Дослідження в математиці і механіці. – 2025. – Т. 30, вип. 2(46). – С. 7–17

УДК 517.925

Л. Г. Коваленко, *кандидат фіз.-мат. наук, доцент*
Одеськїй національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра математичного аналізу
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
e-mail: baier@ukr.net
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0007-9284-0881

АНАЛОГИ НЕРІВНОСТІ МАЛЕРА ДЛЯ ДРОБОВО-ЛОГАРИФМІЧНИХ ПОХІДНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ ПОЛІНОМІВ У ПРОСТОРІ L_0

Дробові похідні широко вивчають та застосовують при моделюванні багатьох процесів. Це сприяє виникненню всіляких узагальнень поняття дробової похідної для різних класів функцій. Дослідження розв'язків інтегральних рівнянь зі степенево-логарифмічними ядрами, а також задачі, пов'язані з рядами Фур'є вимірних функцій, призвели до поняття дробових степенево-логарифмічних похідних. В означеннях таких похідних, окрім степеневих множників, з'являються також логарифмічні. У статті вивчаються дробові суто-логарифмічні (без степеневих множників) похідні алгебраїчних поліномів у просторі L_0. Встановлені аналоги нерівності Малера для дробово-логарифмічних похідних алгебраїчних поліномів у просторі L_0. Отримано інтегральні зображення коефіцієнтів дробово-логарифмічної похідної і дробово-логарифмічну похідну алгебраїчного полінома подано як інтеграл.
MSC: 34A34, 34C41, 34E99.
Ключові слова: міра полінома за Малером, нерівність Малера, дробово-логарифмічна похідна, алгебраїчний поліном, композиція Сеге.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.2(46).354144

Вступ

Нехай $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ – алгебраїчний поліном точного степеня n з комплексними коефіцієнтами, $c_n \neq 0$, $c_0 \neq 0$ і $\mathcal{P}_n$ – множина таких поліномів.

Вздовж одиничного кола $z = e^{i\varphi}$, $P_n(e^{i\varphi})$ – тригонометричний поліном степеневого виду і, за Малером [1], *міру* P_n визначає функціонал

$$\mathcal{M}\left(P_n\right) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|P_n(e^{i\varphi})|d\varphi\right). \tag{1}$$

Надійшла 17.09.2025

Добре відомо (див., напр., [2], п. 6.7), що

$$\mathcal{M}\left(P_n\right) = \lim_{p\to 0+} \|P_n\|_p \tag{2}$$

де

$$\|P_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P_n(e^{i\varphi})|^p d\varphi\right)^{1/p}$$

– норми у просторах $L_p(-\pi,\pi)$ при $p>0$ (квазінорми для $0<p<1$).

У зв'язку з (2), міру $\mathcal{M}\left(P_n\right)$ ще називають "L_0 - *нормою*"(квазінормою) полінома P_n і позначають $\|P_n\|_0 = \mathcal{M}\left(P_n\right)$.

За формулою Йенсена для мероморфних в одиничному крузі $|z|\le 1$ функцій (див., напр. [3], відд. III, задача 175), функціонал (1) на поліномі $P_n(z) = c_n\prod\limits_{k=1}^{n}(z-\alpha_k)$ приймає значення

$$\mathcal{M}\left(P_n\right) = |c_n|\prod_{k=1}^{n}\max\{1,|\alpha_k|\}. \tag{3}$$

Таким чином, міра $\mathcal{M}\left(P_n\right)$ є певною характеристикою нулів полінома P_n, що знаходяться поза межами одиничного круга $|z|>1$.

В роботі [1] Малер вивчав поведінку нулів похідної полінома P_n' шляхом порівняння мір $\mathcal{M}\left(P_n'\right)$ та $\mathcal{M}\left(P_n\right)$ і отримав точну оцінку

$$\mathcal{M}\left(P_n'\right) \le n\mathcal{M}\left(P_n\right), \quad \forall P_n\in\mathcal{P}_n. \tag{4}$$

Нерівність (4), згідно з (3), ще можна переписати в альтернативній формі:

$$\prod_{k=1}^{n-1}\max\{1,|\beta_k|\} \le \prod_{k=1}^{n}\max\{1,|\alpha_k|\},$$

де $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ – нулі полінома P_n, а $\beta_1,\ldots,\beta_n$ – нулі P_n'.

Наразі, якщо нулі полінома $P_n\in\mathcal{P}_n$ належать одиничному кругу, то всі нулі його похідної P_n' також знаходяться в цьому крузі – відома теорема Гаусса. А от для поліномів $P_n\in\mathcal{P}_n$ та P_n', що мають нулі поза межами одиничного круга, згідно з (4), добуток таких нулів для P_n' не більше ніж відповідний добуток для P_n.

В [1] показано, що рівність в (4) можлива тоді і тільки тоді, коли всі нулі P_n належать одиничному колу $|z|=1$.

Доведення співвідношення (4) в [1] проводилось від супротивного, на основі факторизації полінома P_n і властивості неперервності міри $\mathcal{M}(P_n)$ та є доволі непростим. В інший спосіб оцінку (4) можна отримати за допомогою одного результату статті [4] де Брейна та Спрінгера для композиції поліномів, який відкриває також можливості узагальнення нерівності (4) на оператори більш широкого класу ніж диференціювання.

Композицією (*композицією Сеге*) поліномів

$$\Lambda_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda_k z^k \qquad \text{і} \qquad P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k z^k \tag{5}$$

називають поліном

$$\Lambda_n(z) \otimes P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda_k a_k z^k \tag{6}$$

(див. [5], відд. V, задача 151).

Зокрема,

$$P_n'(z) = n(1+z)^{n-1} \otimes P_n(z). \tag{7}$$

Як узагальнення задач про нулі похідної полінома, в роботі [4] вивчались співвідношення між нулями композиції $\Lambda_n(z) \otimes P_n(z)$ та нулями поліномів Λ_n і P_n, Ключовою для другої частини цієї роботи стала теорема 7, яку в наших позначеннях можна записати так:

Теорема А. *Для будь-яких полиномів Λ_n і P_n виконується нерівність*

$$\mathcal{M}\left(\Lambda_n(z) \otimes P_n(z)\right) \le \mathcal{M}\left(\Lambda_n\right) \mathcal{M}\left(P_n\right). \tag{8}$$

Легко бачити, що оцінка (8) на поліномах $P_n(z) = c(1+z)^n$, де $c \in \mathbb{C}$ є точною.

Тепер нерівність Малера (4) миттєво випливає з подання (7) похідної P_n' та теореми А, оскільки поліном $(1+z)^{n-1}$ має всі нулі на одиничному колі і, за формулою (3), $\mathcal{M}\left((1+z)^{n-1}\right) = 1$.

Загалом, міра $\mathcal{M}(\Lambda_n)$ в (8) є нормою оператора, значення якого на поліномі P_n задає композиція (6). У такому разі кажуть, що поліном $\Lambda_n(z)$ *утворює* оператор композиції Λ_n (оператор і поліном, що його утворює, позначають однаковим символом).

Незважаючи на те, що теорема А надає спосіб обчислення норм операторів композиції, точна оцінка величин $\mathcal{M}(P_n)$, коли нулі полінома Λ_n

не відомі, є проблемою. У цьому напрямку в [6] опубліковані дослідження Арестова у просторах, більш загальних до L_p, $p \geq 0$. Обмежимось формулюванням основного результату з [6] для випадку L_p, $p \geq 0$.

Нехай Λ_n^o – клас операторів Λ_n, утворених поліномами $\Lambda_n(z)$, нулі котрих знаходяться в одиничному крузі $|z| \leq 1$. А через Λ_n^∞ – клас операторів, для яких поліноми $\Lambda_n(z)$ мають усі нулі поза межами одиничного круга $|z| \geq 1$. Оператори з Λ_n^o, Λ_n^∞ та $\Lambda_n^o \cap \Lambda_n^\infty$ характеризуються тим, що образи поліномів P_n, усі нулі яких знаходяться в одиничному крузі $|z| \leq 1$, в області $|z| \geq 1$ і на одиничному колі $|z| = 1$ мають таке ж розташування нулів ([5], відд. V, задачі 151, 152, 116, 117).

Теорема B. *Для будь-якого оператора $\Lambda_n \in \Lambda_n^o \cup \Lambda_n^\infty$ на множині $\mathcal{P}_n$ справедлива нерівність*

$$\|\Lambda_n P_n\|_p \leq \alpha(\Lambda_n)\|P_n\|_p, \quad p \geq 0, \tag{9}$$

де $\alpha(\Lambda_n) = \max\{|\lambda_0|, |\lambda_n|\}$.

Для операторів Λ_n з класів Λ_n^o і $\Lambda_n^o \cap \Lambda_n^\infty$ нерівність (9) є точною і на поліномах az^n та $az^n + b$ $(a, b \in \mathbb{C})$, відповідно, перетворюється в рівність.

Проте для багатьох класичних операторів на множині $\mathcal{P}_n$ відповідний оператор композиції не належить класу $\Lambda_n^o \cup \Lambda_n^\infty$. Такими є, приміром, оператори дробового степенево-логарифмічного диференціювання

$$J^{\alpha,\beta} P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k k^\alpha \log^\beta (k+1) z^{k-1}, \quad \alpha, \beta \geq 0$$

(див., наприклад, [7], стор. 330).

Для операторів $J^{\alpha,\beta}$ аналоги нерівності (4) виду

$$\mathcal{M}\left(J^{\alpha,\beta} P_n\right) \leq A(n, \alpha, \beta)\mathcal{M}(P_n), \quad \text{де } A(n, \alpha, \beta) \in \mathbb{R} \tag{10}$$

досліджувались в роботах [8] $(0 \leq \alpha < 1, \beta = 1)$ та [10] $(\alpha = 0, \beta = 1)$.

В даній статті вивчається нерівність (10) для дробово-логарифмічної похідної $(\alpha = 0)$ порядку $\beta \in (0, 1)$,

$$J^\beta P_n(z) \equiv J^{0,\beta} P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k \log^\beta (k+1) z^{k-1}, \quad \beta \in (0, 1). \tag{11}$$

У разі граничних значень $\beta = 0$ та $\beta = 1$, тобто для похідної нульового порядку $J^0 P_n(z) = \frac{1}{z}(P_n(z) - c_0)$ та дробово-логарифмічної похідної першого порядку $J^1 P_n(z)$ відомі такі теореми:

Теорема C([8], част. вип. теореми 1). *Для будь-якого полінома $P_n \in \mathcal{P}_n$ степеня $n \geq 1$ справедлива нерівність*

$$\mathcal{M}\left(P_n(z) - c_0\right) \leq A(n)\mathcal{M}(P_n),$$

де

$$A(n) = \prod_{n/6<k<5n/6} 2\sin\frac{\pi k}{n}.$$

Оцінка теореми C на поліномах $P_n(z) = (1+z)^n$ є точною, оскільки як раз $\mathcal{M}\left((1+z)^n - 1\right) = A(n)$. При малих n не складно порахувати, що $A(n) = n$ для $n = 2, 3, 4, 5, 6$. Асимптотику $A(n) \approx (1,4)^n$ див., наприклад, в [9].

Теорема D ([10], теорема 1). *Для будь-якого полінома $P_n \in \mathcal{P}_n$ степеня $n \geq 1$ виконується нерівність*

$$\mathcal{M}\left(J^1 P_n\right) \leq A(n)\mathcal{M}(P_n), \qquad \text{де } A(n) \leq 2,9(1,4)^n \ln^{2/3} n.$$

Основні результати

Теорема. *Для будь-якого полінома $P_n \in \mathcal{P}_n$, $n \geq 1$ та його дробово-логарифмічної похідної $J^\beta P_n$ порядка $0 < \beta < 1$ виконується нерівність*

$$\mathcal{M}\left(J^\beta P_n\right) \leq A(n)\mathcal{M}(P_n), \quad \text{де } A(n) \leq 3,1(1,4)^n \ln^{2\beta/3}(n+1).$$

Доведення теореми базується на зображенні логарифмічних множників перетворення (11) у вигляді інтегралів.

Лема. *Для будь-якого $0 < \beta < 1$ і $k \in N$ справедлива рівність*

$$\ln^\beta(k+1) = \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1+\beta}\Gamma(u)} \int_0^1 \frac{1-t^k}{\ln^{1-u}(1/t)}\, dt.$$

Доведення. Скористаємось інтегральними формами степеневої функції: якщо $p > 0$, то

$$p^\beta = \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-pu}}{u^{1+\beta}}\, du, \quad \text{коли} \quad 0 < \beta < 1 \tag{12}$$

(див. [8], лема 1) та

$$p^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} u^{\beta-1} e^{-pu}\, du \quad \text{для } \beta > 0 \tag{13}$$

(випливає з означення гамма-функції Ейлера).

Послідовним застосування інтегралів (12), (13) маємо:

$$\ln^{\beta}(k+1) = \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \frac{1}{(k+1)^u}}{u^{1+\beta}}\, du =$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1+\beta}\Gamma(u)} \int_0^{+\infty} t^{u-1}\left(1 - e^{-kt}\right) e^{-t}\, dt =$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1+\beta}\Gamma(u)} \int_0^{1} \frac{1-t^k}{\ln^{1-u}(1/t)}\, dt,$$

що і треба було довести.

Доведення теореми. Нехай $0 < \beta < 1$. Запишемо полиноми $P_n \in \mathcal{P}_n$ та $J^{\beta}P_n$ у вигляді, як того потребує композиція:

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k z^k \quad \text{і} \quad J^{\beta}P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k a_k \log^{\beta}(k+1) z^{k-1}.$$

Легко бачити, що $J^{\beta}P_n(z) = \frac{1}{z}J^{\beta}(1+z)^n \otimes P_n(z)$ і, згідно з нерівністю (8), доведення теореми зводиться до оцінки мір поліномів $\mathcal{M}\left(J^{\beta}(1+z)^n\right)$.

За лемою, запишемо поліном $J^{\beta}(1+z)^n$ в інтегральній формі:

$$J^{\beta}(1+z)^n = \sum_{k=1}^{n} c_k \log^{\beta}(k+1) z^{k-1} =$$

$$= \frac{\beta}{z\ln^{\beta} 2\Gamma(1-\beta)} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1+\beta}\Gamma(u)} \int_0^{1} \frac{(1+z)^n - (1+tz)^n}{\ln^{1-u}(1/t)}\, dt$$

і на одиничному колі $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ маємо: $\left|J^{\beta}(1+e^{i\varphi})^n\right| \le$

$$\le \frac{\beta}{\ln^{\beta} 2\Gamma(1-\beta)} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{1+\beta}\Gamma(u)} \int_0^{1} \frac{\left|(1+e^{i\varphi})^n - (1+te^{i\varphi})^n\right|}{\ln^{1-u}(1/t)}\, dt. \tag{14}$$

Далі, для будь-якого $t \in (0,1)$ і $\varphi \in (-\pi, \pi)$ правдива нерівність

$$\left|(1+e^{i\varphi})^n - (1+te^{i\varphi})^n\right| < (1-t)\sum_{k=0}^{n-1} |1+te^{i\varphi}|^{n-k-1} |1+e^{i\varphi}|^k. \tag{15}$$

Оскільки

$$|1+te^{i\varphi}|^2 = |1+e^{i\varphi}|^2 t + (1-t)^2 < 1 - (1-|1+e^{i\varphi}|^2)t, \tag{16}$$

то для тих значень φ, за яких $|1+e^{i\varphi}| < 1$, також і $|1+te^{i\varphi}| < 1$.

Таким чином, для будь-якого $t \in (0,1)$ і $\varphi : |1+e^{i\varphi}| < 1$ з (15) маємо:

$$\left|(1+e^{i\varphi})^n - (1+te^{i\varphi})^n\right| < (1-t)\sum_{k=0}^{n-1} |1+e^{i\varphi}|^k < \frac{1-t}{1-|1+e^{i\varphi}|}. \tag{17}$$

Звідси продовжимо оцінку (14) на множині значень $\varphi : |1+e^{i\varphi}| < 1$:

$$\left|J^\beta(1+e^{i\varphi})^n\right| < \frac{\ln^{1-\beta} 2}{1-|1+e^{i\varphi}|}, \quad \forall\varphi : |1+e^{i\varphi}| < 1 \tag{18}$$

(скористались також лемою "справа наліво"при $k=1$).

Якщо ж $|1+e^{i\varphi}| > 1$, проведемо необхідну оцінку в інший спосіб. Легко бачити, що

$$(1+e^{i\varphi})^n - (1+te^{i\varphi})^n = ne^{-i\varphi}\int_t^1 \left(1+xe^{i\varphi}\right)^{n-1} dx,$$

Тоді (у пригоді стане також нерівність (16)) маємо:

$$\left|(1+e^{i\varphi})^n - (1+te^{i\varphi})^n\right| \le n\int_t^1 \left|1+xe^{i\varphi}\right|^{n-1} dx <$$

$$< n\int_t^1 \left(1+(|1+e^{i\varphi}|^2-1)x\right)^{\frac{n-1}{2}} dx = \frac{2n}{n+1}\left.\frac{\left(1+(|1+e^{i\varphi}|^2-1)x\right)^{\frac{n+1}{2}}}{|1+e^{i\varphi}|^2-1}\right|_t^1 <$$

$$< 2\frac{|1+e^{i\varphi}|^{n+1} - \left(|1+e^{i\varphi}|^2 t + 1 - t\right)^{\frac{n+1}{2}}}{|1+e^{i\varphi}|^2-1} <$$

$$< 2\frac{|1+e^{i\varphi}|^n(1-t^{\frac{n+1}{2}})}{|1+e^{i\varphi}|-1}, \ \forall t \in (0,1), \ \varphi : |1+e^{i\varphi}| > 1 \tag{19}$$

і

$$\left|J^\beta(1+e^{i\varphi})^n\right| < \frac{2}{\ln^\beta 2}\frac{|1+e^{i\varphi}|^n \ln^\beta\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}{|1+e^{i\varphi}|-1}, \quad \forall\varphi : |1+e^{i\varphi}| > 1. \tag{20}$$

Залишається розв'язати елементарну нерівність

$$|1+e^{i\varphi}|^2 = \left|e^{-i\varphi/2} + e^{i\varphi/2}\right|^2 = 4\cos^2\varphi/2 > 1 \ \Leftrightarrow \ \varphi \in (-2\pi/3, 2\pi/3)$$

і перейти до оцінки міри $\mathcal{M}\left(J^{\beta}(1+z)^n\right)$.

Опорними для подальшого стануть нерівності (18) та (20). За означенням міри,

$$\mathcal{M}\left(J^{\beta}(1+z)^n\right) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|J^{\beta}(1+e^{i\varphi})^n|\, d\varphi\right) <$$

$$< \frac{\left(2\ln^{\beta}(n+1)\right)^{\frac{2}{3}}}{\ln^{(\beta-1)/3} 2} \exp\left(\frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln\left|1-2\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi\right) <$$

$$< 3,1(1,4)^n \ln^{2\beta/3}(n+1).$$

Теорема доведена.

Зауваження. *Питання про точність отриманої оцінки міри дробово-логарифмічної похідної полінома* $(1+z)^n$, *яка і визначає коефіцієнт* $A(n,\beta)$ *теореми, доки залишається без відповіді. Зазначимо, що нерівності* (17) *та* (19) *дозволяють оцінити міру поліномів* $(1+z)^n - (1+tz)^n$ *для будь-якого* $t \in (0,1)$. *А саме,*

$$\mathcal{M}\left((1+z)^n - (1+tz)^n\right) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|(1+e^{i\varphi})^n - (1+te^{i\varphi})^n|\, d\varphi\right) <$$

$$< 3,6(1-t^n)^{\frac{2}{3}}(1-t)^{1/3}(1,4)^n < 3,6(1-t^n)(1,4)^n. \qquad (21)$$

Оцінка (21) *стане у пригоді в подальших дослідженнях. Міри поліномів* $(1+z)^n - (1+tz)^n$ *визначають, наприклад, коефіцієнт в обернених нерівностях, коли міру приросту полінома вздовж радіуса одиничного кола оцінюють мірою його похідної (див. [11]).*

Висновки

Оцінка мір поліномів у випадку, коли нулі поліномів невідомі, складає певні труднощі. У статті за допомогою інтегрального зображення дробово-логарифмічної похідної алгебраїчного полінома отримано аналог нерівності Малера у просторі L_0. Дослідження продовжують тематику роботи [10].

Список літератури

1. **Mahler K.** On the zeros of the derivative of a polinomial/K. Mahler// Proc. Roy. Soc. London Ser. A. - 1961. - V. 264. №1317. - P. 145-154.

2. **Харди Г., Литлвуд Д., Полиа Г.** Неравенства / Г. Харди , Д. Литлвуд , Г. Полиа. - М.: ИЛ, 1948. - 456 с.

3. **Полиа Г.** Задачи и теоремы из анализа/ Г. Полиа, Г. Сеге. Т. I – М.: Наука, 1978. – 391 с.

4. **De Bruijn N. J., Springer T. A.** On the zeros of compasition polynomials/ N. J. De Bruijn, T. A. Springer // Jndag. Math. - 1947, V. 9. - P. 406-414.

5. **Полиа Г.** Задачи и теоремы из анализа/ Г. Полиа, Г. Сеге. Т. II– М.: Наука, 1978. – 431 с.

6. **Арестов В. В.** Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности / В. В. Арестов // Матем. заметки. - 1990. - Т. 48, № 4. - С. 7-18.

7. **Самко С. Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения/ С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск.: Наука и техника, 1987. – 688 с.

8. **Стороженко Э. А., Коваленко Л. Г.** О дробном интегродифференцировании комплексных полиномов в L_0/ Э. А. Стороженко, Л. Г. Коваленко // Укр. мат. журн. - 2017. - Т. 69, №5. - С. 705-710.

9. **Стороженко Э. А.** К одной задаче Малера о нулях полинома и его производной / Э. А. Стороженко // Матем. сборник. - 1996. - Т. 187, № 5. - С. 111-120.

10. **Стороженко Э. А., Коваленко Л. Г.** Неравенство типа Бернштейна для дробно-логарифмических производных полиномов в L_0/ Э. А. Стороженко, Л. Г. Коваленко // Дослідження в математиці і механіці. - 2015. - Т. 20, вип. 2(26). - С. 43-51.

11. **Storoženko E., Saprikin S.** On some analogs of converse Bernstein inequalities on L_0/ E. Storoženko, S. Saprikin // Functiones et approximatio XXV, Adam Mickiewicz University Pres. - 1997. - P. 111-119. ISBN 83-232-0844-1, ISSN 0208-6573.

Kovalenko L. G.

Analogues of Mahler's inequality for fractional logarithmic derivatives of algebraic polynomials in the space L_0

Summary

Fractional derivatives are widely studied and used in modeling many processes. This leads to the appearance of various generalizations of the concept of a fractional derivative for different classes of functions. Studies of solutions of integral equations with power-log kernels, as well as problems related to Fourier series of measurable functions, led to the concept of fractional power-log derivatives. In addition to power factors, logarithmic ones also appear in the definitions. The article studies fractional purely logarithmic (without power factors) derivatives of algebraic polynomials in the space L_0. Analogues of Mahler's inequality for fractional logarithmic derivatives of algebraic polynomials in the space L_0 are established. Integral representations of the coefficients of the fractional logarithmic derivative are obtained, and the fractional logarithmic derivative of the algebraic polynomial is represented as an integral.

Keywords: Mahler's measure of a polynomial, Mahler's inequality, a fractional logarithmic derivative, an algebraic polynomial, the composition Sege.

References

1. Mahler K. (1961). On the zeros of the derivative of a polinomial. Proc. Roy. Soc. London Ser. A., V. 264, №1317, P. 145-154.
2. Hardy, G., Littelwood D., Polia, G. (1948). *Neravenstva* M.: IL, 456 p.
3. Polia, G., Sege, G. (1978). *Zadachi i teoremy iz analiza [Problems and theorems from calculus], Vol I.* M: Nauka, 391 p.
4. De Bruijn, N. J., Springer, T. A. (1947). On the zeros of compasition polynomials. Jndag. Math., Vol. 9, P. 406-414.
5. Polia, G., Sege, G. (1978). *Zadachi i teoremy iz analiza [Problems and theorems from calculus], Vol II.* M: Nauka, 431 p.
6. Arestov, V. V. (1990). Integralnie neravenstva dlya algebraicheskikh mnogochlenov na edinichnoj okruzhnosti [Integral inequalities for algebraic polynomials on the unit circle]. Matem. zametki.,Vol. 48, № 4, P. 7-18.
7. Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. (1987). *Integraly i proizvodnye drobnoho poryadka i nekotorye ih prilozheniya [Fractional integrals and derivatives with some applications].* Minsk: Nauka i tekhnika, 688 p.

8. Storozhenko, E. A., Kovalenko, L. G. (2017). O drobnom integrodiferenzirivanie kompleksnykh polinomov v L_0 [On fractional integrodifferentiation of complex polynomials in space L_0]. Matem. zapiski, Vol. 96, №5.– P. 705–710.

9. Storozhenko, E. A. (1996). K odnoi zadache Malera o nulyakh polinoma i ego proi zvodnoy [For one Mahler's prooblem about zeros of polinomial and its derivative]. Matem. sbornik, Vol. 187, №5, P. 111–120.

10. Storozhenko, E. A., Kovalenko, L. G. (2015). Neravenstvo tipa Bernstiena dla drobnologarifmicheskich proizvodnih polinomov v prostranstvah L_0 [Bernstein type inequalities for fractional logarithmic derivatives of polynomials in space L_0]. Visnyk Odes'kogo Natzional'nogo universitetu. Researches in Mathematics and Mechanics, Vol. 2, №2(26).– P. 43–51.

11. Storozhenko E., Saprikin S. (1997). On some analogs of converse Bernstein inequalities on L_0. Functiones et approximatio XXV, Adam Mickiewicz University Pres. P. 111-119. ISBN 83-232-0844-1, ISSN 0208-6573.