Дослідження в математиці і механіці. – 2025. – Т. 30, вип. 2(46). – С. 80–91

УДК 517.925

О. О. Чепок *кандидат фіз-мат наук,*
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»
Кафедра вищої математики і статистики
вул Старопортофранківська 26, м. Одеса, Україна, 65020
e-mail: olachtpok@ukr.net
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-8514-2769

УМОВИ ІСНУВАННЯ ТА АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ЯКІ МІСТЯТЬ ДОБУТОК РІЗНОГО ТИПУ НЕЛІНІЙНОСТЕЙ

У роботі розглядається нелінійне диференціальне рівняння другого порядку, права частина якого містить добуток правильно змінної функції від невідомої функції та швидко змінної нелінійної функції від першої похідної невідомої функції. Дослідження фокусується на поведінці нелінійних функцій при прямуванні невідомої функції та її похідної до нуля або нескінченності. Для даного класу рівнянь вперше отримано необхідні й достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язків, а також знайдено асимптотичні зображення таких розв'язків та їхніх похідних першого порядку. Такі $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язки досліджуваного рівняння є швидко змінними при прямуванні аргументу до нуля або нескінченності, що ускладнює їх дослідження порівняно з іншими типами розв'язків досліджуваного рівняння. Також визначено кількість таких $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язків в залежності від умов на коефіцієнти рівняння. Результати для $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язків для рівнянь досліджуваного типу є новими.

MSC: 34A34, 34C41, 34E99.
Ключові слова: нелінійні диференціальні рівняння другого порядку, асимптотичні зображення швидко змінних розв'язків, $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язки, швидко змінні функції, правильно змінні функції.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.2(46).354147

Вступ

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y')\varphi_1(y), \tag{1}$$

Надійшла 01.12.2025

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$ визначає знак правої частини, функція $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$ у неперервною у своїй області визначення, функції $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(i \in \{0, 1\})$ є неперервними на проміжках Δ_{Y_i}, де Δ_{Y_i} — або проміжок $[y_i^0, Y_i$, або — $]Y_i, y_i^0]$, тобто, деякий однобічний окіл точки $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$. При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ вважаємо, що $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ відповідно, $i \in \{0, 1\}$.

Крім того, будемо вважати, що функція $\varphi_1 \colon \Delta_{Y_1} \to]0, +\infty[$ є правильно змінною (див. [1], с. 17) порядку σ_1 при $y \to Y_1$, а функція $\varphi_0 \colon \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ двічі неперервно диференційовна на Δ_{Y_0} та задовольняє умови:

$$\lim_{\substack{s \to Y_0 \\ s \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_0(s) \in \{0, +\infty\}, \quad \varphi_0'(s) \neq 0 \text{ при } s \in \Delta_{Y_0}, \qquad \lim_{\substack{s \to Y_0 \\ s \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(s)\varphi_0''(s)}{\left(\varphi_0'(s)\right)^2} = 1. \tag{2}$$

З умов (2) випливає, що функція φ_0 та її похідна першого порядку є швидко змінними при прямуванні аргументу до Y_0 (див. [6], C. 91-92).

Розглянемо наступний клас ров'язків для рівнянь типу (1).

Означення 1 ([5])**.** Розв'язок y рівняння (1), визначений на $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, називається $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язком $(-\infty \le \lambda_0 \le +\infty)$, якщо виконуються наступні умови

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t) y(t)} = \lambda_0. \tag{3}$$

Теоретичне підґрунтя дослідження такого класу розв'язків рівняння (1) базується на загальній класифікації розв'язків диференціальних рівнянь n-го порядку типу Емдена-Фаулера (див., наприклад, [5]). У межах цієї класифікації, адаптованої для рівнянь другого порядку, встановлено фундаментальний розподіл $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків $(-\infty \le \lambda_0 \le +\infty)$ рівнянь другого порядку на чотири непересічні класи залежно від значень параметру λ_0: $\lambda_0 \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_0 = \pm\infty$.

Для кожного із зазначених випадків було визначено (див., наприклад, [5]) специфічні апріорні асимптотичні властивості, що дозволяють ідентифікувати динаміку розв'язків при наближенні аргументу до граничної точки ω.

Дана робота присвячена дослідженню умов існування у рівняння (1) особливого класу $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язків. Специфіка досліджуваного випадку $(\lambda_0 = 1)$ полягає в тому, що такі розв'язки та їх похідні першого порядку є швидко змінними функціями при $t \uparrow \omega$. Ця властивість зумовлює принципову відмінність у методології дослідження порівняно з неособливими випадками $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ та випадком нескінченного параметра $\lambda_0 = \pm\infty$, результати щодо яких викладені у роботах [3] та [2]. На відміну від згаданих випадків, випадок $\lambda_0 = 1$ потребує залучення апарату теорії швидко змінних функцій та спеціальних методів асимптотичного інтегрування.

Метою даної роботи є встановлення необхідних і достатніх умов існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язків, а також знаходження асимптотичних зображень при $t \uparrow \omega$ для цих розв'язків та їх похідних першого порядку.

Основні результати

Наведемо наступні означення.

Означення 2. Нехай $Y \in \{0, \infty\}$, Δ_Y — деякий однобічний окіл Y. Неперервно диференційовна функція $L : \Delta_Y \to]0; +\infty[$ називається нормалізованою повільно змінною функцією при $y \to Y \quad (y \in \Delta_Y)$ ([6], с.2-3), якщо

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{yL'(y)}{L(y)} = 0.$$

Означення 3. Говорять, що повільно змінна при $y \to Y \quad (y \in \Delta_Y)$ функція $\theta : \Delta_Y \to]0; +\infty[$ задовільняє умову S при прямуванні аргументу до Y(див., наприклад, у [5]), якщо для будь-якої нормалізованої повільно змінної при $y \to Y \quad (y \in \Delta_Y)$ функції $L : \Delta_Y \to]0; +\infty[$ має місце співвідношення

$$\theta(yL(y)) = \theta(y)(1 + o(1)) \quad \text{при } y \to Y \quad (y \in \Delta_Y).$$

Введемо наступні позначення

$$\Phi(y') = \int_B^{y'} \frac{1}{\varphi_0^{\frac{1}{\sigma_1+1}}(s)\theta_1^{\frac{1}{\sigma_1+1}}(y(t(s)))|s|^{\frac{2\sigma_1}{\sigma_1+1}}} ds,$$

$$B = \begin{cases} y_0^0, & \text{якщо } \int_{y_0^0}^{Y_0} \frac{1}{\varphi_0^{\frac{1}{\sigma_1+1}}(s)\theta_1^{\frac{1}{\sigma_1+1}}(y(t(s)))|s|^{\frac{2\sigma_1}{\sigma_1+1}}} ds = \pm\infty, \\ \\ Y_0, & \text{якщо } \int_{y_0^0}^{Y_0} \frac{1}{\varphi_0^{\frac{1}{\sigma_1+1}}(s)\theta_1^{\frac{1}{\sigma_1+1}}(y(t(s)))|s|^{\frac{2\sigma_1}{\sigma_1+1}}} ds = \ const, \end{cases}$$

$$\theta_1(z) = \varphi_1(z)|z|^{-\sigma_1}, \quad Z_0 = \lim_{\substack{y' \to Y_0 \\ y' \in \Delta_{Y_0}}} \Phi(y'),$$

$$F(t) = \frac{(\Phi^{-1}(I(t)))^2 \cdot \Phi'(\Phi^{-1}(I(t)))}{I_1(t) \cdot I'(t)},$$

а якщо $\lim\limits_{t \uparrow \omega} I(t) = Z_0$, то

$$I(t) = \alpha_0 \int_A^t p^{\frac{1}{1+\sigma_1}}(\tau) d\tau, \quad A = \begin{cases} b, & \text{якщо} \int_b^\omega p^{\frac{1}{1+\sigma_1}}(\tau) d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \int_b^\omega p^{\frac{1}{1+\sigma_1}}(\tau) d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$I_1(t) = \int_{A_0}^t \Phi^{-1}(I(\tau)))) d\tau, \quad A_0 = \begin{cases} b, & \text{якщо} \int_b^\omega \Phi^{-1}(I(\tau)))) d\tau = \pm\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \int_b^\omega \Phi^{-1}(I(\tau)))) d\tau = const, \end{cases}$$

де $b \in [a; \omega[$ обирається так, щоб $I(t)$ належала області визначення функції Φ^{-1}.

Зауваження 1. З умов (2) на функцію φ_0 випливає, що $Z_0 \in \{0, +\infty\}$ та

$$\lim_{\substack{y' \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\Phi''(y') \cdot \Phi(y')}{(\Phi'(y'))^2} = 1, \tag{4}$$

звідки випливає, що функція $\Phi(y')$ є швидко змінною при $y' \to Y_0$ $(y' \in \Delta_{Y_0})$, та в силу монотонності функції $\Phi(y')$ існує функція $\Phi^{-1}(y')$, яка є повільно змінною функцією при $y' \to Y_0$ $(y' \in \Delta_{Y_0})$.

Зауваження 2. Зауважимо також, що має місце співвідношення

$$\lim_{z \to Z_0} \frac{(\Phi'(\Phi^{-1}(z)))'z}{\Phi'(\Phi^{-1}(z))} = \lim_{z \to Z_0} \frac{\Phi''(\Phi^{-1}(z))z}{(\Phi'(\Phi^{-1}(z)))^2} = \lim_{y \to Y_0} \frac{\Phi''(\Phi^{-1}(\Phi(y)))\Phi(y)}{\left(\Phi'(\Phi^{-1}(\Phi(y)))\right)^2} = \lim_{y \to Y_0} \frac{\Phi''(y)\Phi_1(y)}{\left(\Phi'(y)\right)^2} = 1.$$

Звідси випливає, що функція $\Phi'(\Phi^{-1}(z)$ є правильно змінною порядку 1 при при прямуванні аргументу до Z_0.

Зауваження 3. Також, має місце співвідношення

$$\lim_{z\to Z_1}\frac{z\cdot\left(\dfrac{\Phi'(\Phi^{-1}(z))}{\Phi(\Phi^{-1}(z))}\right)'}{\dfrac{\Phi'(\Phi^{-1}(z))}{\Phi(\Phi^{-1}(z))}}=\lim_{y\to Z_1}\frac{\Phi''(\Phi^{-1}(z))z}{(\Phi'(\Phi^{-1}(z)))^2}-1=0.$$

Отже, функція $\frac{\Phi'}{\Phi}(\Phi^{-1})$ є повільно змінною при прямуванні аргументу до Z_0.

Справедливою є наступна теорема

Теорема 1. *Нехай $\sigma_1\in R\backslash\{-1\}$, функції θ_1 та Φ^{-1} задовольняють умову S та існує скінченна чи нескінченна границя*

$$\lim_{t\uparrow\omega}F(t). \tag{5}$$

Тоді для існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$- розв'язків необхідно та достатньо виконання умов

$$y_0^1\alpha_0>0,\quad \lim_{t\uparrow\omega}\Phi^{-1}(I(t))=Y_0,\quad \lim_{t\uparrow\omega}I(t)=Z_0, \tag{6}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}I_1(t)=Y_1 \tag{7}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}F(t)=1, \tag{8}$$

Більш того, якщо

$$\sigma_1>-1,$$

диференціальне рівняння (1) має двопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$-розв'язків та має однораметричну сім'ю $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$-розв'язків у супротивному випадку.

Для кожного такого $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-розв'язку мають місце при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення

$$y(t)=I_1(t)[1+o(1)],\quad y'(t)=\Phi^{-1}(I(t))[1+o(1)]. \tag{9}$$

Доведення.

Необхідність. Нехай $y:[t_0,\omega[\to\Delta_{Y_0}$ є $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$-розв'язком рівняння (1). Тоді, у силу (3), маємо

$$y(t) = \frac{(y'(t))^2}{y''(t)}[1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega, \tag{10}$$

звідки, з урахуванням (1), отримаємо виконання першої з умов (7), а також співвідношення

$$\frac{|y''(t)|^{1+\sigma_1}}{\varphi_0(y'(t))|y'(t)|^{2\sigma_1}\theta_1(y(t(y'(t))))} = p(t)[1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{11}$$

Зауважимо, що функція $y(t(y'))$, де $t(y')$- обернена функція до $y'(t)$, є правильно змінною порядку 1 при $y' \to Y_0$; $y' \in \Delta_{Y_0}$. Дійсно,

$$\lim_{y \to Y_0} \frac{y' \cdot (y(t(y')))'}{y(t(y'))} = \lim_{y' \to Y_0} \frac{(y'(t(y)))^2}{y''(t(y')) \cdot y(t(y'))} = 1.$$

Звідси випливає, що $\theta_1(y(t(y')))$ є повільно змінною функцією при $y' \to Y_0$ $y' \in \Delta_{Y_0}$ як композиція правильно та повільно змінних функцій $y' \to Y_0$ $y' \in \Delta_{Y_0}$.

З (11) маємо

$$\frac{y''(t)}{\varphi_0^{\frac{1}{\sigma_1+1}}(s)\theta_1^{\frac{1}{\sigma_1+1}}(y(t(y')))|y'|^{\frac{2\sigma_1}{\sigma_1+1}}} = \alpha_0(p(t))^{\frac{1}{1+\sigma_1}}[1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{12}$$

Проінтегруємо обидві частини співвідношення (12) від b до ω, з урахуванням того, що $y' \to Y_0$ $(y' \in \Delta_{Y_0})$ та вибору A випливає, що

$$\Phi(y'(t)) = I(t)[1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{13}$$

Тоді, так як функція Φ^{-1} задовольняє умову S, з (13) маємо

$$y'(t) = \Phi^{-1}(I(t))[1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{14}$$

З (14) випливає друга та третя з умов (6), а також друге з асимптотичних зображень (9).

Проінтегруємо обидві частини співвідношення (14), маємо

$$y(t) = I_1(t)[1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega, \tag{15}$$

звідки випливає перше з асимптотичних зображень (9) та умова (7).

Доведемо справедливість умови (8). Дійсно, з умови (3), а також з (12) та (13) випливає, що

$$\frac{(y'(t))^2}{y(t)} \cdot \frac{\Phi'(y'(t))}{\Phi(y'(t))} = \frac{I'(t)}{I(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{16}$$

З (14), (15) та (16), а також з зауважень 1 та 2 випливає, що

$$\frac{(\Phi^{-1}(I(t)))^2}{I_1(t)} \cdot \frac{\Phi'}{\Phi}(\Phi^{-1}(I(t))) = \frac{I'(t)}{I(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{16}$$

звідки і випливає виконання умови (8).

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай виконуються умови (5)-(8) теореми.

До рівняння (1) застосуємо перетворення

$$y(t) = I_1(t) \cdot [1 + v_1(t)], \tag{17}$$

$$y'(t) = \Phi^{-1}(I(t)) \cdot [1 + v_2(t)], \tag{18}$$

Зведемо рівняння (1) до еквівалентної системи диференціальних рівнянь

$$v_1' = h_1(t) \cdot [-v_1 + v_2], \tag{19}$$

$$v_2' = h_2(t) \cdot \left[\frac{N(t, v_2)}{(F(t))^{\sigma_1}} \cdot [1 + v_1]^{\sigma_1} [1 + v_2]^{-3\sigma_1 - 1} - [1 + v_2] \right], \tag{20}$$

де

$$h_1(t) = \frac{I_1'(t)}{I_1(t)}, \quad h_2(t) = \frac{I'(t)}{\Phi'(\Phi^{-1}(I(t))) \cdot \Phi^{-1}(I(t))},$$

$$N(t, v_2) = \left(\frac{\Phi'(\Phi^{-1}(I(t)))}{\Phi'(Y_2(t, v_2))} \right)^{\sigma_1 + 1} \cdot [1 + v_2]^{\sigma_1 + 1},$$

$$Y_1(t, v_1) = I_1(t) \cdot [1 + v_1(t)], \quad Y_2(t, v_2) = \Phi^{-1}(I(t) \cdot [1 + v_2(t)]).$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (19) –(20) на множині

$$\Omega = [t_0, \omega[\times D, \quad \text{де} \quad D = \left\{ (v_1, v_2) : |v_i| \leq \frac{1}{2}, \ i = 1, 2 \right\}.$$

Перепишемо систему (19) –(20) у виді

$$v_1' = h_1(t) \cdot [A_{11} v_1 + A_{12} v_2], \tag{21}$$

$$v_2' = h_2(t) \cdot [A_{21} v_1 + A_{22} v_2 + R_1(t, v_1, v_2) + R_2(t, v_1, v_2)], \tag{22}$$

де

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = 1, \quad A_{21} = \sigma_1, \quad A_{22} = -3\sigma_1 - 2,$$

$$R_1(t, v_1, v_2) = \left(\frac{N(t, v_2)}{(F(t))^{\sigma_1}} - 1\right)(\sigma_1 v_1 - (3\sigma_1 + 2)v_2)$$

$$R_2(t, v_1, v_2) = \frac{N(t, v_2)}{(F(t))^{\sigma_1}} \cdot (-\sigma_1(3\sigma_1+1)v_1v_2 + (1-(3\sigma_1+1)v_2) \cdot ([1+v_1]^{\sigma_1} - 1 - \sigma_1 v_1) +$$

$$+[1 + v_1]^{\sigma_1} \cdot ([1 + v_2]^{-3\sigma_1 - 1} - 1 + (3\sigma_1 + 1)v_2)).$$

Зауважимо, що в силу зауваження 2 маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} N(t, v_2) \quad = 1 \text{ рівномірно за } \quad (v_1, v_2) \in D.$$

а в силу умови (8)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{N(t, v_2)}{(F(t))^{\sigma_1}} = 1 \text{ рівномірно за } \quad (v_1, v_2) \in D.$$

Тоді

$$\lim_{t\uparrow\omega} R_1(t, v_1, v_2) \quad = 0 \text{ рівномірно за } \quad (v_1, v_2) \in D.$$

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{R_2(t, v_1, v_2)}{|v_1| + |v_2|} = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad t \in [t_0, \omega[,$$

Характеристичне рівняння матриці:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \sigma_1 & -3\sigma_1 - 2 \end{pmatrix}$$

має вид

$$\mu^2 + (3\sigma_1 + 3)\mu + 2\sigma_1 + 2 = 0.$$

У силу умови $\sigma_1 \neq -1$ у цього рівняння немає коренів з нульовою дійсною частиною.

З урахуванням виду $I_1(t)$ маємо
$\int\limits_{t_0}^{\omega} h_1(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{\omega} \frac{I_1'(\tau)}{I_1(t)}d\tau = \ln|I_1(t)|_{t_0}^{\omega} = \pm\infty.$
Також зауважимо, що в силу

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{h_1(t)}{h_2(t)} = \lim_{t\uparrow\omega} F(t) = 1,$$

тоді $\int\limits_{t_0}^{\omega} h_2(\tau)d\tau = \pm\infty$.

Отримуємо, що для системи диференціальних рівнянь(21)-(22) виконано всі умови теореми 2.5 з [4]. Відповідно до цієї теореми система (21)-(22) при $\sigma_1 > -1$ має двопараметричну, а при при $\sigma_1 < -1$ має однопарамтеричну сім'ю розв'язків $\{v_i\}_{i=1}^{2} : [t_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(t_1 \geq t_0)$, які прямують до нуля при $t \uparrow \omega$. Цим розв'язкам у силу перетворень (17)-(18) відповідають розв'язки y рівняння (1), що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (9).

В силу цих зображень випливає, що отримані розв'язки є $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язками рівняння (1). Теорему повністю доведено.

Висновки

У роботі встановлено умови існування швидко змінних $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-розв'язків для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку з добутком правильно та швидко змінних нелінійностей при прямуванні аргументів до нуля або нескінченності від невідомої функції та її похідної відповідно. Побудовано явні асимптотичні зображення для знайдених розв'язків та їхніх перших похідних в околі граничної точки ω, встановлено кількість таких розв'язків в залежності від умов на коефіцієнти рівняння. Отримані результати є новими та є основною для подальших досліджень нелінійних рівнянь другого порядку та їх розв'язків.

Список літератури

1. **Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.** (1978) Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications.// Cambridge university press. Cambridge. 494p.

2. **Chepok, O.** (2023). Asymptotic behavior of $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-solutions of the second order differential equations with the product of different types of nonlinearities from an unknown function and its first derivative. Bukovinian Math. Journal. 11, No. 2, 33 – 40. 10.31861/bmj2023.02.04

3. **Chepok, O** (2023) Asymptotic representations of regularly varying $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$–solutions of a differential equation of the second order containing the product of different types of nonlinearities of the unknown function and its derivative. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 274, No. 1, July, P 142-155

4. **Evtukhov, V.,Samoilenko, A.** (2010). Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular

point // Ukrainian Mathematical Journal - UKR MATH J. 62. 56-86. 10.1007/s11253-010-0333-7.

5. **Evtukhov, V.,Samoilenko, A.** (2011). Asymptotic Representations of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities // Differential Equations, Vol. 47, No. 5, pp. 627–649

6. **Maric V.** (2000) Regular Variation and differential equations // Springer (Lecture notes in mathematics, 1726). 127p.

7. **Seneta E.** (1976) *Regularly varying functions* Lecture Notes in Math., vol. 508, Berlin: Springer-Verlag.

Chepok O. O.

EXISTENCE CONDITIONS AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-SOLUTIONS OF SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS CONTAINING A PRODUCT OF DIFFERENT TYPES OF NONLINEARITIES

Summary

The paper provides a detailed study of a second-order nonlinear differential equation, the right-hand side of which contains a product of a regularly varying nonlinear function of an unknown function and a rapidly varying nonlinear function of its first derivative. The research focuses on the behavior of the nonlinear functions as the unknown function and its derivative tend to zero or infinity. For this class of equations, necessary and sufficient conditions for the existence of $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-solutions have been obtained for the first time, and asymptotic representations for such solutions and their first-order derivatives have been established. These $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-solutions of the equation under study are rapidly varying as the argument tends to zero or infinity, which complicates their investigation compared to other types of solutions. The number of such $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-solutions is also determined depending on the conditions on the coefficients of the equation. The results regarding $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-solutions for the equations of the type under study are novel.

Keywords: nonlinear second-order differential equations, asymptotic representations of rapidly varying solutions, $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-solutions, rapidly varying functions, regularly varying functions.

REFERENCES

1. **Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.** (1978) Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications.// Cambridge university press. Cambridge. 494p.

2. **Chepok, O.** (2023). Asymptotic behavior of $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-solutions of the second order differential equations with the product of different types of nonlinearities from an unknown function and its first derivative. Bukovinian Math. Journal. 11, No. 2, 33 – 40. 10.31861/bmj2023.02.04

3. **Chepok, O** (2023) Asymptotic representations of regularly varying $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$–solutions of a differential equation of the second order containing the product of different types of nonlinearities of the unknown function and its derivative. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 274, No. 1, July, P 142-155

4. **Evtukhov, V.,Samoilenko, A.** (2010). Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point // Ukrainian Mathematical Journal - UKR MATH J. 62. 56-86. 10.1007/s11253-010-0333-7.

5. **Evtukhov, V.,Samoilenko, A.** (2011). Asymptotic Representations of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities // Differential Equations, Vol. 47, No. 5, pp. 627–649

6. **Maric V.** (2000) Regular Variation and differential equations // Springer (Lecture notes in mathematics, 1726). 127p.

7. **Seneta E.** (1976) *Regularly varying functions* Lecture Notes in Math., vol. 508, Berlin: Springer-Verlag.