УДК 517.764

І. М. Курбатова, *кандидат фіз.-мат. наук, доцент*
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
e-mail: irina.kurbatova27@gmail.com
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0215-6060

F-ПЛАНАРНІ ВІДОБРАЖЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ МАЙЖЕ КОМПЛЕКСНИХ ПРОСТОРІВ

Розглядаються деякі питання теорії F-планарних відображень многовидів, які наділені афінорною структурою певного типу. В теорії майже комплексних многовидів такі простори називають квазі-келеровими. Вони містять в собі відомі класи майже комплексних многовидів, таких як келерові, K-, H-простори. Розглянуто деякі властивості квазі-келерових просторів. Далі досліджуються їх F-планарні відображення. Доведено, що не існує нетривіальних геодезичних і канонічних F-планарних відображень між двома квазі-келеровими просторами. Побудовано низку геометричних об'єктів, інваріантних відносно F-планарних відображень основного типу.

Знайдено структуру тензора Рімана, яка є необхідною для того, щоб квазі-келеровий простір допускав F-планарне відображення на плоский рімановий простір, тобто був F-плоским.
MSC: 57R30.
Ключові слова: рімановий простір, тензор Рімана, тензор Річчі, майже комплексна структура, келеровий простір, квазі-келеровий простір, F-планарне відображення.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.2(46).354145

1. Вступ

Ми розглядаємо F-планарні відображення многовидів, що наділені деякою афінорною спеціальною структурою ([2; 5; 6]). Цей тип дифеоморфізмів ввели в розгляд М.С.Синюков і Й.Мікеш ([3; 6]) як одне з узагальнень геодезичних відображень ріманових просторів та голоморфно-проективних відображень келерових просторів.

Розглянемо простір афінної зв'язності без скруту A_n, віднесений до системи координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$, в якому визначена афінорна структура

Надійшла 10.10.2025

$F_i^h(x) \neq a\delta_i^h$, де δ_i^h- символи Кронекра, а- деякий інваріант.

Крива L, визначена рівняннями

$$x^h = x^h(t),$$
$$\lambda^h(t) = \frac{dx^h}{dt},$$

де t- параметр, називається *F-планарною*, якщо вздовж неї виконуються диференціальні рівняння

$$\lambda^h_{,\alpha}\lambda^\alpha = \rho_1\lambda^h + \rho_2 F^h_\alpha \lambda^\alpha.$$

Тут ρ_1, ρ_2- деякі (довільні) функції параметра t, комою позначається коваріантна похідна за зв'язністю A_n.

F-планарні криві містять в собі такі характерні класи кривих, як геодезичні лінії ріманових просторів ([1]) і голоморфно-проективні криві келерових просторів ([4]).

Нехай $(A_n, \Gamma^h_{ij}, F^h_i)$, $(\overline{A}_n, \overline{\Gamma}^h_{ij}, \overline{F}^h_i)$ - два простори афінної зв'язності з афінорними структурами F^h_{ij}, $\overline{F}^h_i$ і об'єктами афінної зв'язності Γ^h_{ij}, $\overline{\Gamma}^h_{ij}$, відповідно.

Відображення

$$(A_n, \Gamma^h_{ij}, F^h_i) \longrightarrow (\overline{A}_n, \overline{\Gamma}^h_{ij}, \overline{F}^h_i)$$

називається *F-планарним*, якщо в результаті його будь-яка F– планарна крива A_n переходить в $\overline{F}$ - планарну криву $\overline{A_n}$.

Говорять, що F- планарне відображення $f : A_n \longrightarrow \overline{A}_n$ *зберігає структуру*, якщо у загальній відносно відображення системі координат (х)

$$F^h_i(x) = \overline{F}^h_i(x)$$

.

В ([3]) доведено, що за умови $n > 3$ в загальній за відображенням системі координат (x^i) основні рівняння F-планарного відображення мають вигляд

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \psi_{(i}\delta^h_{j)} + \phi_{(i}F^h_{j)}, \tag{1}$$

$$F^h_i(x) = \overline{F}^h_i(x), \tag{2}$$

де ψ_i, ϕ_i - деякі ковектори; дужками позначена операція симетрування по відповідних індексах.

Далі ми розглядаємо F-планарні відображення ріманових просторів з майже комплексною структурою спеціального типу.

Дослідження проводяться в тензорній формі, локально, в класі достатньо гладких функцій.

Основні результати

2. F-планарні відображення квазі-келерових просторів

1°. Домовимось операцію згортання з афінором позначати таким чином:

$$A^{\cdots}_{\bar{i}\dots} = A^{\cdots}_{\alpha\dots} F^{\alpha}_{i}, \qquad A^{\bar{i}\dots}_{\dots} A^{\alpha\dots}_{\dots} F^{i}_{\alpha}$$

і називати *сполученням* по відповідному індексу. До речі вважаємо, що

$$A^{h}_{\bar{i},j} = A^{h}_{\alpha,j} F^{\alpha}_{i},$$

тобто сполучення проводиться після коваріантного диференціювання.

2°. Розглянемо ріманový простір (V_n, g_{ij}, F^h_i) з метричним тензором g_{ij} і афінорною структурою F^h_i.

За умови

$$F^h_\alpha F^\alpha_i = -\delta^h_i \tag{3}$$

структура називається *майже комплексною*, а при

$$g_{i\alpha} F^\alpha_j = -g_{j\alpha} F^\alpha_i \tag{4}$$

майже ермітовою. Якщо майже ермітова структура задовольняє умови

$$F^h_{i,j} = -F^h_{\alpha,\beta} F^\alpha_i F^\beta_j, \tag{5}$$

вона називається *квазі-келеровою*, а ріманов простір V_n з такою структурою - *квазі-келеровим.*

Легко довести, що квазі-келеровий простір з інтегровною структурою є келеровим. Дійсно, як відомо одним з критеріїв інтегровності афінорної структури F^h_i є рівність нулю її тензора Нейєнхейса ([1]):

$$N^h_{ij} = F^h_{\bar{i},j} - F^h_{\bar{j},\bar{i}} - F^h_{\bar{j},i} + F^h_{i,\bar{j}} = 0.$$

Після сполучення з афінором по індексу j і опускання індекса h в V_n з урахуванням (3)-(5) звідси отримуємо:

$$F_{hi,j} - F_{hj,i} = 0,$$

де

$$F_{hi} = g_{h\alpha} F_i^{\alpha}.$$

Порівнюючи цю рівність з результатом її циклюювання по індесах h, i, j, знаходимо

$$F_{hi,j} = 0,$$

а отже і

$$F_{i,j}^h = 0,$$

тобто наша афінорна структура - келерова.

Очевидно, що для келерової структури $N_{ij}^h = 0$.

Має місце

Теорема 1. *Квазі-келерова структура є інтегровною тоді і тільки тоді, коли вона келерова.*

Зауважимо також, що з (5) витікає $F_{i.\alpha}^{\alpha} = 0$. Структура, що задавольняє цю умову разом з (3),(4), називається *майже аптовою.*

3°. Розглянемо квазі-келерові простори (V_n, g_{ij}, F_i^h) і $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$. В загальній за відображенням системі координат (x^i) F-планарне відображення

$$(V_n, g_{ij}, F_i^h) \longrightarrow (\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h),$$

характеризується основними рівняннями:

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}\delta_{j)}^h + \phi_{(i}F_{j)}^h,$$

$$F_i^h(x) = \overline{F}_i^h(x),$$

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = -\delta_i^h,$$

$$F_{ij} = -F_{ji}, \qquad \overline{F}_{ij} = -\overline{F}_{ji}, \tag{6}$$

$$F_{ij} = g_{i\alpha}F_j^\alpha = g_{i\bar{j}}, \qquad \overline{F}_{ij} = \overline{g}_{i\alpha}F_j^\alpha = \overline{g}_{i\bar{j}},$$

$$F_{i,j}^h = -F_{\alpha,\beta}^h F_i^\alpha F_j^\beta, \qquad F_{i|j}^h = -F_{\alpha|\beta}^h F_i^\alpha F_j^\beta, \tag{7}$$

де $\Gamma^h_{ij}, \overline{\Gamma}^h_{ij}$ символи Кристофеля $V_n, \overline{V}_n$, відповідно; $\psi_i(x)$, $\phi_i(x)$ - деякі ковектори; дужками (i,j) позначено операцію симетрування ; кома «,» і вертикальна риска «|» - знаки коваріантної похідної відносно зв'язності V_n і $\overline{V}_n$, відповідно.

F-планарне відображення вважається тривіальним, якщо $\psi_i = \phi_i = 0$. Тому нетривіальні F-планарні відображення (V_n, g_{ij}, F^h_i) на $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}^h_i)$ з основними рівняннями (1) можуть бути такими:

$$I \quad \psi_i = 0, \quad \phi_i \neq 0;$$

$$II \quad \psi_i \neq 0, \quad \phi_i = 0;$$

$$III \quad \psi_i \neq 0, \quad \phi_i \neq 0.$$

У випадку I F-планарне відображення називають *канонічним;* у випадку II воно є геодезичним відображенням ([1; 6]); відображення III називають *F-планарними основного типу.*

Запишемо зв'зок між коваріантними похідними афінора в просторах V_n і $\overline{V}_n$, використовуючи (1):

$$F^h_{i|j} = F^h_{i,j} + \delta^h_j(\psi_{\overline{i}} + \phi_i) - F^h_j(\psi_i - \phi_{\overline{i}}).$$

Враховуючи те, що будь-який квазі-келеровий простір є майже аптовим, після згортання останньої рівності по індексах h, j маємо:

$$\psi_{\overline{i}} = -\phi_i, \qquad \phi_{\overline{i}} = \psi_i \tag{8}$$

Звідси очевидно, що у випадку F-планарних відображень квазі-келерових просторів і I, і II приводять нас до тривіального відображення. Отже має місце

Теорема 2. *Квазі-келерові простори не допускають нетривіальних геодезичних і канонічних F-планарних відображень.*

Зауважимо, що (8) слід додати до основних рівнянь F-планарних відображень квазі-келерових просторів.

Більш того, за умови (8) з рівнянь (1) маємо:

$$\psi_i = \frac{1}{n+2}\left(\overline{\Gamma}^\alpha_{i\alpha} - \Gamma^\alpha_{i\alpha}\right). \tag{9}$$

Це свідчить про те, що вектор ψ_i є градієнтним, тобто існує інваріант $\psi(x)$ такий, що

$$\psi_i = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^i}.$$

3. Геометричні об'єкти, інваріантні відносно F-планарних відображень квазі-келерових просторів

1°. Нехай квазі-келерові простори (V_n, g_{ij}, F_i^h) і $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$ знаходяться в F-планарному відображенні. Тоді мають місце співвідношення (1), в яких вектор ψ_i має вигляд (9). Підставимо вираз ψ_i в співвідношення (1), після чого представимо їх таким чином:

$$\overset{1}{T}{}^h_{ij} = \overset{1}{\overline{T}}{}^h_{ij},$$

$$\overset{1}{T}{}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \frac{1}{n+2}\left(\Gamma^\alpha_{\alpha(i}\delta^h_{j)} - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}F^\beta_{(i}F^h_{j)}\right). \tag{10}$$

Компоненти $\overset{1}{\overline{T}}{}^h_{ij}$ мають в $\overline{V}_n$ аналогічний вигляд.

$\overset{1}{T}{}^h_{ij}$ - нетензорний геометричний об'єкт, інваріантний відносно F-планарних відображень квазі-келерових просторів (типу параметрів Томаса в теорії геодезичних відображень ріманових просторів). Його збереження при деякому дифеоморфізмі квазі-келерових просторів є необхідною і достатньою умовою того, щоб він був F-планарним відображенням.

З огляду на (8) з (1) також очевидно, що

$$\overset{2}{T}{}^h_{ij} = \overset{2}{\overline{T}}{}^h_{ij},$$

$$\overset{2}{T}{}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \Gamma^{\underline{h}}_{\overline{ij}}. \tag{11}$$

Компоненти $\overset{2}{\overline{T}}{}^h_{ij}$ мають в $\overline{V}_n$ аналогічний вигляд.

$\overset{2}{T}{}^h_{ij}$ - нетензорний геометричний об'єкт, інваріантний відносно F-планарних відображень квазі-келерових просторів . Його збереження при деякому дифеоморфізмі квазі-келерових просторів є лише необхідною умовою того, щоб він був F-планарним відображенням.

2°. Далі знайдемо залежність між компонентами тензорів Рімана просторів V_n і $\overline{V}_n$, використовуючи відому формулу:

$$\overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + P^h_{ik,j} - P^h_{ij,k} + P^\alpha_{ik} P^h_{\alpha j} - P^\alpha_{ij} P^h_{\alpha k},$$

де P^h_{ij} - тензор деформації зв'язності. В нашому випадку

$$P^h_{ij} = \psi_{(i}\delta^h_{j)} + \phi_{(i}F^h_{j)}.$$

Отже з огляду на (3), (8) і градієнтність вектора ψ_i залежність між компонентами тензорів Рімана просторів V_n, $\overline{V}_n$ представляємо у вигляді:

$$\begin{aligned}\overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \psi_{ij}\delta^h_k - \psi_{ik}\delta^h_j -\\ -\big(\psi_{\bar{i}j} + \psi_\alpha F^\alpha_{i,j}\big)F^h_k + \big(\psi_{\bar{i}k} + \psi_\alpha F^\alpha_{i,k}\big)F^h_j +\\ +\big(\psi_{\bar{j}k} - \psi_{\bar{k}j} + \psi_\alpha F^\alpha_{j,k} - \psi_\alpha F^\alpha_{k,j}\big)F^h_i +\\ +\psi_{\bar{i}}\big(F^h_{j,k} - F^h_{k,j}\big) + \psi_{\bar{j}}F^h_{i,k} - \psi_{\bar{k}}F^h_{i,j},\end{aligned} \tag{12}$$

де

$$\psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i\psi_j + \psi_{\bar{i}}\psi_{\bar{j}}.$$

З огляду на симетричність тензора ψ_{ij} залежність між компонентами тензорів Річчі просторів V_n і $\overline{V}n$ приймає вигляд:

$$\overline{R}_{ij} = R_{ij} + n\psi_{ij} + 2\psi_{\overline{ij}} + \psi_\alpha\big(F^\alpha_{\bar{i},j} + F^\alpha_{j,\bar{i}}\big).$$

Звідси з урахуванням (3) і (5) витікає:

$$\overline{R}_{ij} + \overline{R}_{\overline{ij}} = R_{ij} + R_{\overline{ij}} + (n+2)\big(\psi_{ij} + \psi_{\overline{ij}}\big).$$

Два останні співвідношення і (9) дають змогу виключити ψ_{ij} і ψ_i з (12) та представити їх наступним чином:

$$\overset{3}{T}{}^h_{ijk} = \overset{3}{\overline{T}}{}^h_{ijk},$$

де

$$\begin{aligned}\overset{3}{T}{}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \frac{1}{n^2-4}\Big[\delta^h_j\Big(nR_{ik} - 2R_{\bar i\bar k} - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Big(F^\beta_{\bar i,k} + F^\beta_{k,\bar i}\Big)\Big) -\\ -\delta^h_k\Big(nR_{ij} - 2R_{\bar i\bar j} - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Big(F^\beta_{\bar i,j} + F^\beta_{j,\bar i}\Big)\Big) -\\ -F^h_j\Big(nR_{\bar i k} + 2R_{i\bar k} + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Big(F^\alpha_{k,i} + (n-1)F^\alpha_{i,k}\Big)\Big) +\\ +F^h_k\Big(nR_{\bar i j} + 2R_{i\bar j} + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Big(F^\alpha_{j,i} + (n-1)F^\alpha_{i,j}\Big)\Big)\Big] +\\ +\frac{1}{n+2}\Big[F^h_i\Big(R_{\bar k j} - R_{\bar j k} - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Big(F^\beta_{j,k} - F^\beta_{k,j}\Big)\Big) +\\ +\Gamma^\alpha_{\alpha\bar i}\Big(F^h_{j,k} - F^h_{k,j}\Big) + \Gamma^\alpha_{\alpha\bar k}F^h_{i,j} - \Gamma^\alpha_{\alpha\bar j}F^h_{i,k}\Big]\end{aligned} \tag{13}$$

Компоненти $\overset{3}{\overline{T}}{}^h_{ijk}$ мають в $\overline{V}_n$ аналогічний вигляд.

$\overset{3}{T}{}^h_{ijk}$ - нетензорний геометричний об'єкт, інваріантний відносно F-планарних відображень квазі-келерових просторів . Його збереження при деякому дифеоморфізмі квазі-келерових просторів є лише необхідною умовою того, щоб він був F-планарним відображенням.

3°. Для квазі-келерових просторів диференціальні умови (5) на жаль не дають можливості отримати властивості тензорів Рімана і Річчі такі, як, скажемо, для келерових просторів. Тому побудувати тензорний об'єкт, інварантний відносно F-планарних відображень квазі-келерових просторів за допомогою (12), як це робиться зазвичай, було б важко. Ми оберемо інший спосіб і скористаємось об'єктом $\overset{3}{T}{}^h_{ijk}$. Очевидно, що з

$$\overset{3}{T}{}^h_{ijk} = \overset{3}{\overline{T}}{}^h_{ijk}$$

витікає

$$Q^h_{ijk} = \overline{Q}{}^h_{ijk},$$

де

$$Q^h_{ijk} = \overset{3}{T}{}^h_{ijk} - \overset{3}{T}{}^{\bar h}_{\bar i jk} + \overset{3}{T}{}^h_{i\bar j\bar k} - \overset{3}{T}{}^{\bar h}_{\bar i\bar j\bar k}. \tag{14}$$

Якщо обчислити компоненти Q^h_{ijk} з урахуванням (13) і(3)-(5), то виявляється, що це тензор типу (1,3):

$$
\begin{aligned}
Q^h_{ijk} = R^h_{ijk} - R^{\overline{h}}_{\overline{i}jk} + R^h_{i\overline{j}\overline{k}} - R^{\overline{h}}_{\overline{i}\overline{j}\overline{k}} + \\
+\frac{2}{n+2}\Big[\delta^h_j \tilde{R}_{ik} - \delta^h_k \tilde{R}_{ij} - \\
-F^h_j \tilde{R}_{i\overline{k}} + F^h_k \tilde{R}_{i\overline{j}} + F^h_i\big(\tilde{R}_{j\overline{k}} - \tilde{R}_{k\overline{j}}\big)\Big],
\end{aligned}
\tag{15}
$$

де

$$
\tilde{R}_{ij} = R_{ij} + R_{\overline{i}\overline{j}}.
$$

Отже Q^h_{ijk} - тензорний геометричний об'єкт, інваріантний відносно F-планарних відображень квазі-келерових просторів . Його збереження при деякому дифеоморфізмі квазі-келерових просторів є лише необхідною умовою того, щоб він був F-планарним відображенням.

Q^h_{ijk} є узагальненням тензора голоморфно-проективної кривини, інваріантного відносно аналітично планарних відображень келерових просторів:

$$
\begin{aligned}
P^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n+2}\Big[\delta^h_j R_{ik} - \delta^h_k R_{ij} - \\
-F^h_j R_{i\overline{k}} + F^h_k R_{i\overline{j}} + 2F^h_i R_{j\overline{k}}\Big],
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Отже має місце

Теорема 3. *Геометричні об'єкти квазі-келерового простору, визначені формулами (10), (11), (13), (15), інваріантні відносно F-планарних відображень, що зберігають майже комплексну структуру.*

4°. Будемо називати *F-плоским* квазі-келеровий простір (V_n, g_{ij}, F^h_i), який допускає F-планарне відображення на плоский простір $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}^h_i)$. З огляду на $\overline{R}^h_{ijk} = 0$ і (15) в $\overline{V}_n$ маємо $\overline{Q}^h_{ijk} = 0$, тому в F-плоскому просторі V_n також $Q^h_{ijk} = 0$, тобто

$$
\begin{aligned}
R^h_{ijk} - R^{\overline{h}}_{\overline{i}jk} + R^h_{i\overline{j}\overline{k}} - R^{\overline{h}}_{\overline{i}\overline{j}\overline{k}} = \frac{-2}{n+2}\Big[\delta^h_j \widetilde{R}_{ik} - \delta^h_k \widetilde{R}_{ij} \\
- F^h_j \widetilde{R}_{i\overline{k}} + F^h_k \widetilde{R}_{i\overline{j}} + F^h_i\big(\widetilde{R}_{j\overline{k}} - \widetilde{R}_{k\overline{j}}\big)\Big].
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Результат згортання останньої рівності по індексах h, k має вигляд:

$$R_{ij} - R^{\alpha}_{\bar{i}j\bar{\alpha}} + R^{\alpha}_{\bar{i}\bar{j}\bar{\alpha}} + R_{\bar{i}\bar{j}} = \frac{2n}{n+2}\tilde{R}_{ij}.$$

В той же час згортаючи (17) з g^{ij} по i, j і опускаючи індекс h в V_n, отримуємо:

$$R_{hk} - R^{\alpha}_{\bar{h}k\bar{\alpha}} + R^{\alpha}_{\bar{h}\bar{k}\bar{\alpha}} + R_{\bar{h}\bar{j}} = \frac{4R}{n+2}g_{hk},$$

де R - скалярна кривина V_n.

Порівнюючи два останні співвідношення, знаходимо:

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{2R}{n}g_{ij}.$$

Отже (17) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} R^h_{ijk} - R^{\bar{h}}_{\bar{i}jk} + R^h_{\bar{i}\bar{j}k} - R^{\bar{h}}_{\bar{i}\bar{j}k} = \frac{4R}{n(n+2)}\Big[\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik} - \\ - F^h_j F_{ik} + F^h_k F_{ij} + 2F^h_i F_{kj}\Big]. \end{aligned} \tag{18}$$

Будемо називати квазі-келерові простори, тензор Рімана яких задовольняє умови (18), *узагальнено F-плоскими.* Підсумовуючи результати останнього пункту, доходимо висновку, що справедливі

Теорема 4. *Для того, щоб квазі-келеровий простір (V_n, g_{ij}, F^h_i) допускав F-планарне відображення на плоский простір, необхідно, щоб в ньому тензор Рімана задовольняв умови (18).*

Теорема 5. *Клас узагальнено F-плоских квазі-келерових просторів (V_n, g_{ij}, F^h_i)є замкнутим відностно F-планарних відображень.*

Легко довести, що відомі в теорії аналітично-планарних відображень майже комплексних многовидів *голоморфно-плоскі простори*, тензор Рімана яких характеризується властивістю:

$$R^h_{ijk} = \frac{R}{n(n+2)}\Big[\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_k g_{ij} - F^h_j F_{ik} + F^h_k F_{ij} + 2F^h_i F_{jk}\Big],$$

будуть також і узагальнено F-плоскими, але не навпаки.

Висновки

Ми розглядали деякі питання теорії F-планарних відображень многовидів, які наділені афінорною структурою певного типу і в теорії майже комплексних многовидів називають квазі-келеровими. Вони містять в собі відомі класи майже комплексних многовидів, таких як келерові, K-, H-простори.

Розглянуто деякі властивості квазі-келерових просторів.

Доведено,що квазі-келерова структура є інтегровною тоді і тільки тоді, коли вона - келерова.

Також доведено, що будь-який квазі-келеровий простір є майже аптовим. Тому не існує нетривіальних геодезичних і канонічних F-планарних відображень між двома квазі-келеровими просторами, а вектори, що беруть участь в основних рівняннях F-планарних відображень, між собою пов'язані.

Побудовано низку геометричних об'єктів, інваріантних відносно F-планарних відображень основного типу.

Знайдено структуру тензора Рімана, яка є необхідною для того, щоб квазі-келеровий простір допускав F-планарне відображення на плоский рімановий простір, тобто був F-плоским.

Доведено, що клас F-плоских квазі-келерових просторів є замкненим відносно F-планарних відображень.

Список літератури

1. **Синюков Н.С.** Геодезичекие отображения римановых пространств / Н.С.Синюков – М.: Наука, 1979. – 255 с.

2. **Широков А.П.** Структуры на дифференцируемых многообразиях / А.П.Широков //Итоги науки.Сер. Мат. Алгебра. Топол. Геом. 1967 – 1969. – С. 127–188.

3. **Микеш Й.** О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности/ Й.Микеш, Н.С.Синюков // Sov. Math.– 1983. – Т. 27, № 1. – С. 63–70.

4. **Otsuki T.** On curves in Kahlerian spaces/T.Otsuki, Y.Tashiro // Math. J. Okayama Univ.–1954.–vol. 4, –P. 57-78.

5. **Grey A.** The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariant / A.Grey, L.M.Hervella. – Annali di Matematica pura ed applicate (IV). - Vol.CXXIII. – 1980. – pp.35-58.

6. **Mikes J.** Differential Geometry of Special Mappings / J. Mikes, E.Stepanova, A.Vanzurova. – Palacky Univ. Press: Olomouc, Czech Republic, 2019. – 320 p.

Kurbatova I. M.

F-PLANAR MAPPINGS OF SPECIAL ALMOST COMPLEX SPACES

Summary

Some questions of the theory of F-planar mappings of manifolds endowed with an affine structure of a certain type are considered. In the theory of almost complex manifolds, such spaces are called quasi-Kahlerian spaces. They contain well-known classes of almost complex manifolds, such as Kahlerian, K-, H-spaces. Some properties of quasi-Kahlerian spaces are considered. Next, their F-planar mappings are investigated. It is proved that there are no non-trivial geodesic and canonical F-planar mappings between two quasi-Kahlerian spaces. A number of geometric objects invariant with respect to F-planar mappings of the basic type are constructed. The structure of the Riemannian tensor is found, which is necessary for a quasi-Kahlerian space to admit an F-planar mapping onto a flat Riemannian space, i.e., to be F-flat.
Keywords: Riemannian space, Riemannian tensor, Ricci tensor, almost complex structure, Kahlerian space, quasi-Kahlerian space, F-planar mapping.

References

1. Sinyukov N.S. (1979). *Geodesicheskiye otobrazheniya rimanovikh prostranstv [Geodesic mappings of Riemannian spaces]*. M.: Nauka,, 255 p.
2. Shirokov, A.P. (1969). Structures on differentiable manifolds [Struktury na differehtsiruyemykh mnogoobraziyakh] *Itogi nauki. Ser. Mat. Algebra. Topol. Geom. 1967* , P. 127–188.
3. Mikes, J., Sinyukov, N.S. (1983). O quasi-planarnykh otobrazheniyakh prostranstv affinnoy svyaznosty [On quasiplanar mappings of spaces of affine connection]. *Sov.Math.*, Vol. 27, №1. – P. 63–70.
4. Otsuki T., Tashiro Y. (1954) On curves in Kahlerian spaces. *Math. J. Okayama Univ.*,vol. 4,–1954.–p.p. 57-78.
5. Grey,A., Hervella,L.M. (1980) The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariant. *Annali di Matematica pura ed applicate (IV)*, Vol.CXXIII. - 1980. – pp.35-58.
6. Mikes,J., Stepanova,E., Vanzurova,A., (2019). *Differential Geometry of Special Mappings* Palacky Univ. Press: Olomouc, Czech Republic– 320 p.