УДК 517.929.2:517.925.4

В. Є. Круглов, *кандидат фіз-мат. наук, профессор*
Одеській національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра методів математичної фізики
вул. Змієнка Всеволода, 2, м.Одеса, 65082, Україна
e-mail: viktorkruglov935@gmail.com

ТВІРНІ ФУНКЦІЇ СИСТЕМ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Побудовані твірні функції систем основних поліноміальних власних функцій лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Встановлені умови, при яких побудовані твірні функції відповідних систем поліноміальних власних функцій виокремлюють ортогональні системи.

MSC: 39A06.
Ключові слова: твірні функції, самоспряжене диференціальне рівняння, поліноміальні власні функції.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.1(45).352810

Вступ

Відшукуються поліноміальні власні функції (ПВФ) диференціального рівняння

$$(A_1z^2+B_1z+C_1)y_n''(z)+(A_2z+B_2)y_n'(z)-n(A_2+(n-1)A_1)y_n(z)=0, \quad (1)$$

де z – комплексна змінна, коефіцієнти A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 можуть приймати довільні дійсні або комплексні значення.

Рівняння (1) можна звести до самоспряженого вигляду

$$\left[(A_1z^2+B_1z+C_1)\rho(z)y_n(z)\right]'-n(A_2+(n-1)A_1)\rho(z)y_n(z)=0,$$

де функція $\rho(z)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\rho'(z)}{\rho(z)}=\frac{(A_2-2A_1)z+B_2-B_1}{A_1z^2+B_1z+C_1}. \quad (2)$$

Надійшла 26.02.2025

Для дійсної змінної $z = x$ функція $\rho(x)$, яка задана на деякому інтервалі (a, b), щоб стати ваговою, повинна задовольняти слідуючим умовам

$$\lim_{x \to a+0} \left[\rho(x)(A_1x^2 + B_1x + C_1)\right] = \lim_{x \to b-0} \left[\rho(x)(A_1x^2 + B_1x + C_1)\right] = 0. \quad (3)$$

Якщо, наприклад, параметр $b = \infty$, то потрібно, щоб

$$\lim_{x \to \infty} \left[\rho(x)(A_1x^2 + B_1x + C_1)x^k\right] = 0, \; k = 0, 1, \ldots .$$

Існують наступні методи знаходженн поліноміальних розв'язків $y_n(z)$ рівняння (1): метод рекурентних співвідношень між коефіцієнтами цього рівняння, формула Родріга та метод твірних функцій.

В цій роботі розглядається метод твірних функцій. Теоретичну основу цього метода взято з монографії [1.ст.33].

Функція $\Phi(z, t)$ називається твірною для систем ПВФ $y_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, якщо вона розкладається в ряд по степеням t в достатньо малому околі точки $t = 0$:

$$\Phi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(z) \frac{t^n}{n!}. \quad (4)$$

Після деяких перетворень формули Родріга

$$y_n(z) = \left. \frac{\rho(s)}{\rho(z)} \frac{1}{1 - (2A_1s + B_1)t} \right|_{s = \xi_1(z,t)}, \quad (5)$$

де $s = \xi_1(z, t)$ той корінь рівняння

$$s - z - (A_1s^2 + B_1s + C_1)t = 0, \quad (6)$$

який при $t \to 0$ наближається до z, $\lim\limits_{t \to 0} \xi_1(z, t) = z$.

Другий корінь, якщо він існує, наближається до нескінченності при $t \to 0$. Ряд (4) збігається в досить малому околі точки $t = 0$ при фіксованому z.

Основні результати

Усі побудовані твірні функції стосуються системи нестандартизованих ПВФ $y_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, з одиничним старшим коефіцієнтом, а довільну мультиплікативну константу, яка виникає при знаходженні функції $\rho(z)$, вважаємо рівною тотожній одиниці.

1. В рівнянні (1) $C_1 = 0$**.**

Функція $\rho(z)$ дорівнює

$$\rho(z) = z^{\alpha}(A_1 z + B_1)^{\beta/A_1}, \ \alpha = B_2/B_1 - 1, \ \beta/A_1 = A_2/A_1 - B_2/B_1 - 1, \ (7)$$

аналітична на комплексній площині з розрізом від точки $z = 0$ через $z = \infty$ до точки $z = -B_1/A_1$. Розв'язок $s = \xi_1(z,t)$ рівняння (6) при $C_1 = 0$ визначається формулою

$$s = \xi_1(z,t) = \frac{1 - B_1 t - T(z,t)}{2A_1 t} = -\frac{2z}{1 - B_1 t + T(z,t)}, \qquad (8)$$

де

$$T(z,t) = \sqrt{(1 - B_1 t)^2 - 4A_1 tz},$$

і розуміється як головне значення квадратного кореня, $\lim\limits_{t\to 0} \xi_1(z,t) = z$.

Тоді

$$\Phi(z,t) = \left(\frac{\xi_1(z,t)}{z}\right)^{\alpha} \left(\frac{A_1\xi_1 + B_1}{A_1 z + B_1}\right)^{\beta/A_1} \frac{1}{1 - (2A_1\xi_1 + B_1)t}.$$

Спростимо цей вираз. З квадратного рівняння (6) при $C_1 = 0$ маємо

$$A_1\xi_1 + B_1 = (1 - z/\xi_1)/t = [1 + B_1 t - T(z,t)]/2t,$$

$$1 - (2A_1\xi_1 + B_1)t = 1 + B_1 t - 2t(A_1\xi_1 + B_1) = T(z,t).$$

Таким чином,

$$\Phi(z,t) = 2^{\alpha - \beta/A_1}[t(A_1 z + B_1)]^{-\beta/A_1} \frac{1}{T(z,t)} \frac{[1 + (B_1 t - T(z,t))]^{\beta/A_1}}{[1 - (B_1 t - T(z,t))]^{\alpha}}.$$

ПВФ рівняння (1) при $C_1 = 0$ подані формулою

$$y_n(z) = z^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(B_2 + (n-1)B_1)\dots(B_2 + (n-k)B_1)}{(A_2 + (2n-2)A_1)\dots(A_2 + (2n-k-1)A_1)} z^{n-k}, \ \ n = 1, 2, \dots .$$

Якщо перейти до дійсної змінної $z = x$, і всі коефіцієнти в рівнянні (1) також дійсні числа, то

$$\rho(x) = x^{\alpha}(A_1 x + B_1)^{\beta/A_1},$$

і якщо $B_2/B_1 > 0$ і $A_2/A_1 - B_2/B_1 > 0$, то $\rho(x)$ – вагова функція для поліномів $y_n(x)$ на відрізку $(-B_1/A_1, 0)$.

2. В рівнянні (1) $B_1 = 0$, $A_1 \neq 0$, $C_1 \neq 0$.

Маємо диференціальне рівняння

$$(A_1 z^2 + C_1)y_n''(z) + (A_2 z + B_2)y_n'(z) - n(A_2 + (n-1)A_1)y_n(z) = 0, \qquad (9)$$

2.1. Нехай $A_1 < 0, C_1 > 0$. Тоді це рівняння узагальнює диференціальне рівняння, розв'язками якого є поліноми Якобі.

Функція $\rho(z)$ дорівнює

$$\rho(z) = (\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}z)^{-\delta_1}(\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}z)^{\delta_2}, \qquad (10)$$

де

$$\delta_1 = \left[(A_2 - 2A_1)/\sqrt{-A_1} + B_2/\sqrt{C_1}\right]/2\sqrt{-A_1},$$

$$\delta_2 = \left[B_2/\sqrt{C_1} - (A_2 - 2A_1)/\sqrt{-A_1}\right]/2\sqrt{-A_1}.$$

Функція $\rho(z)$ аналітична на комплексній площині з розрізом від точки $z = -\sqrt{-C_1/A_1}$ через точку $z = \infty$ до точки $z = \sqrt{-C_1/A_1}$.

Рівняння (6) має вигляд

$$s - z - (A_1 s^2 + C_1)t = 0. \qquad (11)$$

Позначимо

$$R(z,t) = \sqrt{1 - 4A_1 t(z + C_1 t)}, \qquad (12)$$

де під коренем розуміється його головне значення.тоді розв'язок $s = \xi_1(z,t)$ рівняння (9) дорівнює

$$\xi_1(z,t) = \frac{1 - R(z,t)}{2A_1 t} = \frac{2(z + C_1 t)}{1 + R(z,t)}, \ \lim_{t \to 0} \xi_1(z,t) = z \qquad (13)$$

Твірна функція

$$\Phi(z,t) = \left(\frac{\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}\xi_1}{\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}z}\right)^{-\delta_1} \left(\frac{\sqrt{C_1} + \sqrt{-A_1}\xi_1}{\sqrt{C_1} + \sqrt{-A_1}z}\right)^{\delta_2} \frac{1}{1 - 2A_1\xi_1 t}.$$

Зробимо наступні перетворення. Згідно з (9) та (11)

$$\begin{aligned}
&\xi_1 - z = t(\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}\xi_1)(\sqrt{C_1} + \sqrt{-A_1}\xi_1),\ 1 - 2A_1\xi_1 t = R(t,z),\\
&(\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}z) = (\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}\xi_1) + (\sqrt{-A_1}\xi_1 - \sqrt{A_1}z) =\\
&= (\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}\xi_1) + \sqrt{-A_1}t(\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}\xi_1)(\sqrt{C_1} + \sqrt{-A_1}\xi_1) =\\
&= (\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}\xi_1)(1 + t\sqrt{-A_1}C_1 - tA_1\xi_1) =\\
&= (\sqrt{C_1} - \sqrt{-A_1}\xi_1)[(1 + R(z,t))/2 + t\sqrt{-A_1C_1}].
\end{aligned}$$

Аналогічно

$$(\sqrt{C_1} + \sqrt{-A_1}z) = (\sqrt{C_1} + \sqrt{-A_1}\xi_1)[(1 + R(z,t))/2 - t\sqrt{-A_1C_1}].$$

Таким чином,

$$\Phi(z,t) = [R(z,t)]^{-1}\left[(1 + R(z,t))/2 + t\sqrt{-A_1C_1}\right]^{\delta_1}\left[(1 + R(z,t))/2 - t\sqrt{-A_1C_1}\right]^{-\delta_2}. \tag{14}$$

Твірна функція (12) співпадає з твірною функцією для нестандартизованих поліномів Якобі [2, с.69], а саме: для диференціального рівняння (7) з коефіцієнтами $A_1 = -1$, $C_1 = 1$, $A_2 = -(\alpha+\beta+2)$, $B_2 = \beta - \alpha$ (диференціальне рівняння Якобі), $R(z,t) = \sqrt{1 + 4zt + 4t^2}$, $\delta_1 = -\alpha$, $\delta_2 = \beta$ твірна функція

$$\Phi(z,t) = \frac{1}{R(z,t)}\left[\frac{1 + R(z,t)}{2} + t\right]^{-\alpha}\left[\frac{1 + R(z,t)}{2} - t\right]^{-\beta}.$$

2.2. Нехай $A_1 > 0$, $C_1 > 0$. Тоді функція

$$\rho(z) = (A_1z^2 + C_1)^{\alpha}\exp\left[\frac{B_2}{\sqrt{A_1C_1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{C_1}{A_1}}z\right]$$

визначена для кожного значення z, $\alpha = A_2/2A_1 - 1$.

За формулою (5), враховуючи елементарні дії з арктангенсами, отримуємо

$$\Phi(z,t) = \left(\frac{A_1\xi_1^2 + C_1}{A_1z^2 + C_1}\right)^{\alpha}\exp\frac{B_2}{\sqrt{A_1C_1}}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{A_1/C_1}(\xi_1 - z)}{1 + A_1z\xi_1/C_1}\right]\frac{1}{1 - 2A_1t\xi_1},$$

де $s = \xi_1(z,t)$ визначається формулами (9)–(11).

Далі, за формулою (9)

$$A_1\xi_1^2 + C_1 = (\xi_1 - z)/t,$$

$$A_1z^2+C_1=A_1(z^2-\xi_1^2)+A_1\xi_1^2+C_1=(\xi_1-z)[1-A_1t(z+\xi_1)]/t.$$

Тоді

$$\frac{A_1\xi_1^2+C_1}{A_1z^2+C_1}=\frac{1}{1-A_1t(z+\xi_1)}=\frac{1}{[1+R(t,z)]/2-A_1tz}.$$

Спростимо вираз

$$C_1+A_1z\xi_1=C_1+A_1z(\xi_1-z)+A_1z^2=(\xi_1-z)(1-A_1t\xi_1)/t,$$

$$A_1t\xi_1=[1-R(z,t)]/2.$$

Таким чином,

$$\frac{\xi_1-z}{1+A_1z\xi_1/C_1}=\frac{2C_1t}{1+R(z,t)}$$

та

$$\Phi(z,t)=\frac{1}{R(z,t)}\left[\frac{R(z,t)+1}{2}-A_1tz\right]^{-\alpha}\exp\left[\frac{B_2}{\sqrt{A_1C_1}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{A_1C_1}t}{1+R(z,t)}\right)\right]. \tag{15}$$

При змінній дійсній $z=x$ функція $\rho(x)$ не може стати ваговою, бо не виконується умова (3) при $x=\infty$.

Наведемо приклади ПВФ рівняння (7):

$$y_1(z)=z+\tfrac{B_2}{A_2},\ \ y_2(z)=z^2+\tfrac{2B_2}{A_2+2A_1}z+\tfrac{B_2^2}{(A_2+2A_1)(A_2+A_1)}+\tfrac{C_1}{A_2+A_1},$$

$$y_3(z)=z^3+\tfrac{3B_2}{A_2+4A_1}z^2+\tfrac{3}{A_2+3A_1}\left(\tfrac{B_2^2}{A_2+4A_1}+C_1\right)z+\tfrac{B_2^3}{(A_2+4A_1)(A_2+3A_1)(A_2+2A_1)}+$$
$$+\tfrac{C_1}{A_2+2A_1}\left(\tfrac{B_2}{A_2+3A_1}+\tfrac{2B_2}{A_2+4A_1}\right).$$

При $A_1>0$, $C_1>0$ для побудови ПВФ $y_n(z),\ n=1,2,\dots$ рівняння (7) використовується твірна функція (13), а при $A_1<0$, $C_1>0$ – твірна функція (12). проаналізуємо детальніше випадок, коли $A_1<0$, $C_1>0$. Якщо змінна z змінюється на дійсній осі $z=x$, то функція $\rho(x)$ з (8) також визначена на всій осі, окрім, можливо, двох точок цієї осі, і твірна функція $\Phi(x,t)$ з (12) будує ПВФ $y_n(x),\ n=1,2,\dots$, які також визначені на всій дійсній осі, і залежать від фіксованих параметрів A_1, A_2, B_2, C_1. Зафіксуємо ці параметри таким чином, щоб числа δ_1 і δ_2 з (8) задовольняли умові $\delta_1<1$, $\delta_2>-1$, що рівнозначно умовам $A_2/A_1>0$, $B_2>A_2\sqrt{-C_1A_1}$. Завдяки цим умовам функція $\rho(x)$ стає ваговою [3] для побудованої системи ПВФ на проміжку $(-\sqrt{-C_1A_1},\sqrt{-C_1A_1})$.

Таким чином, область визначенності побудованих поліномів поділяється на три відрізки: $(-\infty, -\sqrt{-C_1A_1}]$, $(-\sqrt{-C_1A_1}, \sqrt{-C_1A_1})$, $[\sqrt{-C_1A_1}, \infty)$, в кожному з яких діє одна й та ж система ПВФ, і тільки ці поліноми утворюють ортогональну з вагою $\rho(x)$ систему поліномів на проміжку $(-\sqrt{-C_1A_1}, \sqrt{-C_1A_1})$.

3. В рівнянні (1) $A_1 = 0$, $B_1 \neq 0$, $C_1 \neq 0$.

Маємо диференціальне рівняння

$$(B_1z + C_1)y_n''(z) + (A_2z + B_2)y_n'(z) - nA_2y_n(z) = 0. \tag{16}$$

Функція $\rho(z)$ дорівнює

$$\rho(z) = (B_1z + C_1)^\alpha \exp(A_2z/B_1), \;\; \alpha = (B_2/B_1 - A_2/C_1)B_1^2 - 1$$

і аналітична на всій комплексній площині з розрізом від точки $z = -C_1/B_1$ до точки $z = \infty$.

Рівняння (6) в цьому випадку лінійне і тому

$$\xi_1(z,t) = (z + C_1t)/(1 - B_1t), \;\; \lim_{t\to 0} \xi_1(z,t) = z$$

Твірна функція

$$\Phi(z,t) = \frac{1}{1 - B_1t}\left(\frac{B_1\xi_1 + C_1}{B_1z + C_1}\right)^\alpha \exp[A_2(\xi_1 - z)/B_1].$$

Легко здобути

$$\frac{B_1\xi_1 + C_1}{B_1z + C_1} = \frac{1}{1 - B_1t},$$

і таким чином

$$\Phi(z,t) = (1 - B_1t)^{-\alpha-1} \exp\{A_2t(B_1z + C_1)/[B_1(1 - B_1t)]\}.$$

За умови дійсної змінної $z = x$ функція $\rho(x)$ стає ваговою для ПВФ $y_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ на відрізку $(-C_1/B_1, \infty)$ при $B_2/B_1 - A_2/C_1 > 0$, $A_2/B_1 < 0$ [4].

3.1. В рівнянні (14) $B_1 = 0$, $C_1 \neq 0$.

В цьому випадку маємо рівняння типу Ерміта

$$C_1 y_n''(z) + (A_2 z + B_2) y_n'(z) - n A_2 y_n(z) = 0.$$

Функція $\rho(z)$ дорівнює

$$\rho(z) = \exp\left[(A_2 z + B_2)^2 / 2A_2 C_1\right],$$

і вона аналітична на всій комплексній площині. Далі

$$\xi_1(z,t) = z + C_1 t,$$

тоді

$$\Phi(z,t) = \exp[t(A_2 z + B_2 + A_2 C_1 t/2)].$$

Для дійсної змінної $z = x$ функція

$$\rho(x) = \exp\left[(A_2 x + B_2)^2 / 2A_2 C_1\right]$$

є ваговою при $A_2 C_1 < 0$.

3.2. В рівнянні (14) $C_1 = 0$, $B_1 \neq 0$.

В цьому випадку маємо рівняння типу Лаггера

$$B_1 z y_n''(z) + (A_2 z + B_2) y_n'(z) - n A_2 y_n(z) = 0.$$

Функція $\rho(z)$ дорівнює

$$\rho(z) = z^{B_2/B_1 - 1} \exp(A_2 z / B_1).$$

Вона аналітична на всій комплексній площині з розрізом від точки $z = 0$ до точки $z = \infty$.

$$\xi_1(z,t) = z/(1 - B_1 t).$$

Тоді

$$\Phi(z,t) = (1 - B_1 t)^{-B_2/B_1} \exp[A_2 t z/(1 - B_1 t)].$$

Якщо змінна z дійсна, $z = x$, то

$$\rho(x) = x^{B_2/B_1} \exp(A_2 x / B_1)$$

і ця функція буде ваговою за умови $B_2/B_1 > -1$, $A_2/B_1 < 0$ на проміжку $(0, \infty)$.

4. В рівнянні (1) $B_1 = 2\sqrt{A_1C_1}$**,** $A_1 > 0$**,** $C_1 > 0$**.**

Маємо диференціальне рівняння

$$(\sqrt{A_1}z + \sqrt{C_1})^2 y_n''(z) + (A_2z + B_2)y_n'(z) - n(A_2 + (n-1)A_1)y_n(z) = 0.$$

Функція

$$\rho(z) = (\sqrt{A_1} + \sqrt{C_1})^\alpha \exp[-\beta/(\sqrt{A_1} + \sqrt{C_1})],$$

де $\alpha = (A_2 - 2A_1)/A_1$, $\beta = (B_2\sqrt{A_1} - A_2\sqrt{C_1})/A_1)$, аналітична на комплексній площині з розрізом від точки $z = -\sqrt{C_1/A_1}$ до точки $z = \infty$.

З рівняння (6)

$$s - z - (\sqrt{A_1}s + \sqrt{C_1})^2 t = 0$$

знаходимо корінь

$$\xi_1(z,t) = \left[1 - 2\sqrt{A_1C_1}t - \sqrt{1 - 4\sqrt{A_1}t(\sqrt{C_1} + \sqrt{A_1}z)}\right]/2A_1t =$$
$$= 2(C_1t + z)\left[1 - 2\sqrt{A_1C_1}t + \sqrt{1 - 4\sqrt{A_1}t(\sqrt{C_1} + \sqrt{A_1}z)}\right]^{-1},$$

$$\lim_{t\to 0}\xi_1(z,t) = z.$$

$$\Phi(z,t) = \left(\frac{\sqrt{A_1}\xi_1 + \sqrt{C_1}}{\sqrt{A_1}z + \sqrt{C_1}}\right)^\alpha \exp\left[-\beta\frac{\sqrt{A_1}(z - \xi_1)}{(\sqrt{A_1}\xi_1 + \sqrt{C_1})(\sqrt{A_1}z + \sqrt{C_1})}\right]\frac{1}{1 - 2\sqrt{A_1}t(\sqrt{A_1}\xi_1 + \sqrt{C_1})}.$$

Далі

$$\frac{z - \xi_1}{(\sqrt{A_1}\xi_1 + \sqrt{C_1})(\sqrt{A_1}z + \sqrt{C_1})} = \frac{-(\sqrt{A_1}\xi_1 + \sqrt{C_1})^2 t}{(\sqrt{A_1}\xi_1 + \sqrt{C_1})(\sqrt{A_1}z + \sqrt{C_1})} = \frac{-(\sqrt{A_1}\xi_1 + \sqrt{C_1})t}{\sqrt{A_1}z + \sqrt{C_1}}.$$

Позначимо

$$M(z,t) = \sqrt{1 - 4\sqrt{A_1}t(\sqrt{A_1}z + \sqrt{C_1})}.$$

Під коренем квадратним розуміємо головне його значення.

Тоді

$$\sqrt{A_1}\xi_1 + \sqrt{C_1} = \sqrt{A_1}(1 - 2\sqrt{A_1C_1}t - M(z,t))/2A_1t + \sqrt{C_1} =$$
$$= \sqrt{A_1}(1 - M(z,t))/2A_1t = 2(\sqrt{A_1}z + \sqrt{C_1})/(1 + M(z,t)),$$

$$1 - 2\sqrt{A_1}(\sqrt{A_1}\xi_1 + \sqrt{C_1}) = M(z,t).$$

Таким чином, отримали

$$\Phi(z,t) = \frac{1}{M(z,t)}\left[\frac{2}{1+M(z,t)}\right]^{\alpha} \exp\left(\frac{2\beta\sqrt{A_1}t}{1+M(z,t)}\right).$$

Система поліномів $y_n(x)$ не є ортогональною, бо функція $\rho(x)$ не є ваговою.

ВИСНОВКИ

Побудовані твірні функції для ПВФ $y_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ різних диференціальних рівнянь другого порядку. Знайдені умови, при яких ці твірні функції утворюють ортогональні ПВФ цих рівнянь.

Список літератури

1. **Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.** Спеціальні фуцкції математичної фізики / А.Ф.Никифоров, В.Б.Уваров. – М.: Фізматліт, 1984.
2. **Суетін П.К.** Класичні ортогональні многовиди / П.К.Суетін. – М.: Фізматліт, 1976.
3. **Kruglov V.E.** Construction of polynomial eigenfunctions of a second-order linear differential equation/ V.E.Kruglov// Differential Equations. – 2023. – Vol. 59. – No. 9. – PP. 1166–1174.
4. **Kruglov V.E.** Christoffel-Darboux formula for polynomial eigenfunctions of a second-order linear differential equation/ V.E.Kruglov// Differential Equations. – 2024. – Vol. 60. – No. 4 – PP. 436–444.

Kruglov V. E.

GENERATING FUNCTIONS FOR SYSTEMS OF POLYNOMIAL EIGENFUNCTIONS OF SECOND-ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary

Generating functions are constructed for the main systems of polynomial eigenfunctions of second-order linear differential equations. Conditions are found under which the constructed generating functions from the corresponding system of polynomial eigenfunctions select orthogonal systems.

Keywords: generating functions, self-conjugated differential equation, polynomial eigenfunctions.

REFERENCES

1. **Nikiforov A.F., Uvarov V.B.** Spetsial'nye funktsii matematicheskoi fiziki: ucheb. posobie dlya vuzov (Special Functions of Mathematical Physics). – Moscow: Nauka, 1984.
2. **Suetin P.K.** Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny (Classical Orthogonal Polynomials). – Moscow: Nauka, 1976.
3. **Kruglov V.E.** Construction of polynomial eigenfunctions of a second-order linear differential equation/ V.E.Kruglov// Differential Equations. – 2023. – Vol. 59. – No. 9. – P. 1166–1174.
4. **Kruglov V.E.** Christoffel-Darboux formula for polynomial eigenfunctions of a second-order linear differential equation/ V.E.Kruglov// Differential Equations. – 2024. – Vol. 60. – No. 4 – P. 436–444.