

УДК 517.9

**Г. Є. Самкова**, кандидат фіз.-мат. наук, доцент  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь  
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна  
e-mail: SamkovaGalina@i.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0000-1340-6067>

**Н. В. Шарай**, кандидат фіз.-мат. наук, доцент  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь  
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна  
e-mail: sharay@onu.edu.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0003-4007-651>

**О. О. Драгун**, студентка  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь  
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна  
e-mail: o.drahun@stud.onu.edu.ua

## АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З РЕГУЛЯРНИМИ ТА СИНГУЛЯРНИМИ ЖМУТКАМИ МАТРИЦЬ

Дана стаття присвячена дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків систем диференціальних рівнянь, побудованих на основі регулярних та сингулярних матричних жмутків. Такі системи виникають у процесі моделювання складних динамічних явищ і характеризуються поєднанням диференціальних, алгебраїчних та функціональних співвідношень.

У роботі проаналізовано структурні властивості матричних жмутків, встановлено умови їх еквівалентних перетворень та побудовано відповідні канонічні форми. Основну увагу зосереджено на дослідженні задачі Коші для сингулярних систем та впливі алгебраїчної структури жмутка на існування, єдиність і характер асимптотичної поведінки розв'язків. Отримані результати дозволяють описати локальну поведінку розв'язків і можуть бути застосовані до аналізу широкого класу диференціально-алгебраїчних систем.

MSC: 34A09, 34A30, 15A22.

*Ключові слова:* система диференціальних рівнянь, задача Коші, диференціально-алгебраїчні системи, матричний жмуток, регулярний жмуток, сингулярний жмуток, канонічна форма.

*DOI:* [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.2\(46\).352812](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.2(46).352812)

## Вступ

Диференціальні системи, побудовані на основі регулярних і сингулярних матричних жмутків, є важливим об'єктом сучасної теоретичної та прикладної математики. Такі системи природно виникають під час моделювання динамічних процесів, у яких еволюція стану визначається не лише диференціальними рівняннями, а й алгебраїчною структурою відповідних матричних операторів. Подібні моделі застосовуються в математичній фізиці, теорії керування, технічній механіці, біології та економічній динаміці.

Початок систематичного дослідження диференціальних систем, пов'язаних із матричними жмутками, пов'язують із роботами Ф. Р. Гантмахера, який встановив зв'язок між алгебраїчною структурою жмутка  $A + \lambda B$  та властивостями розв'язків системи

$$Ax + B \frac{dx}{dt} = f(t),$$

де  $A$  і  $B$  — сталі матриці. Надалі ці результати були розширені на випадок жмутків зі змінними елементами, що сприяло розвитку теорії функціональних матриць і сингулярних операторів.

Значний внесок у класифікацію матричних жмутків, побудову канонічних форм і дослідження спектральних характеристик зробили S. Campbell, R. Marz, M. Hanke, а також українські науковці А. М. Самойленко, Н. І. Шкіль, В. П. Яковець та інші. У випадку сингулярних або прямокутних матриць задача Коші може втрачати стандартні властивості розв'язності, що зумовлює необхідність застосування спеціальних методів редукції та декомпозиції системи.

Розглядається задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} Ax + B \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \end{cases} \quad (1)$$

де  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , а вектор-функція  $f$  є неперервною в деякій області  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

Основну увагу зосереджено на аналізі структури жмутка  $A + \lambda B$ , побудові канонічних форм і дослідженні впливу регулярних та сингулярних компонентів на розв'язність системи. Поєднання алгебраїчних і аналітичних методів дозволяє встановити умови існування та кількості розв'язків задачі Коші й описати їхню локальну поведінку.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

### 1. Регулярні та сингулярні матричні жмутки: структура і канонічні перетворення

**Означення.** Жмуток  $A + \lambda B$  називається *регулярним*, якщо виконуються такі умови:

1.  $A$  і  $B$  — квадратні матриці одного й того ж порядку  $n$ ;
2. визначник  $|A + \lambda B|$  не є тотожно нульовим многочленом.

У випадках, коли хоча б одна з умов порушується, тобто  $m \neq n$  або  $|A + \lambda B| \equiv 0$ , жмуток називають *сингулярним*.

**Означення.** Два жмутки прямокутних матриць  $A + \lambda B$  і  $A_1 + \lambda B_1$  одного і того ж розміру  $m \times n$  називаються *строго еквівалентними*, якщо існують квадратні матриці  $P$  та  $Q$  зі сталими ненульовими визначниками такі, що

$$P(A + \lambda B)Q = A_1 + \lambda B_1,$$

де  $P$  та  $Q$  — сталі квадратні невідроджені матриці порядків  $m$  і  $n$ , які не залежать від  $\lambda$ .

**Теорема про еквівалентність жмутків матриць.** Для того щоб два довільних жмутка прямокутних матриць  $A + \lambda B$  і  $A_1 + \lambda B_1$  тієї ж самої розмірності  $m \times n$  були строго еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб ці жмутки мали одні і ті ж мінімальні індекси і одні і ті ж «кінцеві» та «нескінченні» елементарні дільники.

**Теорема про еквівалентність регулярного жмутка матриць.** Будь-який регулярний жмуток  $A + \lambda B$  строго еквівалентний квазідіагональному жмутку вигляду

$$\{N^{u_1}, N^{u_2}, \dots, N^{u_s}, J + \lambda E\} \quad (N^{(u)} = E^{(u)} + \lambda H^{(u)}),$$

де блоки  $N^{u_1}, \dots, N^{u_s}$  відповідають нескінченним елементарним дільникам  $\mu^{u_1}, \dots, \mu^{u_s}$ , а блок  $J + \lambda E$  — кінцевим елементарним дільникам жмутка.

**Теорема про еквівалентність сингулярного жмутка матриць.**

Кожний сингулярний жмуток  $A + \lambda B$  може бути строго еквівалентним перетворений до канонічного квазидіагонального вигляду

$$\text{diag}\left\{0_{h \times g}, L_{\varepsilon_{g+1}}, \dots, L_{\varepsilon_p}; L'_{\eta_{h+1}}, \dots, L'_{\eta_g}; N^{(u_1)}, \dots, N^{(u_s)}; J + \lambda E\right\},$$

де  $N^{(u)} = E^{(u)} + \lambda H^{(u)}$ , матриця  $J$  має жорданову форму, а  $L'_\eta$  — транспонована до  $L_\eta$ .

Наведемо вигляд блока  $L_\varepsilon$ :

$$L_\varepsilon = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{розмір } \varepsilon \times (\varepsilon + 1).$$

**2. Функціонально-диференціальні властивості сингулярної підсистеми**

З урахуванням канонічного вигляду жмутка матриць задача (1) зводиться до функціонально-диференціальної задачі вигляду

$$\begin{cases} \psi(t, z_1, z_2) = 0, \\ \frac{d}{dt} z_2 = \varphi(t, z_1, z_2), \\ z_1(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \\ z_2(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \end{cases} \quad (2)$$

для якої виконуються умови:

$$t \in \mathbb{R}, \quad z_1 : (0; t_0] \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad z_2 : (0; t_0] \rightarrow \mathbb{R}^l, \quad p + l = n,$$

$$\psi : (0; t_0] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \varphi : (0; t_0] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l, \quad k + l = m.$$

Дослідження починаємо з питання про розв'язання функціонального блоку:

$$\begin{cases} \psi(t, z_1, z_2) = 0, \\ z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Розглядається, за яких умов цю задачу можна розв'язати щодо  $z_1$ , або щодо  $z_2$ , або щодо частини компонент  $z_1, z_2$ .

Нехай

$$D_1 = \{(t, z_1, z_2) : t \in (0, t_0], \|z_1\| < \alpha, \|z_2\| < \beta\}, \quad \alpha, \beta > 0,$$

де  $D_1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Означення.** Нехай вектор-функція  $\psi$  неперервна в  $D_1$ . Будемо говорити, що функція  $\psi$  задовольняє умові  $S_1$ , якщо:

1. функція  $\psi$  доозначена в точці  $(0, 0, 0)$ , причому  $\psi(0, 0, 0) = 0$ ;
2. існують неперервні в  $D_1$  часткові похідні  $\psi$  за всіма компонентами  $z_1$  і  $z_2$ .

**Означення.** Нехай вектор-функція  $\varphi$  неперервна в  $D_1$ . Будемо говорити, що функція  $\varphi$  задовольняє умові  $S_2$ , якщо:

1. функція  $\varphi$  доозначена в точці  $(0, 0, 0)$ , причому  $\varphi(0, 0, 0) = 0$ ;
2.  $\varphi$  неперервна за  $t$  і неперервно диференційовна за  $z_1$  та  $z_2$  в  $D_1$ .

**Теорема 1.** Припустимо, що  $k = j$  та  $1 \leq j < p$ , а  $\psi$  і  $\varphi$  задовольняють умови  $S_1$  і  $S_2$  відповідно. Якщо додатково виконується

$$\left. \frac{D(\psi)}{D(z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1j})} \right|_{(0, \dots, 0)} \neq 0, \quad (4)$$

то задача (2) має принаймні один розв'язок на сегменті  $t \in [0, t_1]$ , де  $0 < t_1 \leq t_0$ .

**Доведення.** Оскільки  $\psi$  та  $\varphi$  задовольняють  $S_1$  і  $S_2$  та виконується (4), то за теоремою про неявну функцію система  $\psi(t, z_1, z_2) = 0$  розв'язується відносно перших  $j$  компонент  $z_1$ , тобто

$$z_{1i} = \xi_i(t, z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_2), \quad i = 1, \dots, j.$$

Функції  $\xi_i$  неперервні за  $t$  та мають неперервні частинні похідні за змінними  $z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_2$  на множині

$$D_3 = \{(t, z_1, z_2) : t \in [0, t_3], \|z_1\| < \alpha_3, \|z_2\| < \beta_3, 0 < t_3 \leq t_0\},$$

де  $0 < \alpha_3 \leq \alpha$ ,  $0 < \beta_3 \leq \beta$ , причому

$$\xi_i(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Підставивши  $z_{1i}$  у диференціальну частину (2), одержуємо задачу Коші

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z_2 = \varphi(t, \xi_1(t, \cdot), \dots, \xi_j(t, \cdot), z_{1j+1}, \dots, z_{1p}, z_2), \\ z_2(0) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Для кожного фіксованого набору параметрів існує єдиний розв'язок цієї задачі; отже розв'язок вихідної задачі (3) утворює  $(p - j)$ -параметричну сім'ю, що залежить від  $(p - j)$  довільних  $C^1$ -функцій.

**Теорему доведено.**

Тепер перейдемо до диференціальної підсистеми:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z_2 = \varphi(t, z_1, z_2), \\ z_1(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \\ z_2(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0. \end{cases} \quad (6)$$

**Теорема 2.** Нехай:

1.  $\varphi$  неперервна в  $T \times Z_1 \times Z_2$  і виконується умова Ліпшиця за  $z_2$ :

$$\|\varphi(t, z_1, \tilde{z}_2) - \varphi(t, z_1, \tilde{\tilde{z}}_2)\| \leq L \|\tilde{z}_2 - \tilde{\tilde{z}}_2\|$$

рівномірно для  $t \in (0, t_0]$  та кожної  $z_1(t) \in C$ ,  $z_1(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ ;

2. існує  $q \in (0, 1)$  таке, що

$$L \left| \int_0^t d\tau \right| \leq q, \quad t \in (0, t_0];$$

3. для всіх  $t \in (0, t_0]$  маємо  $\varphi(t, z_1(t), 0) = 0$ .

Тоді задача Коші (6) має єдиний розв'язок  $z_2^*(t, z_1(t))$ .

**Доведення.** Визначимо оператор

$$\Phi(z_2)(t) = \int_0^t \varphi(\tau, z_1(\tau), z_2(\tau)) d\tau.$$

За умовами теореми  $\Phi$  неперервний, відображає замкнену кулю в себе та є стискуючим:

$$\|\Phi(\tilde{z}_2) - \Phi(\tilde{z}_2)\| \leq L \left| \int_0^t d\tau \right| \|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_2\| \leq q \|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_2\|.$$

За принципом стискуючих відображень існує єдина нерухома точка, тобто єдиний розв'язок.

**Теорему доведено.**

### 3. Обмеженість та особливості поведінки розв'язків задачі Коші

Розглянемо задачу Коші у векторній формі:

$$\begin{cases} Ax + B \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \end{cases} \quad (7)$$

де  $t \in T$ ,  $T = (0, t_0]$ ,  $t_0 > 0$ , а  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \neq n$ .

Позначимо  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$  і нехай  $f$  неперервна на  $T \times X$ ,  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Нехай також  $f(t, x) = F(t, x) + x(t)$ , де  $F$  неперервна. Тоді

$$x(t) = Ax(t) + B \frac{dx}{dt} - F(t, x(t)).$$

Отже, задача набуває форми

$$\begin{cases} Ax + B \frac{dx}{dt} = F(t, x) + x(t), \\ x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0. \end{cases} \quad (8)$$

Перейдемо до рівносильного інтегрального рівняння:

$$x(t) = \int_0^t (Ax(\tau) + B\dot{x}(\tau) - F(\tau, x(\tau))) d\tau. \quad (9)$$

**Теорема 3.** Нехай:

1. для будь-яких  $x_1(t), x_2(t) \in C(\mathbb{R}^n)$ , що  $x_1(t) \rightarrow 0, x_2(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ , виконується

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|, \quad L > 0;$$

2. існує  $q \in (0, 1)$  таке, що для всіх  $t \in (0, t_0]$

$$(\|A\| + \|B\| + L) \left| \int_0^t d\tau \right| \leq q;$$

3.  $F(t, 0) \equiv 0$  для всіх  $t \in [0, t_0]$ .

Тоді задача Коші (7) має єдиний розв'язок  $x^*(t)$ .

**Доведення.** Нехай  $V$  — простір неперервних вектор-функцій  $x(t)$  на  $(0, t_0]$  з нормою

$$\|x\| = \max \left\{ \sup_{k=1, \dots, n; t \in (0, t_0]} |x_k(t)|, \sup_{k=1, \dots, n; t \in (0, t_0]} |x'_k(t)| \right\}. \quad (10)$$

Введемо оператор

$$M(x)(t) = \int_0^t (Ax(\tau) + B\dot{x}(\tau) - F(\tau, x(\tau))) d\tau.$$

За умовами теореми  $M$  відображає кулю  $\{x : \|x\| \leq c\}$  у себе та є стискуючим, отже має єдину нерухому точку  $x^*(t)$ , яка і є єдиним розв'язком задачі.

**Теорему доведено.**

**Теорема 4.** Нехай:

1.

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq L(t)\|x_1 - x_2\|$$

для  $t \in (0, t_0]$ , де  $L(t) > 0$  неперервна на  $T = (0, t_0]$ , і  $x_1(t) \rightarrow 0$ ,  $x_2(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ ;

2. існує  $q \in (0, 1)$  таке, що

$$\left| \int_0^t (\|A\| + \|B\| + L(\tau)) d\tau \right| \leq q, \quad t \in (0, t_0];$$

3.  $F(t, 0) \equiv 0$  для всіх  $t \in [0, t_0]$ .

Тоді задача Коші (7) має єдине розв'язання  $x^*(t)$ .

**Доведення.** Доведення аналогічне теоремі 3, з урахуванням змінної функції Ліпшиця  $L(t)$  і оцінки інтеграла з умови 2).

**Теорему доведено.**

## ВИСНОВКИ

У роботі досліджено задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь з алгебраїчно-диференціальною структурою

$$\begin{cases} Ax + B \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \end{cases}$$

де  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , а вектор-функція  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  є неперервною на множині

$$D = \{(t, x) : 0 < |t| \leq a, \|x\| \leq b\}.$$

Показано, що алгебраїчна структура жмутка  $A + \lambda B$  визначає можливість редукції вихідної системи до еквівалентної, яка поєднує диференціальні та функціональні співвідношення. Встановлено умови коректності задачі Коші залежно від типу блокової структури жмутка; доведено можливість єдиності або параметричності розв'язків. Для диференціальної підсистеми застосовано метод нерухомої точки, що забезпечує конструктивне доведення існування та єдиності розв'язку.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
2. **Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.** Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — К.: Вища школа, 2000. — 294 с.
3. **Campbell S. L.** Singular Systems of Differential Equations. — San Francisco: Pitman, 1980. — 240 p.
4. **Campbell S. L.** Singular Systems of Differential Equations II. — San Francisco: Pitman, 1982. — 234 p.
5. **Brenan K. E., Campbell S. L., Petzold L. R.** Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. Philadelphia: SIAM, 1995. — xii+251 p.
6. **Campbell S. L.** Index two linear time-varying singular systems of differential equations // SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods. — 1983. — Vol. 4, No. 2. — P. 237–243.
7. **Lamour R., Marz R., Winkler R.** How Floquet theory applies to index-1 differential equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1998. — Vol. 217, No. 2. — P. 372–394.
8. **Kunkel P., Mehrmann V.** Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution. — Zurich: EMS Press, 2006. — 385 p.

9. **Antoulas A. C.** Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. — Philadelphia: SIAM, 2005. — 507 p.
10. **Berger T., Reis T.** Observers and dynamic controllers for linear differential-algebraic systems // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2017. — Vol. 55, No. 6. — P. 3564–3591.  
doi: 10.1137/15M1035355
11. **Шарай Н. В.** Об асимптотике решений полуявных систем дифференциальных уравнений // Нелінійні коливання. — 2005. — Т. 8, № 1. — С. 132–144.
12. **Самкова Г. Е., Шарай Н. В.** Об исследовании некоторой полуявной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц // Нелінійні коливання. — 2002. — Т. 5, № 2. — С. 224–236.
13. **Самкова Г. Є., Шарай Н. В., Драгун О. О.** Дослідження систем звичайних диференціальних рівнянь з регулярними та сингулярними жмутками матриць // Perspectives of contemporary science : proceedings of VII International scientific and practical conference (Lviv, 19–21 August 2024). — Львів, 2024. — С. 282–288.

*Samkova G. Ye., Sharai N. V., Drahun O. O.*

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH REGULAR AND SINGULAR MATRIX PENCILS

*Summary*

This article is devoted to the study of the asymptotic behavior of solutions of systems of differential equations generated by regular and singular matrix pencils. Such systems arise in the mathematical modeling of complex dynamical processes and are characterized by a combination of differential and algebraic relations. The structural properties of matrix pencils are analyzed, conditions for their strict equivalence transformations are established, and corresponding canonical forms are constructed. Special attention is paid to the investigation of the Cauchy problem for singular systems and to the influence of the algebraic structure of the pencil on the existence, uniqueness, and asymptotic behavior of solutions. The obtained results make it possible to describe the local behavior of solutions and can be applied to the analysis of a wide class of differential-algebraic systems.

*Keywords: system of differential equations, Cauchy problem, differential-algebraic systems, matrix pencil, regular pencil, singular pencil, canonical form.*

**REFERENCES**

1. Gantmacher, F. R. (1988) *Teoriya matrits* [The theory of matrices]. Moscow, 552 p. [in Russian].
2. Samoylenko A. M., Shkil M. I. and Yakovets V. P. (2000) *Liniini systemy dyferentsialnykh rivnian z vyrodzhenniamy* [Linear systems of differential equations with degeneracies]. Kyiv: Vyscha shkola, 294 p. [in Ukrainian].
3. Campbell S. L. (1980) *Singular systems of differential equations*. San Francisco: Pitman, 240 p.
4. Campbell S. L. (1982) *Singular systems of differential equations 2*. San Francisco: Pitman, 234 p.
5. Brenan K. E., Campbell S. L. and Petzold L. R. (1995) *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations*. Classics in Applied Mathematics, Vol. 14. Philadelphia: SIAM, xii+251 p.
6. Campbell S. L. (1983) 'Index two linear time-varying singular systems of differential equations', *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 4(2), 237–243.

7. Lamour, R., Marz, R. and Winkler, R. (1998) 'How Floquet theory applies to index-1 differential equations', *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 217(2), 372–394.
8. Kunkel, P. and Mehrmann, V. (2006) *Differential-algebraic equations: Analysis and numerical solution*. Zurich: EMS Press, 385 p.
9. Antoulas A. C. (2005) *Approximation of large-scale dynamical systems*. Advances in Design and Control, Series No 6. Philadelphia: SIAM, 2005. 507 p.
10. Berger T. and Reis T. (2017) 'Observers and dynamic controllers for linear differential-algebraic systems', *SIAM Journal on Control and Optimization*, 55(6), 3564–3591. <https://doi.org/10.1137/15M1035355>
11. Sharai N. V. (2005) 'Ob asimptotike resheniy poluyavnykh sistem differentsialnykh uravneniy' [On the asymptotic of solutions to semi-explicit systems of differential equations], *Nelineini Kolyvannia* [Nonlinear Oscillations], 8(1), 132–144. [in Russian].
12. Samkova, G. Ye. and Sharay, N. V. (2002) 'Ob issledovanii nekotoryy poluyavnoy sistemy differentsialnykh uravneniy v sluchaye peremennogo puchka matrity' [On a study of a certain semi-explicit system of differential equations with a changing matrix bundle], *Nelineini Kolyvannia* [Nonlinear Oscillations], 5(2), 224–236. [in Russian].
13. Samkova, G. Ye., Sharai, N. V. and Drahun, O. O. (2024) *Doslidzhennia system zvychai-nykh dyferentsialnykh rivnian z rehuliarnymy ta synhuliarnymy zhmukamy matryty* [Investigation of systems of ordinary differential equations with regular and singular matrix pencils], in *Perspectives of contemporary science: proceedings of VII International scientific and practical conference (Lviv, 19–21 August 2024)*. Lviv, pp. 282–288. [in Ukrainian].