УДК 517.925

А. В. Воробйова, *аспірант*
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м.Одеса, 65082, Україна
e-mail: alla.vorobyova@stud.onu.edu.ua
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0009-7664-3399

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПОВІЛЬНО ЗМІННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З НЕЛІНІЙНОСТЯМИ БЛИЗЬКИМИ ДО ПРАВИЛЬНО ЗМІННИХ

У роботах В. М. Євтухова було започатковано методику дослідження асимптотичних властивостей розв'язків широких класів істотно нелінійних диференціальних рівнянь з нелінійностями різних типів, зокрема правильно змінних в околі особливої точки. У представленій статті цей підхід застосовано для дослідження асимптотичної поведінки $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків класу істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Основну увагу приділено знаходженню асимптотичних зображень цих розв'язків та їх похідних першого порядку у складних випадках, коли $\lambda_0 = 0$. За таких умов розв'язки або їх похідні виявляються повільно змінними функціями при $t \uparrow \omega$, що істотно ускладнює процес дослідження порівняно зі стандартними випадками. У роботі отримано асимптотичні зображення для особливого класу повільно змінних розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, що містять нові класи нелінійностей близьких до правильно змінних. Крім того отримано необхідні і достатні умови існування таких розв'язків.

MSC: 2000: 34C41, 34A10.
Ключові слова: диференціальні рівняння другого порядку, асимптотичний, повільно змінні розв'язки, правильно змінні нелінійності, P_ω-розв'язки.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2025.1(45).352809

Вступ

У працях В. М. Євтухова та численних представників його наукової школи (див., наприклад, [1]–[3],[4]) було сформовано цілісний підхід до аналізу широких класів розв'язків рівнянь із правильно змінними нелінійностями. При дослідженні введених В. М. Євтуховим відомих класів

Надійшла 07.04.2025

розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь особливі складнощі виникають під час розгляду специфічних випадків, зокрема таких, які є повільно змінними функціями при прямуванні аргументу до особливої точки. Для класу диференціальних рівнянь з нелінійностями нових типів досліджується саме такий клас розв'язків.

Основні результати

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')\exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)yy'||)) \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}, p : [a, \omega[\to]0, +\infty[(-\infty < a < \omega \le +\infty)$, $\varphi_i \colon \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ — неперервні функції, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — проміжок або $[y_i^0, Y_i[$,* або $]Y_i, y_i^0]$ (для кожного $i \in \{0, 1\}$), а R — неперервно диференційовна, з монотонною похідною, правильно змінна на нескінченності функція порядку $\mu, 0 < \mu < 1$.

Крім того, вважається, що кожна з функцій $\varphi_i(z)$ (для кожного $i \in \{0, 1\}$) є правильно змінною функцією при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$ порядку σ_i, $\sigma_0 + \sigma_1 \ne 1$.

Також будемо вважати

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при } \omega < +\infty, \end{cases} \qquad \Theta_i(z) = \varphi_i(z)|z|^{-\sigma_i} \quad (\forall i \in \{0, 1\}).$$

Означення 1. Розв'язок y рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язком, якщо він заданий на $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ та для кожного $i \in \{0, 1\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{2}$$

Розглянемо $L_0 : \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$, $L_1 : \Delta_{Y_1} \to]0, +\infty[$ — нескінченно диференційовні повільно змінні при прямуванні аргументу до Y_0, Y_1 відповідно функції та такі, що для кожного $i \in \{0, 1\}$

$$L_i(z) = \Theta_i(z)[1 + o(1)] \text{ при } z \to Y_i \ (z \in \Delta_{Y_i}), \qquad \lim_{\substack{z\to Y_i \\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{zL_i'(z)}{L_i(z)} = 0. \tag{3}$$

*При $Y_i = +\infty$ $(Y_i = -\infty)$ вважаємо $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ відповідно.

Означення 2. Будемо говорити, що функція φ_i, де $i \in \{0,1\}$, задовольняє умову S, якщо для будь-якої неперервно диференційовної функції $L_i\colon \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ такої, що

$$\lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{zL_i'(z)}{L_i(z)} = 0, \tag{4}$$

мають місце співвідношення

$$\Theta_i(zL_i(z)) = \Theta_i(z)[1+o(1)] \quad \text{при } z\to Y_i \ (z\in\Delta_{Y_i}). \tag{5}$$

Введемо необхідні позначення

$$I(t) = \alpha_0 \int_{A_\omega}^t p(\tau)d\tau, \quad A_\omega = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau)d\tau = +\infty,\\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau)d\tau < +\infty, \end{cases}$$

У випадку, коли $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\operatorname{sign} y_1^0}{|\pi_\omega(t)|} = Y_1$,

$$J(t) = \int_{B_\omega}^t \left| I(\tau)\Theta_1\left(\frac{\operatorname{sign} y_1^0}{|\pi_\omega(t)|}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau,$$

$$B_\omega = \begin{cases} b, & \text{якщо } \displaystyle\int_b^\omega \left| I(\tau)\Theta_1\left(\frac{\operatorname{sign} y_1^0}{|\pi_\omega(t)|}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau = +\infty,\\ \omega, & \text{якщо } \displaystyle\int_b^\omega \left| I(\tau)\Theta_1\left(\frac{\operatorname{sign} y_1^0}{|\pi_\omega(t)|}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau < +\infty, \end{cases}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема. *Нехай у рівнянні (1) $\sigma_1 \neq 1$, функція φ_1 задовольняє умову S і*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{R(|2\ln|\pi_\omega(t)||)J(t)}{\pi_\omega(t)\ln|\pi_\omega(t)|J'(t)} = 0. \tag{6}$$

Тоді, для існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-розв'язків, для яких існує скінченна чи нескінченна границя

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)},$$

необхідно і достатньо виконання умов

$$\lim_{t\uparrow\omega} y_0^0 |J(t)|^{\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y_1^0 |I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} = Y_1,$$
$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I'(t)}{I(t)} = \sigma_1 - 1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J'(t)}{J(t)} = 0. \tag{7}$$

і нерівностей

$$\frac{I(t)}{y_1^0(1-\sigma_1)} > 0 \text{ при } t \in]a,\omega[, \quad \frac{y_0^0 y_1^0 (1-\sigma_1) J(t)}{1-\sigma_0-\sigma_1} > 0 \text{ при } t \in]a,\omega[. \tag{8}$$

Крім того, для кожного такого розв'язку мають місце наступні асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y(t)}{|\exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||))\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} |1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} J(t)[1+o(1)],$$
$$\frac{y(t)}{y'(t)} = \frac{(1-\sigma_0-\sigma_1)J(t)}{(1-\sigma_1)J'(t)}[1+o(1)]. \tag{9}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $y\colon [t_0,\omega[\to \Delta_{Y_0}$ — $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-розв'язок рівняння (3.1). Із умов на функцію R з урахуванням [6] (розділ 5, пункт 1, ст. 116) випливає, що

$$\lim_{z\to\infty} \frac{zR'(z)}{R(z)} = \mu, \quad \lim_{z\to\infty} R'(z) = 0. \tag{10}$$

Введемо функції L_0, L_1, які визначені в (3) і розглянемо рівність

$$\left(\frac{y'(t)|y(t)|^{-\sigma_0}|y'(t)|^{-\sigma_1}}{L_0(y(t))L_1(y'(t))\exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||))} \right)' =$$
$$= \frac{y''(t)|y(t)|^{-\sigma_0}|y'(t)|^{-\sigma_1}}{L_0(y(t))L_1(y'(t))\exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||))} \times \Bigg(1-\sigma_1-R'(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||) -$$
$$- \frac{y'(t)L_1'(y'(t))}{L_1(y'(t))} - \frac{y'(t)}{\pi_\omega(t)y''(t)} R'(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||) -$$
$$- \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} \left(\sigma_0 + \frac{y(t)L_0'(y(t))}{L_0(y(t))} + R'(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||) + \right) \Bigg)). \tag{11}$$

Оскільки при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y''(t)|y(t)|^{-\sigma_0}|y'(t)|^{-\sigma_1}}{\Theta_0(y(t))\Theta_1(y'(t))\exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||))} =$$
$$= \frac{y''(t)|y(t)|^{-\sigma_0}|y'(t)|^{-\sigma_1}[1+o(1)]}{L_0(y(t))L_1(y'(t))\exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||))},$$

то, з використанням тверджень 1 і 2 з [6] (розділ 5, §1, ст. 115), враховуючи вибір A_ω отримаємо із (11)

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1}\cdot\Theta_1(y'(t))\exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||))} = (1-\sigma_1)I(t)[1+o(1)]. \tag{12}$$

Зауважимо, що (12) може бути переписано при $t\uparrow\omega$ у виді

$$\frac{y'(t)\mathrm{sign}\ y_1^0}{|\varphi_0(y(t))\Theta_1(y'(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = |1-\sigma_1|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}|I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\times$$
$$\times\exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||))^{\frac{1}{1-\sigma_1}}[1+o(1)]. \tag{13}$$

Крім того, з урахуванням виду рівняння (1), маємо

$$\frac{y''(t)}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1}\cdot\Theta_1(y'(t))\exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||))} = \alpha_0 p(t), \tag{14}$$

а розділивши (14) на (12) отримаємо при $t\uparrow\omega$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{\alpha_0 p(t)}{(1-\sigma_1)I(t)}[1+o(1)]. \tag{15}$$

Звідси, так як існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$, яка в силу леми 10.6 із [4] дорівнює (-1), отримаємо другу із умов (7) і першу із умов (8). Крім того, оскільки функція φ_1 задовольняє умову S, з (15) випливає, що при $t\uparrow\omega$

$$\Theta_1(y'(t)) = \Theta_1\left(\frac{\mathrm{sign}\ y_1^0}{|\pi_\omega(t)|}\right)[1+o(1)]. \tag{16}$$

З першої з наведених умов (8) випливає, що існує така повільно змінна неперервно диференційовна функція $K:\Delta_{Y_0}\to]0,+\infty[$, що $y'(t)=\frac{K(\pi_\omega(t))}{\pi_\omega(t)}$. Тому, з урахуванням властивостей логарифмічної функції і функції R, зокрема, (10), маємо при $t\uparrow\omega$

$$R(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||) = R(|2\ln|\pi_\omega(t)||)[1+o(1)]. \tag{17}$$

Нехай

$$W(t) := \int_{B_\omega}^{t} J'(\tau)\exp(R(|\ln|\pi_\omega(\tau)y(\tau)y'(\tau)||))d\tau,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} J(t) = J_0.$$

Покажемо, що функція

$$\exp(R(|\ln|\pi_\omega(J^{-1}(z))y(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))||)),$$

де J^{-1} — функція, обернена до J, є повільно змінною функцією при $z \to J_0$. Дійсно, з урахуванням умов (6) і (17) маємо

$$\lim_{z\to J_0} \frac{z(\exp(R(|\ln|\pi_\omega(J^{-1}(z))y(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))||)))'}{\exp(R(|\ln|\pi_\omega(J^{-1}(z))y(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))||))} =$$

$$= \lim_{z\to J_0}\left[\frac{zR'(|\ln|\pi_\omega(J^{-1}(z))y(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))||)}{R(|\ln|\pi_\omega(J^{-1}(z))y(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))||)}\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{R(|\ln|\pi_\omega(J^{-1}(z))y(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))||)}{\pi_\omega(J^{-1}(z))J'(J^{-1}(z))}\times$$

$$\left.\times\left(1+\frac{\pi_\omega(J^{-1}(z))y'(J^{-1}(z))}{y(J^{-1}(z))}+\frac{\pi_\omega(J^{-1}(z))y''(J^{-1}(z))}{y'(J^{-1}(z))}\right)\right] = 0.$$

Звідси, з використанням теорем про інтегрування правильно змінних функцій (твердження 1 і 2 з [6] (розділ 5, §1, ст. 116)), випливає, що

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{W(t)}{\exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)y(t)y'(t)||))J(t)} = 1.$$

Тому, із (13) з урахуванням (16) випливає перше з асимптотичних зображень (9), а звідси отримаємо другу із умов (8) і першу із (7). З першого зображення (9) з використанням (13) отримаємо друге зображення (9) і другу із умов (7). Також з першого з зображень (9), (13) та (2) отримаємо четверту з умов (7).

Достатність. Припустимо, що функція φ_1 задовольняє умову S, а також виконується умова (6). Позначимо
$g(t,v_0,v_1) = \exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)v_0v_1||))L_0(v_0)L_1(v_1)$, де L_0, L_1 визначені в (3) і розглянемо функцію

$$F(s_0,s_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)} \\ \dfrac{s_1}{s_0} \end{pmatrix},$$

яка задана на множині $\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$. При цьому для функції g мають місце граничне співвідношення

$$\lim_{\substack{v_i \to Y_i \\ v_i \in \Delta_{Y_i}}} \frac{v_i \frac{\partial g}{\partial v_i}(t, v_0, v_1)}{g(t, v_0, v_1)} = 0 \quad \text{рівномірно по } v_j \in \Delta_{Y_j},\ j \neq i,\ \forall i, j \in \{0, 1\}. \tag{18}$$

Можна вибрати множини $\tilde{\Delta}_{Y_i} \subset \Delta_{Y_i}$ $(\forall i \in \{0, 1\})$ так, щоб

$$\left| \frac{\pi_\omega(t) \frac{\partial g}{\partial t}(t, v_0, v_1)}{g(t, v_0, v_1)} \right| < \zeta, \quad (\forall i \in \{0, 1\}) \text{ при } (v_0, v_1) \in \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}, \tag{19}$$

$$\left| \frac{v_i \frac{\partial g}{\partial v_i}(t, v_0, v_1)}{g(t, v_0, v_1)} \right| < \zeta, \quad (\forall i \in \{0, 1\}) \text{ при } (v_0, v_1) \in \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}, \tag{20}$$

де $0 < \zeta < \frac{|1 - \sigma_0 - \sigma_1|}{4}$, ζ – достатньо мало.

Покладемо

$$\begin{cases} \dfrac{y(t)|y(t)|^{\frac{\sigma_0}{\sigma_1 - 1}}}{|\exp(R(|\ln|\pi_\omega(t) y(t) y'(t)||))\Theta_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \dfrac{c_1}{c} J(t)[1 + z_1(x)], \\ \dfrac{y(t)}{y'(t)} = \dfrac{1}{c} \dfrac{J(t)}{J'(t)} [1 + z_2(x)], \end{cases} \tag{21}$$

де

$$c = \frac{1 - \sigma_1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1}, \quad c_1 = |1 - \sigma_1|^{\frac{1}{1 - \sigma_1}},$$
$$x = \beta \ln |I(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \lim\limits_{t \uparrow \omega} I(t) = +\infty, \\ -1, & \text{якщо } \lim\limits_{t \uparrow \omega} I(t) = 0. \end{cases} \tag{22}$$

зведемо рівняння (1) до системи

$$\begin{cases} z_1'(x) = \beta H(x)[1+z_1]\Bigg(\dfrac{c}{1+z_2} - 1 - \dfrac{G_1(x,z_1,z_2)R'(|2\ln|\pi_\omega(x)||)}{(1-\sigma_1)\cdot H(x)}\times \\ \qquad \times\left(G_3(x,z_1,z_2) + \dfrac{cH(x)}{1+z_2} + \dfrac{G_0(x,z_1,z_2)}{1-\sigma_1}\left|\dfrac{1+z_2}{1+z_1}\right|^{1-\sigma_1}\right) - \\ \qquad - \dfrac{c\cdot G_2(x,z_1,z_2)}{(1-\sigma_1)[1+z_2]}\Bigg), \\ z_2' = \beta[1+z_2]\left(\dfrac{cH(x)}{1+z_2} + K(x) - H(x) - \dfrac{G_0(x,z_1,z_2)}{1-\sigma_1}\left|\dfrac{1+z_2}{1+z_1}\right|^{1-\sigma_1}\right), \end{cases} \tag{23}$$

де

$$\Psi_0(x,z_1,z_2) = F_0^{-1}\left(\frac{c_1}{c}J(t(x))[1+z_1], \frac{J(t(x))}{cJ'(t(x))}[1+z_2]\right),$$

$$\Psi_1(x,z_1,z_2) = F_1^{-1}\left(\frac{c_1}{c}J(t(x))[1+z_1], \frac{J(t(x))}{cJ'(t(x))}[1+z_2]\right),$$

$$G_0(x,z_1,z_2) = \frac{\Theta_1(\Psi_1(x,z_1,z_2))}{\Theta_1\left(\frac{\operatorname{sign} y_1^0}{|\pi_\omega(t(x))|}\right)}, \quad G_3(x,z_1,z_2) = \frac{I(t)}{\pi_\omega(t)I'(t)},$$

$$G_1(x,z_1,z_2) = \frac{R'(|\ln|\pi_\omega(t)\Psi_0(x,z_1,z_2)\Psi_1(x,z_1,z_2)||)}{R'(|2\ln|\pi_\omega(t(x))||)},$$

$$G_2(x,z_1,z_2) = \frac{\Psi_0(x,z_1,z_2)L_0'(\Psi_0(x,z_1,z_2))}{L_0(\Psi_0(x,z_1,z_2))},$$

$$H(x) = \frac{I(t(x))J'(t(x))}{I'(t(x))J(t(x))}, \quad K(x) = H(t(x))\frac{J''(t(x))J(t(x))}{(J'(t(x)))^2}.$$

В силу умови (6)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{R'(|2\ln|\pi_\omega(t)||)}{H(t)} = 0.$$

$$\lim_{x\to\infty}\Psi_0(x,z_1,z_2) = Y_0, \quad \lim_{x\to\infty}\Psi_1(x,z_1,z_2) = Y_1$$

рівномірно по $z_1, z_2 : |z_j| < \frac{1}{2}, \forall j \in \{1,2\}$.

$$\lim_{x\to+\infty}G_2(x,z_1,z_2) = 0, \quad \text{рівномірно по } z_1, z_2$$

$$\lim_{x\to+\infty} G_0(x,z_1,z_2)=1, \quad \lim_{x\to+\infty} G_3(x,z_1,z_2)=\frac{1}{\sigma_1-1}.$$

Так як R — правильно зміна функція при прямуванні аргументу до ∞ порядку μ, то

$$\lim_{x\to+\infty} G_1(x,z_1,z_2)=1.$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (23) на множині

$$\Omega=[x_0,+\infty[\times D, \quad \text{де } x_0=\beta\ln|I(t)|,$$

$$D=\left\{(z_1,z_2):|z_i|\le\frac{1}{2}, i\in\{1,2\}\right\}.$$

Перепишемо систему (23) у виді

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx}=(A_{11}z_1+A_{12}z_2+R_1(x,z_1,z_2)+R_2(z_1,z_2))H(x), \\[2ex] \dfrac{dz_2}{dx}=A_{21}z_1+A_{22}z_2+R_3(x)+R_4(z_1,z_2), \end{cases} \tag{24}$$

де

$$A_{11}=0, \quad A_{12}=-c\beta, \quad A_{21}=\beta, \quad A_{22}=(1-c)\beta,$$

$$R_1(x,z_1,z_2)=\beta[1+z_1]\left(\frac{G_1(x,z_1,z_2)R'(|2\ln|\pi_\omega(x)||)}{(1-\sigma_1)\cdot H(x)}\times\right.$$
$$\left.\times\left(G_3(x,z_1,z_2)+\frac{cH(x)}{1+z_2}+\frac{G_0(x,z_1,z_2)}{1-\sigma_1}\left|\frac{1+z_2}{1+z_1}\right|^{1-\sigma_1}\right)+\frac{c\cdot G_2(x,z_1,z_2)}{(1-\sigma_1)[1+z_2]}\right),$$

$$R_2(z_1,z_2)=\beta\frac{z_2^2-z_1z_2}{1+z_2},$$

$$R_3(x,z_1,z_2)=\beta[1+z_2]\left(\frac{cH(x)}{1+z_2}+K(x)-H(x)-\frac{1}{1-\sigma_1}\times\right.$$
$$\left.\times\left(1+(G_0(x,z_1,z_2)-1)\left|\frac{1+z_2}{1+z_1}\right|^{1-\sigma_1}\right)\right),$$

$$R_4(z_1,z_2)=\beta\frac{1}{1-\sigma_1}\left(\frac{|1+z_2|^{2-\sigma_1}}{|1+z_1|^{1-\sigma_1}}-((2-\sigma_1)z_2+(1-\sigma_1)z_1-1)\right).$$

За третьою з умов (7)

$$\lim_{x\to\infty} H(x) = 0, \tag{25}$$

а звідси

$$\lim_{x\to\infty} K(x) = \frac{1}{1-\sigma_1}.$$

Отже, з урахуванням (23)

$$\lim_{x\to+\infty} R_i(x, z_1, z_2) = 0 \quad (i \in \{1, 3\})$$

рівномірно по $z_1, z_2 : (z_1, z_2) \in D$,

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0} R_j(z_1, z_2) = 0 \quad (\forall j \in \{2, 4\})$$

рівномірно по $x : x \in [x_0, +\infty[$.

Зауважимо, що характеристичне рівняння матриці

$$\begin{pmatrix} 0 & -c\beta \\ \\ \beta & (1-c)\beta \end{pmatrix}$$

має вигляд

$$\mu^2 - (1-c)\beta\mu + c\beta^2 = 0. \tag{26}$$

У цього рівняння немає коренів з нульовою дійсною частиною. Отримуємо, що у цих випадках для системи диференціальних рівнянь (23) виконано всі умови теореми з [4]. Відповідно до цієї теореми система (23) має розв'язки $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_1, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ $(x_1 \geq x_0)$, які прямують до нуля при $x \to +\infty$. Цим розв'язкам у силу замін (21), (22) відповідають розв'язки y рівняння (1), що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (9).

Теорему доведено.

Висновки

Для диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями загального вигляду, що є близькими до правильно змінних, було отримано необхідні та достатні умови існування достатньо широкого класу повільно змінних розв'язків. Крім того, знайдено асимптотичні формули для цих розв'язків та їх похідних першого порядку.

Список літератури

1. **Білозерова М. О.** Асимптотичні зображення особливих розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з правильно змінними нелінійностями. *Буковинський математичний журнал.* 2015. Т. 3, № 2. С. 7–12.
2. **Білозерова М. О., Гержановська Г. А.** Асимптотична поведінка розв'язків, що є близькими до лінійних функцій, істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку. *Нелінійні коливання.* 2022. Т. 25, № 1. С. 3–13.
3. **Гержановська Г. А.** Властивості повільно змінних розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. *Буковинський математичний журнал.* 2017. Т. 5, № 3–4. С. 39–46.
4. **Евтухов В. М., Самойленко А. М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений. *Укр. мат. журн.* 2010. Т. 62, № 1. С. 52–80.
5. **Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.** *Regular Variation.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 494 p.
6. **Marić V.** Regular variation and differential equations. *Lecture notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 2000. 128 p.

Vorobiova A. V.

Asymptotic properties of slowly varying solutions to second-order differential equations with nonlinearities close to regularly varying

Summary

The works of V. M. Evtukhov initiated a methodology for studying the asymptotic properties of solutions for wide classes of substantially nonlinear differential equations with various types of nonlinearities, specifically regularly varying ones in the neighborhood of a singular point. In the presented article, this approach is applied to study the asymptotic behavior of $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-solutions for a class of substantially nonlinear second-order differential equations. Main attention is paid to finding asymptotic representations of these solutions and their first-order derivatives in complex cases when $\lambda_0 = 0$. Under such conditions, the solutions or their first-order derivatives turn out to be slowly varying functions as $t \uparrow \omega$, which significantly complicates the research process compared to standard cases. The paper obtains asymptotic representations for a special class of slowly varying solutions of substantially nonlinear second-order differential equations containing new classes of nonlinearities close to regularly varying ones. Furthermore, necessary and sufficient conditions for the existence of such solutions are obtained.

Keywords: second-order differential equations, asymptotic, slowly varying solutions, regularly varying nonlinearities, P_ω-solutions.

References

1. **Bilozerova M. O.** Asymptotic representations of singular solutions of second-order differential equations with regularly varying nonlinearities. *Bukovinian Mathematical Journal.* 2015. Vol. 3, № 2. P. 7–12. [in Ukrainian].

2. **Bilozerova M. O., Gerzhanovska G. A.** Asymptotic behavior of solutions close to linear functions of essentially nonlinear nonautonomous second-order differential equations. *Nonlinear Oscillations.* 2022. Vol. 25, № 1. P. 3–13. [in Ukrainian].

3. **Gerzhanovska G. A.** Properties of slowly varying solutions of essentially nonlinear second-order differential equations. *Bukovynskyi matematychnyi zhurnal.* 2017. Vol. 5, № 3–4. P. 39–46. [in Ukrainian].

4. **Evtukhov V. M., Samoilenko A. M.** Conditions of existence of disappearing in the critical point solutions to real nonautonomous systems of quasilinear differential equations. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2010. Vol. 62, № 1. P. 52–80. [in Russian].
5. **Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.** *Regular Variation.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 494 p.
6. **Mari'c V.** Regular variation and differential equations. *Lecture notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 2000. 128 p.