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0007-9477-5921

ПРО КАНОНІЧНІ ДЕФОРМАЦІЇ ТРИВИМІРНИХ МЕТРИК РІМАНОВОГО ПРОСТОРУ

В роботі вводиться поняття канонічних деформацій тривимірних метрик ріманового простору. Використовуючи апарат тензорного аналізу та теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних, доводиться на прикладі геодезичних деформацій, що це більш широкий клас інфінітезимальних деформацій, він не пустий і цікавий для подальшого вивчення.
MSC: 57R30.
Ключові слова: ріманів простір, варіація метрики, канонічні деформації, тензор кривини, геодезичні деформації.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.2(46).355050

Вступ

Традиційно в літературі [1-26] добре вивчені і мають важливе прикладне значення геодезичні відображення та деформації ріманових та псевдоріманових просторів та гіперповерхонь. В роботі вводиться поняття канонічних деформацій метрик ріманового простору. Обмежуючись розмірністю три, для якої тензор Рімана має чітко виражений вигляд, вивчається питання структури варіації метрики тривимірного ріманового простору, що допускає нетривіальні інфінітезимальні спеціальні деформації. На прикладі геодезичних деформацій тривимірних метрик показано, що вони складають важливий клас канонічних деформацій, що в свою чергу свідчить про те, що клас канонічних деформацій не є пустим і достатньо більш широким, оскільки включає в себе клас геодезичних деформацій.

Надійшла 13.12.2025

Основні результати

Нехай (V_n, g_{ij}) — рімановий простір, віднесений до локальних координат

$$(x^1, x^2, \dots, x^n).$$

Нехай $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n)$ деяке контраваріантне векторне поле (V_n, g_{ij}).

Індекси $\alpha, \beta, \dots$ а також $i, j, \dots$ із множини $\{1, 2, \dots, n\}$.

Означення 1. Рімановий простір $(\widetilde{V}_n, \widetilde{g}_{ij})$ називається інфінітезимальною деформацією ріманового простору (V_n, g_{ij}), якщо його локальні координати $(\widetilde{x}^1, \widetilde{x}^2, \dots, \widetilde{x}^n)$ визначаються формулою

$$\widetilde{x}^\alpha = x^\alpha + t\,\xi^\alpha(x) \tag{1}$$

де t — малий числовий параметр. Вектор $\xi^\alpha(x)$ називається вектором зміщення.

Означення 2. Нехай $R(x)$ та $R_t(x,t)$ — певна характеристика ріманових просторів (V_n, g_{ij}) та $(\widetilde{V}_n, \widetilde{g}_{ij})$ відповідно. Припустимо, що приріст

$$\Delta R(x,t) = R_t(x,t) - R(x)$$

функції $R(x)$ при деформації лінійно залежить від t. Тоді у розкладі

$$R_t(x,t) = R(x) + t\,\delta R(x) \tag{2}$$

коефіцієнт δR називають варіацією геометричної величини $R(x)$.

З (2) отримуємо формулу обчислення варіації

$$\delta R(x) = \left.\frac{\partial R_t(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}. \tag{3}$$

Надалі обмежуємося розглядом виключно інфінітезимальних деформацій виду (1). Відмітимо, що геометрична характеристика об'єкта зберігається при інфінітезимальній деформації (1), якщо її приріст є величиною не менш ніж другого порядку відносно t.

Надалі розглядатимемо виключно інфінітезимальні деформації (1).

Твердження 1. Нехай рімановий простір (V_n, g_{ij}) зазнає інфінітезимальної деформації (1) і $T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ та $U^{j_1 j_2 \dots j_s}_{i_1 i_2 \dots i_r}$ регулярні тензорні поля в (V_n, g_{ij})

типу (p,q) та (r,s) відповідно, тоді мають місце наступні формули:

$$\delta\left(\frac{\partial T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\delta T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}\right), \tag{4}$$

$$\delta\Big(T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}\, U^{j_1j_2\dots j_s}_{i_1i_2\dots i_r}\Big) = \Big(\delta T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}\Big)\, U^{j_1j_2\dots j_s}_{i_1i_2\dots i_r} + T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}\,\Big(\delta U^{j_1j_2\dots j_s}_{i_1i_2\dots i_r}\Big). \tag{5}$$

Доведення.

Доведення формул (4) та (5) випливає з означення 1 та формули (3).

Твердження доведено.

Відмітимо, що з (3), як наслідок, маємо, що операція варіювання тензора не змінює його тип.

Означення 3. Коваріантною похідною тензорного поля $T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}$ типу (p,q), яке задане в рімановому просторі (V_n, g_{ij}), називається тензорне поле $T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p;\,l}$ типу $(p+1,q)$, яке визначається за формулою

$$\begin{aligned} T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p;\,l} = \frac{\partial T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}}{\partial x^l} + T^{\alpha j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}\Gamma^{j_1}_{\alpha l} + T^{j_1\alpha\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}\Gamma^{j_2}_{\alpha l} + \dots + T^{j_1j_2\dots\alpha}_{i_1i_2\dots i_p}\Gamma^{j_q}_{\alpha l} \\ - T^{j_1j_2\dots j_q}_{\alpha i_2\dots i_p}\Gamma^{\alpha}_{i_1l} - T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1\alpha\dots i_p}\Gamma^{\alpha}_{i_2l} - \dots - T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots\alpha}\Gamma^{\alpha}_{i_pl}. \end{aligned} \tag{6}$$

де Γ^h_{ij} — коефіцієнти ріманової зв'язності, які визначаються на базі метричного тензора g_{ij} за формулою

$$\Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) g^{kh}. \tag{7}$$

Твердження 2. Нехай рімановий простір (V_n, g_{ij}) зазнає інфінітезимальної деформації (1) і $T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}$ — тензорне поле типу (p,q), що задане в ньому.

Тоді варіація коваріантної похідної $\delta\Big(T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p;\,l}\Big)$ цього поля задовольняє співвідношенню

$$\begin{aligned} \delta\Big(T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p;\,l}\Big) = (\delta T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p})_{;l} + T^{\alpha j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}\,\delta\Gamma^{j_1}_{\alpha l} + T^{j_1\alpha\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}\,\delta\Gamma^{j_2}_{\alpha l} + \dots + T^{j_1j_2\dots\alpha}_{i_1i_2\dots i_p}\,\delta\Gamma^{j_q}_{\alpha l} \\ - T^{j_1j_2\dots j_q}_{\alpha i_2\dots i_p}\,\delta\Gamma^{\alpha}_{i_1l} - T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1\alpha\dots i_p}\,\delta\Gamma^{\alpha}_{i_2l} - \dots - T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots\alpha}\,\delta\Gamma^{\alpha}_{i_pl}. \end{aligned} \tag{8}$$

де $\delta\Gamma^h_{ij}$ — варіація рімановой зв'язності.

Доведення

Нехай рімановий простір (V_n, g_{ij}) зазнає інфінітезимальної деформації (1), та всі об'єкти мають ненульові варіації. Знайдемо варіацію тензорного поля $T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p, l}$ типу $(p, q+1)$. Для цього скористаємося означенням 3 та формулою (6).

Зваріюємо (6), та користуємося (4), (5) та твердженням 1. Маємо

$$\begin{aligned} \delta\Big(T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p, l}\Big) = \frac{\partial}{\partial x^l}\Big(\delta T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}\Big) &+ \delta T^{\alpha j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}\Gamma^{j_1}_{\alpha l} + T^{\alpha j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}\delta\Gamma^{j_1}_{\alpha l} \\ &+ \delta T^{j_1 \alpha \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}\Gamma^{j_2}_{\alpha l} + T^{j_1 \alpha \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}\delta\Gamma^{j_2}_{\alpha l} + \dots \\ &- \delta T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{\alpha i_2 \dots i_p}\Gamma^{\alpha}_{i_1 l} - T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{\alpha i_2 \dots i_p}\delta\Gamma^{\alpha}_{i_1 l} \\ &- \delta T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 \alpha \dots i_p}\Gamma^{\alpha}_{i_2 l} - T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 \alpha \dots i_p}\delta\Gamma^{\alpha}_{i_2 l} - \dots \\ &- \delta T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots \alpha}\Gamma^{\alpha}_{i_p l} - T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots \alpha}\delta\Gamma^{\alpha}_{i_p l}. \end{aligned} \tag{9}$$

Збираючи в правій частині (9) доданки, що містять вираз $\delta T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$, та користуємося означенням 3 коваріантної похідної, отримаємо (8).

Твердження доведено.

Твердження 3. Коваріантна похідна варіації метричного тензора ріманового простору (V_n, g_{ij}) при інфінітезимальній деформації (1) визначається за формулою

$$(\delta g_{ij})_{,k} = g_{mj}\,\delta\Gamma^m_{ik} + g_{mi}\,\delta\Gamma^m_{jk}. \tag{10}$$

Доведення

Для метричного тензора g_{ij} має місце рівність

$$g_{ij;k} = 0. \tag{11}$$

Застосувавши до метричного тензора, який є тензором типу $(2,0)$, формулу (9) твердження 2, отримаємо (10).

Твердження доведено.

Твердження 4. Варіація рімановой зв'язності при інфінітезимальній деформації (1) ріманового простору (V_n, g_{ij}) визначається за формулою

$$\delta\Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2}g^{\alpha h}\left(\delta g_{i\alpha, j} + \delta g_{j\alpha, i} - \delta g_{ij, \alpha}\right), \tag{12}$$

і є тензором типу $(2, 1)$.

Доведення

Застосуємо до кожного доданку в дужках правої частини формули (10) твердження 3. Матимемо

$$(\delta g_{i\alpha})_{,j} = g_{m\alpha}\,\delta\Gamma^m_{ij} + g_{mi}\,\delta\Gamma^m_{\alpha j},$$

$$(\delta g_{j\alpha})_{,i} = g_{m\alpha}\,\delta\Gamma^m_{ji} + g_{mj}\,\delta\Gamma^m_{\alpha i},$$

$$(\delta g_{ij})_{,\alpha} = g_{mj}\,\delta\Gamma^m_{i\alpha} + g_{mi}\,\delta\Gamma^m_{j\alpha}.$$

Або

$$(\delta g_{i\alpha})_{,j} + (\delta g_{j\alpha})_{,i} - (\delta g_{ij})_{,\alpha} = 2\,g_{m\alpha}\,\delta\Gamma^m_{ij}. \tag{13}$$

Згортаючи вираз (13) з метричним тензором $g^{\alpha h}$, помноженим на $\frac{1}{2}$, отримаємо (12). Оскільки в правій частині (12) маємо тензор, то варіація Γ^h_{ij} ріманової зв'язності є тензором типу $(2, 1)$.

Твердження доведено.

Тензор кривини Рімана типу $(3, 1)$ визначається через коефіцієнти ріманової зв'язності за формулою

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial\Gamma^h_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^\alpha_{ik}\Gamma^h_{\alpha j} - \frac{\partial\Gamma^h_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^\alpha_{ij}\Gamma^h_{\alpha k}. \tag{14}$$

Твердження 5. Варіацію тензора кривини Рімана типу $(3, 1)$ при інфінітезимальній деформації (1) ріманового простору (V_n, g_{ij}) можна визначати за формулами

$$\delta R^h_{ijk} = \left(\delta\Gamma^h_{ik}\right)_{,j} - \left(\delta\Gamma^h_{ij}\right)_{,k}, \tag{15}$$

$$\delta R^h_{ijk} = \frac{1}{2} g^{\alpha h}\Big(\delta g_{k\alpha,\,ij} + \delta g_{j\alpha,\,ik} - \delta g_{ik,\,\alpha j} - \delta g_{j\alpha,\,ik} - \delta g_{m\alpha} R^m_{ijk} - \delta g_{im} R^m_{\alpha jk}\Big). \tag{16}$$

Доведення

Зваріювавши (14), використовуючи (5) твердження 1 та означення 3 коваріантної похідної, матимемо (15).

Для доведення формули (16) підставимо в (15) вирази варіації ріманової зв'язності за формулою (12), використовуючи, що

$$g^{\alpha h}_{\;\;,l} = 0$$

матимемо:

$$\delta R^h_{ijk}=\frac{1}{2}g^{\alpha h}\Big(\big((\delta g_{i\alpha})_{,kj}+(\delta g_{k\alpha})_{,ij}-(\delta g_{ik})_{,\alpha j}\big)-\big((\delta g_{i\alpha})_{,jk}+(\delta g_{j\alpha})_{,ik}-(\delta g_{ij})_{,\alpha k}\big)\Big). \tag{17}$$

За тотожністю Річчі:

$$(\delta g_{i\alpha})_{,jk}-(\delta g_{i\alpha})_{,kj}=\delta g_{m\alpha}\,R^m_{ijk}+\delta g_{im}\,R^m_{\alpha jk}. \tag{18}$$

Підставимо (18) в (17), отримаємо (16).

Твердження доведено.

Твердження 6. Варіацію метричного тензора типу $(0,2)$, тензора Річчі та скалярної кривини при інфінітезимальній деформації (1) ріманового простору (V_n, g_{ij}) можна визначати за формулами

$$\delta g^{ij}=-\,g^{i\alpha}g^{j\beta}\,\delta g_{\alpha\beta}, \tag{19}$$

$$\delta R_{ij}=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\Big((\delta g_{\rho\alpha})_{,j\beta}+(\delta g_{ij})_{,\alpha\beta}-(\delta g_{i\rho})_{,\alpha j}-(\delta g_{j\alpha})_{,i\beta}-\delta g_{m\alpha}\,R^m_{ij\beta}-\delta g_{im}\,R^m_{\alpha j\beta}\Big), \tag{20}$$

$$\delta R=g^{ij}g^{\alpha\beta}\,(\delta g_{ij})_{,\alpha\beta}-g^{ij}g^{\alpha\beta}\,(\delta g_{j\alpha})_{,i\beta}-g^{ij}g^{\alpha\beta}R^m_{ij\beta}\,\delta g_{m\alpha}-g^{i\alpha}g^{j\beta}R_{ij}\,\delta g_{\alpha\beta}. \tag{21}$$

Доведення

При будь-якій інфінітезимальній деформації ріманового простору (1) має місце рівність

$$\delta\big(g^{i\alpha}g_{\alpha\beta}\big)=0.$$

Або

$$\delta g^{i\alpha}\,g_{\alpha\beta}=-\,g^{i\alpha}\,\delta g_{\alpha\beta}. \tag{22}$$

Згортаючи (22) з $g^{\beta j}$, отримаємо (19).

(20) отримаємо, згортаючи (16) за індексами h та k та користуючись тим, що операції згортки та варіювання комутують.

Для доведення (21) розглянемо

$$\delta R=\delta\big(g^{ij}R_{ij}\big)=\delta g^{ij}R_{ij}+g^{ij}\delta R_{ij}. \tag{23}$$

Підставимо в (23) з (19), (20) вирази для δg^{ij} та δR_{ij}:

$$\delta R=-\,g^{i\alpha}g^{j\beta}\,\delta g_{\alpha\beta}\,R_{ij}+\,g^{ij}\,\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\Big((\delta g_{\beta\alpha})_{,ij}+(\delta g_{ij})_{,\alpha\beta}-(\delta g_{i\beta})_{,\alpha j}-$$
$$-(\delta g_{j\alpha})_{,i\beta}-\delta g_{m\alpha}\,R^{m}_{ij\beta}-\delta g_{im}\,R^{m}_{\alpha j\beta}\Big)=$$
$$=g^{ij}g^{\alpha\beta}\,(\delta g_{ij})_{,\alpha\beta}-g^{ij}g^{\alpha\beta}\,(\delta g_{j\alpha})_{,i\beta}-g^{ij}g^{\alpha\beta}R^{m}_{ij\beta}\,\delta g_{m\alpha}-g^{i\alpha}g^{j\beta}R_{ij}\,\delta g_{\alpha\beta}.$$

Отримаємо (21).

Твердження доведено.

Означення 4. Похідною Лі в напрямі вектора $\xi^{\alpha}(x)$ від тензорного поля $T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}$ типу (p,q), що задані в рімановому просторі (V_n,g_{ij}), називається тензорне поле типу (p,q), що визначається за формулою

$$\begin{aligned} L_\xi\left(T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}\right)=\xi^{\alpha}\,\partial_\alpha T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}&\\ -\,\partial_\alpha\xi^{j_1}\,T^{\alpha j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}-\dots-\partial_\alpha\xi^{j_q}\,T^{j_1j_2\dots\alpha}_{i_1i_2\dots i_p}&\\ +\,\partial_{i_1}\xi^{\alpha}\,T^{j_1j_2\dots j_q}_{\alpha i_2\dots i_p}+\dots+\partial_{i_p}\xi^{\alpha}\,T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots\alpha}&. \end{aligned} \tag{24}$$

або

$$\begin{aligned} L_\xi\left(T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}\right)=\xi^{\alpha}T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p,\,\alpha}&\\ -\,\xi^{j_1}_{,\,\alpha}T^{\alpha j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}-\dots-\xi^{j_q}_{,\,\alpha}T^{j_1j_2\dots\alpha}_{i_1i_2\dots i_p}&\\ +\,\xi^{\alpha}_{,\,i_1}T^{j_1j_2\dots j_q}_{\alpha i_2\dots i_p}+\dots+\xi^{\alpha}_{,\,i_p}T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots\alpha}&. \end{aligned} \tag{25}$$

Твердження 7. Нехай рімановий простір (V_n,g_{ij}) зазнає інфінітезимальної деформації (1) і

$$\begin{aligned} L_{\bar\lambda}\Big(T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}\Big)=\lambda^{\alpha}\partial_\alpha T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}-\partial_\alpha\lambda^{j_1}T^{\alpha j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots i_p}-\dots-\partial_\alpha\lambda^{j_q}T^{j_1j_2\dots\alpha}_{i_1i_2\dots i_p}&\\ +\,\partial_{i_1}\lambda^{\alpha}T^{j_1j_2\dots j_q}_{\alpha i_2\dots i_p}+\dots+\partial_{i_p}\lambda^{\alpha}T^{j_1j_2\dots j_q}_{i_1i_2\dots\alpha}&. \end{aligned} \tag{26}$$

Похідна Лі вздовж векторного поля $\bar\lambda^{\alpha}(x)$, тоді

$$\delta L_{\bar{\lambda}}\left(T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}\right) = L_{\delta\bar{\lambda}}\left(T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}\right) + L_{\bar{\lambda}}\left(\delta T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}\right). \tag{27}$$

Доведення.

Зваріюємо (24), з урахуванням (5) та тим фактом, що операції диференціювання та варіювання мають комутативну властивість, отримаємо

$$\begin{aligned}\delta\Big(L_{\bar{\xi}}\left(T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}\right)\Big) &= (\delta\lambda^\alpha)\partial_\alpha T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} + \lambda^\alpha \partial_\alpha(\delta T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}) \\ &- \partial_\alpha(\delta\lambda^{j_1}) T^{\alpha j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} - \partial_\alpha \lambda^{j_1}(\delta T^{\alpha j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}) \\ &- \dots - \partial_\alpha(\delta\lambda^{j_q}) T^{j_1 j_2 \dots \alpha}_{i_1 i_2 \dots i_p} - \partial_\alpha \lambda^{j_q}(\delta T^{j_1 j_2 \dots \alpha}_{i_1 i_2 \dots i_p}) \\ &+ \partial_{i_1}(\delta\lambda^\alpha) T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{\alpha i_2 \dots i_p} + \partial_{i_1}\lambda^\alpha(\delta T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{\alpha i_2 \dots i_p}) \\ &+ \dots + \partial_{i_p}(\delta\lambda^\alpha) T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots \alpha} + \partial_{i_p}\lambda^\alpha(\delta T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots \alpha}).\end{aligned} \tag{28}$$

Вводячи позначення, згідно (24),

$$\begin{aligned}L_{\delta\bar{\lambda}}\left(T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}\right) &= (\delta\lambda^\alpha)\partial_\alpha T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} - \partial_\alpha(\delta\lambda^{j_1}) T^{\alpha j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} \\ &- \dots - \partial_\alpha(\delta\lambda^{j_q}) T^{j_1 j_2 \dots \alpha}_{i_1 i_2 \dots i_p} + \partial_{i_1}(\delta\lambda^\alpha) T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{\alpha i_2 \dots i_p} \\ &+ \dots + \partial_{i_p}(\delta\lambda^\alpha) T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots \alpha},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{\bar{\lambda}}\left(\delta T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}\right) &= \lambda^\alpha \partial_\alpha(\delta T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}) - \partial_\alpha \lambda^{j_1}(\delta T^{\alpha j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}) \\ &- \dots - \partial_\alpha \lambda^{j_q}(\delta T^{j_1 j_2 \dots \alpha}_{i_1 i_2 \dots i_p}) + \partial_{i_1}\lambda^\alpha(\delta T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{\alpha i_2 \dots i_p}) \\ &+ \dots + \partial_{i_p}\lambda^\alpha(\delta T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots \alpha}).\end{aligned}$$

Отримаємо (27).

Твердження доведено.

Наслідок. Нехай рімановий простір (V_n, g_{ij}) зазнає інфінітезимальної деформації (1) з вектором зміщення $\xi^\alpha(x)$, тоді має місце співвідношення

$$\delta L_{\bar{\xi}}\left(T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}\right) = L_{\bar{\xi}}\left(\delta T^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}\right). \tag{29}$$

Доведення.

Оскільки в напрямі вектора $\xi^\alpha(x)$ варіація $\delta(\xi^\alpha(x)) = 0$, то з (27) отримуємо (29).

Наслідок доведено.

З наслідку випливає, що вздовж вектора зміщення операції варіювання тензорного поля та взяття похідної Лі комутують. Отже результат варіювання тензорного поля при інфінітезимальній деформації (1) можна трактувати, як взяття похідної Лі вздовж вектора зміщення.

Твердження 8. В тривимірному рімановому просторі тензор кривини Рімана завжди можна виразити через симетричний тензор 2 рангу за формулою

$$R_{ijkl} = R_{lk}g_{ij} - R_{lj}g_{ik} + R_{ij}g_{lk} - R_{ik}g_{lj} + \frac{R}{2}\left(g_{lj}g_{ik} - g_{lk}g_{ij}\right). \tag{30}$$

Доведення.

Шукаємо R_{ijkl} у вигляді

$$R_{ijkl} = A_{lk}g_{ij} - A_{lj}g_{ik} + A_{ij}g_{lk} - A_{ik}g_{lj}. \tag{31}$$

де A_{ij} — деякий симетричний тензор, зв'язок з R_{ij} визначається шляхом згортки написаного виразу з g^{lk}. Таким чином знаходимо:

$$R_{ij} = Ag_{ij} - A_{ij} + 3A_{ij} - A_{ij},$$

тобто

$$R_{ij} = Ag_{ij} + A_{ij}. \tag{32}$$

Згортаючи (32) з g^{ij} отримаємо:

$$R = 4A,$$

або

$$A = \frac{R}{4}. \tag{33}$$

Отже

$$A_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{4} g_{ij}. \tag{34}$$

Підставимо (34) в (31), отримаємо (30).

Твердження доведено.

Наслідок. В тривимірному просторі тензор Рімана можна подати у вигляді (31), де A_{ij} — деякий симетричний тензор вигляду (34). Або для тензору Рімана $(3,1)$ у вигляді

$$R^h_{ijk} = A^h_k g_{ij} - A^h_j g_{ik} + A_{ij}\delta^h_k - A_{ik}\delta^h_j.$$

2. Канонічні інфінітезимальні деформації тривимірних ріманових просторів.

Означення 5. Інфінітезимальна деформація виду (1) ріманового простору (V_n, g_{ij}) називається канонічною, якщо варіацію метрики δg_{ij} можна подати у вигляді

$$\delta g_{ij} = \tau_1 g_{ij} + \tau_2 R_{ij}, \tag{35}$$

де τ_1, τ_2 — довільні інваріантні функції, що підлягають визначенню.

Твердження 9. Коваріантна похідна варіації метричного тензора, варіації взаємного метричного тензора, ріманової зв'язності, тензора кривини Рімана типу $(3,1)$, тензора Річчі та скалярної кривини ріманового простору (V_n, g_{ij}) при канонічній інфінітезимальній деформації (35) визначається через варіацію метрики за формулами

$$(\delta g_{ij})_{,k} = (\tau_1)_{,k}\, g_{ij} + (\tau_2)_{,k}\, R_{ij} + \tau_2\, R_{ij,k}. \tag{36}$$

$$\delta g^{ij} = -\tau_1 g^{ij} - \tau_2 g^{i\alpha} g^{j\beta} R_{\alpha\beta}, \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2}\Big(&(\tau_1)_{,j}\delta^h_i + (\tau_1)_{,i}\delta^h_j - (\tau_1)^{,h} g_{ij} \\ &+ (\tau_2)_{,j} R^h_i + (\tau_2)_{,i} R^h_j - (\tau_2)^{,h} R_{ij} \\ &+ \tau_2 (R^h_{i,j} + R^h_{j,i} - g^{\alpha h} R_{ij,\alpha})\Big),\end{aligned} \tag{38}$$

$$\delta R^h_{ijk} = \frac{1}{2}\Big((\tau_1)_{,ij}\,\delta^h_k - (\tau_1)_{,ik}\,\delta^h_j + (\tau_1)^{,h}_{,k}\,g_{ij} - (\tau_1)^{,h}_{,j}\,g_{ik}$$
$$+ (\tau_2)_{,ij}\,R^h_k - (\tau_2)_{,ik}\,R^h_j + (\tau_2)^{,h}_{,k}\,R_{ij} - (\tau_2)^{,h}_{,j}\,R_{ik}$$
$$+ (\tau_2)_{,j}\Big(R^h_{k,i} - g^{\alpha h}R_{ik,\alpha}\Big) - (\tau_2)_{,k}\Big(R^h_{j,i} - g^{\alpha h}R_{ij,\alpha}\Big)$$
$$+ (\tau_2)_{,i}\Big(R^h_{k,j} - R^h_{j,k}\Big)$$
$$+ \tau_2\Big(R^h_{k,ij} - R^h_{j,ik} + R^h_{i,kj} - R^h_{i,jk} + g^{\alpha h}(R_{ij,\alpha k} - R_{ik,\alpha j})\Big)\Big). \tag{39}$$

$$\delta R_{ij} = \frac{1}{2}\Big((\tau_1)_{,ij} + (\tau_1)_{,\alpha}^{\ \alpha} g_{ij} + (\tau_2)_{,ij}R - (\tau_2)_{,i\alpha}R^\alpha_j + (\tau_2)^\alpha R_{ij} - (\tau_2)^\alpha_{,j}R_{i\alpha}$$
$$+ (\tau_2)_{,j}(R_{,i} - R^\alpha_{k,\alpha}) - (\tau_2)_{,\alpha}(R^\alpha_{j,i} - g^{\beta\alpha}R_{ij,\beta})$$
$$+ (\tau_2)_{,\alpha}(R^\alpha_{k,j} - R^\alpha_{j,k})$$
$$+ \tau_2\big(R_{ij} - R^\alpha_{j,i\alpha} + R^\alpha_{i,\alpha j} - R^\alpha_{i,j\alpha} + g^{\alpha\beta}(R_{ij,\alpha\beta} - R_{i\beta,\alpha j})\big)\Big). \tag{40}$$

$$\delta R = 2(\tau_1)_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta} - 2(\tau_1)R - 2(\tau_2)R^m_\beta R^\beta_m + (\tau_2)^\beta R_{,\beta} + (\tau_2)R_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$$
$$- (\tau_2)_{,i\beta}R^\beta_j g^{ij} - (\tau_2)_{,j}R^\beta_{j,\beta} - (\tau_2)_{,\beta}R^\beta_{j,i}g^{ij} + (\tau_2)_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta}R. \tag{41}$$

Де

$$(\tau_1)^h = (\tau_1)_{,\alpha}g^{\alpha h}, \qquad (\tau_2)^h = (\tau_2)_{,\alpha}g^{\alpha h}.$$

Доведення.

(36) отримуємо коваріантним диференціюванням (35),

(37) отримуємо підстановкою (35) в (19),

Для доведення (39) в (15) підставимо (38).

$$\delta R^h_{ijk} = (\delta\Gamma^h_{ik})_{,j} - (\delta\Gamma^h_{ij})_{,k} =$$
$$= \Bigg(\frac{1}{2}\Big((\tau_1)_{,k}\delta^h_i + (\tau_1)_{,i}\delta^h_k - (\tau_1)^h g_{ik} + (\tau_2)_{,k}R^h_i + (\tau_2)_{,i}R^h_k - (\tau_2)^h R_{ik} +$$
$$+\tau_2\big(R^h_{i,k} + R^h_{k,i} - g^{\alpha h}R_{ik,\alpha}\big)\Big)\Bigg)_{,j} - \frac{1}{2}\Bigg(\Big((\tau_1)_{,j}\delta^h_i + (\tau_1)_{,i}\delta^h_j - (\tau_1)^h g_{ij} +$$
$$+(\tau_2)_{,j}R^h_i + (\tau_2)_{,i}R^h_j - (\tau_2)^h R_{ij} + \tau_2\big(R^h_{i,j} + R^h_{j,i} - g^{\alpha h}R_{ij,\alpha}\big)\Big)\Bigg)_{,k} =$$
$$= \frac{1}{2}\Big((\tau_1)_{,kj}\delta^h_i + (\tau_1)_{,ij}\delta^h_k - (\tau_1)^h_{\ ,j}g_{ik} + (\tau_2)_{,kj}R^h_i + (\tau_2)_{,k}R^h_{i,j} + (\tau_2)_{,ij}R^h_k + (\tau_2)_{,i}R^h_{k,j} -$$
$$- (\tau_2)^h_{\ ,j}R_{ik} - (\tau_2)^h R_{ik,j} + (\tau_2)_{,j}\big(R^h_{i,k} + R^h_{k,i} - g^{\alpha h}R_{ik,\alpha}\big) + \tau_2\big(R^h_{i,k} + R^h_{k,i} - g^{\alpha h}R_{ik,\alpha}\big)_{,j}\Big) -$$
$$- \frac{1}{2}\Big((\tau_1)_{,jk}\delta^h_i + (\tau_1)_{,ik}\delta^h_j - (\tau_1)^h_{\ ,k}g_{ij} + (\tau_2)_{,jk}R^h_i + (\tau_2)_{,j}R^h_{i,k} + (\tau_2)_{,ik}R^h_j + (\tau_2)_{,i}R^h_{j,k} -$$
$$- (\tau_2)^h_{\ ,k}R_{ij} - (\tau_2)^h R_{ij,k} + (\tau_2)_{,k}\big(R^h_{i,j} + R^h_{j,i} - g^{\alpha h}R_{ij,\alpha}\big) + \tau_2\big(R^h_{i,j} + R^h_{j,i} - g^{\alpha h}R_{ij,\alpha}\big)_{,k}\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big((\tau_1)_{,ij}\delta^h_k - (\tau_1)^h_{\ ,j}g_{ik} + (\tau_2)_{,kj}R^h_i + (\tau_2)_{,k}R^h_{i,j} + (\tau_2)_{,ij}R^h_k + (\tau_2)_{,i}R^h_{k,j} - (\tau_2)^h_{\ ,j}R_{ik} - (\tau_2)^h R_{ik,j} +$$
$$+ (\tau_2)_{,j}\big(R^h_{i,k} + R^h_{k,i} - g^{\alpha h}R_{ik,\alpha}\big) + \tau_2\big(R^h_{i,k} + R^h_{k,i} - g^{\alpha h}R_{ik,\alpha j}\big) - (\tau_1)_{,ik}\delta^h_j + (\tau_1)^h_{\ ,k}g_{ij} -$$
$$- (\tau_2)_{,jk}R^h_i - (\tau_2)_{,j}R^h_{i,k} - (\tau_2)_{,ik}R^h_j - (\tau_2)_{,i}R^h_{j,k} + (\tau_2)^h_{\ ,k}R_{ij} + (\tau_2)^h R_{ij,k} -$$
$$- (\tau_2)_{,k}\big(R^h_{i,j} + R^h_{j,i} - g^{\alpha h}R_{ij,\alpha}\big) - \tau_2\big(R^h_{i,jk} + R^h_{j,ik} - g^{\alpha h}R_{ij,\alpha k}\big)\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big((\tau_1)_{,ij}\delta^h_k - (\tau_1)_{,ik}\delta^h_j + (\tau_1)^h_{\ ,k}g_{ij} - (\tau_1)^h_{\ ,j}g_{ik} + (\tau_2)_{,ij}R^h_k - (\tau_2)_{,ik}R^h_j + (\tau_2)^h_{\ ,k}R_{ij} - (\tau_2)^h_{\ ,j}R_{ik} +$$
$$+ (\tau_2)_{,j}\big(R^h_{k,i} - g^{\alpha h}R_{ik,\alpha}\big) - (\tau_2)_{,k}\big(R^h_{j,i} - g^{\alpha h}R_{ij,\alpha}\big) + (\tau_2)_{,i}\big(R^h_{k,j} - R^h_{j,k}\big) +$$
$$+ \tau_2\Big(R^h_{k,ij} - R^h_{j,ik} + R^h_{i,kj} - R^h_{i,jk} + g^{\alpha h}\big(R_{ij,\alpha k} - R_{ik,\alpha j}\big)\Big)\Big).$$

(39) доведено.

Для доведення (40) згорнемо (39) за індексами h та k.

Для доведення (41), підставимо (21), в вирази (35), (37).

$$\delta R = g^{ij}g^{\alpha\beta}(\delta g_{ij})_{,\alpha\beta} - g^{ij}g^{\alpha\beta}(\delta g_{j\alpha})_{,i\beta} - g^{ij}g^{\alpha\beta}R^m_{ij\beta}\,\delta g_{m\alpha} - g^{i\alpha}g^{j\beta}R_{ij}\,\delta g_{\alpha\beta}$$
$$(\delta g_{ij})_{,\alpha\beta} = (\tau_1)_{,\alpha\beta}\,g_{ij} + (\tau_2)_{,\alpha\beta}\,R_{ij} + (\tau_2)_{,\alpha}\,R_{ij,\beta} + (\tau_2)_{,\beta}\,R_{ij,\alpha} + \tau_2\,R_{ij,\alpha\beta}$$
$$(\delta g_{j\alpha})_{,i\beta} = (\tau_1)_{,i\beta}\,g_{j\alpha} + (\tau_2)_{,i\beta}\,R_{j\alpha} + (\tau_2)_{,i}\,R_{j\alpha,\beta} + (\tau_2)_{,\beta}\,R_{j\alpha,i} + \tau_2\,R_{j\alpha,i\beta}$$

$$\delta g_{m\alpha} = (\tau_1)g_{m\alpha} + (\tau_2)R_{m\alpha}$$

матимемо

$$
\begin{aligned}
\delta R = &\big(3(\tau_1)_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + (\tau_2)_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta}R + 2(\tau_2)^{\beta}R_{,\beta} + (\tau_2)R_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta}\big)\\
&- \big((\tau_1)_{,ij}g^{ij} + (\tau_2)_{,i\beta}R^{\beta}_{j}g^{ij} + (\tau_2)^{j}R^{\beta}_{j,\beta} + (\tau_2)_{,\beta}R^{\beta}_{j,i}g^{ij} + (\tau_2)R^{\beta}_{j,i\beta}g^{ij}\big)\\
&- 2(\tau_1)R - 2(\tau_2)R^{m}_{\beta}R^{\beta}_{m}\\
= &\,2(\tau_1)_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + (\tau_2)_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta}R + 2(\tau_2)^{\beta}R_{,\beta} + (\tau_2)R_{,\alpha\beta}g^{\alpha\beta}\\
&- (\tau_2)_{,i\beta}R^{\beta}_{j}g^{ij} - (\tau_2)^{j}R^{\beta}_{j,\beta} - (\tau_2)_{,\beta}R^{\beta}_{j,i}g^{ij} - (\tau_2)R^{\beta}_{j,i\beta}g^{ij}\\
&- 2(\tau_1)R - 2(\tau_2)R^{m}_{\beta}R^{\beta}_{m}.
\end{aligned}
$$

Твердження доведено.

Означення 6. Ріманів простір $(\widetilde{V}_n, \widetilde{g}_{ij})$ називається інфінітезимальною геодезичною деформацією ріманового простору (V_n, g_{ij}), якщо в результаті деформації зберігаються, в головному, геодезичні лінії простору (V_n, g_{ij}).

Твердження 10. Будь-яка інфінітезимальна геодезична деформація тривимірного ріманового простору (V_n, g_{ij}) є канонічною інфінітезимальною деформацією (35), при цьому функції τ_1, τ_2 пов'язані формулою

$$\lambda = \frac{1}{8}\left(3\tau_1 + R\tau_2\right). \tag{42}$$

де λ — функція трьох змінних.

Доведення.

При геодезичній деформації ріманового простору

$$\delta\Gamma^{m}_{ik} = \lambda_i\delta^{m}_{k} + \lambda_k\delta^{m}_{i},$$

λ_i — градієнтний вектор.

Підставимо в (10) матимемо

$$
\begin{aligned}
(\delta g_{ij})_{,k} &= g_{kj}\lambda_i + g_{ki}\lambda_j + 2g_{ij}\lambda_k,\\
(\delta g_{ij})_{,kl} &= g_{kj}\lambda_{i,l} + g_{ki}\lambda_{j,l} + 2g_{ij}\lambda_{k,l},\\
(\delta g_{ij})_{,lk} &= g_{lj}\lambda_{i,k} + g_{li}\lambda_{j,k} + 2g_{ij}\lambda_{l,k},\\
(\delta g_{ij})_{,kl} - (\delta g_{ij})_{,lk} &= \lambda_{(i,j)k} - \lambda_{k,(i,j)l}.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

За тотожністю Річчі

$$\begin{aligned}\delta g_{ij,kl}-\delta g_{ij,lk}&=\delta g_{\sigma j}R^{\alpha}_{ikl}+\delta g_{i\alpha}R^{\alpha}_{jkl}\\&=\delta g_{\sigma j}\left(A^{\alpha}_{l}g_{ik}-A^{\alpha}_{k}g_{il}+A_{ik}\delta^{\alpha}_{l}-A_{il}\delta^{\alpha}_{k}\right)\\&\quad+\delta g_{i\alpha}\left(A^{\alpha}_{l}g_{jk}-A^{\alpha}_{k}g_{jl}+A_{jk}\delta^{\alpha}_{l}-A_{jl}\delta^{\alpha}_{k}\right)\\&=\lambda_{l,i}g_{jk}+\lambda_{l,j}g_{ik}-\lambda_{k,i}g_{jl}-\lambda_{k,j}g_{il}\end{aligned}$$

Або у вигляді

$$\begin{gathered}g_{jk}\big(\delta g_{i\alpha}A^{\alpha}_{l}-\lambda_{l,i}\big)+g_{ik}\big(\delta g_{\alpha j}A^{\alpha}_{l}-\lambda_{l,j}\big)-g_{jl}\big(\delta g_{i\alpha}A^{\alpha}_{k}-\lambda_{k,i}\big)\\-g_{il}\big(\delta g_{\alpha j}A^{\alpha}_{k}-\lambda_{k,j}\big)+\delta g_{il}A_{jk}+\delta g_{lj}A_{ik}-\delta g_{kj}A_{il}-\delta g_{ik}A_{jl}=0.\end{gathered}\tag{44}$$

$$R^{h}_{ijk}=A^{h}_{k}g_{ij}-A^{h}_{j}g_{ik}+A_{ij}\delta^{h}_{k}-A_{ik}\delta^{h}_{j}$$

$$R^{\alpha}_{ikl}=A^{\alpha}_{l}g_{ik}-A^{\alpha}_{k}g_{il}+A_{ik}\delta^{\alpha}_{l}-A_{il}\delta^{\alpha}_{k}$$

$$R^{\alpha}_{jkl}=A^{\alpha}_{l}g_{jk}-A^{\alpha}_{k}g_{jl}+A_{jk}\delta^{\alpha}_{l}-A_{jl}\delta^{\alpha}_{k}$$

Введемо в розгляд симетричний тензор

$$G_{il}=\delta g_{i\alpha}A^{\alpha}_{l}-\lambda_{l,i}\tag{45}$$

Маємо

$$g_{jk}G_{il}+g_{ik}G_{jl}-g_{jl}G_{ik}-g_{il}G_{jk}+\delta g_{il}A_{jk}+\delta g_{lj}A_{ik}-\delta g_{kj}A_{il}-\delta g_{ik}A_{jl}=0\tag{46}$$

(46) проальтернуємо за індексами $j\leftrightarrow k$ отримаємо

$$g_{ik}G_{jl}-g_{ij}G_{kl}-g_{jl}G_{ik}+g_{kl}G_{ij}+\delta g_{lj}A_{ik}-\delta g_{lk}A_{ij}-\delta g_{ik}A_{jl}+\delta g_{ij}A_{kl}=0\tag{47}$$

В (47) робимо заміну індексів $i\leftrightarrow k$ матимемо

$$g_{ik}G_{jl}-g_{kj}G_{il}-g_{jl}G_{ik}+g_{il}G_{kj}+\delta g_{lj}A_{ik}-\delta g_{li}A_{kj}-\delta g_{ik}A_{jl}+\delta g_{kj}A_{il}=0\tag{48}$$

До рівності (46) додаємо (48), матимемо

$$2g_{ik}G_{jl}-2g_{jl}G_{ik}+2\delta g_{lj}A_{ik}-2\delta g_{ik}A_{jl}=0\tag{49}$$

Розділивши (49) на 2 матимемо

$$g_{ik}G_{jl} - g_{jl}G_{ik} + \delta g_{lj}A_{ik} - \delta g_{ik}A_{jl} = 0 \tag{50}$$

(50) згорнемо з g^{ik}

Отримаємо

$$3G_{jl} - g_{jl}G + \delta g_{lj}A - \delta gA_{jl} = 0$$

$$G_{jl} = \frac{1}{3}\left(Gg_{jl} - A\delta g_{jl} + \mu A_{jl}\right) \tag{51}$$

$$\mu = g^{ik}\delta g_{ik}$$

(51) підставимо в (50) матимемо

$$g_{ik}\frac{1}{3}\left(Gg_{jl} - A\delta g_{jl} + \mu A_{jl}\right) - g_{jl}\frac{1}{3}\left(Gg_{ik} - A\delta g_{ik} + \mu A_{ik}\right) + \delta g_{lj}A_{ik} - \delta g_{ik}A_{jl} = 0 \tag{52}$$

(52) перепишемо у вигляді

$$g_{ik}\frac{1}{3}\left(Gg_{jl} - A\delta g_{jl} + \mu A_{jl}\right) - g_{jl}\frac{1}{3}\left(Gg_{ik} - A\delta g_{ik} + \mu A_{ik}\right) + \delta g_{lj}A_{ik} - \delta g_{ik}A_{jl} = 0 \tag{53}$$

$$\left(\frac{\mu}{3}g_{ik} - \delta g_{ik}\right)A_{jl} - \left(\frac{\mu}{3}g_{jl} - \delta g_{jl}\right)A_{ik} + \frac{A}{3}\left(g_{jl}\delta g_{ik} - g_{ik}\delta g_{lj}\right) = 0$$

Рівність (53) згорнемо з ненульовим вектором $\xi^i\xi^j$, та введемо позначення

$$\begin{aligned} \nu_1 &= A_{ij}\xi^i\xi^j, \\ \nu_2 &= g_{ij}\xi^i\xi^j, \\ \nu_3 &= \delta g_{ij}\xi^i\xi^j, \end{aligned} \tag{54}$$

Матимемо

$$\left(\frac{\mu}{3}g_{ik} - \delta g_{ik}\right)\nu_1 - \left(\frac{\mu}{3}\nu_2 - \nu_3\right)A_{ik} + \frac{A}{3}\left(\nu_2\delta g_{ik} - g_{ik}\nu_3\right) = 0 \tag{55}$$

(55) перепишемо у вигляді

$$\left(\frac{A}{3}\nu_2 - \nu_1\right)\delta g_{ik} = \left(\frac{A}{3}\nu_3 - \frac{\mu}{3}\nu_1\right) g_{ik} + \left(\frac{\mu}{3}\nu_2 - \nu_3\right) A_{ik} \tag{56}$$

Введемо позначення

$$\tau_1 = \frac{\frac{A}{3}\nu_3 - \frac{\mu}{3}\nu_1}{\frac{A}{3}\nu_2 - \nu_1}, \qquad \tau_2 = \frac{\frac{\mu}{3}\nu_2 - \nu_3}{\frac{A}{3}\nu_2 - \nu_1},$$

отримаємо
(35), що доводить канонічність геодезичних деформацій.
Перейдемо до зв'язку між інваріантами τ_1, τ_2. Прирівняємо праві частини (36) та (43) матимемо:

$$(\tau_1)_{,k} g_{ij} + (\tau_2)_{,k} R_{ij} + \tau_2 R_{ij,k} = g_{kj}\lambda_i + g_{ki}\lambda_j + 2g_{ij}\lambda_k \tag{57}$$

Згортаємо (57) з g^{ij} матимемо;

$$3(\tau_1)_{,k} + (\tau_2 R)_{,k} = 8\lambda_k \tag{58}$$

З (58) випливає (42) з точністю до довільної сталої.

Твердження 10. доведено.

Висновки

Отже клас введених канонічних деформацій не пустий. У випадку тривимірних псевдо ріманових просторів до цього класу належить вивчені раніше [1] геодезичні деформації.

Список літератури

1. **Гаврильченко М., Киосак В., Микеш Й.** Геодезические деформации гиперповерхностей римановых пространств // Известия вузов. Математика. — 2004. — № 5. — С. 23–29.
English version: Geodesic deformations of hypersurfaces of Riemannian spaces // Applied Mathematics and Computation. — 2012. — Vol. 218, No. 13. — P. 6999–7004.

2. **Doikov D., Kiosak V.** On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe // AIP Conference Proceedings. — 2020. — Vol. 2302. — 040001. doi: 10.1063/5.003

3. **Eisenhart L. P.** Riemannian Geometry. — Princeton: Princeton University Press, 1997.

4. **Hinterleitner I., Kiosak V.** Special Einstein's equations on Kahler manifolds // Archivum Mathematicum. — 2010. — Vol. 46, No. 5. — P. 333–337.

5. **Каган В. Ф.** Субпроективные пространства. — М.: Физматгиз, 1961.

6. **Kiosak V., Kovalova G.** Geodesic mappings of quasi-Einstein spaces with a constant scalar curvature // Matematychni Studii. — 2020. — Vol. 53, No. 2. — P. 212–217. doi: 10.30970/ms.53.2.212-217

7. **Kiosak V., Matveev V.** Complete Einstein metrics are geodesically rigid // Communications in Mathematical Physics. — 2009. — Vol. 289, No. 1. — P. 383–400. doi: 10.1007/s00220-008-0719-7

8. **Kiosak V., Matveev V.** Proof of the projective Lichnerowicz conjecture for pseudo-Riemannian metrics with degree of mobility greater than two // Communications in Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 297, No. 2. — P. 401–426. doi: 10.1007/s00220-010-1037-4

9. **Kiosak V., Matveev V.** There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor // Journal of Geometry and Physics. — 2014. — Vol. 78. — P. 1–11. doi: 10.1016/j.geomphys.2014.01.002

10. **Kiosak V., Matveev V., Mikes J., Shandra I.** On the degree of geodesic mobility for Riemannian metrics // Mathematical Notes. — 2010. — Vol. 87, No. 3–4. — P. 586–587. doi: 10.1134/S000143461003037

11. **Kiosak V., Prishlyak O., Lesechko O.** On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor // Proceedings of the International Geometry Center. — 2021. — Vol. 14, No. 4. — P. 243–256. doi: 10.15673/tmgc.v14i4.2140

12. **Kiosak V., Savchenko A., Kamienieva A.** Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces with constant scalar curvature // AIP Conference Proceedings. — 2020. — Vol. 2302. — 040002. doi: 10.1063/5.0033661

13. **Kiosak V., Savchenko A., Khniunin S.** On the typology of quasi-Einstein spaces // AIP Conference Proceedings. — 2020. — Vol. 2302. — 040003. doi: 10.1063/5.0033700

14. **Kiosak V., Savchenko A., Kovalova G.** Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I // Proceedings of the International Geometry Center. — 2020. — Vol. 13, No. 1. — P. 35–48. doi: 10.15673/tmgc.v13i1.1711

15. **Kiosak V., Savchenko A., Latysh O.** Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II // Proceedings of the International Geometry Center. — 2021. — Vol. 14, No. 1. — P. 81–92.
doi: 10.15673/tmgc.v14i1.1936

16. **Кручкович Г. И.** Римановы и псевдоримановы пространства // Итоги науки и техники. Сер. Математика. Алгебра. Топология. Геометрия. — 1968. — С. 191–220.

17. **Levi-Civita T.** Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche // Annali di Matematica Pura ed Applicata. — 1896. — Ser. 2, Vol. 24. — P. 255–300.
doi: 10.1007/bf02419530

18. **Mikes J.** Geodesic mappings of Einstein spaces // Mathematical Notes. — 1981. — Vol. 28. — P. 922–923.

19. **Mikes J., Hinterleitner I., Kiosak V.** On the theory of geodesic mappings of Einstein spaces and their generalizations // AIP Conference Proceedings. — 2006. — Vol. 861. — P. 428–435.
doi: 10.1063/1.2399606

20. **Mikes J., Kiosak V., Vanzurova O.** Geodesic mappings of manifolds with affine connection. — Olomouc: Palacky University Press, 2008.

21. **Потапенко И. В.** О восстановлении вариации метрического тензора поверхности по заданной вариации символов Кристоффеля второго рода при инфинитезимальных деформациях поверхности в евклидовом пространстве E^3 // Украинский математический журнал. — 2011. — Т. 63, № 4. — С. 523–530.

22. **Синюков Н. С.** Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.

23. **Собчук В. С.** Римановы пространства, допускающие обобщённо-рекуррентный симметрический тензор второго порядка // Доклады АН СССР. — 1969. — Т. 185, № 6. — С. 1247–1250.

24. **Собчук В. С.** Римановы пространства с обобщённо-симметрическим тензором Риччи допускают нетривиальные геодезические отображения // Доклады АН СССР. — 1982. — Т. 267, № 4. — С. 793–795.

25. **Собчук В. С.** Геодезические отображения некоторых классов римановых пространств // Известия вузов. Математика. — 1990. — Т. 34, № 4. — С. 56–59.

26. **Собчук В. С.** Геодезические отображения римановых пространств с четырёхсимметрическим тензором Риччи // Известия вузов. Математика. — 1991. — Т. 35, № 4. — С. 68–69.

Potapenko I. V.

ON CANONICAL DEFORMATIONS OF THREE-DIMENSIONAL RIEMANNIAN METRICS

Summary

In this paper, the notion of canonical deformations of three-dimensional Riemannian metrics is introduced. Using the apparatus of tensor analysis and the theory of partial differential equations, it is shown, by the example of geodesic deformations, that this is a broader class of infinitesimal deformations; it is non-empty and of interest for further study.
Keywords: Riemannian space, metric variation, canonical deformations, curvature tensor, geodesic deformations.

REFERENCES

1. M.Gavrilchenko, V. Kiosak, J. Mikes Geodesic deformations of hypersurfaces of Riemannian spaces// (Iz. VUZ),. Math.Kazan.2004 г. т.500. c. 23-29. //Applied Mathemat ics and Computation – 2012.– №218(13).– C. 6999–7004
2. D. Doikov and V. Kiosak. On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe.AIP Conference Proceedings, 2302(040001), 2020. doi:10.1063/5.0033657
3. L. P. Eisenhart. Riemannian geometry. Princeton University Press, 1997.
4. I. Hinterleitner and V. Kiosak. Special Einstein's equations on Kahler manifolds. Archivum Mathematicum, 46(5):333–337, 2010.
5. V. F. Kagan Subprojective spaces. Moscow:Fizmatgiz, 1961.
6. V. Kiosak and G. Kovalova. Geodesic mappings of quasi-Einstein spaces with a constant scalar curvature.Matematychni Studii, 53(2):212–217, 2020. doi:10.30970/ms.53.2.212-217
7. V. Kiosak and V. Matveev. Complete Einstein metrics are geodesically rigid. Communications in Mathematical Physics, 289(1):383–400, 2009. doi:10.1007/s00220-008-0719-7
8. V. Kiosak and V. Matveev. Proof of projective Lichnerowicz conjecture for pseudo-Riemannian metrics with degree of mobility greater than two. Communications in Mathematical Physics, 297(2):401–426, 2010. doi:10.1007/s00220-010-1037-4
9. V. Kiosak and V. Matveev. There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor. Journal of Geometry and Physics, 78:1–11,2014. doi:10.1016/j.geomphys.2014.01.002
10. V. Kiosak, V. Matveev, J. Mikes, and I. Shandra. On the degree of geodesic mobility for Riemannian metrics.Mathematical Notes, 87(3-4):586–587, 2010. doi:10.1134/S0001434610030375

11. V. Kiosak, O. Prishlyak, and O. Lesechko. On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. Proceedings of the International Geometry Center, 14(4):243–256, 2021. doi:10.15673/tmgc.v14i4.2140
12. V. Kiosak, A. Savchenko, and A. Kamienieva. Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces with constant scalar curvature. AIP Conference Proceedings,2302(040002), 2020. doi:10.1063/5.0033661
13. V. Kiosak, A. Savchenko, and S. Khniunin. On the typology of quasi-Einstein spaces. AIP Conference Proceedings, 2302(040003), 2020. doi:10.1063/5.0033700
14. V. Kiosak, A. Savchenko, and G. Kovalova. Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, l. Proceedings of the International Geometry Center, 13(1):35–48,2020. doi:10.15673/tmgc.v13i1.1711
15. V. Kiosak, A. Savchenko, and O. Latysh. Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II.Proceedings of the International Geometry Center, 14(1):81–92, 2021. doi:10.15673/tmgc.v14i1.1936
16. G. I. Kruchkovich. Riemannian and pseudo-Riemannian spaces. Itogi Nauki. Ser. Mat. Algebra. Topol. Geom., pages 191–220, 1968.
17. T. Levi-Civita. Sulle transformationi delle equazioni dinamiche. Ann. Mat. Milano, Ser. 2., 24:255–300, 1896. doi:10.1007/bf02419530
18. J. Mikes. Geodesic mappings of Einstein spaces. Math. Notes, 28:922–923, 1981.
19. J. Mikes, I. Hinterleitner, and V. Kiosak. On the theory of geodesic mappings of Einstein spaces and their generalizations. AIP Conference Proceedings, 861:428–435, 2006. doi:10.1063/1.2399606
20. J. Mikes, V. Kiosak, and O. Vanzurova. Geodesic mappings of manifolds with affine connection. Palacky University Press, Olomouc, 2008.
21. I.V. Potapenko On the reconstruction of the variation of the metric tensor surface by the given variation of Christoffel symbols of the second kind under infinitesimal deformations of the surface in the Euclidean space E3 //Ukrainian Mathematical Journal. - 2011. - Vol. 63, No. 4. - C.523-530.
22. N. S. Sinyukov. Geodesic mappings of Riemannian spaces. Nauka, 1979.
23. V. S. Sobchuk. Riemannian spaces which admit a generalized-recurrent symmetric tensor of the second order. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 185(6):1247–1250, 1969.
24. V. S. Sobchuk. Ricci generalized symmetric Riemannian spaces admit nontrivial geodesic mappings. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 267(4):793–795, 1982.
25. V. S. Sobchuk. Geodesic mappings of some classes of Riemannian spaces. Soviet Math.(Iz. VUZ), 34(4):56–59, 1990.
26. V. S. Sobchuk. Geodesic mapping of Ricci 4-symmetric Riemannian spaces. Soviet Math. (Iz. VUZ), 35(4):68–69, 1991.