Дослідження в математиці і механіці. – 2025. – Т. 30, вип. 2(46). – С. 31–47

УДК 519.83:519.217.2

С. В. Мартинюк, *кандидат фіз.-мат. наук, асистент*
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
кафедри алгебри та інформатики
вул. Коцюбинського, 2, м. Чернівці, 58012, Україна
e-mail: s.martyniuk@chnu.edu.ua
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0009-5118-0658
В. І. Цуркан, *аспірант*
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
кафедри алгебри та інформатики
вул. Коцюбинського, 2, м. Чернівці, 58012, Україна
e-mail: tsurkan.viacheslav.i@chnu.edu.ua
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0005-4025-4392

ПОБУДОВА СТОХАСТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДИНАМІЧНОЇ КООПЕРАТИВНОЇ ГРИ З ВИКОРИСТАННЯМ МАТРИЦЬ РЕЗУЛЬТАТУ

З розвитком обчислювальних ресурсів, ШІ, відбувається розширення використання теорії ігор в соціології, економіці та інших прикладних науках. Це дозволяє обробляти великі об'єми інформації, будувати математичні моделі та знаходити оптимальні стратегії для різноманітних задач та різних рівнів їх складності. Військова сфера, організація всіх рівнів безпеки, включаючи кіберпростір, використовують концепції теорії ігор. Гра передбачає дії двох або більше раціональних гравців чи команд, що мають певну стратегію і змагаються за певну винагороду. Теорія ігор забезпечує побудову оптимальної стратегії для таких ігор. Крім того, теоретико-ігрові підходи можна поширити на розробку алгоритмів, які дозволяють розробникам систем передбачати результати ігор на користь групи гравців, використовуючи складні ігрові конструкції. У даній статті продовжується дослідження теорії ігор в розділі дискретних динамічних кооперативних ігор. Група гравців виконуючи послідовно дії прагнуть досягнути максимального результату за обмежену кількість кроків. Використання зібраних статистичних даних та сформованих по них матриць результату, дає змогу на практичному рівні розглянути оптимальні стратегії. В роботі запропоновано узагальнення матриць результату, як інструменту формування початкових стохастичних даних для динамічної кооперативної гри, побудовано Марківську модель переходів між станами гри та сформульовано алгоритм визначення оптимальної стратегії.
MSC: 91A06, 91A12, 91A25, 60J10, 60J85, 05B20, 37M05, 03H05.

Надійшла 21.11.2025
© Мартинюк С. В., Цуркан В. І., 2025

Ключові слова: теорія ігор, статистика, система прийняття, рішення, модель Маркова, матриця результату, моделювання, машинне навчання.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.2(46).354146

Вступ

У сучасних умовах високої конкуренції та швидких змін ринкового середовища дискретні динамічні кооперативні ігри стають надзвичайно важливим інструментом для моделювання стратегічної поведінки компаній та груп у бізнес-середовищі. У реальному бізнесі рішення часто приймаються не неперервно, а через певні проміжки часу (наприклад, щокварталу визначаються бюджети, раз на рік — стратегічні плани). Дискретний підхід дозволяє чітко моделювати послідовні етапи прийняття рішень. Динамічність ринкового середовища характеризується швидкими змінами технологій, законодавства, появою нових конкурентів. Динамічні ігри дозволяють враховувати зміни стану системи від етапу до етапу і передбачати їхній вплив на стратегії гравців. У корпоративному середовищі важливо враховувати наслідки дій у довгостроковій перспективі, а не тільки миттєву вигоду, тому з допомогою дискретних динамічних ігор можна моделювати ситуації, коли теперішні рішення впливають на майбутні можливості. Крім того, сучасні компанії мають доступ до значних обсягів статистичної інформації (Big Data), яка дозволяє створювати більш реалістичні динамічні моделі, а застосування теорії ігор допомагає оптимізувати рішення на основі аналізу накопичених даних. Ігрові моделі допомагають компаніям будувати адаптивні стратегії в умовах невизначеності, коли поведінка конкурентів або зовнішніх факторів непередбачувана. Дискретні динамічні ігри знаходять застосування в економіці, фінансах, кібербезпеці, енергетиці, логістиці, розвитку IT-рішень, в системах прийняття рішень.

Динамічна дискретна кооперативна гра є моделлю в теорії ігор, яка використовується для аналізу стратегічної взаємодії між компаніями або підрозділами всередині організації. У цій моделі час розглядається як дискретний, тобто поділений на окремі періоди (наприклад, квартали або роки), а учасники приймають рішення на кожному з цих етапів, враховуючи як поточну ситуацію, так і можливі майбутні наслідки своїх дій.

Розглянемо характеристики динамічних дискретних кооперативних ігор такі як: *дискретність часу, багатоетапність та стратегічна взаємодія.*

Дискретність часу означає, що рішення гравцями приймаються в окремі моменти часу, що дозволяє моделювати послідовність стратегічних кроків. Дії розділені проміжками часу, а результати дій накопичуються або змінюються крок за кроком. Це дає змогу структурувати гру, легко моделювати стратегії та передбачати наслідки дій. Полегшує застосування математичних методів, таких як динамічне програмування, Марковські процеси, теорія оптимізації. Відповідає реальним сценаріям, де рішення приймаються не неперервно, а періодично (наприклад, щоденні торги на біржі, поетапні переговори, хід за ходом у грі).

Багатоетапність (або багатокроковість) - учасники гри послідовно приймають рішення на кількох етапах, і результати їхніх рішень впливають на подальший хід гри. На кожному етапі гравці можуть змінювати свої стратегії, адаптуватися до нових обставин і враховувати, як власні минулі рішення, так і дії інших гравців та суперників. При цьому гра розбита на певну кількість етапів або ходів, рішення на кожному етапі залежать від поточного стану гри та історії попередніх кроків. Мета таких ігор оптимізувати сумарний виграш або досягти певного результату до кінця гри, а гравці мають враховувати не тільки поточний виграш, але й майбутні наслідки своїх дій. Розглядають два типи багатоетапних ігор: з фіксованою кількістю етапів (*скінченна гра*), коли гравці знають, скільки всього буде ходів, та з нескінченною кількістю етапів (*нескінченна або стохастична гра*), коли гра триває без кінця або з певною ймовірністю закінчення на кожному етапі.

У кооперативних іграх, які моделюють діяльність компаній або груп у бізнес-середовищі, *стратегічна взаємодія* означає процес прийняття рішень кількома учасниками (компаніями, підрозділами, групами), де кожен учасник враховує не лише власні цілі, але й поведінку конкурентів, партнерів чи клієнтів. Виграш одного гравця залежить не тільки від його дій, а й від дій інших гравців. Тому кожен учасник намагається передбачити, як інші відреагують на його стратегію, і коригує свою поведінку відповідно. Гравці можуть або конкурувати (наприклад, за частку ринку), або співпрацювати (наприклад, створювати альянси). Для таких ігор важливо формалізувати гравців, а саме визначити хто є учасниками гри, опис стратегій, які доступні кожному гравцю, пошук стану рівноваги, де жоден з гравців не має стимулу змінювати свою стратегію односторонньо (наприклад, рівновага Неша). Серед особливостей кооперативних ігор слід зазначити важливу роль інформації (повна, неповна, асиметрична), довгострокові наслідки рішень, часте виникнення змішаних стратегій (планування дій з певними ймовірностями) та можливі коаліції або колаборації між гравцями. Отже, *стратегічна взаємодія* в кооперативних іграх — це процес, коли компанії чи групи приймають рішення, враховуючи можливі дії конкурентів і партнерів, для максимізації власного виграшу в умовах взаємозалежності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Останні дослідження в галузі теорії ігор демонструють її ефективність у вирішенні різноманітних корпоративних задач.

Основні положення теорії ігор заклали Е. Борель, А. Курно, Ж. Бертран, Дж. Нейман, О. Моргенштерн, Дж. Харшані, Р. Зельтен, Т. Шеллінг, Р. Ауман. Вагомий внесок у її розроблення зробили В. В. Вітлінський, В. М. Альгін, Т. Бойдель, Є. С. Вентцель, Е. Й. Вілкас, О. П. Гранатуров, С. І. Наконечний, В. А. Соколов та інші. Проте саме завдяки Дж. Нейману відбулося остаточне становлення цієї теорії (“До теорії стратегічних ігор”, 1928)[1]. Йому вдалося математично обґрунтувати загальну стратегію для гри двох учасників в умовах мінімізації та максимізації. Книга Дж. Неймана та О. Моргенштерна “Теорія ігор і економічна поведінка”[2] демонструють можливість застосування теорії ігор для певної кількості учасників, що уможливило її застосування в економіці для моделювання поведінки підприємств у конкурентному середовищі, тобто формування і вибору стратегії розвитку підприємств. Особливо важлива запропонована у цій книзі стратегія “мінімакс”, або мінімізація максимальних втрат. Така стратегія дає змогу раціоналізувати витрати підприємств в умовах невизначеності [3–5].

Зоряна Коваль у своїй роботі пропонує методику вибору та оцінювання стратегій підприємств за допомогою теорії ігор [6]. Цей підхід дозволяє враховувати стратегії конкурентів або стан ринку, що сприяє прийняттю оптимальних рішень у конфліктних ситуаціях. Авторка аналізує переваги та недоліки застосування методів теорії ігор у цій сфері, а також досліджує особливості використання критеріїв вибору стратегій. Вона розглянула вибір та пошук можливостей застосування методів теорії ігор для аналізу ефективності стратегій підприємств, розробила методики оцінювання ефективності стратегій підприємства за допомогою моделювання ситуації із використанням теорії ігор та формування висновків і рекомендацій щодо застосування методів та інструментарію теорії ігор у сфері оцінюванні ефективності стратегій підприємств.

В. В. Казімко досліджує застосування теорії ігор для моделювання інформаційних проблем безпеки.[7] Він зазначає, що концепції теорії ігор можуть бути використані для розробки механізмів, які дозволяють розробникам систем змінювати баланс та передбачати результати на користь захисників, використовуючи складні ігрові конструкції. Використовуючи ігри можна розробляти та аналізувати оптимальні дії гравців та знаходити можливі математичні рішення безпекових задач. З точки зору безпеки, поєднання кіберпростору та фізичного простору призводить до кіберфізичної безпеки, або поєднання елементів безпеки та економіки створює кіберстрахування. Для вирішення проблем безпеки та конфіденційності в нових сферах найбільш підходящими інструментами є теоретичні ігрові методи, оскільки вони надають різноманітні перевірені математичні методи для створення багатокористувацьких стратегій з використанням різних способів для охоплення аспектів конфіденційності та безпеки взаємодії гравців. Представлені теорії показують ефективність та доцільність використання теорії ігор та теорії диференціальних ігор у сфері захисту інформації.

Основні результати

Дослідження спрямоване на узагальненні поняття матриць результату та їх практичне використання для формування початкових матриць для дискретної динамічної кооперативної гри. Відповідно до поставленої мети вирішуються такі основні задачі:

1. Узагальнення поняття матриць результату.
2. Побудова стохастичної математичної моделі гри з використанням матриць результату для побудови вхідних даних.
3. Побудови оптимальної стратегії гри.

Узагальнений варіант матриць результатів

Розглянемо узагальнений варіант матриць результату, у якому *ігрова поверхня* дискретизується у вигляді прямокутної сітки розмірністю m x n. Кожен елемент цієї сітки відповідає конкретному просторовому положенню на ігровій поверхні (рис. 2).

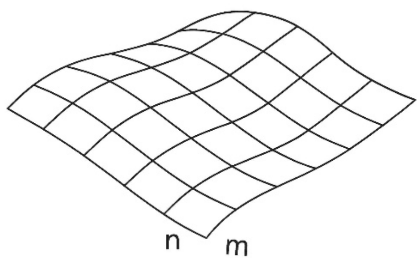

Рис.2 Ігрова поверхня.

Таким чином, *матриця розташування гравців або дій* має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де кожен елемент a_{ij} однозначно відповідає фіксованій ділянці ігрової поверхні.

У цьому формулюванні матриця A виступає *матрицею результатів* для заданої ігрової поверхні. Вміст елементів матриці результатів може бути різним залежно від поставленої задачі та доступних даних.

Матриці результатів в абсолютних величинах відображають в a_{ij} кількість виконаних ігрових дій гравцем з ділянки (i, j) ігрової поверхні (наприклад кількість спроб, передач, помилок тощо). Такі матриці результатів корисні для первинного статистичного аналізу, побудови емпіричних моделей, агрегації даних.

Матриці результатів у відносних величинах в a_{ij} інтерпретуються як ймовірність успішного чи ні виконання певної ігрової дій гравцем з ділянки (i, j) ігрової поверхні (наприклад ймовірності виграшу, програшу, помилок тощо). Такі матриці безпосередньо придатні для використання в ігрових і стохастичних моделях.

Для кожного гравця, ми будуємо персоналізовані матриці результату елементами яких є відносні показники, що будуть відображати ефективність гравця при виконанні дії з певної частини ігрової поверхні (наприклад матриця виграшів, програшів, напрямків тощо).[8]

Джерелами побудови матриць результату можуть бути: статистична інформація (історія виконання ігрових дій гравцем чи командою), прогнозований або емпіричний метод збору даних, комбінований метод оцінювання.

Сформовані матриці результатів слугуватимуть вхідними даними для розв'язання дискретної динамічної кооперативної гри, моделей типу MDP або стохастичної гри з просторовою залежністю.

Побудова стохастичної математичної моделі гри з використанням матриць результату для побудови вхідних даних

Розглянемо задачу:

Існує команда N гравців, які виконують дії послідовно. Початковий гравець вибирається випадковим чином, після чого гравці по черзі приймають рішення виконати дію чи передати хід наступному гравцю (передавати хід собі заборонено). Гра може максимально мати M етапів. Якщо до останнього етапу ніхто не виконав дію, то гравець до якого на останньому етапі перейшов хід зобов'язаний виконати дію. Гравці перебувають в різних позиціях ігрової поверхні. Конкретна позиція в конкретний момент часу визначається відповідною матрицею.

Правила гри. Кожен гравець має дві основні опції виконати дію або передати хід іншому гравцю.

Виконання дії може призвести до:

- виграшу з ймовірністю P_{win}, що приносить команді 1 бал і завершує гру;

- програшу з ймовірністю P_{loss} , що призводить до втрати командою 1 бала і також завершує гру;

- зупинки гри з ймовірністю $P_{stop} = 1 - \ P_{win} \ - \ P_{loss}$, що приносить команді 0 балів і завершує гру;

Передача ходу іншому гравцю. Гравець передає хід одному з N-1 інших з ймовірністю P_{pass}, та продовжує гру. Заборонено передавати хід самому собі. Дозволено передавати хід гравцю, що вже приймав участь в грі.

Ймовірність виграшу для кожного гравця є змінною на кожному етапі.

Послідовність ходів. Після кожного ходу гравця наступний гравець також обирає між виконанням дії або передачею ходу. Гравець може передати хід будь-якому з інших гравців (крім себе).

Багатоетапна структура гри. Гра відбувається в M етапів:

1 етап: Перший гравець (випадково обраний) приймає рішення виконати дію або передати хід іншому гравцеві.

2 етап: Наступний гравець приймає рішення. Він може виконати дію або передати хід іншому гравцеві, у тому числі повернути хід попередньому гравцеві.

...

M етап: На останньому етапі гравець зобов'язаний виконати дію.

Зупинка гри. Гра зупиняється після виконання дії будь-яким гравцем.

Ціль гри. Потрібно обчислити ймовірність виграшу гравців на будь-якому етапі при виконанні дії, що передбачає врахування всіх можливих рішень гравців на попередніх етапах. Вибрати стратегію для кожного гравця на кожному з етапів та побудувати оптимальну стратегію гри для отримання максимальної ймовірності виграшу команди.[9]

Побудуємо стохастичну модель у вигляді Марковського процесу прийняття рішень (MDP) для описаної гри, а також підхід до обчислення ймовірностей виграшу та знаходження оптимальних стратегій [10; 11].

Марковський процес прийняття рішень визначимо п'ятіркою:

$$M = \langle\, S,\ A,\ P,\ R, \gamma \,\rangle$$

де:

S - множина станів,

A - множина дій,

P - ймовірності переходів,

R - функція винагород,

γ -коефіцієнт дисконтування (у скінченній грі можна взяти $(\gamma = 1)$).

Нехай ігрова поверхня дискретизована у вигляді матриці розмірності $m \times n$. Кожна клітина цієї матриці однозначно відповідає конкретній просторовій позиції.

Позначимо множину клітин: $X = \{\ x_{ij} \mid i \in 1, \ldots, m, j \in 1, \ldots, n\ \}$

Для кожного гравця $k \in 1, \ldots, N$ задано матриці результатів:

матриця виграшу $W^{(k)} = \left[w_{ij}^{(k)} \right], w_{ij}^{(k)} = P_{win}^{(k)} (x_{ij}, t)$, матриця програшу $L^{(k)} = \left[l_{ij}^{(k)}\right], l_{ij}^{(k)} = P_{loss}^{(k)}(x_{ij}, t)$, при чому $w_{ij}^{(k)} + l_{ij}^{(k)} \leq 1$.

Таким чином, кожна клітина ігрової поверхні несе повну інформацію про результативність усіх гравців.

З умов задачі визначимо простір станів. Стан повинен містити всю інформацію, необхідну для прийняття оптимального рішення. Тому нетермінальний стан матиме вигляд:

$s = (k, t, \mathbf{x_{ij}})$.

де: $k \in 1, \ldots, N$ – поточний гравець у якого зараз хід,

$t \in 1, \ldots, M$ – номер етапу,

$\mathbf{x_{ij}}$– позиція гравця на ігровій поверхні.

Отже множина нетермінальних станів:

$S_{NT} = (k, t, \mathbf{x_{ij}})$.

Також введемо множину термінальних станів. Термінальний стан відповідає факту виконання дії конкретним гравцем, що призводить до завершення гри.

$S_T = \{s_{win}^k, \; s_{loss}^k, \; s_{stop}^k \mid k \in 1, \ldots, N\}$,

де s_{win}^k – гравець k виконав дію на етапі t і команда виграла, відповідно s_{loss}^k – програла та s_{stop}^k – гра завершилася без результату.

Тоді повна множина станів: $S = S_{NT} \cup S_T$

Множина дій A задається в залежності від поточного стану гри, визначається активним гравцем та змінюється залежно від етапу гри. Нехай поточний стан $s_t = (k, t, \mathbf{x_{ij}})$, де k – активний гравець. Тоді гравець k може виконати дію з позиції $\mathbf{x_{ij}}$, з імовірностями, заданими матрицями результатів, відбувається перехід у відповідний термінальний стан та гра завершується. Виконання дії завжди дозволено, а на останньому етапі при $t = M$ є обов'язковою. Інше рішення при $t < M$, передача ходу іншому гравцю. При передачі ходу гравець k передає хід гравцю l, номер етапу збільшується $t \to t + 1$, гра продовжується.

$$A(s_t) = \begin{cases} \{act, \; pass(l) | \; l \neq k\}, & t < M \\ act, t = M \end{cases},$$

де act – виконати дію, pass(l) – передати хід гравцю l, але не самому собі $l \neq k$.

Розглянемо функцію переходів для заданої задачі. Узагальнено її можна зобразити у вигляді:

$P\left(s^{'}\middle|s,a\right), s \in S, a \in A(s)$.

Виконання дії призводить до завершення гри з переходом у термінальні стани, тому для стану $s_t = (k,t,\mathbf{x_{ij}})$:

$P\left(s^k_{win}\middle|s_t, act\right) = P^{(k)}_{win}\left(x_{ij},t\right)$,

$P\left(s^k_{loss}\middle|s_t, act\right) = P^{(k)}_{loss}\left(x_{ij},t\right)$,

$P\left(s^k_{stop}\middle|s_t, act\right) = 1 - P^{(k)}_{win}\left(x_{ij},t\right) - P^{(k)}_{loss}\left(x_{ij},t\right)$.

Якщо ж в стані $s_t = (k,t,\mathbf{x_{ij}})$ обрано дію $pass(l)$, де $l \neq k$, то вибір гравця є детермінованим:

$P\left(k_{t+1} = l|s_t, pass(l)\right) = 1$.

Позиція на наступному етапі змінюється відповідно до функції переходів ігрової поверхні:

$P\left(\left(l,t+1,x_{i^{'}j^{'}}\right)\middle|\left(k,t,x_{ij}\right), pass(l)\right) = P\left(x_{i^{'}j^{'}}\middle|x_{ij}\right)$.

Для будь-якого нетермінального стану s і допустимої дії a:

$\sum_{s^{'}\in S} P\left(s^{'}\middle|s,a\right) = 1, \quad P\left(s^{'}\middle|s,a\right) \geq 0$.

Розглянемо функцію винагороди для даної задачі. Миттєва винагорода визначається як функція: $R : S \times A \times S \to \mathbb{R}$.

Якщо в нетермінальному стані $s_t = (k,t,\mathbf{x_{ij}})$ виконується дія *act*,то :

$$R\left(s,act,s^{'}\right) = \begin{cases} 1, & s' = s^k_{win}, \\ -1, & s' = s^k_{loss}, \\ 0, & s' = s^k_{stop}. \end{cases}$$

Якщо обрано дію *pass(l)*:

$R\left(\left(k,t,x_{ij}\right), pass(l), \left(l,t+1,x_{i^{'}j^{'}}\right)\right) = 0$, для всіх допустимих $x_{i^{'}j^{'}}$.

Для термінальних станів: $R\left(s,a,s^{'}\right) = 0, \forall s \in S_T$.

Для кожного гравця k вводимо функцію цінності:

$V_k(s) = \mathbb{E}\left[\sum_{\tau=t}^{T} R(s_\tau, a_\tau, s_{\tau+1}) \mid s_t = s\right]$,

де $T \leq M$- момент завершення гри, а очікування береться за оптимальної кооперативної політики команди.

Оскільки гра кооперативна і винагорода спільна, то:

$V_1(s) = V_2(s) = \bullet \bullet \bullet = V_N(s) = V(s)$.

Рекурентне визначення функції цінності для стану $s_t = (k,t,\mathbf{x_{ij}})$ матиме вигляд:

$V\left(k,t,x_{ij}\right) = max\left\{P^{(k)}_{win}\left(x_{ij},t\right) - P^{(k)}_{loss}\left(x_{ij},t\right), \max_{l\neq k} \sum_{x_{i^{'}j^{'}}} P(x_{i'j'}|x_{ij}) V(l,t+1,x_{i'j'})\right\}$,

Функція цінності дії (Q-функція):

$Q(s,a) = \sum_{s'} P\left(s'\middle|s,a\right)\left[R\left(s,a,s'\right) + V(s')\right].$

Зокрема для дії *act:*

$Q\left((k,t,x_{ij}),act\right) = P_{win}^{(k)}(x_{ij},t) - P_{loss}^{(k)}(x_{ij},t),$

А для дії *pass(l)*:

$$Q\left((k,t,x_{ij}),pass(l)\right) = \sum_{x_{i'j'}} P(x_{i'j'}|x_{ij})V(l,t+1,x_{i'j'}).$$

Побудова оптимальної стратегії гри

Обчислимо ймовірність виграшу гравців на будь-якому етапі з урахуванням усіх попередніх рішень. Оскільки гра кооперативна, винагорода нараховується лише один раз у момент виконання дії, а передача ходу не змінює результат безпосередньо, то ймовірність виграшу команди з будь-якого стану дорівнює функції цінності цього стану, обмеженій інтервалом [0,1]. Для стану $s = (k,t,\mathbf{x_{ij}})$ ймовірність виграшу команди, якщо гравець k виконує дію на етапі t:

$P_{win}(k,t,x_{ij}) = P_{win}^{(k)}(x_{ij},t).$

Це локальна (миттєва) ймовірність, яка не враховує передачі ходу. Для знаходження ймовірності виграшу з урахуванням всіх майбутніх рішень позначимо: $W(k,t,x_{ij})$ – оптимальну ймовірність виграшу команди, якщо на етапі t хід має гравець k, що перебуває в клітині x_{ij}. Гранична умова для останнього етапу при $t = M$ передача ходу заборонена, тому:

$W(k,M,x_{ij}) = P_{win}^{(k)}(x_{ij},M).$

Рекурентне обчислення ймовірності виграшу для будь-якого етапу $t < M$:

$W(k,t,x_{ij}) = max\ \{\ P_{win}^{(k)}(x_{ij},t)\ ,\ \max_{l\neq k}\sum_{x_{i'j'}} P(x_{i'j'}|x_{ij})W(l,t{+}1,x_{i'j'}).$

Це рівняння оптимальної ймовірності виграшу, яке враховує всі можливі рішення гравців на попередніх і наступних етапах, реалізовує зворотну індукцію і є рівнянням Беллмана для ймовірнісної цілі[11].

Оптимальна стратегія гравців визначається через рівняння оптимальності Беллмана як така, що реалізує максимум у цьому рівнянні для кожного гравця на кожному етапі гри. Зокрема, для гравця k у клітині x_{ij} на кроці t оптимальна дія (або розподіл над діями) полягає в тому, щоб обрати таку клітину x_{ij}, яка максимізує виграш $W(k,t,x_{ij})$. Тобто оптимальна стратегія — це правило вибору ходу, яке одночасно максимізує негайну ймовірність виграшу поточного гравця $P_{win}^{(k)}(x_{ij},t)$ і враховує найкращу можливу відповідь усіх інших гравців, тобто припускає, що інші гравці самі будуть діяти оптимально на наступному кроці, максимізуючи свої власні виграші W(l, ·). У термінах принципу оптимальності Беллмана це означає що будь-який фрагмент оптимальної траєкторії гри, починаючи з будь-якого проміжного стану та етапу t, також є оптимальним. Оптимальне рішення залежить лише від поточного стану x_{ij} та номера етапу t, стратегія є стаціонарною в тому сенсі, що в однакових станах на однакових етапах гравець обирає однакові дії, якщо гра детермінована по переходах — детерміновану дію, якщо стохастична — оптимальний розподіл. Таким чином, оптимальна стратегія для кожного гравця — це аргумент максимуму в рівнянні Беллмана, тобто той вибір x_{ij}, який досягає значення функції оптимальної ймовірності виграшу $W(k,t,x_{ij})$ за умови, що всі інші учасники гри також дотримуються своїх оптимальних стратегій на всіх наступних етапах. Це забезпечує субігрову перфектну рівновагу (subgame perfect equilibrium) у сенсі зворотної індукції, тому що ніхто з гравців не має стимулу відхилятися від цієї стратегії в жодному досяжному стані гри, якщо інші продовжують грати оптимально [11].

З умов задачі, гравець виконує дію, якщо його поточна ймовірність виграшу не менша, ніж очікувана користь від передачі ходу. Передавати хід потрібно тому гравцю, який має найбільшу майбутню цінність з урахуванням ігрової поверхні та етапу. Тому для стану $(k,t,\mathbf{x_{ij}})$:

$$\pi^*\left(k,t,\mathbf{x_{ij}}\right) = \begin{cases} act, \quad P_{win}^{(k)}\left(x_{ij},t\right) \geq \max_{l\neq k}\sum_{x_{i'j'}} P(x_{i'j'}|x_{ij})W(l,t+1,x_{i'j'}), \\ \qquad\qquad\qquad pass(l^*), \quad i, \end{cases}$$

де

$l^* = \ arg\max_{l\neq k}\sum_{x_{i'j'}} P(x_{i'j'}|x_{ij})W(l,t+1,x_{i'j'})$.

Таким чином:

$$\mathbb{P}(\text{виграш команди} \mid k,t,x_{ij}) = W(k,t,x_{ij}).$$

А ймовірність того, що саме на етапі t буде виграшна дія:

$$\mathbb{P}(\text{виграш команди на етапі } t) = \sum_{k,x_{i'j'}} \mathbb{P}\left(s_t = (k,x_{ij})\right)\cdot 1\left\{\pi^*(k,t,x_{ij}) = act\right\}\cdot P_{win}^{(k)}(x_{ij},t).$$

Приклад використання стохастичної моделі гри

Наведемо повністю конкретний числовий приклад для N=2, M=3 та ігрової площини 3x3, що ілюструє роботу всієї моделі, матриці результатів, випадкові переходи між клітинами, обчислення ймовірностей виграшу та оптимальної стратегії.

Отже, множина гравців N={1,2}, етапи t={1,2,3}, ігрова поверхня $X = \{\ x_{ij}\ \},\ \ i,j\ \in\ \{1,2,3\}$, стани $s\ =\ (k,t,\mathbf{x_{ij}})$. На етапах t=1,2 гравець може виконати дію або передати хід, при t=3 – обов'язково виконується дія.

Матриці результату для кожного гравця та етапу:

$$P^{(1)}_{win}(\bullet,1)\ =\begin{pmatrix}0.05 & 0.10 & 0\\ 0.10 & 0.15 & 0.05\\ 0 & 0.05 & 0.10\end{pmatrix}\ P^{(2)}_{win}(\bullet,1)\ =\begin{pmatrix}0 & 0.05 & 0.10\\ 0.05 & 0.10 & 0.15\\ 0.10 & 0 & 0.05\end{pmatrix}$$

$$P^{(1)}_{win}(\bullet,2)\ =\begin{pmatrix}0.10 & 0.20 & 0\\ 0.15 & 0.30 & 0.10\\ 0 & 0.10 & 0.20\end{pmatrix}\ P^{(2)}_{win}(\bullet,2)\ =\begin{pmatrix}0 & 0.15 & 0.25\\ 0.10 & 0.20 & 0.30\\ 0.20 & 0 & 0.10\end{pmatrix}$$

$$P^{(1)}_{win}(\bullet,3)\ =\begin{pmatrix}0.20 & 0.40 & 0\\ 0.30 & 0.60 & 0.25\\ 0 & 0.20 & 0.35\end{pmatrix}\ P^{(2)}_{win}(\bullet,3)\ =\begin{pmatrix}0 & 0.30 & 0.50\\ 0.25 & 0.45 & 0.65\\ 0.40 & 0 & 0.20\end{pmatrix}$$

Розглянемо рівномірну функцію переходу $P\left(x'\middle|x\right) = \frac{1}{8}, x \neq x'$.

Оскільки на t=3 дія обов'язкова то функція цінності: $W(k,x,\ 3) = P^{(k)}_{win}(x,3)$.

Для стану $(k,x,\ 2)$: $W(k,x,\ 2) = max\ \{P^{(k)}_{win}(x,2), \mathbb{E}\left[W(3-k,\bullet,3)\right]\}$, тоді очікуване значення при передачі для гравця 1: $\mathbb{E}\left[W(2,\bullet,3)\right] = \ \frac{1}{8}\ \sum_{x\neq x'} P^{(2)}_{win}(x',3)\ \approx 0.34$ (однакове для всіх клітин через рівномірність).

Для клітини x_{22} для гравця 1: дія 0.30, передача 0.34, оптимально передати хід.

Для гравця 2: дія 0.20, передача 0.34, оптимально передати хід.

Для стану $(k,x,\ 1)$: $W(k,x,\ 1) = max\ \{P^{(k)}_{win}(x,1), \mathbb{E}\left[W(3-k,\bullet,2)\right]\}$, тоді очікуване значення при передачі для гравця 1: $\mathbb{E}\left[W(1,\bullet,2)\right] = \ \frac{1}{8}\ \sum_{x\neq x'} P^{(2)}_{win}(x',2)\ \approx 0.32$

Для будь-якої клітини на етапі 1: $P_{win}\ \leq\ 0.15$, очікуване майбутнє > 0.30, тобто завжди передавати хід.

Тоді оптимальну стратегію можемо сформулювати так:

- етап 1 ніколи не виконувати дію, завжди передавити хід іншому гравцю;

- етап 2 виконувати дію лише в клітинах $P_{win}(x, 2) \geq 0.34$, в інших клітинах – передача ходу;

- етап 3 завжди виконувати дію, найкращі клітини для гравця 1 – центр (2,2), для гравця 2 – (2,3).

Результат прикладу можна так інтерпретувати, що пізніші етапи стратегічно цінніші, навіть якщо поточна позиція слабка, нульові клітини природньо виключаються зі стратегії, випадкові переходи стимулюють передачу ходу та роблять оптимальну стратегію менш «жадібною».

Тобто, навіть у простій конфігурації N=2, M=3 та ігрової площини 3x3 оптимальна стратегія є динамічною, просторово залежною та нетривіальною, а рішення на ранніх етапах повністю визначаються очікуваною командною цінністю майбутніх станів.

Висновки

Ми сформулювали узагальнене поняття матриць результату та запропонували метод формування початкових даних, базований на матрицях результату, для розв'язання динамічної дискретної кооперативної гри. Стратегії гравців та команди визначені для оптимального розв'язку даної гри.

Також розглянуто використання даної гри для побудови стохастичної математичної моделі. Використання матриць результату для початкових даних гри. При умові що ймовірнісні дані формуються базуючись на аналізі дій гравців протягом попередніх аналогічних ігор, вони будуть чітко задавати початкові умови для гри.

Дана динамічна дискретна кооперативна гра є базовою частиною для побудови математичної моделі гри та побудови оптимальних стратегій для гравців. В подальших дослідженнях важливо розглянути якісний вплив виконання дії чи передачі ходу на побудовану гру, а також динаміку зміни початкових даних для гри відповідно до математичної моделі.

Список літератури

1. **von Neumann, John** "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele"[On the Theory of Games of Strategy] / von Neumann, John Mathematische Annalen [Mathematical Annals] (in German). – 1928.– 100 (1): 295–320.
2. **von Neumann, John; Morgenstern, Oskar** Theory of Games and Economic Behavior. / von Neumann, John; Morgenstern, Oskar – Princeton University Press. ISBN 978-0-691-13061-3.
3. **Dixit A., Nalebuff B.** Thinking Strategically: The Competitive Edge in Business, Politics and Everyday Life. / Dixit A., Nalebuff B. – N.Y.: Norton., 1991. – 394 с.
4. **Baranovska L. V., Bukovskiy O. M.** Mixed strategy Nashnequilibrium in one game and rationality. International Scientific and Practical Conference "WORLD SCIENCE"./ Baranovska L. V., Bukovskiy O. M. // Proceedings of the III International Scientific and Practical Conference "Scientific Issues of the Modernity" (April 27, 2017, Dubai, UAE), № 5(21),Vol. 1, May, pp.4–8.
5. **Чан Кім В., Моборн Р.** Стратегія блакитного океану. / Чан Кім В., Моборн Р. – Пер. з англ. Київ: Клуб сімейного дозвілля., 2016. – 383 с.
6. **Коваль З. О.** Оцінювання стратегії підприємства методом теорії ігор. / Коваль З. О. – Менеджмент та підприємництво в Україні: етапи становлення і проблеми розвитку, 2021.– № 2 (6).
7. **Казімко В.В.** Застосування теорії ігор для моделювання інформаційних проблем безпеки. / Казімко В.В. – Телекомунікаційні та інформаційні технології., 2022.– № 1 (74).
8. **Мартинюк Сергій, Цуркан Вячеслав.** Побудова математичної моделі гравця з використанням матриці результатів. / Мартинюк Сергій, Цуркан Вячеслав. – Збірник статей, «Математика.Інформаційні технології. Освіта», №11 (2024) - м. Луцьк – С. 86.
9. **Sergiy Martyniuk, Viacheslav Tsurkan** Choosing the optimal strategy for a discrete dynamic cooperative game. / Sergiy Martyniuk, Viacheslav Tsurkan – Вісник Київського Національного Університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки. 2025. – №2 (81). – С.182-186. DOI:https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/2.28
10. **Birge, J.R., Louveaux, F.** Introduction to Stochastic Programming. 2nd ed./ Birge, J.R., Louveaux, F. – N.Y.: Springer, 2011.
11. **Kirk, D.E.** Optimal Control Theory: An Introduction./ Kirk, D.E. – N.Y.: Dover Publications, Mineola, 2004.

Martyniuk S. V., Tsurkan V. I.

Construction of a stochastic mathematical game model using outcome matrix for input data

Summary

With the development of computing resources and AI, the use of game theory in sociology, economics, and other applied sciences is expanding. This enables the processing of large amounts of information, the construction of mathematical models, and the identification of optimal strategies for various tasks and at different levels of complexity. The military sphere and security organizations at all levels, including those in cyberspace, utilize game theory concepts. A game involves the actions of two or more rational players or teams that have a specific strategy and compete for a specific reward. Game theory provides the foundation for developing optimal strategies in such games. In addition, game theory approaches can be extended to the development of algorithms that allow system developers to predict game outcomes in favor of a group of players using complex game structures. This article continues the study of game theory in the section on discrete dynamic cooperative games. A group of players performing actions sequentially strives to achieve the maximum result in a limited number of steps. The use of collected statistical data and the resulting matrices allows for the practical consideration of optimal strategies. The paper proposes a generalization of outcome matrices as a tool for forming initial stochastic data for a dynamic cooperative game, constructs a Markov model of transitions between game states, and formulates an algorithm for determining the optimal strategy.

Keywords: games theory, statistics, decision-making system, Markov model, outcome matrix, simulation, machine learning.

References

1. **von Neumann, John** "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele"[On the Theory of Games of Strategy] / von Neumann, John Mathematische Annalen [Mathematical Annals] (in German). – 1928.– 100 (1): 295–320.

2. **von Neumann, John; Morgenstern, Oskar** Theory of Games and Economic Behavior. / von Neumann, John; Morgenstern, Oskar – Princeton University Press. ISBN 978-0-691-13061-3.

3. **Dixit A., Nalebuff B.** Thinking Strategically: The Competitive Edge in Business, Politics and Everyday Life. / Dixit A., Nalebuff B. – N.Y.: Norton., 1991. – 394 c.

4. **Baranovska L. V., Bukovskiy O. M.** Mixed strategy Nashnequilibrium in one game and rationality. International Scientific and Practical Conference "WORLD SCIENCE"./ Baranovska L. V., Bukovskiy O. M. // Proceedings of the III International Scientific and Practical Conference "Scientific Issues of the Modernity" (April 27, 2017, Dubai, UAE), № 5(21),Vol. 1, May, pp.4–8.

5. **Kim W. Chan, Mauborgne R.** Stratehiia blakytnoho okeanu [Blue Ocean Strategy]. Per. z anhl. Kyiv: Klub Simeinoho Dozvillia, 2016. 383 p. [in Ukrainian]

6. **Koval Z. O.** Otsiniuvannia stratehii pidpryiemstva metodom teorii ihor [Evaluation of enterprise strategy using game theory]. Menedzhment ta pidpryiemnytstvo v Ukraini: etapy stanovlennia i problemy rozvytku, 2021, No. 2(6). [in Ukrainian]

7. **Kazimko V. V.** Zastosuvannia teorii ihor dlia modeliuvannia informatsiinykh problem bezpeky [Application of game theory for modeling information security problems]. Telekomunikatsiini ta informatsiini tekhnolohii, 2022, No. 1(74). [in Ukrainian]

8. **Martyniuk S., Tsurkan V.** Pobudova matematychnoi modeli hravtsia z vykorystanniam matrytsi rezultativ [Construction of a mathematical model of a player using an outcome matrix]. Zbirnyk statei "Matematyka. Informatsiini tekhnolohii. Osvita", No. 11, Lutsk, 2024, p. 86. [in Ukrainian]

9. **Martyniuk S., Tsurkan V.** Choosing the optimal strategy for a discrete dynamic cooperative game. Visnyk Kyivskoho Natsionalnoho Universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Fizyko-matematychni nauky, 2025, No. 2(81), pp. 182–186. DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/2.28

10. **Birge, J.R., Louveaux, F.** Introduction to Stochastic Programming. 2nd ed./ Birge, J.R., Louveaux, F. – N.Y.: Springer, 2011.

11. **Kirk, D.E.** Optimal Control Theory: An Introduction./ Kirk, D.E. – N.Y.: Dover Publications, Mineola, 2004.