ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. І. І. МЕЧНИКОВА
1865

ДОСЛІДЖЕННЯ в МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Том 23. Випуск 2(32)

Volume 23. Issue 2(32)

2018

ISSN 2519—206X

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ДОСЛІДЖЕННЯ в МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

Науковий журнал

Виходить 2 рази на рік

Журнал заснований у січні 1997 р.

Том 23. Випуск 2(32). 2018

Одеса
«Астропринт»
2018

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

Відповідальний за випуск — О. П. Огуленко, к. ф.-м. н.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації серія КВ № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

Журнал внесений до переліку наукових фахових видань наказами Міністерства освіти і науки України № 527 від 24.05.2018 р. та № 775 від 16.07.2018 р.

ISSN 2519—206X

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Scientific journal

Published twice a year

Journal founded in January, 1997

Volume 23. Issue 2(32). 2018

Odesa
«Astroprint»
2018

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

The certificate of mass media state registration under the number № 21400—11200ПР issued on June 17, 2015.

The journal was included in the list of scientific specialized publications by the orders of Ministry of education and science of Ukraine №527 issued on May 24, 2018 and № 775 issued on July 16, 2018.

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 517.925

Г. А. Гержановская
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОСОБЫХ РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, с нелинейностями, в некотором смысле близкими к правильно меняющимся, рассматривается достаточно широкий класс медленно меняющихся при стремлении аргумента к особой точке решений. В работе получены необходимые и достаточные условия существования решений из введенного класса. Кроме того, найдены асимптотические представления при стремлении аргумента к особой точке для таких решений и их производных первого порядка. Результаты работы применимы как исследования решений при стремлении аргумента к бесконечности, так и для сингулярных решений.

MSC: 34C41, 34E10.
Ключевые слова: асимптотические представления решений, медленно меняющиеся решения, правильно меняющиеся нелинейности, $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-решения.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149700.

Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')\exp(R(|\ln|yy'||)), \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leqslant +\infty)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ — непрерывные функции, $R :]0;+\infty[\to]0;+\infty[$ — непрерывно дифференцируемая с монотонной производной, правильно меняющаяся (см., например, [1]) на бесконечности функция порядка $\mu, 0 < \mu < 1$, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — промежуток либо $[y_i^0; Y_i[$,[*] либо $]Y_i; y_i^0]$ $(i = 0,1)$. Кроме того, предполагается, что каждая из функций $\varphi_i(z)$, (i=0,1) является правильно меняющейся функцией (см. [1], глава 1, §1.1, стр. 9) при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$ порядка σ_i, $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$, $\sigma_1 \neq 1$.

Определение 1. *Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решением, если оно задано на $[t_0,\omega[$ и*

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad (i = 0,1), \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)\,y(t)} = \lambda_0. \tag{2}$$

Данный класс решений охватывает как правильно, так и быстро, и медленно меняющиеся решения. Быстро меняющиеся (см., например, [2]) и правильно меняющиеся решения ненулевого порядка были исследованы ранее (см., например, [3]). В данной работе рассматривается особый класс $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-решений уравнения (1). Такие решения являются медленно меняющимися функциями

[*] При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ считаем $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ соответственно.

Получена 23.09.2018

при $t \uparrow \omega$, поэтому их исследование требует существенных изменений в методике. Кроме того, приходится накладывать дополнительные условия на правую часть уравнения (1). В работе [5] также иследовались $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-решения, однако сейчас удалось получить результаты для случая, когда не будут выполняться условия из теоремы 1 из [5].

Основные результаты. Введем дополнительные обозначения и определения, необходимые далее.

Определение 2. *Пусть $\varphi : \Delta_Y \to]0,+\infty[$ — правильно меняющаяся функция при $z \to Y \quad (z \in \Delta_Y)$ $(Y \in \{0,\infty\}$, Δ_Y — некоторая односторонняя окрестность Y порядка σ. Будем говорить, что φ удовлетворяет условию S, если для любой непрерывно дифференцируемой функции $L : \Delta_Y \to]0;+\infty[$ такой, что*

$$\lim_{\substack{z\to Y\\ z\in\Delta_Y}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0,$$

имеет место соотношение

$$\Theta(zL(z)) = \Theta(z)(1+o(1)) \qquad \text{при } z \to Y, \quad (z \in \Delta_Y),$$

где $\Theta(z) = \varphi(z)|z|^{-\sigma}$.

Положим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t-\omega & \text{при } \omega < +\infty, \end{cases} \qquad \Theta_i(z) = \varphi_i(z)|z|^{-\sigma_i}, \quad (i = 0,1)$$

и в случае, когда $\frac{y_1^0}{|\pi_\omega(t)|} = Y_1$,

$$I(t) = \alpha_0 \int\limits_{A_\omega}^{t} p(\tau)d\tau, \qquad A_\omega = \begin{cases} a, \text{если } \int\limits_a^\omega p(\tau)d\tau = +\infty, \\ \omega, \text{если } \int\limits_a^\omega p(\tau)d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$N(t) = \frac{(1-\sigma_1)I(t)\left|(1-\sigma_1)I(t)\Theta_1\left(\frac{y_1^0}{|\pi_\omega(t)|}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}{I'(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}$$

при $t \in [b,\omega[$, где $b \in [a,\omega[$ выбирается так, чтобы $\frac{y_1^0}{|\pi_\omega(t)|} \in \Delta_1$.

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1) φ_1 удовлетворяет условию S и выполняется условие*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)N'(t)}{R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)N(t)} = 0. \tag{3}$$

Тогда для существования у уравнения (1) $P(Y_0,Y_1,0)$-решений, для которых существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\lim_{t\uparrow\omega} y_0^0 \left(\exp(R(|\ln|\pi_\omega(t)||))\right)^{\frac{\sigma_1-1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{-\alpha_0}{\pi_\omega(t)} = Y_1,$$
$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} = \sigma_1 - 1 \tag{4}$$

и неравенств

$$\alpha_0 y_1^0 \pi_\omega(t) < 0, \qquad I(t)(1-\sigma_0-\sigma_1) y_0^0 R'(|\ln|\pi_\omega(t)||) > 0. \tag{5}$$

Более того, для каждого такого решения справедливы асимптотические представления при $t \uparrow \omega$

$$\begin{gathered}\frac{y(t)}{|\varphi_0(y(t))\exp\left(R(|\ln|y(t)y'(t||))\right)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1} N(t)[1+o(1)], \\ \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{I'(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)I(t)}[1+o(1)].\end{gathered} \tag{6}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y : [t_0,\omega[\to \Delta_{Y_0}$ — $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-решение уравнения (1). Из условий на функцию R, с учетом предложения 9 из [2] (раздел 5, пункт 1, стр. 116), следует, что

$$\lim_{z\to\infty} \frac{zR'(z)}{R(z)} = \mu, \quad \lim_{z\to\infty} R'(z) = 0. \tag{7}$$

Из определения $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-решений [4], так как существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$, следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = -1, \tag{8}$$

откуда следует выполнение второго из условий (4) и первого из условий (5). Из первого из соотношений (8) получим, что $y(t)$ является медленно меняющейся функцией при $t \uparrow \omega$. Поэтому в силу второго из соотношений (8) функцию $y(t)$ можно представить в виде $y(t) = L(y'(t))$, где L — медлено меняющаяся функция при стремлении аргумента к Y_1. Поэтому уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{y''(t)}{\varphi_0(L(y'(t)))\varphi_1(y'(t))\exp(R(|\ln|L(y'(t))y'(t)||))} = \alpha_0 p(t). \tag{9}$$

Отсюда с учетом свойств правильно и медленно меняющихся функций получим при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(L(y'(t)))\varphi_1(y'(t))\exp(R(|\ln|L(y'(t))y'(t)||))} = (1-\sigma_1)I(t)[1+o(1)]. \tag{10}$$

Используя (9) и (10), получим

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{p(t)}{(1-\sigma_1)I(t)}[1+o(1)] \text{ при } t\uparrow\omega. \tag{11}$$

Отсюда в силу второго из соотношений (8) следует выполнение третьего из условий (4).

Перепишем (10) в виде при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{\sigma_1}\exp(R|\ln|y(t)y'(t)||)} = (1-\sigma_1)I(t)\Theta_1(y'(t))[1+o(1)]. \tag{12}$$

Кроме того, так как φ_1 удовлетворяет условию S, из (8) следует, что

$$\Theta_1(y'(t)) = \Theta_1\left(\frac{\mathrm{sign} y_0^1}{|\pi_\omega(t)|}\right)[1+o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{13}$$

С учетом (7), (8) и свойств функции R имеем при $t \uparrow \omega$

$$\begin{gathered} R(|\ln|y(t)y'(t)||) = R(|\ln|\pi_\omega(t)||)[1+o(1)], \\ R'(|\ln|y(t)y'(t)||) = R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)[1+o(1)]. \end{gathered} \tag{14}$$

Рассмотрим функцию

$$W(t) = \int_a^t \frac{\exp(R(|\ln|y(\tau)y'(\tau)||))y''(\tau)N(\tau)R'(|\ln|\pi_\omega(\tau)||)}{y'(\tau)}d\tau. \tag{15}$$

Покажем, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{W(t)}{\exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))N(t)} = 1. \tag{16}$$

Используя правило Лопиталя и (14), получим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{W(t)}{\exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))N(t)} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{(W(t))'}{(\exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))N(t))'} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\frac{N(t)\exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))y''(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{y'(t)\exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))}}{\left(N'(t)+\frac{N(t)R'(|\ln|y(t)y'(t)||)}{y(t)y'(t)}(y''(t)y(t)+(y'(t))^2)\right)} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\frac{R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{\frac{y'(t)N'(t)}{y''(t)N(t)}+\frac{R'(|\ln|y(t)y'(t)||)}{y(t)y'(t)}(y''(t)y(t)+(y'(t))^2)} =$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{\frac{y'(t)}{\pi_\omega(t)y''(t)}\frac{\pi_\omega(t)N'(t)}{N(t)}+R'(|\ln|y(t)y'(t)||)\left(1+\frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)}\right)} = 1.$$

Используя (11), перепишем (12) в виде при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t)}{|\varphi_0(y)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \frac{y''(t)(1-\sigma_1)I(t)|(1-\sigma_1)\Theta_1(y')I(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}\exp\left(\frac{R(|\ln|yy'||)}{1-\sigma_1}\right)}{y'(t)I'(t)}[1+o(1)]. \tag{17}$$

Из данного соотношения, с учетом (13) и (15), получим

$$\frac{y'(t)}{|\varphi_0(y)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \frac{y''(t)N(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)\exp\left(\frac{R(|\ln|yy'||)}{1-\sigma_1}\right)}{y'(t)}[1+o(1)] \text{ при } t\uparrow\omega. \tag{18}$$

Из (18), с учетом вида функции W и свойств правильно меняющихся функций, получим

$$\frac{y(t)}{|\varphi_0(y)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}W(t)[1+o(1)] \text{ при } t\uparrow\omega. \tag{19}$$

В силу (16) соотношение (19) можно переписать в виде

$$\frac{y(t)}{|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\exp\left(\frac{R(\ln|y(t)y'(t)|||)}{1-\sigma_1}\right)N(t)[1+o(1)] \text{ при } t\uparrow\omega, \tag{20}$$

откуда следует второе из условий (5) и первое из представлений (6). Из (18) и (20) получим

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{(1-\sigma_1)y''(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)y'(t)}[1+o(1)] \text{ при } t\uparrow\omega.$$

Отсюда, используя (11), получим

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{I'(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)I(t)}[1+o(1)] \text{ при } t\uparrow\omega,$$

то есть имеет место второе из представлений (6) и первое из условий (4)

Достаточность. Пусть существуют бесконечно дифференцируемые функции $L_0:\Delta_{Y_0}\to]0,+\infty[$, $L_1:\Delta_{Y_1}\to]0,+\infty[$ такие, что

$$L_i(z) = \Theta_i(z)[1+o(1)] \text{ при } z\to Y_i\,(z\in\Delta_{Y_i}), \quad \lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}}\frac{zL_i'(z)}{L_i(z)} = 0, \quad i=0{,}1.$$

Обозначим $g(v_0,v_1) = \exp(R(|\ln|v_0v_1||))L_0(v_0)$.

Отсюда, с учетом вида функций φ_0 и R, имеем

$$\lim_{\substack{v_i\to Y_i\\ v_i\in\Delta_{Y_i}}}\frac{v_i\frac{\partial g}{\partial v_i}(v_0,v_1)}{g(v_0,v_1)} = 0 \quad \text{равномерно по } v_j\in\Delta_{Y_j},\, j\neq i,\, i,j=0{,}1. \tag{21}$$

Таким образом, можна выбрать $\tilde\Delta_{Y_i}\subset\Delta_{Y_i}$ $(i=0{,}1)$ так, чтобы

$$\left|\frac{v_i\frac{\partial g}{\partial v_i}(v_0,v_1)}{g(v_0,v_1)}\right| < \zeta,\ (i=0{,}1) \tag{22}$$

при $(v_0,v_1)\in\tilde\Delta_{Y_0}\times\tilde\Delta_{Y_1}$, где $0<\zeta<\frac{|1-\sigma_0-\sigma_1|}{4}$, ζ достаточно мало и

$$\tilde\Delta_{Y_i} = \begin{cases}\{[\tilde y_i^0,Y_i[, \text{ если } \Delta_{Y_i}=[y_i^0,Y_i[,\ y_i^0\leqslant\tilde y_i^0<Y_i;\\ \ ]Y_i,\tilde y_i^0],\ \text{ если } \Delta_{Y_i}=]Y_i,y_i^0],\ Y_i>\tilde y_i^0\geqslant y_i^0,\end{cases} \quad (i=0,1).$$

Рассмотрим функцию

$$F(s_0,s_1) = \begin{pmatrix}\dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}\\[2ex] \dfrac{s_1}{s_0}\end{pmatrix},$$

заданную на множестве $\tilde{\Delta}_{Y_0}\times\tilde{\Delta}_{Y_1}$. Рассмотрим первую компоненту данной функции. С учетом (21) имеем

$$\lim_{\substack{s_0\to Y_0\\ s_0\in\tilde{\Delta}_{Y_0}}}\frac{s_0\left(\dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}\right)'_{s_0}}{\dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}}=$$

$$=\lim_{\substack{s_0\to Y_0\\ s_0\in\tilde{\Delta}_{Y_0}}}\left(1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}-\frac{1}{1-\sigma_1}\frac{s_0\frac{\partial g}{\partial s_0}(s_0,s_1)}{g(s_0,s_1)}\right)=\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}$$

равномерно по $s_1\in\tilde{\Delta}_{Y_1}$.

Поэтому

$$\lim_{\substack{s_0\to Y_0\\ s_0\in\tilde{\Delta}_{Y_0}}}\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}=\Upsilon \text{ равномерно по } s_1\in\tilde{\Delta}_{Y_1},$$

$$\Upsilon=\begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad Y_0=+\infty \text{ и } \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}>0, \text{ или } Y_0=0 \text{ и } \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}<0,\\ 0, & \text{если} \quad Y_0=+\infty \text{ и } \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}<0, \text{ или } Y_0=0 \text{ и } \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}>0.\end{cases} \tag{23}$$

Покажем, что F взаимно однозначно отображает $\tilde{\Delta}_{Y_0}\times\tilde{\Delta}_{Y_1}$ на множество

$$F(\tilde{\Delta}_{Y_0}\times\tilde{\Delta}_{Y_1})=\begin{cases}\left[\frac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0,\tilde{y}_0^1)};\Upsilon\right)\times\Delta_0, \text{ если } \frac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0,\tilde{y}_0^1)}<\Upsilon,\\ \left(\Upsilon;\frac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0,\tilde{y}_0^1)}\right]\times\Delta_0, \text{ если } \frac{|\tilde{y}_0^0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(\tilde{y}_0^0,\tilde{y}_0^1)}>\Upsilon,\end{cases} \tag{24}$$

где

$$\Delta_0=\begin{cases}(0;+\infty), & \text{если } \tilde{y}_0^0\tilde{y}_0^1>0,\\ (-\infty;0), & \text{если } \tilde{y}_0^0\tilde{y}_0^1<0.\end{cases} \tag{25}$$

Рассмотрим поведение функции $\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}$ на прямых

$$s_1=ks_0, \qquad k\in\mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{26}$$

На каждой такой прямой $\dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}=\dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)}$. Кроме того, имеем

$$\left(\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)}\right)'_{s_0}=$$

$$=\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{(1-\sigma_1)s_0g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)}\left(1-\sigma_0-\sigma_1-\frac{s_0g'_{s_0}(s_0,ks_0)}{g(s_0,ks_0)}-\frac{ks_0g'_{ks_0}(s_0,ks_0)}{g(s_0,ks_0)}\right).$$

Это означает, что с учетом (22)

$$\operatorname{sign}\left(\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)}\right)'_{s_0} = \operatorname{sign}(y_0^0(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)).$$

Поэтому функция $\dfrac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,ks_0)}$ строго монотонна на любой прямой вида (26). Допустим, что отображение F не является взаимно однозначным. Тогда

$$\exists (p_0,p_1),(q_0,q_1) \in \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1},$$

$$(p_0,p_1) \neq (q_0,q_1): \qquad F(p_0,p_1) = F(q_0,q_1).$$

С учетом определения множеств $\tilde{\Delta}_{Y_0},\tilde{\Delta}_{Y_1}$ последнее равенство означает, что

$$\frac{|p_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(p_0,p_1)} = \frac{|q_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(q_0,q_1)}, \qquad \frac{p_0}{p_1} = \frac{q_0}{q_1} = c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{27}$$

Покажем, что точки (p_0,p_1) и (q_0,q_1) лежат на одной прямой вида (26). Но тогда (27) не может иметь места, так как функция $\frac{|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,cs_0)}$ строго монотонна на этой прямой. Таким образом, существует обратная $F^{-1}: F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}) \to \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$. Учитывая вид функции, имеем

$$F^{-1}(w_0,w)_1 = \begin{pmatrix} F_0^{-1}(w_0,w_1) \\ \\ F_1^{-1}(w_0,w_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0^{-1}(w_0,w_1) \\ \\ w_1 F_0^{-1}(w_0,w_1) \end{pmatrix},$$

где $(w_0,w_1) \in F(\tilde{\Delta_{Y_0}} \times \tilde{\Delta_{Y_1}})$. Поскольку якобиан

$$JF(s_0,s_1) = \begin{vmatrix} \frac{|s_0|^{1-\frac{1}{1-\sigma_1}}\left(1-\sigma_0-\sigma_1-\frac{s_0\frac{\partial g}{\partial s_0}(s_0,s_1)}{g(s_0,s_1)}\right)}{(1-\sigma_1)s_0 g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)} & \frac{-|s_0|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_0,s_1)}{(1-\sigma_1)g^{1+\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)} \\ \\ -\frac{s_1}{s_0^2} & \frac{1}{s_0} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{|s_0|^{1-\frac{1}{1-\sigma_1}}}{(1-\sigma_1 s_0^2)g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(s_0,s_1)}\left(1-\sigma_0-\sigma_1-\frac{s_0\frac{\partial g}{\partial s_0}(s_0,s_1)}{g(s_0,s_1)}-\frac{s_1\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_0,s_1)}{g(s_0,s_1)}\right) \neq 0,$$

при $(s_0,s_1) \in \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta_{Y_1}}$, функция F^{-1} является непрерывно дифференцируемой на $F(\tilde{\Delta}_{Y_0}\times\tilde{\Delta}_{Y_1})$. Кроме того, для $(w_0,w_1)\in F(\tilde{\Delta_{Y_0}}\times\tilde{\Delta_{Y_1}})$ справедливы равенства

$$\frac{|F_0^{-1}(w_0,w_1)|^{1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}}}{g^{\frac{1}{1-\sigma_1}}(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}=w_0,$$

$$\frac{F_i^{-1}(w_0,w_1)}{w_0\dfrac{\partial F_i^{-1}}{\partial w_0}(w_0,w_1)}=1-\frac{\sigma_0}{1-\sigma_1}-\frac{1}{1-\sigma_1}\times \tag{28}$$

$$\times\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{F_{k-1}^{-1}(w_0,w_1)\dfrac{\partial g}{\partial v_k}(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}{g(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}\right]\ (i=0,1),$$

$$\frac{F_0^{-1}(w_0,w_1)}{w_1\dfrac{\partial F_0^{-1}}{\partial w_1}(w_0,w_1)}=\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}\frac{g(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}{w_1F_0^{-1}(w_0,w_1)\dfrac{\partial g}{\partial v_0}(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}+$$

$$+\frac{1}{1-\sigma_1}\frac{F_0^{-1}(w_0,w_1)\dfrac{\partial g}{\partial v_0}(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}{w_1F_0^{-1}(w_0,w_1)\dfrac{\partial g}{\partial v_0}(F_0^{-1}(w_0,w_1),F_1^{-1}(w_0,w_1))}+1, \tag{29}$$

$$\frac{w_1\frac{\partial F_1^{-1}}{\partial w_1}(w_0,w_1)}{F_1^{-1}(w_0,w_1)}=1+\frac{w_1\frac{\partial F_0^{-1}}{\partial w_1}(w_0,w_1)}{F_0^{-1}(w_0,w_1)}. \tag{30}$$

Полагая

$$\begin{cases}\dfrac{y(t)}{|\varphi_0(y(t))\exp(R(|\ln|y(t)y'(t)||))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}}=(1-\sigma_0-\sigma_1)N(t)[1+z_1(x)],\\[2ex] \dfrac{y'(y)}{y(t)}=\dfrac{I'(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)I(t)}[1+z_2(x)],\end{cases} \tag{31}$$

где

$$x=\beta\ln|\pi_\omega(t)|,\qquad \beta=\begin{cases}\ \ 1 & \text{при } \omega=+\infty,\\ -1 & \text{при } \omega<\infty,\end{cases}$$

сведем уравнение (1) к системе

$$\begin{cases} z_1'=\beta CG_1(x)[1+z_1][1+z_2]\left(1-K_2(x,z_1,z_2)-K_1(x,z_1,z_2)\frac{|1+z_1|^{\sigma_1-1}}{1+z_2|^{\sigma_1}}\right)\\[2ex] z_2=\frac{\beta}{1-\sigma_1}G_2(x)[1+z_2]\left(\left|\frac{1+z_1}{1+z_2}\right|^{1-\sigma_1}+K_3(x,z_1,z_2)-1\right)\end{cases} \tag{32}$$

где

$$\Psi_0(x,z_1,z_2)=$$

$$= F_0^{-1}\left((1-\sigma_0-\sigma_1)N(t(x))[1+z_1(x)], \frac{I'(t(x))R'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)I(t(x))}[1+z_2(x)]\right),$$

$$\Psi_1(x,z_1,z_2) =$$

$$= F_1^{-1}\left((1-\sigma_0-\sigma_1)N(t(x))[1+z_1(x)], \frac{I'(t(x))R'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)I(t(x))}[1+z_2(x)]\right),$$

$$K_1(x,z_1,z_2) = \frac{R'(|\ln|\Psi_0(t(x),z_1,z_2)\Psi_1(t(x),z_1,z_2||)}{R'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)},$$

$$K_2(x,z_1,z_2) = -\frac{N'(t)\pi_\omega(t)}{CN(t)G_1(t)} - K_1(x,z_1,z_2)\frac{|(1-\sigma_1)|\mathrm{sign}(I(t(x)))G_1(t(x))}{y_1^0 G_2(t(x))} -$$

$$-\frac{\Psi_0(x,z_1,z_2)L_0'(\Psi_0(x,z_1,z_2))}{CL_0(\Psi_0(x,z_1,z_2))},$$

$$K_3(x,z_1,z_2) = (1-\sigma_1)\left(-G_1(t)[1+z_2] + \frac{\pi_\omega(t)N'(t)}{N(t)} + \frac{y_0^1\mathrm{sign}(I(t))}{(1-\sigma_1)\pi_\omega(t)}\frac{L_1'\left(\frac{y_1^0}{|\pi_\omega(t)|}\right)}{L_1\left(\frac{y_1^0}{|\pi_\omega(t)|}\right)}\right),$$

$$G_1(x) = \frac{\pi_\omega(t(x))I'(t(x))R'(|\ln|\pi_\omega(t(x))||)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)I(t(x))}, \quad G_2(x) = \frac{\pi_\omega(t(x))I'(t(x))}{I(t(x))},$$

$$C = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{1-\sigma_1}.$$

Обозначим

$$\eta_1(t,z_1) = (1-\sigma_0-\sigma_1)N(t)[1+z_1(x)],$$

$$\eta_2(t,z_2) = \frac{I'(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)I(t)}[1+z_2(x)].$$

Так же, как при доказательстве теоремы 1 из [3], с учетом (28)–(30) получим, что при построении множеств $\tilde{\Delta}_{Y_0}$, $\tilde{\Delta}_{Y_1}$ число ζ может быть выбрано настолько малым, чтобы существовали таки константы $\zeta_1,\zeta_2 \in R$, что

$$\zeta_1 < \frac{N(t)(\Psi_0(x(t),\xi_1,\xi_2))_t'}{N'(t)\Psi_0(x(t),\xi_1,\xi_2)} < \zeta_2, \qquad \forall(\xi_1,\xi_2) \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\times \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$$

и $\mathrm{sign}\zeta_1 = \mathrm{sign}\zeta_2 = \mathrm{sign}\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\Psi_0(x,z_1,z_2) = Y_0 \quad \text{равномерно по } z_1,z_2 : |z_j| < \frac{1}{2}, j = 1,2.$$

Аналогично, с учетом вида функции Ψ_1, имеем, что при построении множеств $\tilde{\Delta}_{Y_0}, \tilde{\Delta}_{Y_1}$ число ζ может быть выбрано настолько малым, чтобы существовали такие константы $\zeta_3,\zeta_4 \in R$, что

$$\zeta_3 < \frac{\pi_\omega(t)(\Psi_1(x(t),\xi_1,\xi_2))'}{\Psi_1(x(t),\xi_1,\xi_2)} < \zeta_4,$$

$\mathrm{sign}\zeta_3 = \mathrm{sign}\zeta_4 = -1$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\Psi_1(x,z_1,z_2) = Y_1 \quad \text{равномерно по } z_1,z_2 : |z_j| < \frac{1}{2}, j = 1,2.$$

Отсюда, с учетом условия (3), получим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)(\Psi_0(x(t),\xi_1,\xi_2)\Psi_1(x(t),\xi_1,\xi_2))'_t}{\Psi_0(x(t),\xi_1,\xi_2)\Psi_1(x(t),\xi_1,\xi_2)}=-1 \tag{33}$$

равномерно по $(\xi_1,\xi_2)\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\times\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$. Поэтому функция $\Psi_0(x(t),\xi_1,\xi_2)\Psi_1(x(t),\xi_1,\xi_2)$ является правильно меняющейся функцией порядка (-1) при $t\uparrow\omega$.

С учетом вида функций Ψ_0, Ψ_1 имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\Psi_0(x,z_1,z_2)\Psi_1(x,z_1,z_2)=\begin{cases}\infty, & \text{если } Y_1=\infty,\\ 0, & \text{если } Y_1=0,\end{cases}$$

равномерно по $z_1,z_2 : |z_1|<\frac{1}{2}$, $|z_2|<\frac{1}{2}$.

Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\ln|\Psi_0(x,z_1,z_2)\Psi_1(x,z_1,z_2)|=\infty.$$

Таким образом, так как R — правильно меняющаяся функция при стремлении аргумента к ∞ порядка μ, то

$$\lim_{x\to+\infty}K_1(x,z_1,z_2)=1. \tag{34}$$

Так как R — правильно меняющаяся функция порядка при стремлении аргумента к ∞ порядка $0<\mu<1$, то R' — соответственно правильно меняющаяся функция порядка $-1<\mu-1<0$. Тогда с учетом (33) и вида функций L_0, L_1, условия (3) и третьего из условий (4) получим

$$\lim_{x\to+\infty}K_i(x,z_1,z_2)=0, \qquad i=2{,}3.$$

Поэтому можно выбрать $t_0\in[a,\omega[$ так, чтобы

$$\begin{pmatrix}(1-\sigma_0-\sigma_1)N(t)[1+z_1(x)],\\[2mm] \dfrac{I'(t)R'(|\ln|\pi_\omega(t)||)}{(1-\sigma_0-\sigma_1)(1-\sigma_1)I(t)}[1+z_2(x)],\end{pmatrix}\in F(\tilde{\Delta_{Y_0}}\times\tilde{\Delta_{Y_1}})$$

при $t\in[t_0,\omega[, |z_i|\leqslant\frac{1}{2}, i\in\{1{,}2\}$. Теперь рассмотрим систему дифференциальных уравнений (32) на множестве

$$\Omega=[x_0,+\infty[\times D,\ \text{где } x_0=\beta\ln|t_0|,$$

$$D=\{(z_1,z_2):|z_i|\lesseqgtr\frac{1}{2}, i\in\{1{,}2\}\}.$$

Перепишем систему (32) в виде

$$\begin{cases} z_1'=G_1(x)(A_{11}z_1+A_{12}z_2+R_1(x,z_1,z_2)+R_2(z_1,z_2)),\\ z_2'=A_{21}z_1+A_{22}z_2+R_3(x,z_1,z_2)+R_4(z_1,z_2),\end{cases} \tag{35}$$

где

$$A_{11}=\beta C(1-\sigma_1),\quad A_{12}=\beta C\sigma_1,\quad A_{21}=\beta,\quad A_{22}=\beta\frac{\sigma_1}{1-\sigma_1},$$

$$R_1(x,z_1,z_2) = -\beta C\left(K_2(x,z_1,z_2)(1+z_1)(1+z_2) + (K_1(x,z_1,z_2)-1)\frac{|1+z_1|^{\sigma_1}}{|1+z_2|^{1-\sigma_1}}\right);$$

$$R_2(z_1,z_2) = \beta C\left(z_1z_2 - (|1+z_1|^{\sigma_1}|1+z_2|^{1-\sigma_1} - 1 - \sigma_1 z_1 - (1-\sigma_1)z_2)\right);$$

$$R_3(x,z_1,z_2) = \frac{\beta}{1-\sigma_1}(1+z_2)\left(G_2(x)-\sigma_1+1\right)\left(\left|\frac{1+z_1}{1+z_2}\right|^{1-\sigma_1} - 1 + K_3(x,z_1,z_2)\right);$$

$$R_4(z_1,z_2) = \frac{\beta}{1-\sigma_1}\left(\frac{|1+z_1|^{1-\sigma_1}}{|1+z_2|^{\sigma_1}} - 1 - (1-\sigma_1)z_1 - \sigma_1 z_2\right).$$

В силу условия (3) и третьего из условий (4) следует, что

$$\lim_{x\to\infty} G_1(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} G_2(x) = \sigma_1 - 1.$$

С учетом вида функции G_1 ясно, что

$$\int_{x_0}^{\infty} G_1(x)dx = \infty \text{ при } x \in [x_0,\infty[.$$

Таким образом, с учетом (32) имеем

$$\lim_{x\to\infty} R_i(x,z_1,z_2) = 0 \text{ равномерно по } (z_1,z_2) \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right], i \in \{1,3\},$$

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0} \frac{R_i(z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|} = 0 \text{ равномерно по } x \in [x_0,+\infty], i \in \{2,4\}.$$

Тогда, согласно теореме 2.8 из [4], система (35) имеет хотя бы одно решение $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_1,+\infty[\to \mathrm{R}^2 (x_1 \geqslant x_0)$, стремящееся к нулю при $x \to +\omega$. Ему соответствует решение y уравнения (1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (6). В силу этих представлений и (1) y является $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-решением.

Заключение. В данной статье были полученны необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-решений для достачно широкого класса существенно нелинейных дифференциальных уравнений вида (1), а также асимптотические представления таких решений и их производных первого порядка.

1. **Seneta E.** Regularly Varying Functions. – Lecture notes in Mathematics 508. SpringerVerlag, Berlin Heidelberg New York. – 1976. – 113 p.

2. **Maric V.** Regular variation and differential equations. – Lecture notes in Mathematics 1726. SpringerVerlag, Berlin Heidelberg New York. – 2000. – 128 p.

3. **Белозерова М. А., Гержановская Г. А.** Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, в некотором смысле близкими к правильно меняющимся // Мат. студії. – 2015. – Т.44, №2. – С. 204–214.

4. **Евтухов В. М., Самойленко А. М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. ж. – 2010. – Т. 62, №1. – С. 52–80.

5. **Гержановська Г. А.** Властивості повільно змінних розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Буковинський математичний журнал. 2017. – Т. 5, № 3–4. – С. 39–46.

Гержановська Г. А.
Дослідження деяких класів особливих розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівняннь другого порядку

Резюме

Для істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями, що є у деякому сенсі близькими до правильно змінних, розглянуто достатньо широкий клас повільно змінних при прямуванні аргументу до особливої точки розв'язків. У роботі отримано необхідні та достатні умови існування розв'язків з введеного класу. Крім того, знайдено асимптотичні зображення при прямуванні аргументу до особливої точки для таких розв'язків та їх похідних першого порядку. Результати роботи можна застосувати як при дослідженні розв'язків при прямуванні аргументу до нескінченності, так і для сингулярних розв'язків.
Ключові слова: асимптотичні зображення розв'язків, повільно змінні розв'язки, правильно змінні нелінійності, $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$*-розв'язки .*

Gerzhanovskaya G. A.
Investigation of some classes of special solutions of essentially nonlinear second order differential equations

Summary

The sufficiently wide class of slowly varying solutions as the argument tends to the special point for essentially nonlinear second order differential equations is considered. The necessary and sufficient conditions of the existence of solutions of considered class are obtained. The asymptotic representations as the argument tends to a special point of such solutions and their first derivatives are found also. The results of the work can be used by the investigation of solutions on infinity and for singular solutions.
Key words: asymptotic representations of solutions, slowly varying solutions, regularly varying nonlinearities, $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$*-solutions.*

References

1. Seneta, E. (1976). Regularly Varying Functions. *Lecture notes in Mathematics*, 508. SpringerVerlag, Berlin Heidelberg New York, 113 p.
2. Maric, V. (2000). Regular variation and differential equations. *Lecture notes in Mathematics*, 1726. SpringerVerlag, Berlin Heidelberg New York, 128 p.
3. Belozerova, M. O., Gerzhanovskaya, G. A. (2015). Asimptoticheskie predstavlenija reshenij differencial'nyh uravnenij vtorogo porjadka s nelinejnostjami, v nekotorom smysle blizkimi k pravil'no menjajushhimsja [Asymptotic representations of solutions of second order differential equations with nonlinearities close to regularly varying]. *Mat. Stud.*, vol. 44, no. 2., pp. 204–214.
4. Evtukhov, V. M., Samoilenko, A. M.(2010). Uslovija sushhestvovanija ischezajushhih v osoboj tochke reshenij u veshhestvennyh neavtonomnyh sistem kvazilinejnyh differencial'nyh uravnenij [Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point]. *Ukr. Mat. Zh*, vol. 62, no. 1, pp. 52–80.
5. Gerzhanovskaya, G. A. (2017). Vlastivosti povil'no zminnih rozv'jazkiv istotno nelinijnih diferencial'nih rivnjan' drugogo porjadku [Properties of the slowly verying solutions of essentually nonlinear second order differential equations] *Bukovins'kij matematichnij zhurnal.* Vol 5, no. 3–4, pp. 39–46.

УДК 517.937

В. В. Джашитова
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ПОЛНОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ СЧЁТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

Для счётной линейной однородной системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которой представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, получены условия существования линейного преобразования с коэффициентами аналогичной структуры, приводящего эту систему к диагональному виду в резонансном случае.
MSC: 34A30.
Ключевые слова: счётная система, разделение, ряды Фурье.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149701.

Введение. Счётные системы дифференциальных уравнений [1–3] вызывают постоянный интерес математиков. Из публикаций, вышедших в последнее время, отметим [4–6]. Как отмечается в монографии [2], счётные системы дифференциальных уравнений, несмотря на то, что они являются частным случаем дифференциальных уравнений в банаховых пространствах [7,8], имеют ряд специфических особенностей, что приводит к разработке соответствующей теории.

Одной из известных проблем теории дифференциальных уравнений в конечномерных пространствах является проблема полного или блочного разделения линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \tag{1}$$

$x = \mathrm{colon}(x_1,\dots,x_n)$, $P(t) = (p_{jk}(t))_{j,k=\overline{1,n}}$. То есть для системы (1) требуется построить ляпуновское преобразование

$$x = L(t)y, \tag{2}$$

приводящее систему (1) к виду

$$\frac{dx}{dt} = \Lambda(t)y, \tag{3}$$

где матрица $\Lambda(t)$ диагональная или блочно-диагональная. При этом существенным является вопрос о принадлежности элементов преобразующей матрицы $L(t)$ тем же классам функций, что и элементы матрицы $P(t)$ системы (1). Этой задаче также посвящён ряд исследований [9–12]. В настоящей работе задача полного разделения рассматривается для счётной линейной системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которой представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой.

Получена 10.10.2018

Предварительные результаты. Пусть

$$G(\varepsilon_0) = \{t,\varepsilon :\ t \in \mathbb{R},\, \varepsilon \in [0,\varepsilon_0],\, \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+\}.$$

Определение 1. *Скажем, что функция $p(t,\varepsilon)$ принадлежит классу $S(m;\varepsilon_0)$ $(m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, если выполнены следующие условия:*
1) $p : G(\varepsilon_0) \to \mathbb{C}$;
2) $p(t,\varepsilon) \in C^m(G(\varepsilon_0))$ по t;
3) $d^k p(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k p_k^*(t,\varepsilon)$ $(0 \leqslant k \leqslant m)$, причём

$$\|p\|_{S(m,\varepsilon_0)} \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{m} \sup_{G(\varepsilon_0)} |p_k^*(t,\varepsilon)| < +\infty.$$

Определение 2. *Скажем, что функция $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ принадлежит классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, если эта функция представима в виде:*

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon) \exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),$$

причём
1) $f_n(t,\varepsilon) \in S(m,\varepsilon_0)$ $(n \in \mathbb{Z})$;
2) $\|f\|_{F(m;\varepsilon_0,\theta)} \overset{def}{=} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \|f_n\|_{S(m;\varepsilon_0)} < +\infty$;
3) $\theta(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)d\tau$, $\varphi \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in S(m,\varepsilon_0)$, $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)} \varphi(t,\varepsilon) = \varphi_0 > 0$.

Множество функций класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ образует линейное пространство, превращающееся в полное нормированное пространство введением нормы $\|\cdot\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$. Имеет место цепочка включений: $F(0;\varepsilon_0;\theta) \supset F(1;\varepsilon_0;\theta) \supset \ldots \supset F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Пусть заданы две функции класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$:

$$u(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t,\varepsilon) \exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),\ v(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(t,\varepsilon) \exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right).$$

Произведение этих функций определим формулой:

$$(uv)(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} u_{n-s}(t,\varepsilon) v_s(t,\varepsilon) \right) \exp(in\theta(t,\varepsilon)).$$

Очевидно, что $uv \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Сформулируем некоторые свойства нормы $\|\cdot\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$. Пусть $u,v \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $k = \mathrm{const}$. Тогда:
1) $\|ku\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = |k| \cdot \|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$;
2) $\|u+v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} + \|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$;
3) $\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = \sum\limits_{k=0}^{m} \left\| \frac{1}{\varepsilon^k} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}$;
4) $\|uv\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant 2^m \|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \cdot \|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$.

Определение 3. *Скажем, что бесконечномерный вектор* $x(t,\varepsilon) = \mathrm{col}(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon),\ldots)$ *принадлежит классу* $S_1(m;\varepsilon_0)$, *если* $x_j \in S(m;\varepsilon_0)$ $(j = 1,2,\ldots)$, *причём*

$$\|x\|_{S_1(m;\varepsilon_0)} \overset{def}{=} \sup_j \|x_j\|_{S(m;\varepsilon_0)} < +\infty.$$

Определение 4. *Скажем, что бесконечная матрица* $A(t,\varepsilon) = (a_{jk}(t,\varepsilon))_{j,k=1,2,\ldots}$ *принадлежит классу* $S_2(m;\varepsilon_0)$, *если* $a_{jk} \in S(m;\varepsilon_0)$, *причём*

$$\|A\|_{S_2(m;\varepsilon_0)} \overset{def}{=} \sup_j \sum_{k=1}^{\infty} \|a_{jk}\|_{S(m;\varepsilon_0)} < +\infty.$$

Определение 5. *Скажем, что бесконечномерный вектор* $x(t,\varepsilon,\theta) = \mathrm{col}(x_1(t,\varepsilon,\theta),x_2(t,\varepsilon,\theta),\ldots)$ *принадлежит классу* $F_1(m;\varepsilon_0,\theta)$, *если* $x_j \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(j = 1,2,\ldots)$, *причём*

$$\|x\|_{F_1(m;\varepsilon_0,\theta)} \overset{def}{=} \sup_j \|x_j\|_{F(m;\varepsilon_0,\theta)} < +\infty.$$

Определение 6. *Скажем, что бесконечная матрица* $A(t,\varepsilon,\theta) = (a_{jk}(t,\varepsilon,\theta))_{j,k=1,2,\ldots}$ *притнадлежит классу* $F_2(m;\varepsilon_0,\theta)$, *если* $a_{jk} \in F(m;\varepsilon_0,\theta)$, *причём*

$$\|A\|_{F_2(m;\varepsilon_0,\theta)} \overset{def}{=} \sup_j \sum_{k=1}^{\infty} \|a_{jk}\|_{F(m;\varepsilon_0,\theta)} < +\infty.$$

Очевидно, что если $A \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, $x \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, то $Ax \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, при этом $\|Ax\|_{F_1(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant 2^m \|A\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} \cdot \|x\|_{F_1(m;\varepsilon_0;\theta)}$.

Условие $\|A\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} < 1$ обеспечивает существование матрицы

$$(E + A)^{-1} = E + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A^k,$$

где $E = \mathrm{diag}(1,1,...)$.

Для любого вектора $x(t,\varepsilon,\theta) \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$ обозначим:

$$\Gamma_n[x] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t,\varepsilon,\theta) \exp(-in\theta) d\theta,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Для бесконечномерных векторов $x = \mathrm{colon}(x_1,x_2,...)$, $y = \mathrm{colon}(y_1,y_2,...)$ обозначим: $[x,y] = \mathrm{colon}(x_1y_1,x_2y_2,...)$.

Основные результаты

1. Постановка задачи. Рассматривается счётная система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \Lambda(t,\varepsilon)x + \mu B^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)x + \mu^2 B(t,\varepsilon,\theta)x, \tag{4}$$

где $t,\varepsilon \in G(\varepsilon_0)$, $x = \mathrm{colon}(x_1,x_2,...)$, $\Lambda(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}[\lambda_1(t,\varepsilon),\lambda_2(t,\varepsilon),...] \in S_2(m;\varepsilon_0)$, $B^{(0)}(t,\varepsilon,\theta) = \mathrm{diag}[b_1(t,\varepsilon,\theta),b_2(t,\varepsilon,\theta),....] \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, $B(t,\varepsilon,\theta) = (b_{jk}(t,\varepsilon,\theta)_{j,k=1,2,\ldots} \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, причём $b_{jj}(t,\varepsilon,\theta) \equiv 0$ $(j = 1,2,...)$, $\mu \in (0,\mu_0) \subset \mathbb{R}^+$.

Предполагается выполнение соотношений:

$$\lambda_j(t,\varepsilon) - \lambda_k(t,\varepsilon) = in_{jk}\varphi(t,\varepsilon), \tag{5}$$

$n_{jk} \in \mathbb{Z}$ $(j,k = 1,2,...)$, $\varphi(t,\varepsilon)$ – функция, фигурирующая в определении класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$. В этом смысле мы имеем дело с резонансным случаем.

Изучается вопрос о существовании преобразования вида

$$x = (E + Q(t,\varepsilon,\theta,\mu))y, \tag{6}$$

$y = \mathrm{colon}(y_1,y_2,...)$, $Q(t,\varepsilon,\theta,\mu) = (q_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu))_{j,k=1,2,...} \in F_2(m_1;\varepsilon_2;\theta)$ $(m_1 \leqslant m,\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0)$, $q_{jj}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \equiv 0$, приводящего систему (4) к виду:

$$\frac{dy}{dt} = D(t,\varepsilon,\theta,\mu)y, \tag{7}$$

$D(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \mathrm{diag}[d_1(t,\varepsilon,\theta,\mu), d_2(t,\varepsilon,\theta,\mu),...] \in F_2(m_1,\varepsilon_1;\theta)$.

Для конечномерного случая аналогичная задача рассматривалась в работах [13,14].

2. Вспомогательные утверждения. Рассмотрим следующую счётную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz}{dt} = i\varphi(t,\varepsilon)\Lambda_1 z + \mu U(t,\varepsilon,\theta)z + g(t,\varepsilon,\theta) + \mu^2 C(t,\varepsilon,\theta)z + \mu^4[z,R(t,\varepsilon,\theta)z], \tag{8}$$

$t,\varepsilon \in G(\varepsilon_0)$, $z = \mathrm{colon}(z_1,z_2,...)$, $\Lambda_1 = \mathrm{diag}[n_1,n_2,...]$, $n_j \in \mathbb{Z}$ $(j = 1,2,...)$, $U = \mathrm{diag}[u_1(t,\varepsilon,\theta),u_2(t,\varepsilon,\theta),,,.] \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, $g = \mathrm{colon}(g_1(t,\varepsilon,\theta), g_2(t,\varepsilon,\theta),...) \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, $C = (c_{jk}(t,\varepsilon,\theta))_{j,k=1,2,...} \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, $c_{jj} \equiv 0$ $(j = 1,2,...)$, $R \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, $\mu \in (0,\mu_0) \subset \mathbb{R}^+$.

Лемма 1. *Пусть система (8) удовлетворяет следующим условиям:*
1) $\forall\ t,\varepsilon \in G(\varepsilon_0)$:

$$\int\limits_0^{2\pi} g_j(t,\varepsilon,\theta)\exp(-in_j\theta)d\theta = 0,\ j = 1,2,...\ ; \tag{9}$$

2)

$$\inf_{G(\varepsilon_0)}\left|\int\limits_0^{2\pi} u_j(t,\varepsilon,\theta)d\theta\right| \geqslant \gamma > 0,\ j = 1,2,....\ . \tag{10}$$

Тогда существует $\mu_1 \in (0,\mu_0)$ такое, что $\forall\ \mu \in (0,\mu_1)$ и $\forall q \in \mathbb{N}$ существует преобразование вида

$$z = \sum_{s=0}^{2q-1}\xi^{(s)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s + \Phi(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)}, \tag{11}$$

$\xi^{(s)} \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, $\Phi \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, *приводящее систему (8) к виду:*

$$\frac{dz^{(1)}}{dt} = \left(\sum_{l=1}^{q}K^{(l)}(t,\varepsilon)\mu^l\right)z^{(1)} + \varepsilon h^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^{2q}h^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+\varepsilon V^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)} + \mu^{q+1}P^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)} + \mu[R^{11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)}, R^{12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)}], \tag{12}$$

где $K^{(l)} \in S_2(m;\varepsilon_0)$ и $\forall\ \mu \in (0,\mu_1)$; $h^{(11)}, h^{(12)} \in F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta), V^{(1)}, P^{(1)}, R^{(11)}$, $R^{(12)} \in F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)$.

Доказательство. В системе (8) произведём подстановку:

$$z = \exp(i\Lambda\theta)\sigma^{(1)}, \tag{13}$$

где $\sigma^{(1)} = \mathrm{colon}(\sigma_1^{(1)},\sigma_2^{1)},\ldots)$, $\exp(i\Lambda\theta) = \mathrm{diag}[e^{in_1\theta},e^{in_2\theta},\cdots]$. Получим:

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{dt} = g^{(1)}(t,\varepsilon,\theta) + \mu U(t,\varepsilon,\theta)\sigma^{(1)} + \mu^2 C^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\sigma^{(1)} + \mu^4[\sigma^{(1)},R^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\sigma^{(1)}], \tag{14}$$

где $g^{(1)} = e^{-i\Lambda\theta}g$, $C^{(1)} = e^{-i\Lambda\theta}Ce^{i\Lambda\theta}$, $R^{(1)} = Re^{i\Lambda\theta}$.

Очевидно, что $g^{(1)} \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, $C^{(1)} \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, причём $c_{jj}^{(1)}(t,\varepsilon,\theta \equiv 0$ $(j = 1,2,\ldots)$, $R^{(1)} \in F_2(m\varepsilon;\theta)$. В силу условий леммы можем записать: $\forall\ t,\varepsilon \in G(\varepsilon_0)$:

$$\int_0^{2\pi} g^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)d\theta = 0. \tag{15}$$

Наряду с системой (14) рассмотрим вспомогательную систему:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi}{dt} = g^{(1)}(t,\varepsilon,\theta) + \mu U(t,\varepsilon,\theta)\xi + \mu^2 C^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\xi + \mu^4[\xi,R^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\xi], \tag{16}$$

в которой t,φ рассматриваются как постоянные. Вектор $g^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)$ и матрицы $U(t,\varepsilon,\theta)$, $C^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)$, $R^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)$ – 2π-периодические по θ. Построим, согласно методу малого параметра Пуанкаре [15], приближённое 2π-периодическое по θ решение системы (16) в виде частичной суммы ряда по степеням малого параметра μ:

$$\widetilde{\xi}(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \sum_{s=0}^{2q-1} \xi^{(s)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s, \tag{17}$$

где вектор-функции $\xi^{(s)}(t,\varepsilon,\theta)$ определяются из следующей цепочки линейных неоднородных векторных дифференциальных уравнений:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi^{(0)}}{dt} = g^{(1)}(t,\varepsilon,\theta), \tag{18}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi^{(1)}}{dt} = U(t,\varepsilon,\theta)\xi^{(0)}, \tag{19}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi^{(2)}}{dt} = U(t,\varepsilon,\theta)\xi^{(1)} + C^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\xi^{(0)}, \tag{20}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi^{(3)}}{dt} = U(t,\varepsilon,\theta)\xi^{(2)} + C^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\xi^{(1)}, \tag{21}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi^{(s)}}{dt} = U(t,\varepsilon,\theta)\xi^{(s-1)} + C^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\xi^{(s-2)} +$$

$$+\sum_{k=0}^{s-4}[\xi^{(k)},R^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\xi^{(s-4-k)}],\ s=\overline{4,2q-1}. \tag{22}$$

Равенство (15) обеспечивает существование 2π-периодического по θ решения уравнения (18), которое имеет вид:

$$\xi^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)=M^{(0)}(t,\varepsilon)+\eta^{(0)}(t,\varepsilon,\theta), \tag{23}$$

где

$$\eta^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n[g^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi}\ e^{in\theta}\in F_1(m;\varepsilon_0;\theta),$$

причём $\forall\ t,\varepsilon\in G(\varepsilon_0)$:

$$\int\limits_0^{2\pi}\eta^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)d\theta=0.$$

Вектор-функция $M^{(0)}(t,\varepsilon)$ определится из условия существования 2π-периодического по θ решения уравнения (19), а именно, из линейного уравнения:

$$\left(\int_0^{2\pi}U(t,\varepsilon,\theta)d\theta\right)M^{(0)}=-\int_0^{2\pi}U(t,\varepsilon,\theta)\eta^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)d\theta. \tag{24}$$

Учитывая диагональность матрицы $U(t,\varepsilon,\theta)$, легко видеть, что условие (10) обеспечивает существование единственного решения $M^{(0)}(t,\varepsilon)$ уравнения (24), и это решение принадлежит классу $S_1(m;\varepsilon_0)$. Следовательно, $\xi^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)\in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$. Также условие (10) гарантирует существование 2π-периодических по θ решений уравнений (20), (21), (22), и все эти решения принадлежат классу $F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$. Следовательно, вектор-функция $\widetilde{\xi})t,\varepsilon,\theta,\mu)$ также принадлежит классу $F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Вернёмся теперь к системе (14) и произведём в ней подстановку:

$$\sigma^{(1)}=\widetilde{\xi}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\sigma^{(2)}, \tag{25}$$

где $\sigma^{(2)}$ – новый неизвестный вектор. Получим:

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{dt}=\varepsilon h^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu^{2q}g^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu U(t,\varepsilon,\theta)\sigma^{(2)}+\mu^2C^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\sigma^{(2)}+$$
$$+\mu^4[\widetilde{\xi}(t,\varepsilon,\theta,\mu),R^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\sigma^{(2)}]+\mu^4[\sigma^{(2)},R^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\sigma^{(2)}], \tag{26}$$

где $h^{(2)}\in F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, $g^{(2)}\in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Учитывая определение скобок $[\cdot,\cdot]$ и равенство (17), систему (26) можно переписать так:

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{dt}=\varepsilon h^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu^{2q}g^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\left(\sum_{k=1}^{q}U^{(k)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^k\right)\sigma^{(2)}+$$
$$+\mu^{q+1}W^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\sigma^{(2)}+\mu^4[\sigma^{(2)},R^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\sigma^{(2)}], \tag{27}$$

где $U^{(k)},W^{(2)}\in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Рассмотрим счётную линейную однородную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\sum_{l=1}^{q} U^{(l)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right) x, \tag{28}$$

$x = \mathrm{colon}(x_1,x_2,\cdot)$. В работе [16] было показано, что существует $\mu^* \in (0,\mu_0)$ такое, что $\forall\ \mu \in (0,\mu^*)$ существует преобразование вида

$$x = \Phi(t,\varepsilon,\theta,\mu)y, \tag{29}$$

где $\Phi \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, приводящее систему (28) к виду:

$$\frac{dy}{dt} = \left(\sum_{l=1}^{q} K^{(l)}(t,\varepsilon)\mu^l + \varepsilon\sum_{l=1}^{q} V^{(l)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l + \mu^{q+1}W(t,\varepsilon,\theta,\mu)\right) y, \tag{30}$$

где $K^{(l)} \in S_2(m;\varepsilon_0)$, $V^{(l)},W \in F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ $(l = \overline{1,q})$.

Произведём в системе (27) подстановку

$$\sigma^{(2)} = \Phi(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)}. \tag{31}$$

В результате придём к системе (12). Тем самым лемма 1 доказана.

Рассмотрим счётную линейную однородную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = A(t,\varepsilon)x^{(0)}, \tag{32}$$

где $A(t,\varepsilon) \in S_2(m;\varepsilon_0)$.

Определение 7. *Матрицей Грина системы (32) назовём матрицу* $G(t,\tau,\varepsilon) = (g_{jk}(t,\tau,\varepsilon))_{j,k=1,2,\ldots}$, *удовлетворяющую условиям:*
1) при $t \neq \tau$*:*

$$\frac{\partial G(t,\tau,\varepsilon)}{\partial t} = A(t,\varepsilon)G(t,\tau,\varepsilon), \quad \frac{\partial G(t,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = -G(t,\tau,\varepsilon)A(\tau,\varepsilon),$$

2) $G(\tau+0,\tau,\varepsilon) - G(\tau-0,\tau,\varepsilon) = E, \quad G(t,t+0,\varepsilon) - G(t,t-0,\varepsilon) = -E.$

При $t = \tau$ *матрица Грина не определена.*

Наряду с системой (32) рассмотрим счётную линейную неоднородную систему:

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon,\theta), \tag{33}$$

где $f \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, матрица $A(t,\varepsilon)$ та же, что и в системе (32).

Лемма 2. *Пусть система (32) имеет матрицу Грина* $G(t,\tau,\varepsilon) = (g_{jk}(t,\tau,\varepsilon))_{j,k=1,2,\ldots}$ *такую, что*

$$|g_{jk}(t,\tau,\varepsilon)| \leqslant M_0 \exp(-\gamma_0|t-\tau|),$$

где $M_0,\gamma_0 \in (0,+\infty)$*, причём* M_0,γ_0 *не зависят от* t,τ,ε*. Тогда система (33) имеет единственное частное решение* $x(t,\varepsilon,\theta) \in F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$*, причём существует* $K_0 \in (0,+\infty)$ *такое, что:*

$$\|x(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_1(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \frac{K_0}{\gamma_0}\ \|f(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_1(m;\varepsilon_0;\theta)}. \tag{34}$$

Утверждение леммы 2 непосредственно вытекает из результата работы [17].

Лемма 3. *Пусть система (8) такова, что*

1) выполнены условия леммы 1;

2) для линейной однородной системы

$$\frac{dx}{dt} = \left(\sum_{l=1}^{q} K^{(l)}(t,\varepsilon)\mu^l\right) x, \tag{35}$$

где матрицы $K^{(l)}(t,\varepsilon)$ определены в лемме 1, существует матрица Грина $G(t,\tau,\varepsilon,\mu) = (g_{jk}(t,\tau,\varepsilon,\mu))_{j,k=1,2,\dots}$ такая, что

$$|g_{jk}(t,\tau,\varepsilon,\mu)| \leqslant M_1 \exp\left(-\gamma_1\mu^{q_0}|t-\tau|\right),$$

$q_0 \in [1,q]$, $M_1,\gamma_1 \in (0,+\infty)$ *и не зависят от* t,τ,ε,μ.

Тогда существуют $\mu_2 \in (0,\mu_0)$, $\varepsilon_2(\mu) \in (0,\varepsilon_0)$ такие, что $\forall\ \mu \in (0,\mu_2)$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2(\mu))$ система (8) имеет частное решение, принадлежащее классу $F_1(m-1;\varepsilon_2(\mu);\theta)$.

Доказательство. На основании леммы 1 приведём систему (8) к системе (12). В этой системе совершим подстановку:

$$z^{(1)} = \frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0}}\ z^{(2)}, \tag{36}$$

где $z^{(2)}$ – новый неизвестный вектор. Получим:

$$\frac{dz^{(2)}}{dt} = \left(\sum_{l=1}^{q} K^{(l)}(t,\varepsilon)\mu^l\right) z^{(2)} + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ h^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ h^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+$$

$$+\varepsilon V^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(2)} + \mu^{q+1}P^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(2)}+$$

$$+\frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}}[R^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(2)},R^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(2)}]. \tag{37}$$

Рассмотрим линейную неоднородную систему:

$$\frac{dz^{(20)}}{dt} = \left(\sum_{l=1}^{q} K^{(l)}(t,\varepsilon)\mu^l\right) z^{(20)} + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ h^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ h^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu). \tag{38}$$

Принимая во внимание условие 2 леммы, и на основании леммы 2 можем утверждать, что система (38) имеет единственное частное решение $z^{(20)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, причём существует $K \in (0,+\infty)$ такое, что

$$\|z^{(20)}\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{\gamma_1\mu^{q_0}}\left(\frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \|h^{(11)}\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \|h^{(12)}\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)}\right) <$$

$$< \frac{K}{\gamma_1}\left(\|h^{(11)}\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} + h^{(12)}\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)}\right).$$

Решение класса $F_1(m-1;\varepsilon_2(\mu);\theta)$ системы (37) будем искать методом последовательных приближений, выбирая в качестве начального приближения $z^{(20)}$, а дальнейшие приближения определив как решения класса $F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ счётных линейных неоднородных систем:

$$\frac{dz^{(2,s+1)}}{dt} = \left(\sum_{l=1}^{q} K^{(l)}(t,\varepsilon)\mu^l\right) z^{(2,s+1)} + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\, h^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\, h^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+\varepsilon V^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(2s)} + \mu^{q+1}P^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(2s)} +$$

$$+\frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}}[R^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(2s)},R^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(2s)}],\ s=0,1,2,\dots\ . \tag{39}$$

Пусть

$$\Omega = \left\{\ z^{(2)} \in F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta):\ \|z^{(2)} - z^{(20)}\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant d\ \right\}.$$

Несложно установить, что существует $L(d) \in (0,+\infty)$ такое, что $\forall\ z,y \in \Omega$ выполнено:

$$\big\|[R^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z,R^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z] - [R^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)y,R^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)y]\big\|_{F_1(m-1,\varepsilon_0;\theta)} \leqslant$$

$$\leqslant L(d)\|x-y\|_{F_1(m-1;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Используя известную матодику принципа сжимающих отображений [18], несложно показать, что существуют $\mu_2 \in (0,\mu_0)$, $K_1 \in (0,+\infty)$ такие, что $\forall\ \mu \in (0,\mu_2)$, $\forall\ \varepsilon \in (0,K_1\mu^{2q_0-1})$ процесс (39) сходится к решению $z^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F_1(m-1;K_1\mu^{2q_0-1};\theta)$ системы (37). Учитывая равенство (36), отсюда получаем утверждение леммы.

Приведём пример системы вида (8), удовлетворяющей всем условиям леммы 3. Рассмотрим счётную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz}{dt} = g(t,\varepsilon,\theta) + \mu U(t,\varepsilon,\theta)z + \mu^2 C(t,\varepsilon,\theta)z + \mu^4[z,R(t,\varepsilon,\theta)z], \tag{40}$$

матрицы U,C,R – те же, что и в системе (8), а вектор-функция g такова, что $\forall\ t,\varepsilon \in G(\varepsilon_0)$:

$$\int_0^{2\pi} g(t,\varepsilon,\theta)d\theta = 0.$$

Положим $q = q_0 = 1$. Тогда, как следует из работы [16], преобразование (11) принимает вид:

$$z = \xi^{(0)}(t,\varepsilon,\theta) + \xi^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\mu + (E + \mu\Phi^{(1)}(t,\varepsilon,\theta))z^{(1)}, \tag{41}$$

где

$$\xi^{(0)}(t,\varepsilon,\theta) = M^{(0)}(t,\varepsilon) + \eta^{(0)}(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\eta^{(0)}(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[g(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi}\, e^{in\theta},$$

$$M^{(0)}(t,\varepsilon) = -\left(\int\limits_0^{2\pi} U(t,\varepsilon,\theta)d\theta\right)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} U(t,\varepsilon,\theta)\eta^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)d\theta,$$

$$\xi^{(1)}(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[U(t,\varepsilon,\theta)\xi^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi}\ e^{in\theta},$$

$$\Phi^{(1)}(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[U(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi}\ e^{in\theta}.$$

В результате преобразования (41) система (40) приведётся к виду:

$$\frac{dz^{(1)}}{dt} = \mu K^{(1)}(t,\varepsilon)z^{(1)} + \varepsilon h^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^2 h^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+\varepsilon V^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)} + \mu^2 P^{(1)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)} + \mu[R^{(11)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)},R^{(12)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z^{(1)}],$$

где

$$K^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} U(t,\varepsilon,\theta)d\theta.$$

Нетрудно видеть, что если матрица $U(t,\varepsilon,\theta)$ удовлетворяет условию (10), то счётная линейная однородная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \mu K^{(1)}(t,\varepsilon)x$$

имеет матрицу Грина $G(t,\tau,\varepsilon,\mu) = \mathrm{diag}[g_1(t,\tau,\varepsilon,\mu),g_2(t,\tau,\varepsilon,\mu),\ldots]$, где $g_j(t,\tau,\varepsilon,\mu)$ $(j = 1,2,\ldots)$ определяются формулами:
в случае

$$k_j^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_j(t,\varepsilon,\theta)d\theta \leqslant -\gamma < 0:$$

$$g_j(t,\tau,\varepsilon,\mu) = \begin{cases} \exp\left(\mu\int\limits_\tau^t k_j^{(1)}(s,\varepsilon)ds\right),\ t > \tau, \\ 0,\ t < \tau; \end{cases}$$

в случае:

$$k_j^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_j(t,\varepsilon,\theta)d\theta \geqslant \gamma > 0:$$

$$g_j(t,\tau,\varepsilon,\mu) = \begin{cases} 0,\ t > \tau, \\ -\exp\left(\mu\int\limits_\tau^t k_j^{(1)}(s,\varepsilon)ds\right),\ t < \tau. \end{cases}$$

Константа γ определяется условием (10).

Очевидно выполнение неравенства:

$$|g_j(t,\tau,\varepsilon,\mu)| \leqslant \exp(-\mu\gamma|t-\tau|),\ j = 1,2,\ldots .$$

Таким образом, все условия леммы 3 выполнены. Поэтому на её основании можем утверждать, что существуют $\mu_{20} \in (0,\mu_0)$, $\varepsilon_{20}(\mu) \in (0,\varepsilon_0)$ такие, что $\forall\ \mu \in (0,\mu_{20})$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_{20}(\mu))$ система (40) имеет частное решение, принадлежащее классу $F_1(m-1;\varepsilon_{20}(\mu);\theta)$.

3. Основной результат. Вернёмся теперь к системе (4) и совершим в ней подстановку (6). Исходя из условия диагональности преобразованной системы (7) и учитывая условие (5), получим следующую счётную систему дифференциальных уравнений для определения элементов q_{jk} $(j \neq k)$ матрицы Q:

$$\frac{dq_{jk}}{dt} = in_{jk}\varphi(t,\varepsilon)q_{jk} + \mu(b_j(t,\varepsilon,\theta) - b_k(t,\varepsilon,\theta))q_{jk} + \mu^2 b_{jk}(t,\varepsilon,\theta) +$$

$$+\mu^2 \sum_{\substack{s=1\\(s\neq j,s\neq k)}}^{\infty} b_{js}(t,\varepsilon,\theta)q_{sk} - \mu^2 q_{jk} \sum_{\substack{s=1\\(s\neq k)}}^{\infty} b_{ks}(t,\varepsilon,\theta)q_{sk},\ j,k = 1,2,\dots\ ;\ j \neq k. \qquad (42)$$

Элементы диагональной матрицы D в системе (7) определятся формулами:

$$d_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \lambda_j(t,\varepsilon) + \mu b_j(t,\varepsilon,\theta) + \mu \sum_{\substack{s=1\\(s\neq j)}}^{\infty} b_{js}(t,\varepsilon,\theta)q_{sj}(t,\varepsilon,\theta,\mu). \qquad (43)$$

Подстановка

$$q_{jk} = \mu^2 \widetilde{q}_{jk},\ j,k = 1,2,\dots\ ;\ j \neq k \qquad (44)$$

приводит систему (42) к виду:

$$\frac{d\widetilde{q}_{jk}}{dt} = in_{jk}\varphi(t,\varepsilon)\widetilde{q}_{jk} + \mu(b_j(t,\varepsilon,\theta) - b_k(t,\varepsilon,\theta)\widetilde{q}_{jk} + b_{jk}(t,\varepsilon,\theta) +$$

$$+\mu^2 \sum_{\substack{s=1\\(s\neq j,s\neq k)}}^{\infty} b_{js}(t,\varepsilon,\theta)\widetilde{q}_{sk} - \mu^4 \widetilde{q}_{jk} \sum_{\substack{s=1\\(s\neq k)}}^{\infty} b_{ks}(t,\varepsilon,\theta)\widetilde{q}_{sk},\ j,k = 1,2,\dots\ ;\ j \neq k. \qquad (45)$$

В системе (45) индекс k фиксированный, поэтому при каждом $k = 1,2,\dots$ система (45) представляет собой отдельную счётную систему дифференциальных уравнений относительно $\widetilde{q}_{1k}$, $\widetilde{q}_{2k},\dots,\widetilde{q}_{k-1,k}$, $\widetilde{q}_{k+1,k}$, $\dots$. Нетрудно видеть, что векторная запись такой системы имеет вид (8). Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть для системы (4) выполнены соотношения (5) и при каждом $k = 1,2,\dots$ система (45) удовлетворяет всем условиям леммы 3. Тогда существуют $\mu_3 \in (0,\mu_0)$, $\varepsilon_3(\mu) \in (0,\varepsilon_0)$ такие, что $\forall\ \mu \in (0,\mu_3)$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_3(\mu))$ существует преобразование вида (6), где $Q(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F_2(m-1;\varepsilon_3(\mu);\theta)$, приводящее систему (4) к виду (7), где элементы диагональной матрицы $D(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F_2(m-1;\varepsilon_3(\mu);\theta)$ определяются формулами (43).*

Заключение. Таким образом, для счётной линейной системы дифференциальных уравнений с коэффициентами, представимыми абсолютно и равномерно сходящимися рядами Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, установлены условия линейного преобразования с коэффициентами аналогичной структуры, приводящего эту систему к диагональному виду.

1. **Валеев К. Г., Жаутыков О. А.** Бесконечные системы дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 415 с.
2. **Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.** Счётные системы дифференциальных уравнений. – К.: ИМ НАН Украины, 1993. – 308 с.
3. **Miller R., Michel A.** Stability theory for countable infinite systems of differential equations // Tohoku Math. Journ. 32 (1980). – P. 155–168.
4. **Mursaleen M., Alotaibi A.** Infinite system of differential equations in some BK spaces // Hindawi Publishiny Corporation Abstract and Applied Analysis, Volume 2012, Article ID 863483, 20 p. doi: 10.1155/2012/863483
5. **Almanassra M.** The explicit solution to the countable systems of linear ordinary differential equations with constant coefficients // Mathematica Aeterna, Vol. 4, 2014, no.8, 827 – 837.
6. **Pylypenko A. Yu., Tantsyura M. V.** Limit theorem for countable systems of stochastic differential equations // Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 68, No. 10, March, 2017. – Pp. 1591 – 1619. doi: 10.1007/s11253-017-1314-x.
7. **Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
8. **Массера Х. Шеффер Х.** Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – М.: Мир, 1970. – 456 с.
9. **Лященко Н. Я.** Об одной теореме полного разделения линейной однородной системы дифференциальных уравнений и некоторых свойствах матрицы разделения // Укр. матем. журн. – 1955. – Т. 7, № 4. – С. 403–418.
10. **Костін В. В.** Деякі питання повного розподілу та асимптотичної поведінки розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь // Доповіді АН УРСР, сер. Ф. – 1967, № 7. – С. 593–595.
11. **Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.** Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – К.: Наук. думка, 1990. – 272 с.
12. **Амелькин К. В., Костин А. В.** О расщеплении линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вісник Одеськ. держ. ун-ту. – 2001. – Т. 6, вип. Фіз.-мат. науки. – С. 1–7.
13. **Щёголев С. А.** Резонансный случай полного разделения линейной дифференциальной системы с медленно меняющимися параметрами // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – К.: ІМ НАНУ, 1998. – Вип. 3. – С. 165–175.
14. **Щёголев С. А.** Полное разделение линейной однородной системы дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами в особом случае // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і механ. – 2012. – Т. 17, вип. 1–2(13–14). – С. 151–167.
15. **Малкин И. Г.** Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
16. **Щёголев С. А., Джашитова В. В.** О сведении счётной линейной системы с коэффициентами осциллирующего типа к одному специальному виду в резонансном случае //Дослідження в математиці і механіці. – 2016. – Т. 21, вип. 1(27). – С. 85–91.
17. **Щёголев С. А., Ситник В. А.** О существовании и устойчивости решений специального вида квазилинейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і механ. – 2010. – Т. 15, вип. 18. – С. 102–111.

18. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.

Джашитова В. В.
Повне розщеплення зліченної лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь у резонансному випадку

Резюме

Для зліченної лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь, коефіцієнти якої зображувані у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотою, отримано умови існування лінійного перетворення з коефіцієнтами аналогічної структури, що приводить цю систему до діагонального вигляду в резонансному випадку.
Ключові слова: зліченна система, розщеплення, ряди Фур'є .

Dzhashitova V.
The full separation of the countable linear homogeneous system of the differential equations at the resonance case

Summary

For the countable linear homogeneous system of the differential equations, the coefficients of whose are represented by a absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency, the conditions of the existence of the linear transformation with the coefficients of the similar structure, which leads this system to a diagonal kind in resonance case, are obtained.
Key words: countable system, separation, Fourier-series.

References

1. Valeev, K. G., Zhautyikov, O. A. (1974) Beskonechnye sistemy differencial'nyh uravneniy [Infinite Systems of Differential Equations]. Moskow: Foreign literature.
2. Samoilenko, A., Teplinskyi, Yu. (1993). Schetnye sistemy differencial'nyh uravneniy [Countable Systems of Differential Equations]. Kiev: IM NAN Ukrainy.
3. Miller, R., Michel, A. (1980) Stability theory for countable infinite systems of differential equations. *Tohoku Math. Journ.*, P. 155–168.
4. Mursaleen, M., Alotaibi, A. (2012) Infinite system of differential equations in some BK spaces. *Hindawi Publishiny Corporation Abstract and Applied Analysis*, Volume 2012, Article ID 863483, 20 p. doi: 10.1155/2012/863483
5. Almanassra, M. (2014) The explicit solution to the countable systems of linear ordinary differential equations with constant coefficients. *Mathematica Aeterna*, Vol. 4, no.8, 827 – 837.
6. Pylypenko, A. Yu., Tantsyura, M. V. (2017) Limit theorem for countable systems of stochastic differential equations. *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 68, No. 10, March, pp. 1591–1619. doi: 10.1007/s11253-017-1314-x.
7. Daletskiy, Yu. Krein, M. (1970). Ustoichivost resheniy differencial'nyh uravneniy v banakhovom prostranstve [Stability of the Solutions of Differential Equations in the Banakh space]. Moskow: Nauka.

8. Massera, J, Schaffer, J. (1970). Lineinye differencial'nye uravnenia i funcional'nye prostranstva [Linear Differential Equations and Function Spaces]. Moskow: Mir.
9. Lyashchenko, N. Ya. (1955). Ob odnoy teoreme polnogo razdelenya lineynoj odnorodnoy sistemy diifferencial'nyh uravneniy i nekotoryh svoistvah matricy razdeleniya [On one theorem of full separation of the linear homogeneous system of differential equations oad some properties of matrix of separation]. *Ukr. Mat. Journ.* V. 7, No 4. pp. 403–418.
10. Kostin, V. V. (1967). Deyaki pytannya povnogo rozpodilu ta asymptotychnoyi povedinky rozv'yazkiv system zvychaynyh diferencial'nyh rivnyan' [Some problems of full separation and asymptotic behavior of solutions of systems of ordinary differential equations]. *Dopovidi AN URSR.* Ser. F, No 7. pp. 593–595.
11. Mitropol'skyi, Yu. A., Samoylenko, A. M., Kulik, V. L. (1990). Issledovanye dihotomyi lineynyh system differencial'nyh uravneniy s pomoshchyiu funkcyj Lyapunova [Researches of dichotomy of linear systems of differential equations by Lyapunov's-functions]. Kyiv: Nauk. dumka.
12. Amel'kin, K. V., Kostin, A. V. (2001). O rasshcheplenyi lineynyh odnorodnyh system obyiknovennyh differencial'nyh uravneniy [On separation of linear homogeneous systems of ordinary differential equations]. *Visnyk Odes'k. derzh. universytetu.* V. 6, Is. Phys.-math. pp. 1–7.
13. Shchogolev, S. A. (1998) Rezonansnyi sluchay polnogo razdeleniya lineynoy differencial'noy sistemy s medlenno menyajushchimisya parametramy [Resonance case of full separation of linear differential system with slowly varying parameters]. *Krajovi zadachi dlya differencial'nyh rivnyanj.* K.; IM NANU. Is. 3. pp. 165–175.
14. Shchogolev, S. A. (2012) Polnoye razdelenye lineynoy odnorodnoy systemy differencial'nyh uravneniy s oscillirujushchimi koefficientamy v osobom sluchaye [Full separation of the linear homogeneous system with oscillating coefficients in some spesial case]. *Visnyk Odes'k. Nats. Universytetu.* Matematyka i Mekhanika (Math. and Mech.) V. 17, Is. 1-2 (13-14). pp. 151–167.
15. Malkin, I. G. (1956). Nekotorye zadachi teoriy nelyneynyh kolebaniy [Some problems of theory of nonlinear oscillations]. Moskow: Gostehizdat.
16. Shchogolev, S. A., Dzhashitova, V. V. (2016). O svedenii schetnoy lineynoy sistemy s koefficientami oscillirujushchego typa k odnomu special'nomu vidu v rezonansnom sluchaye [On the reduction of the countable linear system with coefficients of the oscillating type to the some special kind at the resonance case]. *Researches in Mathematics and Mechanics.* V. 21, Is. 1(27). pp. 85–91.
17. Shchogolev, S. A. Sitnik, V. A. (2010). O sushchestvovanyi i ustojchivosti resheniy special'nogo vida kvazilineynogo differencial'nogo uravnenya v banahovom prostranstve [On existence and stability of solutions of special type of quasilinear differential equation in Banach space]. *Visnyk Odes'k. Nats. Universitetu.* Matematyka i Mekhanika (Math. and Mech.). V. 15, Is. 18. pp. 102–111.
18. Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V. (1972). Elementy teoryi functsiy i functsional'nogo ahalyza [Elements of theory of functions and functional analysis]. Moskow.: Nauka.

Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 2(32). – С. 33–42

УДК 517.9

О. В. Капустян, О. В. Перегуда, І. В. Романюк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

СТІЙКІСТЬ РІВНОМІРНИХ АТРАКТОРІВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ІМПУЛЬСНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Публікація містить результати досліджень, проведених за грантом Президента України за конкурсним проектом № Ф78/187-2018 Державного фонду фундаментальних досліджень

У роботі розглядається слабо нелінійна двовимірна параболічна система, розв'язки якої зазнають імпульсного збурення при досягненні фіксованої (імпульсної) підмножини у фазовому просторі. Вона породжує імпульсну динамічну систему, що має у фазовому просторі мінімальну компактну рівномірно притягуючу множину — рівномірний атрактор. При цьому траєкторії системи можуть нескінченну кількість разів зустрічатись з імпульсною множиною. Тоді, в загальному випадку, рівномірний атрактор має непорожній перетин з імпульсною множиною і не є ані інваріантною, ані стійкою множиною відносно імпульсного напівпотоку. В роботі доведено, що при певних додаткових умовах на параметри задачі інваріантною і стійкою є неімпульсна частина рівномірного атрактора.
MSC: 34D45, 35R12.
Ключові слова: імпульсна система, параболічна система, атрактор, стійкість.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149702.

Вступ. Важливою задачею в теорії імпульсних систем диференціальних рівнянь [1]– [5] є якісне дослідження розривних (або імпульсних) динамічних систем [6]– [11]. У випадку нескінченновимірного фазового простору одним з найефективніших інструментів дослідження якісної поведінки розв'язків є теорія глобальних атракторів [12], [13], [14]. Перенесення основних понять та результатів теорії атракторів на імпульсні динамічні системи наштовхується на принципову проблему — відсутність у таких системах неперервної залежності розв'язку від початкових даних. Використовуючи поняття рівномірного атрактора [13], [15], в роботі [16] вдалося довести існування мінімальної компактної рівномірно притягуючої множини для класу слабонелінійних імпульсно-збурених параболічних рівнянь. Пізніше в роботах [17–19] цей підхід було поширено на інші класи імпульсних систем. Виявилось, що у випадку, коли траєкторії імпульсної динамічної системи можуть нескінченну кількість разів зустрічатись з імпульсною множиною, рівномірний атрактор може мати непорожній перетин з імпульсною множиною і не бути ні інваріантною, ні стійкою множиною відносно імпульсного напівпотоку. Інваріантність неімпульсної частини рівномірного атрактору для різних класів імпульсних систем була доведена в роботах [19], [20], [21]. В роботі [22] вперше було запропоновано умови на імпульсний напівпотік, які гарантують стійкість неімпульсної частини рівномірного атрактору. В даній роботі ми уточнюємо ці умови і застосовуємо їх до дослідження стійкості рівномірного атрактора слабонелінійної дивимірної імпульсно-збуреної параболічної системи.

Надійшла 01.10.2018

Основні результати

1. Рівномірні атрактори імпульсних систем. Під імпульсною динамічною системою (надалі – імпульсна ДС) $G = G(V,M,I)$, заданою на нормованому просторі X, будемо розуміти відображення $G : R_+ \times X \to X$, що будується за допомогою неперервної напівгрупи $V : R_+ \times X \to X$, імпульсної множини $M \subset X$ та імпульсного відображення $I : M \to X$, виходячи з наступного правила [7]: якщо для $x \in X$ для всіх $t > 0$ $V(t,x) \notin M$, то $G(t,x) = V(t,x)$; інакше

$$G(t,x) = \begin{cases} V(t - t_n), \ t \in [t_n, t_{n+1}), \\ x^+_{n+1}, \ t = t_{n+1}, \end{cases} \tag{1}$$

де $t_0 = 0$, $t_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} s_k$, $x^+_{n+1} = IV(s_n, x^+_n)$, $x^+_0 = x$, s_n – моменти імпульсного збурення, що характеризуються умовою $V(s_n, x^+_n) \in M$.
За умов

$$\begin{gathered} M - \text{замкнена}, \ M \cap IM = \varnothing, \\ \forall x \in M \ \ \exists \tau = \tau(x) > 0 \ \ \forall t \in (0, \tau) \ \ V(t,x) \notin M, \\ \forall \ x \in X \ t \to G(t,x) \ \text{визначена} \ \ \text{на} \ [0, +\infty) \end{gathered} \tag{2}$$

формула (1) визначає напівгрупу $G : R_+ \times X \to X$ [10], [16].

Зауваження 1. *З умов (2) і неперервності V випливає [10], [19], що для довільного $x \in X$ або існує момент часу $s := s(x) > 0$ такий, що $\forall t \in (0,s)$ $V(t,x) \notin M$, $V(s,x) \in M$, або $\forall \ t > 0$ $V(t,x) \cap M = \varnothing$ (і в цьому випадку покладемо $s(x) = \infty$).*

Означення 1. [16] *Компакт $\Theta \subset X$ будемо називати рівномірним атрактором імпульсної ДС G, якщо*
1) Θ – рівномірно притягуюча множина, тобто

$$\forall B \in \beta(X) \ \ dist(G(t,B),\Theta) \to 0, \ t \to \infty;$$

2) Θ – мінімальна замкнена множина, що задовольняє 1).

Зауваження 2. *Рівномірний атрактор може не бути інваріантним відносно G, тобто рівність*

$$\forall \ t \geqslant 0 \ \ \Theta = G(t,\Theta)$$

може не мати місця [16].

Теорема 1. [19] *Нехай імпульсна ДС G – дисипативна, тобто*

$$\exists B_0 \in \beta(X) \quad \forall B \in \beta(X) \quad \exists T = T(B) \quad \forall t \geqslant T \quad G(t,B) \subset B_0. \tag{3}$$

Тоді G має рівномірний атрактор Θ тоді і тільки тоді, коли G — асимптотично компактна, тобто $\forall \{x_n\} \in \beta(X)$ $\forall \{t_n \nearrow \infty\}$ послідовність $\{G(t_n,x_n)\}$ — предкомпактна. При цьому

$$\Theta = \omega(B_0) := \bigcap_{\tau > 0} \overline{\bigcup_{t \geqslant \tau} G(t,B_0)}. \tag{4}$$

Означення 2. [23] *Множина $A \subset X$ називається стійкою відносно напівпотоку G, якщо*

$$A = D^+(A) := \bigcup_{x \in A} \{y \mid y = \lim G(t_n,x_n),\ x_n \to x,\ t_n \geqslant 0\}\,. \tag{5}$$

В роботі [22] показано, що рівномірний атрактор імпульсної ДС може не задовольняти властивість (5), проте, за додаткових припущень щодо характеру поведінки траєкторій в околі імпульсної множини, вдається одержати наступний результат, який уточнює твердження теорем 1, 2 з [22].

Теорема 2. *Нехай імпульсна ДС $G = (V, M, I)$ задовольняє умови (2), (3) і має рівномірний атрактор Θ. Нехай імпульсне відображення $I : M \to X$ і напівгрупа $V : R_+ \times X \to X$ неперервні і додатково виконуються умови:*

для довільної послідовності $x_n \to x \in \Theta \backslash M$

$$\begin{cases} s(x) = \infty, \text{ якщо } s(x_n) = \infty \text{ для нескінченно багатьох } n, \\ s(x_n) \to s(x), \text{ інакше}; \end{cases} \tag{6}$$

для довільної послідовності $x_n \to x \in \Theta \cap M$

$$\text{або } s(x_n) = \infty \text{ для нескінченно багатьох } n, \text{ або } s(x_n) \to 0. \tag{7}$$

Тоді справедлива рівність

$$\Theta = \overline{\Theta \backslash M}. \tag{8}$$

Крім того, Θ – інваріантний в тому сенсі, що

$$\forall t \geqslant 0\ \ G(t, \Theta \backslash M) = \Theta \backslash M, \tag{9}$$

і стійкий в тому сенсі, що

$$D^+(\Theta \backslash M) \subset \overline{\Theta \backslash M}. \tag{10}$$

2. Застосування до параболічної імпульсно-збуреної системи. Нехай $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 1$ – обмежена область. Відносно невідомих функцій $u(t,x), v(t,x)$ в $(0, +\infty) \times \Omega$ розглядається задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + \varepsilon f_1(u,v), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = a\Delta v + 2b\Delta u + \varepsilon f_2(u,v), \\ u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{11}$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр,

$$a > 0,\ |b| < a. \tag{12}$$

Нелінійне збурення $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in C^1(R^2)$ задовольняє умови:

$$\exists C > 0 \quad \forall u,v \in R \quad |f_1(u,v)| + |f_2(u,v)| \leqslant C, \quad Df(u,v) \geqslant -C, \tag{13}$$

які гарантують однозначну глобальну розв'язність задачі (11) у фазовому просторі $X = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ з нормою $\|z\|_X = \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}$, де тут і надалі $\|\cdot\|$ та $(\cdot,\cdot)$ — це норма та скалярний добуток в $L^2(\Omega)$.

Нехай $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$, $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ – розв'язки спектральної задачі $\Delta\psi = -\lambda\psi,\ \psi \in H_0^1(\Omega)$.

Для фіксованих $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \mu > 0$ на розв'язках (11) розглядається наступна імпульсна задача:

фазова точка $z(t)$ при зустрічі з імпульсною множиною

$$M = \left\{ z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X \mid |(u,\psi_1)| \leqslant \gamma,\ \alpha(u,\psi_1) + \beta(v,\psi_1) = 1 \right\} \tag{14}$$

миттєво переводиться за допомогою імпульсного відображення $I : M \to M'$ в нове положення $Iz \in M'$, де

$$M' = \left\{ z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X \mid |(u,\psi_1)| \leqslant \gamma,\ \alpha(u,\psi_1) + \beta(v,\psi_1) = 1 + \mu \right\}. \tag{15}$$

Будемо розглядати наступний клас імпульсних відображень:

$$\text{для } z = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \in M \quad I(z) = I_1 \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \psi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \in M',$$

де $I_1 : R^2 \to R^2$ – задане неперервне відображення.

В роботі [18] було доведено, що за додаткової умови

$$2\beta\gamma \leqslant 1 \tag{16}$$

задача (11)–(15) для достатньо малих ε породжує імпульсну ДС G_ε, яка має рівномірний атрактор Θ_ε.

Основним результатом даної роботи є наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай $f_1 \equiv 0$. Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ рівномірний атрактор Θ_ε імпульсної ДС G_ε, породженої задачею* (11)–(15)*, інваріантний і стійкий в сенсі (8)–(10).*

Доведення. Перевіримо умови теореми 2. Неперевність $I : M \to X$ випливає з неперервності $I_1 : R^2 \to R^2$, неперервність (неімпульсної) напівгрупи, породженої задачею (11), випливає з наступної властивості розв'язків задачі (11):

$$\begin{array}{l} \text{якщо } z_0^{(n)} \to z_0 \text{ слабо в } X, \text{ то } \forall\, t_n \to t_0 > 0\ z^{(n)}(t_n) \to z(t_0) \text{ в } X; \\ \text{якщо } z_0^{(n)} \to z_0 \text{ в } X, \text{ то } z^{(n)} \to z \text{ в } C([0,T]; X). \end{array} \tag{17}$$

Отже, залишилось перевірити умови (6), (7). Для зручності покладемо $\psi := \psi_1,\ \lambda := \lambda_1$. Для $z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ – розв'язку (11), будемо аналізувати функцію

$$\begin{gathered} g_\varepsilon(t) = \alpha(u(t),\psi) + \beta(v(t),\psi) = \alpha(u(0),\psi)e^{-a\lambda t} + \\ \beta\left((v(0),\psi) - 2b\lambda(u(0),\psi)t\right) e^{-a\lambda t} + \beta\varepsilon \int_0^t e^{-a\lambda(t-s)}(f_2(u(s),v(s)),\psi)ds = \\ e^{-a\lambda t}(\alpha(u(0),\psi) + \beta(v(0),\psi) - 2b\beta\lambda(u(0),\psi)t) + \varepsilon F_\varepsilon(t), \end{gathered} \tag{18}$$

де

$$F_\varepsilon(t) := \beta \int_0^t e^{-a\lambda(t-s)}(f_2(u(s),v(s)),\psi)ds, \qquad (19)$$
$$F_\varepsilon \in C^1([0,\infty)), F_\varepsilon(0) = 0,$$

$$\exists\ C_1 > 0 \ \ \forall\ \varepsilon \in (0,1) \ \ \sup_{t\geqslant 0}\left(|F_\varepsilon(t)| + |F'_\varepsilon(t)|\right) \leqslant C_1. \qquad (20)$$

З результатів роботи [18] випливає, що імпульсна ДС G_ε дисипативна в сенсі (3),

$$\Theta_\varepsilon \subset B_0, \qquad (21)$$

причому множина $B_0 = \{z \in X \mid \|z\|_X \leqslant R_0\}$ не залежить від $\varepsilon > 0$. З формули (4) для $z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \Theta$ маємо, що $z = \lim G_\varepsilon(t_n,z_n^0)$, $t_n \to \infty$, $z_n^0 \in B_0$. Тоді з умови $f_1 \equiv 0$ і вигляду M, M' випливає, що

$$\forall\ z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \Theta \ \ |(u,\psi)| \leqslant \gamma. \qquad (22)$$

Розглянемо умову (6). Нехай $z_0^n \to z_0 \in \Theta\backslash M$, $s(z_0^n) = \infty$ і, від супротивного, $s_0 := s(z_0) \in (0,\infty)$. Нехай $z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ – розв'язок (11) з $z(0) = z_0$, $z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$– розв'язок (11) з $z_n(0) = z_0^n$. Тоді з (18) одержуємо

$$e^{-a\lambda s_0}(\alpha(u_0,\psi) + \beta(v_0,\psi) - 2b\beta\lambda s_0(u_0,\psi)) + \varepsilon F_\varepsilon(s_0) = 1. \qquad (23)$$

Розглянемо функцію $W : X \times R \to R$

$$W(z,t) = e^{-a\lambda t}(\alpha(u,\psi) + \beta(v,\psi) - 2b\beta\lambda s(u,\psi)t) + \varepsilon F_\varepsilon(t) - 1, \qquad (24)$$

де F_ε визначається з (19) за допомогою розв'язку (11), що стартує з точки z. Оскільки

$$W(z_0,s_0) = 0,$$

$$W_t^{'}|_{(z_0,s_0)} = -a\lambda(1 - \varepsilon F_\varepsilon(s_0)) + \varepsilon F'_\varepsilon(s_0) - e^{-a\lambda s_0}2b\beta\lambda s_0(u_0,\psi),$$

то з нерівностей (12), (16), (22) існує $\gamma_1 > 0$ таке, що для достатньо малих $\varepsilon > 0$

$$W_t^{'}|_{(z_0,s_0)} = -\gamma_1 < 0.$$

Тоді за теоремою про неявну функцію $\forall\ n \geqslant 1\ \exists\ s_n \to s_0$ такі, що

$$W(z_0^n, s_n) = 0.$$

При цьому оскільки $|(u(s_0),\psi)| \leqslant \gamma e^{-a\lambda s_0}$, то з (17) для достатньо великих n одержуємо

$$|(u_n(s_n),\psi)| \leqslant \gamma.$$

Це означає включення $z_n(s_n) \in M$ і суперечить припущенню $s(z_0^n) = \infty$. Отже, перша частина умови (6) виконується.

Тепер нехай $z_0^n \to z_0 \in \Theta \backslash M$, $s_n := s(z_0^n) \in (0,\infty)$.
В силу (21) $\|z_0^n\|_X \leqslant R_0 + 1$. Тоді з (18)

$$\begin{gathered} e^{-a\lambda s_n}(\alpha(u_0^n,\psi) + \beta(v_0^n,\psi) - 2b\beta\lambda s_n(u_0^n,\psi)) + \\ \beta\varepsilon \int_0^{s_n} e^{-a\lambda(s_n - s)}(f_2(u_n(s),v_n(s)),\psi)ds = 1. \end{gathered} \tag{25}$$

Звідси

$$e^{-a\lambda s_n}(\alpha(u_0^n,\psi) + \beta(v_0^n,\psi) - 2b\beta\lambda s_n(u_0^n,\psi)) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Отже, $s_n \leqslant \bar{s}$, де $\bar{s}$ – розв'язок рівняння

$$\frac{1}{2(R_0+1)} e^{a\lambda\bar{s}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + 2\beta|b|\lambda\bar{s}.$$

Таким чином, по підпослідовності $s_n \to s_0 \geqslant 0$. Переходячи до границі в (25), одержуємо

$$e^{-a\lambda s_0}(\alpha(u_0,\psi) + \beta(v_0,\psi) - 2b\beta\lambda s_0(u_0,\psi)) + \varepsilon F_\varepsilon(s_0) = 1. \tag{26}$$

Звідси, зокрема, виводимо, що $s_0 > 0$, оскільки $\alpha(u_0,\psi) + \beta(v_0,\psi) \neq 1$. Переходячи до границі в нерівності $|(u_n(s_n),\psi)| \leqslant \gamma$, одержуємо $|(u(s_0),\psi)| \leqslant \gamma$. Отже, $z(s_0) \in M$. Покажемо, що $s_0 = s(z_0)$, тобто точка s_0 – момент першого попадання z на M. Інакше, існує $s_1 \in (0,s_0)$ така, що

$$g_\varepsilon(s_1) = g_\varepsilon(s_0) = 1,\ g_\varepsilon'(t) \leqslant -\gamma_1 < 0\ \forall\ t \in (s_1,s_0),$$

що приводить до протиріччя. Властивість (6) доведена.

Доведемо властивість (7). Нехай $z_0^n \to z_0 \in \Theta \cap M$, $s_n := s(z_0^n) \in (0,\infty)$. Доведемо, що $s_n \to 0$. До послідовності $\{s_n\}$ застосовні міркування після формули (25), з яких випливає, що по підпослідовності $s_n \to s_0 \geqslant 0$.

Переходячи до границі в (25), одержуємо

$$e^{-a\lambda s_0}(1 - 2b\beta\lambda s_0(u_0,\psi)) + \varepsilon F_\varepsilon(s_0) = 1. \tag{27}$$

Якщо припустити, що $s_0 > 0$, то

$$g_\varepsilon(0) = g_\varepsilon(s_0) = 1,\ g_\varepsilon'(t) \leqslant -\gamma_1 < 0\ \forall\ t \in (0,s_0),$$

що приводить до протиріччя. Теорема доведена.

Висновки. В роботі досліджено властивості рівномірного атрактора слабо нелінійної двовимірної параболічної системи, розв'язки якої зазнають імпульсного збурення при досягненні фіксованої імпульсної підмножини у фазовому просторі. Розглянуто випадок, коли траєкторії системи можуть нескінченну кількість разів зустрічатись з імпульсною множиною. Доведено, що в цьому випадку властивостю інваріантності та стійкості володіє неімпульсна частина рівномірного атрактора.

1. **Самойленко А. М.** Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. – К.: Вища школа, 1987. – 287 с.
2. **Lakshmikantham V.** Theory of impulsive differential equitations / V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov. – Singapore : World Scientific, 1989. – 288 p.
3. **Samoilenko A. M.** Impulsive differential equitations / A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk. – Singapore : World Scientific, 1995. – 462 p.
4. **Перестюк Н. А.** Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / Н. А. Перестюк, В. А. Плотников, А. М. Самойленко, Н. В. Скрипник. – Киев: Ин-т математики, 2007. – 425 с.
5. **Akhmet M.** Principles of Discontinuous Dynamical Systems / M Akhmet. – New York: Springer, 2010. – 176 p.
6. **Перестюк Н. А.** Инвариантные множества одного класса разрывных динамических систем / Н. А Перестюк // Украинский математический журнал. – 1984. – №1. – С. 63–38.
7. **Kaul S. K.** Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems / S. K. Kaul // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. – 1994. – Vol. 7. – №4. – P. 509–523.
8. **Pavlidis T.** Stability of a class of discontinuous dynamical systems / T. Pavlidis // Information and control. – 1996. – Vol. 9. – P. 298–322.
9. **Ciesielski K.** On stability in impulsive dynamical systems / K. Ciesielski //Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics – 2004. – Vol. 52. – P. 81–91.
10. **Bonotto E. M.** Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems / E. M. Bonotto // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2007. – Vol. 332. – P. 81–96.
11. **Перестюк Ю. М.** Розривні коливання в одній імпульсній системі / Ю. М. Перестюк // Нелінійні коливання. – 2012. – Т. 15, № 4. – С. 494–503.
12. **Temam R.** Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics / R. Temam. – New York: Springer, 1988. – 500 p.
13. **Chepyzhov V. V.** Attractors for Equations of Mathematical Physics / V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik – Rhode Island: American Mathematical Society, 2002. – 324 p.
14. **Kapustyan O. V.** Global attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness / O. V. Kapustyan, V. S. Melnik, J. Valero, V. V. Yasinsky. – Kyiv: Naukova Dumka, 2008. – 215 p.
15. **Perestyuk M. O.** Long-time behavior of evolution inclusion with non-damped impulsive effects / M. O. Perestyuk, O. V. Kapustyan // Memoirs of Differential equations and Mathematical physics. – 2012. – Vol. 56. – P. 89–113.
16. **Perestyuk M. O.** Global attractors of impulsive infinite-dimensional systems / M. O. Perestyuk, O. V Kapustyan // Ukrainian Mathematical Journal. – 2016. – Vol. 68. – №4. – P. 517–528.
17. **Dashkovskiy S.** Global atractors of impulsive parabolic inclusions / S. Dashkovskiy, O. V. Kapustyan, I. V. Romaniuk // Descrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. B. – 2017. – Vol. 22. – №5. – P. 1875–1886.

18. **Kapustyan O.** Global attractor of weakly nonlinear parabolic system with discontinuous trajectories / O. Kapustyan, M. Perestyuk, I. Romaniuk // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2017. – Vol. 72. – P. 59–70.
19. **Dashkovskiy S.** Invariance and stability of global attractors for multi-valued impulsive dynamical systems / S. Dashkovskiy, P. Feketa, O. Kapustyan and I. Romaniuk // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2018. – Vol. 458. – P. 193–218.
20. **Bonotto E. M.** Global attractors for impulsive dynamical systems – a precompact approach / E. M. Bonotto, M. C. Bortolan, A. N. Carvalho and R. Czaja // Journal of Differential Equations. – 2015. – Vol. 259. – P. 2602–2625.
21. **Bonotto E. M.** Semicontinuity of attractors for impulsive dynamical systems / E. M.Bonotto, M. C. Bortolan, R. Collegari and R. Czaja // Journal of Differential Equations. – 2016. – Vol. 261. – P. 4338–4367.
22. **Kapustyan O. V.** Stability of global attractors of impulsive infinite-dimensional systems / O. V. Kapustyan, M. O. Perestyuk, I. V. Romaniuk // Ukrainian Mathematical Journal. – 2018. – Vol. 70. – №1. – P. 30–41.
23. **Bhatia N.P.** Stability theory of dynamical systems. / N. P. Bhatia , G. P. Szegö. – New York: Springer, 2002. – 255 p.

Капустян А. В., Перегуда О. В., Романюк И. В.
Устойчивость равномерных аттракторов для одного класса импульсных параболических систем

Резюме

В работе рассматривается слабо нелинейная двумерная параболическая система, решения которой испытывают импульсное возмущение при достижении фиксированного (импульсного) подмножества фазового пространства. Она порождает импульсную динамическую систему, которая имеет в фазовом пространстве минимальное компактное равномерно притягивающее множество — равномерный аттрактор. При этом траектории системы могут бесконечное количество раз встречаться с импульсным множеством. Тогда, в общем случае, равномерный аттрактор имеет непустое пересечение с импульсным множеством и не является ни инвариантным, ни устойчивым множеством относительно импульсного полупотока. В работе доказано, что при определенных дополнительных условиях на параметры задачи инвариантной и устойчивой является неимпульсная часть равномерного аттрактора.
Ключевые слова: импульсная система, параболическая система, аттрактор, устойчивость .

Kapustyan O. V., Pereguda O. V., Romaniuk I. V.
Stability of uniform attractors for one class of impulsive parabolic systems

Summary

In this paper we consider weakly non-linear two-dimensional parabolic systems, whose solutions have jumps at moments of intersection with fixed (impulsive) subset of the phase space. It generates impulsive dynamical system which has minimal compact uniformly attracting set — uniform attractor. Trajectories of the system can reach the impulsive set infinitely many times. In this case the uniform attractor has non-empty intersection with impulsive set. It is neither invariant nor stable with respect to the impulsive semi-flow. In the paper under some additional restrictions on the parameters invariance and stability of non-impulsive part of the attractor is proved.
Key words: impulsive system, parabolic system, attractor, stability.

References

1. Samoilenko A. M., Perestyuk M. O. (1987). *Dyfferentsyalnye uravnenyia s ympulsnыm vozdeistvyem [Differential equations with impulsive action]*. Kyiv : Vyshcha shkola, 287 p.
2. Lakshmikantham V. , Bainov D. D., Simeonov P. S. (1989). *Theory of impulsive differential equitations*. Singapore : World Scientific, 288 p.
3. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. (1995). *Impulsive differential equitations* . Singapore : World Scientific, 462 p.
4. Perestyuk N. A., Plotnykov V. A., Samoilenko A. M., Skrypnyk N. V. (2007). *Impulsnyye differentsialnyye uravneniya s mnogoznachnoy i razryvnoy pravoy chastyu [Impulsive differential equations with a multi-valued and discontinuous right-hand side]*. Kiyv: Institut matematiki, 425 p.
5. Akhmet M. (2010). *Principles of Discontinuous Dynamical Systems*. New York: Springer, 176 p.
6. Perestyuk N. A. (1984). *Invariantnyye mnozhestva odnogo klassa razryvnykh dinamicheskikh sistem [Invariant sets of one class of discontinuous dynamical systems]. Ukr. matematych. zhurnal*, №1, P. 63–38.
7. Kaul S. K. (1994). *Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems. J Appl Math Stoch Anal*, Vol. 7, №4, P. 509–523.
8. Pavlidis T. (1996). *Stability of a class of discontinuous dynamical systems. Information and control*, Vol. 9, P. 298–322.
9. Ciesielski K. (2004). *On stability in impulsive dynamical systems. Bulletin Polish Acad. Sci. Math.*, Vol. 52, P. 81–91.
10. Bonotto E. M. (2007). *Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems. J Math Anal Appl*, Vol. 332, , P. 81–96.
11. Perestiuk Y. M. (2012). *Rozryvni kolyvannia v odnii impulsnii systemi [Discontinuous oscillations in one impulsive system]*. , Vol. 15, №4, P. 494–503.
12. Temam R. (1988). *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. New York: Springer, 500 p.
13. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. (2002). *Attractors for Equations of Mathematical Physics*. Rhode Island: American Mathematical Society, 324 p.
14. Kapustyan O. V., Melnik V. S., Valero J., Yasinsky V. V. (2008). *Global attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness*. Kyiv: Naukova Dumka, 215 p.
15. Perestyuk M. O., (2012). *Long-time behavior of evolution inclusion with non-damped impulsive effects. Memoirs Diff eq and Math phys*, Vol. 56, P. 89–113.
16. Perestyuk M. O., Kapustyan O. V. (2016). *Global attractors of impulsive infinite-dimensional systems. UMJ*, Vol. 68, №4, P. 517–528.
17. Dashkovskiy S., Kapustyan O. V.,Romaniuk I. V. (2017). *Global atractors of impulsive parabolic inclusions. DCDS*, Vol. 22, №5, P. 1875–1886.
18. Kapustyan O., Perestyuk M., Romaniuk I. (2017). *Global attractor of weakly nonlinear parabolic system with discontinuous trajectories. Memoirs Diff eq and Math phys*, Vol. 72, №1, P. 59–70.
19. Dashkovskiy S., Feketa P., Kapustyan O. V., Romaniuk I. V. (2018). *Invariance and stability of global attractors for multi-valued impulsive dynamical systems.* , Vol. 458, P. 193–218.

20. Bonotto E. M, Bortolan M. C., Carvalho A. N., Czaja R. (2015). *Global attractors for impulsive dynamical systems – a precompact approach. J Diff Eq*, Vol. 259, P. 2602–2625.
21. Bonotto E. M, Bortolan M. C., Collegari R. , Czaja R. (2016). *Semicontinuity of attractors for impulsive dynamical systems. J Diff Eq*, Vol. 261, №1, P. 4338–436.
22. Kapustyan O. V., Perestyuk M. O., Romaniuk I. V. (2018). *Stability of global attractors of impulsive infinite-dimensional systems. UMJ*, Vol. 70, №1, P. 30–41.
23. Bhatia N. P., Szegö G. P. (2002). *Stability theory of dynamical systems.* New York: Springer, 255 p.

Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 2(32). – С. 43–53

УДК 517.9

Т. В. Ковальчук, Т. В. Шовкопляс
Київський національний торговельно-економічний університет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

КРИТЕРІЙ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЛІНІЙНОЇ НЕТЕРОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ НА ЧАСОВІЙ ШКАЛІ

На часовій шкалі розглядається лінійна нетерова крайова задача для системи динамічних рівнянь другого порядку. Дана крайова задача розглядається у випадку, коли оператор лінійої частини є необоротним, тобто кількість крайових умов задачі і порядок операторної системи різні. Для того щоб встановити умови розв'язності розглядуваної крайової задачі, використовується апарат теорії псевдообернених матриць. Встановлюється зв'язок між умовою розв'язності динамічної системи та умовою розв'язності алгебраїчної системи рівнянь. Тобто, використовуючи теорію псевдообернених матриць, встановлено умову розв'язності динамічної системи рівнянь, до якої зводиться розглядувана крайова задача. При цьому умова розв'язності динамічної системи рівнянь випливає з умови розв'язності відповідної алгебраїчної системи рівнянь. Знайдено множину розв'язків розглядуваної крайової задачі. Також наведені часткові випадки крайової задачі, коли кількість крайових умов більша за кількість невідомих системи динамічних рівнянь та навпаки. Для кожного з цих випадків встановлено умови розв'язності розглядуваної крайової задачі та знайдено її розв'язки. Наведено приклад, який ілюструє застосування отриманих результатів.
MSC: 34N99, 34G20, 35J57 .
Ключові слова: нетерова крайова задача, система динамічних рівнянь, часова шкала, умова розв'язності, множина розв'язків, крайові умови, лінійний векторний функціонал, псевдообернена за Муром—Пенроузом матриця, матриця-ортопроектор.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149703.

Вступ. Актуальним питанням теорії диференціальних рівнянь є вивчення умов розв'язності лінійних нетерових крайових задач, тобто таких крайових задач, у яких оператор їх лінійної частини є необоротним, останнє означає, що кількість крайових умов в операторній системі не дорівнює кількості невідомих. Такі крайові задачі були розглянуті в роботах [2–4].

При встановленні умов розв'язності лінійних нетерових крайових задач застосовується апарат теорії псевдообернених матриць [5, 7].

Цікавим є дослідження нетерових крайових задач на часовій шкалі. Це питання розглядалося в праці [8].

Для дослідження умов існування розв'язків таких задач використовується теорія нетерових операторів, розвинута в роботах А. М. Самойленка та О. А. Бойчука [2,10], та теорія динамічних рівнянь на часових шкалах (див., наприклад, [9]).

В роботі розглядається лінійна нетерова крайова задача для системи динамічних рівнянь другого порядку на часовій шкалі. Встановлено умови розв'язності цієї задачі та побудована множина її розв'язків. Характерною особливістю роботи є те, що при дослідженні ми не зводимо рівняння другого порядку до системи

Надійшла 21.09.2018

рівнянь першого порядку, а працюємо безпосередньо з системою рівнянь другого порядку, що є набагато зручнішим і значно спрощує метод.

Робота складається зі вступу, основних результатів та висновків. У вступі описано актуальність розглядуваної задачі та наведено основні поняття, пов'язані з теорією часових шкал. У другій частині, присвяченій основним результатам, сформульована постановка задачі, наведені умови розв'язності лінійної нетерової крайової задачі для динамічної системи рівнянь та проведено основні доведення.

Попередні результати. Наведемо необхідні поняття та означення, які пов'язані з теорією рівнянь на часових шкалах [9].

Означення 1. *[9] Часовою шкалою T називається довільна непорожня замкнена підмножина дійсних чисел.*

Для кожної множини $A \subset T$ позначимо $A_T = A \bigcap T$. Для характеризації часової шкали наведемо поняття прямого та оберненого операторів стрибка, функції зернистості [9].

Означення 2. [9] *Для довільного $t \in T$ прямим оператором стрибка називається функція $\sigma : T \to T$, визначена наступним чином: $\sigma(t) := inf\{s \in T : s < t\}$.*

Означення 3. [9] *Для довільного $t \in T$ оберненим оператором стрибка є функція $\rho : T \to T$, визначена наступним чином: $\rho(t) := sup\{s \in T : s > t\}$.*

Означення 4. [9] *Функція $\mu : T \to [0; +\infty)$ визначена наступним чином: $\mu(t) := \sigma(t) - t$ називається функцією зернистості.*

Означення 5. [9] *Точка $t \in T$ називається:*
1) лівограничною (LD), якщо $\rho(t) = t$;
2) ліворозсіяною (LS), якщо $\rho(t) < t$;
3) правограничною (RD), якщо $\sigma(t) = t$;
4) праворозсіяною (RS), якщо $\sigma(t) > t$;
функцією зернистості.

Якщо T має ліворозсіяний максимум M, тоді множина T^k визначається таким чином: $T^k = T \backslash M$; в іншому випадку вважаємо, що $T^k = T$.

Означення 6. [9] *Функція $f : T \to R^d$ називається $\Delta-$диференційованою в точці $t \in T^k$, якщо границя $f^{\Delta}(t) = \lim\limits_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$ існує в R^d.*

Наведемо наступні відомі результати [9]:

1. Якщо $t \in T^k$-правогранична точка T, тоді функція f є Δ-диференційованою в точці t тоді і тільки тоді, коли границя $f^{\Delta}(t) = \lim\limits_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$ існує в R^d.

2. Якщо $t \in T^k$-праворозсіяна точка T і якщо функція f є неперервною по t, тоді функція f є Δ-диференційованою в точці t і $f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$.

Означення 7. [9] *Функція $f : T \to R$ є rd-неперервною, якщо вона неперервна в щільних справа точках на T і існує її лівостороння границя в щільних зліва точках шкали T. Множина всіх rd-неперервних функцій $f : T \to R$ позначається $C_{rd} = C_{rd}(T) = C_{rd}(T,R)$.*

Означення 8. [9] *Вважаємо, що функції $f,g : T \to R$ є диференційованими в точці $t \in T^k$. Тоді добуток $fg : T \to R$ є диференційованим в точці $t \in T^k$ і*

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))(g)^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))$$

існує в R^d.

Означення 9. [9] *Для диференційованої функції $f : T \to R$, якщо її похідна $f^{\triangle}$ є диференційованою на множині $T^{k^2} = (T^k)^k$, то її друга похідна $f^{\triangle\triangle}$ визначена таким чином: $f^{\triangle\triangle} = (f^{\triangle})^{\triangle}$, $f^{\triangle\triangle} : T^{k^2} \to R$.*

Теорема 1. [9] *Нехай a, $b \in T$ та $f \in C_{rd}(T,R)$. Тоді, якщо T складається лише з ізольованих точок, то*

$$\int\limits_a^b f(s)\triangle s := \begin{cases} \sum\limits_{t\in[a,b)} \mu(s)f(s), & \text{якщо} a < b, \\ 0, & \text{якщо} a = b; \\ -\sum\limits_{t\in(a,b]} \mu(s)f(s), & \text{якщо} a > b. \end{cases}$$

Основні результати

1. Постановка задачі. Розглядається лінійна неоднорідна нетерова крайова задача для системи динамічних рівнянь другого порядку на часовій шкалі T

$$(P(t)x^{\Delta}(t))^{\Delta} - Q(t)x(t) = f(t), t \in [a, b]_T, \tag{1}$$

$$lx(t) = \alpha, \alpha \in R^m, \tag{2}$$

де $[a, b]_T := [a,b] \bigcap T$, x, $f(t) = col(f_1(t), f_2(t),...,f_n(t)$—$n$-вимірна вектор-функція, яка є rd-неперервною на часовій шкалі T: $f(t) \in C_{rd}([a,b]_T, R^n)$; $P(t)$, $P^{\Delta}(t)$ та $Q(t)$—$(n \times n)$-вимірні матриці-функції, елементи яких є rd-неперервними на $[a,b]_T$ функціями: $P(t), P^{\Delta}(t), Q(t) \in \Re([a,b]_T; R^{n\times n})$, і матриця-функція $P(t)$ невироджена: $detP(t) \neq 0$; l—m-вимірний лінійний векторний функціонал, визначений на просторі n-вимірних неперервних вектор-функцій: $l = col(l_1,l_2,...,l_m)$, $l : C[a,b]_T \to R^m$, $l_i : C[a,b]_T \to R$, $i = 1,2,...,m$, $b < +\infty$, α—m-вимірний вектор-стовпець констант, $\alpha \in R^m$.

Застосовуючи до величиини $(P(t)x^{\Delta})^{\Delta}$ означення 8 двічі підряд та означення 9, отримаємо: $(P(t)x^{\triangle}(t))^{\triangle} = (P(t))^{\triangle}x^{\triangle}(t) + P(\sigma(t))(x^{\triangle}(t))^{\triangle} = P^{\triangle}(t)x^{\triangle}(t) + P(\sigma(t))x^{\triangle\triangle}(t)$.

Враховуючи умову на коефіцієнти динамічної системи (1), означення 8 та попередні викладки, зробимо деякі перетворення, в результаті яких система (1) набере вигляду

$$x^{\Delta\Delta}(t) + A(t)v(x(t)) = P^{-1}(\sigma(t))f(t), t \in [a,b]_T, \tag{3}$$

де $A(t) = [-P(t)Q(t), P^{-1}(\sigma(t))f(t)P^{\Delta}(t)]$—$(n \times 2n)$-вимірна матриця, $v(x(t)) = (x^T(t),(x^{\triangle}(t))^T)$—$2n$-вимірний вектор.

В результаті проведених перетворень динамічна система рівнянь (1) звелася до еквівалентної їй системи (3), тому міркування, проведені до системи (3), будуть також виконуватись і для системи (1).

Динамічна система (3) має $2n$-параметричну множину розв'язків:

$$x(t) = X(t)c + \overline{x}(t), c \in R^{2n}, \tag{4}$$

де

$$\overline{x}(t) := \int_{t_0}^{t} e_A(t,\sigma(s))\varphi(s)\Delta s, t \in [a,b]_T, \tag{5}$$

$e_A(t,s)$ — $(n \times 2n)$-вимірна матрична експоненціальна функція, що є матрицантом відповідної однорідної динамічної системи: $e_A(t,s) = X(t)W^{-1}(X(s))$, де $(n \times 2n)$-вимірна матриця $X(t)$ є фундаментальною матрицею відповідної однорідної динамічної системи, нормованої в точці $t_0 \in [a,b]_T$, $W(X(t))$, $t \in [a,b]_T$, – $(2n \times 2n)$-вимірна матриця Вронського фундаментальної матриці $X(t)$; $\varphi(t)$–$2n$-вимірний вектор,перші n компонент якого є компонентами нульового вектора, а решта утворені добутком $(n \times n)$-вимірної матриці $P^{-1}(t)$ на n-вимірний вектор $f(t)$: $\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ P^{-1}f(t) \end{pmatrix}$.

2. Умови розв'язності лінійної неоднорідної нетерової крайової задачі для системи динамічних рівнянь (1), (2) на часовій шкалі T. Оскільки динамічні системи (1) та (3) еквівалентні, то лінійній нетеровій крайовій задачі для динамічної системи, розглядуваної на часовій шкалі (1), (2), еквівалентна лінійна нетерова крайова задача для динамічної системи, розглядуваної на часовій шкалі:

$$x^{\Delta\Delta}(t) + A(t)v(x(t)) = P^{-1}(\sigma(t))f(t), \quad t \in [a,b]_T, \tag{6}$$

$$lx(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in R^m. \tag{7}$$

За оператор Λ позначимо оператор вигляду:

$$\Lambda x(\cdot) := \begin{pmatrix} x^{\Delta\Delta}(\cdot) + A(\cdot)v(x(\cdot)) \\ lx(\cdot) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Враховуючи (5), задачу (6), (7) запишемо в операторній формі:

$$\Lambda x(\cdot) := \begin{pmatrix} (P^{-1}(\cdot)f(\cdot) \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що оператор Λ вигляду (8) є нетеровим оператором з індексом $ind\Lambda = 2n - m$, тому отримана крайова задача (6), (7) є нетеровою.

Загальний розв'язок (4) динамічної системи (3) буде розв'язком крайової задачі (6), (7) тоді і тільки тоді, коли векторна стала $c \in R^{2n}$ буде задовольняти алгебраїчну систему

$$Dc = \alpha - l\overline{x}(\cdot), \tag{9}$$

яка отримана в результаті підстановки загального розв'язку (4) динамічної системи (3) в крайову умову (2).

В (9) через D позначена $(m \times 2n)$-вимірна матриця, отримана в результаті дії m-вимірного лінійного вектор-функціоналу l на вектор-стовпчики матриці-функції $X(t)$: $D := lX(t)$; вважаємо, що $rankD = n_1$, $n_1 \leqslant min(2n; m)$.

Згідно з теоремою 3.9 [10], алгебраїчна система (9) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{D_d^*}[\alpha - l\overline{x}(\cdot)] = \theta_d, \qquad d = m - n_1. \tag{10}$$

В такому разі загальний розв'язок алгебраїчної системи (9) має вигляд:

$$c = P_{D_r} c_r + D^+[\alpha - l\overline{x}(\cdot)], r = 2n - n_1, \quad \forall c_r \in R^r, \tag{11}$$

де D^+ є $(2n \times m)$-вимірною матрицею, псевдооберненою за Муром—Пенроузом до матриці D.

Підставляючи знайдений сталий вектор $c \in R^{2n}$ вигляду (11) в (4), знаходимо загальний розв'язок крайової задачі (1), (2):

$$x(t,c_r) = e_A(t,t_0)P_{D_r c_r} + e_A(t,t_0)D^+\alpha - e_A(t,t_0)D^+ l\overline{x}(\cdot) + \overline{x}(t), \forall c_r \in R^r. \tag{12}$$

В (12): $e_A(t,t_0)$—$(n \times 2n)$-вимірна матрична експоненціальна функція, що є фундаментальною матрицею відповідної однорідної $(P^{-1}(t)f(t) = 0)$ динамічної системи (3), нормованої в точці $t_0 \in [a,b]_T$; P_{D_r}—$(2n \times r)$-вимірна матриця, отримана з $(2n \times 2n)$-вимірної матриці-ортопроектора P_D, що проектує простір R^{2n} на нуль-простір $N(D)$ матриці D: $P_D : R^{2n} \to N(D)$, $N(D) = P_D R^{2n}$; $P_{D_d^*}$—$(d \times m)$-вимірна матриця, отримана з $(m \times m)$-вимірної матриці-ортопроектора P_{D*}, що проектує простір R^m на нуль-простір $N(D^*$ матриці D^*: $P_{D*} : R^m \to N(D^*)$, $N(D^*) = P_{D*}R^m$.

Звідси одержуємо, що розмірність нуль-простору $N(D)$ дорівнює дефекту матриці D $[5, 7]$:$rankD = n_1$.

Враховуючи, що $rankD = rankD^*$, отримуємо розмірність нуль-простору $N(D^*)$: $dimN(D^*) = m - rankD = m - n_1 = d$. Тому $rankP_D = r$, $rankP_{D*} = d$, внаслідок чого матриця P_D складається з r лінійно незалежних стовпців, а матриця P_{D*} складається з d лінійно незалежних рядків; тому $(m \times m)$-вимірну матрицю P_{D*} та $(2n \times 2n)$-вимірну матрицю P_D можна замінити $(d \times m)$-вимірною матрицею $P_{D_d^*}$ та $(2n \times r)$-вимірною матрицею P_{D_r} відповідно.

Наведені вище міркування приводять до наступної теореми.

Теорема 2. [5] *Якщо* $rankD = n_1 < min\{2n, m\}$, *то однорідна* $(\alpha = 0, f = 0)$ *крайова задача (1), (2) має* r *і лише* r $(r = 2n - n_1)$ *лінійно незалежних розв'язків*

$$x(t, c_r) = e_A(t,t_0)P_{D_r}c_r, \forall c_r \in R^r. \tag{13}$$

Неоднорідна крайова задача (1), (2) розв'язна тоді і тільки тоді, коли $f(t) \in C_{rd}([a,b]_T; R^n)$ *і* $\alpha \in R^m$ *задовольняють умову розв'язності*

$$P_{D_d^*}[\alpha - l\overline{x}(\cdot)] = \theta_d, d = m - n_1 \tag{14}$$

і при цьому має r*-параметричну множину розв'язків*

$$x(t, c_r) = e_A(t,t_0)P_{D_r}c_r + X(t)D^+\alpha - X(t)D^+ l\overline{x}(\cdot) + \overline{x}(t), \forall c_r \in R^r. \tag{15}$$

Дана теорема сформульована в загальному вигляді. Для некритичних крайових задач з вище сформульованої теореми випливають твердження.

Наслідок 1. *Нехай* $rankD = n_1 = m(m \neq 2n)$. *Тоді* $dimN(D^*) = m - rankD = m - n_1 = m - m = d = 0$, *тому* $rankP_{N(D*)} = 0$ *і неоднорідна крайова задача (1), (2) завжди розв'язна і має* r*-параметричний* $(r = 2n - m)$ *розв'язок*

$$x(t, c_r) = e_A(t,t_0)P_{D_r}c_r + e_A(t,t_0)D^+\alpha - e_A(t,t_0)D^+l\overline{x}(\cdot) + \overline{x}(t), \forall c_r \in R^r. \quad (16)$$

Наслідок 2. *Нехай* $rankD = n_1 = 2n$. *Тоді однорідна* $(\alpha = 0, f = 0)$ *крайова задача (1), (2) має лише тривіальний розв'язок* $(r = 2n - n_1 = 0)$. *Неоднорідна крайова задача (1), (2) розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова розв'язності*

$$P_{D_d^*}[\alpha - l\overline{x}(\cdot)] = \theta_d, \quad d = m - 2n, \quad (17)$$

і при цьому неоднорідна крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок

$$x(t) = e_A(t,t_0)D^{-1}\alpha - e_A(t,t_0)D^+l\overline{x}(\cdot) + \overline{x}(t). \quad (18)$$

Наслідок 3. *Нехай* $rankD = n_1 = m = 2n$. *Тоді* $detD \neq 0$ *та однорідна* $(\alpha = 0, f = 0)$ *крайова задача (1), (2) має лише тривіальний розв'язок. Неоднорідна крайова задача (1), (2) завжди і при цьому має єдиний розв'язок*

$$x(t) = e_A(t,t_0)D^{-1}\alpha - e_A(t,t_0)D^-l\overline{x}(\cdot) + \overline{x}(t). \quad (19)$$

Приклад. *Розглянемо лінійну крайову задачу на часовій шкалі* $T = \left[0,\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{4},1\right]$:

$$x^{\Delta\Delta}(t) - a^2x(t) = f(t), \quad x \in R^1, \quad t \in T. \quad (20)$$

$$lx(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in R^2, \quad (21)$$

де $l : C(T) \to R^2$, $lx(\cdot) = Mx(0) + Nx(1)$, M *та* N–(2×1)*-вимірні матриці:* $M = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо фундаментальну матрицю відповідної однорідної динамічної системи

$$x^{\Delta\Delta}(t) - a^2x(t) = 0, \quad x \in R^1, \quad t \in T, \quad (22)$$

тобто (1×2)*-вимірну матричну функцію* $X(t)$.

При $t \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, $t \geqslant s$ *матричну функцію* $X(t)$ *визначимо по аналогії з фундаментальною матрицею звичайного диференціального рівняння [1, 6], тобто, при* $t \in [0,\ \frac{1}{2}]$, *фундаментальну матрицю (вектор-рядок) однорідної динамічної системи (22) визначено таким чином:*

$$X(t) = \left(\frac{e^{a(t-0)} + e^{-a(t-0)}}{2}; \frac{e^{a(t-0)} - e^{-a(t-0)}}{2a}\right).$$

При $t = \frac{1}{2}$ *фундаментальна матриця не буде фундаментальною матрицею відповідного диференціального рівняння і шукається як у випадку для однорідної* *динамічної системи, тобто використовується означення функції, Δ-диференційованої в точці [9]. Отже, при $t=\frac{1}{2}$ маємо: $X(\frac{1}{2})=\begin{pmatrix} 1; & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.*

При $t\in\left[\frac{3}{4},\ 1\right]$ фундаментальна матриця однорідної динамічної системи (22) збігається з фундаментальною матрицею відповідної диференціальної системи:

$$X(t)=\left(\frac{e^{a(t-\frac{3}{4})}+e^{-a(t-\frac{3}{4})}}{2};\quad \frac{e^{a(t-\frac{3}{4})}-e^{-a(t-\frac{3}{4})}}{2a}\right).$$

Отже, експоненційна функція $e_A(t,s)$ є такою:

$$\begin{cases} e_A(t,s)=\left(\dfrac{e^{a(t-s)}+e^{-a(t-s)}}{2};\quad \dfrac{e^{a(t-s)}-e^{-a(t-s)}}{2a}\right) & \textit{при } t,\ s\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right),\\ e_A(t,s)=(1;\quad 0) & \textit{при } t=s=\frac{1}{2},\\ e_A(t,s)=\left(\dfrac{e^{a(t-s)}+e^{-a(t-s)}}{2};\quad \dfrac{e^{a(t-s)}-e^{-a(t-s)}}{2a}\right) & \textit{при } t,\ s\in\left[\frac{3}{4},\ 1\right]. \end{cases}$$

Прямий оператор стрибка буде таким:

$$\begin{cases} \sigma(t)=t & \textit{при } t\in\left[0;\frac{1}{2}\right),\\ \sigma(t)=\frac{3}{4} & \textit{в точці } t=\frac{1}{2},\\ \sigma(t)=t & \textit{при } t\in\left[\frac{3}{4};1\right]. \end{cases}$$

Функція $\mu(t)$ буде такою:

$$\begin{cases} \mu(t)=0 & \textit{при } t\in\left[0;\frac{1}{2}\right],\\ \mu(t)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4} & \textit{в точці } t=\frac{1}{2},\\ \mu(t)=0 & \textit{при } t\in\left[\frac{3}{4};1\right]. \end{cases}$$

Отже, експоненційна функція $e_A(t,\sigma(s))$ для розглядуваної задачі визначається таким чином:

$$\begin{cases} e_A(t,\sigma(s))=\left(\dfrac{e^{a(t-s)}+e^{-a(t-s)}}{2};\dfrac{e^{a(t-s)}-e^{-a(t-s)}}{2a}\right) & \textit{при } t,s\in\left[0;\frac{1}{2}\right),\\ e_A(t,\sigma(s))=(1;0) & \textit{при } t=s=\frac{1}{2},\\ e_A(t,\sigma(s))=\left(\dfrac{e^{a(t-s)}+e^{-a(t-s)}}{2};\quad \dfrac{e^{a(t-s)}-e^{-a(t-s)}}{2a}\right) & \textit{при } t,s\in\left[\frac{3}{4};1\right]. \end{cases}$$

Тому можна зазначити, що $e_A(1,\sigma(s))$ є такою:

$$e_A(1,\sigma(s))=\left(\frac{e^{a(1-s)}+e^{-a(1-s)}}{2};\quad \frac{e^{a(1-s)}-e^{-a(1-s)}}{2a}\right).$$

Знайдемо матрицю D за формулою: $D:=lX(\cdot)$. В розглядуваному прикладі $D:=lX(\cdot)=MX(0)+NX(1)$. Отже,

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ \dfrac{(e^{\frac{a}{8}}-e^{-\frac{a}{8}})^2}{2} & \dfrac{e^{\frac{a}{4}}-e^{-\frac{a}{4}}}{2} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю D^*. *Оскільки* $D^* = D^T$, *то*

$$D^* = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{(e^{\frac{a}{8}} - e^{-\frac{a}{8}})^2}{2} \\ 0 & \dfrac{e^{\frac{a}{4}} - e^{-\frac{a}{4}}}{2} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо базис нуль-простору матриці D^*. *Згідно з означенням нуль-простору* $N(D^*) = kerD^* = \{\overrightarrow{b} \in R^2 : D^*\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}\}$. *Отже, з рівності* $D^*\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ *знайдемо двовимірний вектор* $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, *розв'язавши векторно-матричне рівняння:*

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{(e^{\frac{a}{8}} - e^{-\frac{a}{8}})^2}{2} \\ 0 & \frac{e^{\frac{a}{4}} - e^{-\frac{a}{4}}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Оскільки $rankD^* = rankD = 1$, *то рівняння (23) має безліч розв'язків і нуль-простір* $N(D^*)$ *матриці* D^* *містить лише вектор* $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_1 \in R$.

Знайдемо матрицю P_{D^*}. *Для цього використаємо формулу:*

$$P_{D^*} = \sum_{s,k=1} \beta_{sk}^{(-1)} \overrightarrow{b}_s \overrightarrow{b}_k^T,$$

де β_{sk}*–скалярний добуток векторів* $\overrightarrow{b}_s$ *та* $\overrightarrow{b}_k$: $\beta_{sk} = (\overrightarrow{b}_s, \overrightarrow{b}_k)$ *в даному випадку* $\beta_{11} = (\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_1)$.

Отже, $P_{D^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Оскільки* $d = 1$, *то* $rankP_{D^*} = 1$, *тому* (2×2)-*вимірну матрицю* P_{D^*} *можна замінити* (1×2)-*вимірною матрицею* $P_{D_1^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Проводячи аналогічні міркування та використовуючи формулу

$$P_D = \sum_{s,k=1} \alpha_{sk}^{(-1)} \overrightarrow{\psi}_s \overrightarrow{\psi}_k^T,$$

де α *визначається як скалярний добуток:* $\alpha = (\psi_s, \psi_k)$, *отримаємо матрицю*

$$P_{D_1} = \frac{1}{2(e^{-\frac{a}{4}} + e^{\frac{a}{4}})} \begin{pmatrix} e^{-\frac{a}{4}} - e^{\frac{a}{4}} \\ (e^{-\frac{a}{8}} - e^{\frac{a}{8}})^2 \end{pmatrix}$$

Використовуючи формулу: $D^+ = D^T(DD^T + P_{D^*})^{-1}$, *знайдемо матрицю* D^+, *псевдообернену за Муром—Пенроузом до матриці* D:

$$D^+ = \frac{1}{(e^{\frac{a}{4}} + e^{-\frac{a}{4}})^2 - 1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & (e^{\frac{a}{8}} - e^{-\frac{a}{8}})^2 \\ 0 & e^{\frac{a}{4}} - e^{-\frac{a}{4}} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, дана крайова задача розв'язна і при цьому має однопараметричну множину розв'язків

$$x(t, c_1) = e_A(t,t_0) P_{D_1} c_1 + X(t) D^+ \alpha - X(t) D^+ l\overline{x}(\cdot) + \overline{x}(t), \forall c_1 \in R^1. \tag{24}$$

В (24) матриці $e_A(t,t_0)$, P_{D_1}, $X(t)$, D^+ *визначені так само, як і вище,* c_1 *— одновимірний вектор, тобто дійсна стала величина,* $l\overline{x}(\cdot) = N\int\limits_0^1 e_A(1,\sigma(s))\varphi(s)\Delta s$, $x(t) = \int\limits_0^1 e_A(t,s)\varphi(s)\Delta s$, *де* $\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$ *— двовимірний вектор. Інтеграли обчислюються за формулою, вказаною в теоремі 1.*

Висновки. Для розглядуваної на часовій шкалі крайової задачі для системи динамічних рівнянь встановлено умови її розв'язності та побудовано множину розв'язків у випадку, коли кількість крайових умов та розмірність динамічної системи не збігаються. Окремо розглянуті випадки, коли кількість крайових умов більша за розмірність динамічної системи рівнянь та навпаки. Для кожного з цих випадків встановлено умови розв'язності крайової задачі та знайдені їх розв'язки.

1. **Шовкопляс Т. В.** Критерій розв'язності лінійної крайової задачі для системи другого порядку // Т. В. Шовкопляс // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 861–864.
2. **Бойчук А. А.** Конструктивные методы анализа краевых задач / А. А. Бойчук. – Киев: Наукова думка, 1990. – 96 с.
3. **Бойчук А. А.** Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием / А. А. Бойчук, А. М. Самойленко // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, № 4. – С. 564–568.
4. **Бойчук А. А.** Линейные нетеровы краевые задачи для импульсных дифференциальных систем с запаздыванием / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 10. – С. 1677–1682.
5. **Воеводин В. В.** Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. – Москва: Наука, 1984. – 318 с.
6. **Ляшко И. И.** Математический анализ. Ч. 3. Интегрирование дифференциальных уравнений / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда. – Киев: Выща шк., 1987. – 342 с.
7. **Турбин А. Ф.** Формулы для вычисления полуобратной и псевдообратной матрицы // А. Ф. Турбин / Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1974. – Т. 14, № 3. – С. 772–776.
8. **Agarwal R.** Fredholm boundary value problems for perturbed systems of dynamic equations on time scales / R. Agarwal, M. Bohner, A. Boichuk , O. Strakh. – Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2014. – DOI: 10.1002/ mma.3356.
9. **Bohner M.** Advances in dynamic equations on time scales / M. Bohner, A. Peterson. – Birkhauser Inc., Boston: MA. – 2003. – 361 p.
10. **Boichuk A. A.** Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems / A. A. Boichuk , A. M. Samoilenko. – Utrecht, Boston: VPS. – 2004. – 317 p.

Ковальчук Т. В., Шовкопляс Т. В.

Критерий разрешимости линейной нетеровой краевой задачи для системы динамических уравнений на часовой шкале

Резюме

На часовой шкале рассматривается линейная нетерова краевая задача для системы динамических уравнений второго порядка. Эта краевая задача рассматривается в случае, когда оператор линейной части является необратимым, то есть количество краевых условий задачи и порядок операторной системы разные. Для определения условий разрешимости рассматриваемой краевой задачи используется аппарат теории псевдообратных матриц. Определяется взаимосвязь между условием разрешимости динамической системы и условием разрешимости алгебраической системы уравнений. То есть с помощью теории псевдообратных матриц определено условие разрешимости динамической системы уравнений, к которой сводится рассматриваемая краевая задача. И в этом случае условие разрешимости динамической системы уравнений следует из условия разрешимости соответствующей алгебраической системы уравнений. Найдено множество решений рассматриваемой краевой задачи. Также приведены частные случаи краевой задачи, когда количество краевых условий больше количества неизвестных системы динамических уравнений и наоборот. Для каждого из этих случаев определены условия разрешимости рассматриваемой краевой задачи и найдены ее решения. Приведен пример, иллюстрирующий применение полученных результатов.

Ключевые слова: нетерова краевая задача, система динамических уравнений, временная шкала, условия разрешимости, множество решений, краевые условия, линейный векторный функционал, псевдообратная по Муру—Пенроузу матрица, матрица-ортопроектор .

Kovalchuk T. V., Shovkoplyas T. V.

The criterion for solvability of a linear Noether's boundary value problem for a system of dynamical equations on a time scale

Summary

On a time scale, the linear Noether's boundary value problem for a system of second-order dynamical equations is considered. This boundary-value problem is considered in the case when the operator of the linear part is irreversible, that is, the number of boundary conditions of the problem and the order of the operator system are different. To establish the solvability conditions of the boundary-value problem under consideration, the apparatus of the theory of pseudo-inverse matrices is used. A connection is established between the condition of solvability of a dynamical system and the condition of solvability of an algebraic system of equations. That is, using the theory of pseudo-inverse matrices, the condition for solvability of a dynamical system of equations is established, which reduces the considered boundary value problem. In this case, the condition of solvability of a dynamical system of equations follows from the condition of solvability of the corresponding algebraic system of equations. A set of solutions of the boundary value problem under consideration is found. Also, partial cases of the boundary value problem are given, when the number of boundary conditions is greater than the number of unknowns of the system of dynamic equations and vice versa. For each of these cases, the solvability conditions of the boundary-value problem under consideration are found and its solutions are found. An example is provided illustrating the application of the results obtained.

Key words: the Noether's boundary value problem, the system of dynamic equations, time

scale, the conditions of solvability, set of solutions, boundary conditions, linear vector functional, Moore–Penrose pseudoinverse matrix, orthoprojector matrix .

References

1. Shovkoplyas, T. V. (2000). Kryterij rozv'yaznosti linijnoji krajpvoji zadachi dlya sustemy drugogo poryadku [The criterion of solvability of linear the boundary value problem for the system of the second order]. *Ukr. Mat.zurn.*, Vol. 52, № 6. – P. 861–.864.
2. Boichuk A. A. (1990). *Konstruktivnyje metody analiza krajevyh zadach [The constructive methods for analyzing boundary value problems].* Kiev: Naukova Dumka, 96 p.
3. Boychuk A. A., Samojlenko A.M. (1992). *Linjejnyje njetjerovy krajevyje zadachi dlja differenzialnyh sistjem s impulsnym vozdjejstvijem [Linear Noether's boundary value problems for differential systems with impulse action] Ukr. Mat.zurn., Vol. 44, № 4. – P. 564–.568.*
4. Boychuk A. A., Zuravlev V. F., Samojlenko A.M. (1994). *Linjejnyje njetjerovy krajevyje zadachi dlja differenzialnyh sistjem s impulsnym vozdjejstvijem [Linear Noether's boundary value problems for differential systems with impulse action] Ukr. Mat.zurn., Vol. 44, № 4. – P. 564–.568.*
5. Vojevodin 4Vojevodin V. V. (1984). *Matritsy i vychisljenija [Matrices and calculations].* Moskva: Nauka, 318 p.
6. Ljashko I. I., Bojarchuk A. K., Gaj Ya. G., Kalajda A. F. (1987) *Matematicheskij analiz. Chast 3. Integrirovanie differencialnyh uravneniy [Integration of differential equations] Kiev: Vyshcha shkola, Выща шк., 342 p.*
7. *Turbin A. F. (1974). Formuly dlja vychislenija poluobratnoj i psevdoobratnoj matricy [Formulas for calculating the semi-inverted and pseudoinverse matrix] Zurn. Vychislit. Matematiki i mat. fiziki*, Vol. 14, № 3. P. 772–776.
8. Agarwal, R., Bohner, M., Boichuk, A., Strakh, O. (2014). *Fredholm boundary value problems for perturbed systems of dynamic equations on time scales* Mathematical Methods in the Applied Sciences. – DOI: 10.1002/ mma.3356
9. Bohner, M., Peterson, A. (2003). *Advances in dynamic equations on time scales* Birkhauser Inc., Boston: MA. 361 p.
10. Boichuk, A. A., Samoilenko A. M. (2004). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems* Utrecht, Boston: VPS. 317 p.

Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 2(32). – С. 54–67

УДК 517.925

Н. П. Колун
Военная академия (г. Одесса)

АСИМПТОТИКА МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРАВИЛЬНО И БЫСТРО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В настоящей работе для дифференциального уравнения второго порядка, которое содержит в правой части сумму слагаемых с правильно и быстро меняющимися нелинейностями, устанавливаются необходимые и достаточные условия существования так называемых $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений (Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$) в особом случае, когда параметр $\lambda_0 = 0$. При таком значении параметра λ_0 исследуемые решения являются медленно меняющимися при $t \uparrow \omega$ ($\omega \leqslant +\infty$) функциями. Также устанавливаются асимптотические при $t \uparrow \omega$ представления для таких решений и их производных первого порядка. Результаты работы получены в предположении, что на каждом решении из рассматриваемого класса правая часть исследуемого дифференциального уравнения эквивалентна при $t \uparrow \omega$ одному слагаемому с правильно меняющейся нелинейностью. Рассмотрен пример дифференциального уравнения, иллюстрирующий полученные в работе результаты.
MSC: 34E99.
Ключевые слова: правильно меняющиеся функции, быстро меняющиеся функции, нелинейные дифференциальные уравнения, $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решения, асимптотика $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений, асимптотическое представление $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149704.

Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)\varphi_i(y), \tag{1}$$

в котором $\alpha_i \in \{-1,1\}$ $(i = \overline{1,m})$, $p_i : [a,\omega[\to]0, +\infty[$ $(i = \overline{1,m})$ — непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$; $\varphi_i : \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ $(i = \overline{1,m})$, где Δ_{Y_0} — односторонняя окрестность Y_0, Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, являются непрерывными функциями при $i = \overline{1,l}$ и дважды непрерывно дифференцируемыми при $i = \overline{l+1,m}$, причем для каждого $i \in \{1,...,l\}$ при некотором $\sigma_i \in \mathbb{R}$ выполняются условия

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i(\lambda y)}{\varphi_i(y)} = \lambda^{\sigma_i} \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0, \tag{2}$$

а для каждого $i \in \{l+1,...,m\}$ –

$$\varphi_i'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi_i(y) \in \{0, +\infty\}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i''(y)\varphi_i(y)}{\varphi_i'^2(y)} = 1. \tag{3}$$

Получена 05.07.2018

Функции φ_i $(i = \overline{1,l})$, удовлетворяющие условиям (2), являются правильно меняющимися при $y \to Y_0$ функциями порядков σ_i $(i = \overline{1,l})$ (см. монографию Е. Сенеты [3], гл. 1, §1, с. 9). Для них имеют место представления вида

$$\varphi_i(y) = \mid y \mid^{\sigma_i} L_i(y) \quad (i = \overline{1,l}), \tag{4}$$

где L_i $(i = \overline{1,l})$ — медленно меняющиеся функции при $y \to Y_0$, т.е. такие, что

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{L_i(\lambda y)}{L_i(y)} = 1 \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0.$$

Из условий (3) непосредственно вытекают предельные соотношения

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)} = \pm\infty \quad (i = \overline{l+1,m}),$$

в силу которых при $i \in \{l+1,...,m\}$ каждая из функций φ_i и ее производная первого порядка являются быстро меняющимися при $y \to Y_0$ функциями (см. монографию В. Марича [2], гл. 3, §3.4, леммы 3.2, 3.3, с. 91–92).

Определение 1. *Решение y уравнения (1) называется $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решением, где $-\infty \leqslant \lambda_0 \leqslant +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$ и удовлетворяет следующим условиям*

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty, \end{cases} \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{5}$$

В работе В. А. Касьяновой [3] были получены необходимые и достаточные условия существования, а также асимптотические при $t \uparrow \omega$ представления $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений в случае, когда в правой части дифференциального уравнения (1) все нелинейности являются правильно меняющимися при $y \to Y_0$ функциями. В работах В. М. Евтухова, А. Г. Черниковой [4–6] и А. Г. Черниковой [7] исследовалось двучленное уравнение с быстро меняющейся нелинейностью. В случае уравнения вида (1) в [8] изучались $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решения дифференциального уравнения (1) при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

Целью настоящей работы является установление необходимых и достаточных условий существования $P_\omega(Y_0,0)$-решений y дифференциального уравнения (1), а также асимптотических при $t \uparrow \omega$ представлений для таких решений и их производных первого порядка в случае, когда для некоторого $s \in \{1,...,l\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = 0 \quad \text{при} \quad i \in \{1,...,m\}\backslash\{s\}, \tag{6}$$

т.е. когда на каждом таком решении уравнения (1) правая часть уравнения эквивалентна при $t \uparrow \omega$ одному слагаемому с правильно меняющейся нелинейностью.

При изучении $P_\omega(Y_0,0)$-решений дифференциального уравнения (1) понадобится одно вспомогательное утверждение об их априорных асимптотических свойствах, справедливость которого непосредственно вытекает из работы В. М. Евтухова [9] (см. следствие 10.1).

Введем функцию $\pi_\omega : [a,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Лемма 1. *Для каждого $P_\omega(Y_0,0)$-решения дифференциального уравнения (1)*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 0 \tag{7}$$

и в случае существования (конечного или равного $\pm\infty$) $\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = -1. \tag{8}$$

Основные результаты. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что

$$\Delta_{Y_0} = \Delta_{Y_0}(b), \quad \text{где} \quad \Delta_{Y_0}(b) = \begin{cases} [b,Y_0[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} - \text{левая окрестность} \quad Y_0, \\ ]Y_0,b], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} - \text{правая окрестность} \quad Y_0, \end{cases}$$

и число b удовлетворяет неравенствам

$$|b| < 1 \quad \text{при} \quad Y_0 = 0 \quad \text{и} \quad b > 1 \quad (b < -1) \quad \text{при} \quad Y_0 = +\infty \quad (Y_0 = -\infty).$$

Положим

$$\nu_0 = \operatorname{sign} b, \quad \nu_1 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0}(b) = [b,Y_0[, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0}(b) =]Y_0,b]. \end{cases}$$

Учитывая определение $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решения дифференциального уравнения (1), заметим, что числа ν_0 и ν_1 определяют знаки любого $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решения и его первой производной (соответственно) в некоторой левой окрестности ω. При этом ясно, что условия

$$\nu_0\nu_1 = -1, \quad \text{если} \quad Y_0 = 0, \quad \nu_0\nu_1 = 1, \quad \text{если} \quad Y_0 = \pm\infty,$$

являются необходимыми для наличия $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений. Если же для таких решений уравнения (1), кроме того, выполняются условия (6), то $\operatorname{sign} y''(t) = \alpha_s$ в некоторой левой окрестности ω и при этом

$$\nu_1\alpha_s = -1, \quad \text{если} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = 0, \quad \nu_1\alpha_s = 1, \quad \text{если} \quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \pm\infty.$$

Положим при $s \in \{1,\dots,l\}$

$$H_s(y) = \int_{B_s}^{y} \frac{du}{\varphi_s(u)},$$

где

$$B_s = \begin{cases} b, \text{ если} & \int_b^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_i(y)} = \pm\infty, \\ Y_0, \text{ если} & \int_b^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_i(y)} = \text{const}. \end{cases}$$

Так как $H'_s(y) = \frac{1}{\varphi_s(y)} > 0$ при $y \in \Delta_{Y_0}(b)$, то функция H_s возрастающая на $\Delta_{Y_0}(b)$ и существует обратная функция $H_s^{-1} : \Delta_{Z_s}(c_s) \to \Delta_{Y_0}(b)$ такая, что

$$\lim_{\substack{z\to Z_s\\ z\in\Delta_{Z_s}(c_s)}} H_s^{-1}(z) = Y_0, \tag{9}$$

где

$$Z_s = \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} H_s(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad B_s = Y_0, \\ +\infty, & \text{если} \quad B_s = b < Y_0, \\ -\infty, & \text{если} \quad B_s = b > Y_0, \end{cases}$$

$$\Delta_{Z_s}(c_s) = \begin{cases} [c_s,Z_s[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0}(b) = [b,Y_0[, \\ ]Z_s,c_s], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0}(b) =]Y_0,b], \end{cases} \quad c_s = \int\limits_{B_s}^{b} \frac{du}{\varphi_s(u)}.$$

В силу представлений (4), свойств медленно меняющихся функций (см. монографию Е. Сенеты [3], гл. 1, §2, с. 15) и правила Лопиталя

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} \frac{y}{H_s(y)\varphi_s(y)} = 1 - \sigma_s. \tag{10}$$

Введем также вспомогательные функции

$$J_s(t) = \int\limits_{A_s}^{t} p_s(\tau)d\tau, \quad J_{ss}(t) = \int\limits_{A_{ss}}^{t} J_s(\tau)d\tau,$$

в которых

$$A_s = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int\limits_a^\omega p_s(\tau)d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \int\limits_a^\omega p_s(\tau)d\tau = \text{const}, \end{cases} \qquad A_{ss} = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int\limits_a^\omega J_s(\tau)d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если} \quad \int\limits_a^\omega J_s(\tau)d\tau = \text{const}. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть для некоторого* $s \in \{1,...,l\}$ *выполняется неравенство* $\sigma_s \neq 1$ *и существует конечный или равный* $\pm\infty$ *предел*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J'_s(t)}{J_s(t)}.$$

Тогда для существования у дифференциального уравнения (1) $P_\omega(Y_0,0)$*-решений, удовлетворяющих условиям (6), необходимо, чтобы*

$$\alpha_s\nu_0(1-\sigma_s)J_{ss}(t) > 0, \quad \alpha_s\nu_1\pi_\omega(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a,\omega[, \tag{11}$$

$$\alpha_s \lim_{t\uparrow\omega} J_{ss}(t) = Z_s, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J'_s(t)}{J_s(t)} = -1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{J_s^2(t)}{p_s(t)J_{ss}(t)} = 0, \tag{12}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))} = 0 \quad \textit{при любом} \quad i \in \{1,...,l\}\setminus\{s\}, \tag{13}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)(1+\delta_i)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))}=0 \quad \text{при любом} \quad i\in\{l+1,...,m\}, \tag{14}$$

где δ_i — любое число из некоторой односторонней окрестности нуля. Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$y(t)=H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{15}$$

$$y'(t)=\frac{J_s(t)H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t))}{(1-\sigma_s)J_{ss}(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{16}$$

Теорема 2. *Пусть для некоторого $s\in\{1,...,l\}$ выполняется неравенство $\sigma_s\neq 1$, справедливы условия (11)–(13) и*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)(1+u)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))}=0 \quad \text{при любом} \quad i\in\{l+1,...,m\} \tag{17}$$

равномерно по $u\in[-\delta,\delta]$ для некоторого $0<\delta<1$. Тогда у дифференциального уравнения (1) существуют $P_\omega(Y_0,0)$-решения, допускающие асимптотические представления (15) и (16), причем если $\alpha_s\nu_0(1-\sigma_s)\pi_\omega(t)<0$ при $t\in]a,\omega[$, то при $\omega=+\infty$ таких решений существует однопараметрическое семейство, а при $\omega<+\infty$ — двухпараметрическое семейство.

Доказательство теоремы 1. Пусть $y:[t_0,\omega[\to\mathbb{R}$ — произвольное $P_\omega(Y_0,0)$-решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее условиям (6). Тогда в силу (1) и (6) имеет место асимптотическое представление

$$y''(t)=\alpha_s p_s(t)\varphi_s(y(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{18}$$

Согласно свойствам правильно меняющихся функций, существует непрерывно дифференцируемая и правильно меняющаяся при $y\to Y_0$ порядка σ_s функция $\varphi_{0s}:\Delta_{Y_0}(b)\to]0,+\infty[$ такая, что

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{\varphi_s(y)}{\varphi_{0s}(y)}=1, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}}\frac{y\varphi_{0s}'(y)}{\varphi_{0s}(y)}=\sigma_s. \tag{19}$$

Поэтому для рассматриваемого решения y дифференциального уравнения (1), с учетом (18), имеем

$$\frac{y''(t)}{\varphi_{0s}(y(t))}=\alpha_s p_s(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{20}$$

Ввиду последнего из условий (5) и (19) справедливо соотношение

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_{0s}(y(t))}\right)'=\frac{y''(t)}{\varphi_{0s}(y(t))}\left[1-\frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)}\cdot\frac{y(t)\varphi_{0s}'(y(t))}{\varphi_{0s}(y(t))}\right]=$$

$$=\frac{y''(t)}{\varphi_{0s}(y(t))}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Следовательно, с учетом (20), имеем

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_{0s}(y(t))}\right)' = \alpha_s p_s(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_0 до t, получим

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{0s}(y(t))} = C + \alpha_s J_s(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где C — некоторая вещественная постоянная.

В случае, когда в функции J_s предел интегрирования $A_s = a$, $J_s(t) \to +\infty$ при $t \uparrow \omega$ и полученное соотношение представимо в виде

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{0s}(y(t))} = \alpha_s J_s(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{21}$$

Покажем, что в случае $A_s = \omega$ постоянная C равна нулю. Предположим противное, что в этом случае $C \neq 0$. Тогда $J_s(t) \to 0$ при $t \uparrow \omega$ и будем иметь

$$\varphi_{0s}(y(t)) = \left[\frac{1}{C} + o(1)\right] y'(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому ввиду (20) справедливо соотношение

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \alpha_s \left[\frac{1}{C} + o(1)\right] p_s(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

из которого следует, что

$$\ln|y'(t)| = C_1 + \frac{\alpha_s}{C} J_s(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где C_1 — некоторая постоянная. Однако этого быть не может, поскольку здесь выражение, стоящее слева, согласно определению $P_\omega(Y_0,0)$-решения, стремится к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, а справа имеет конечный предел.

Таким образом, в каждом из двух возможных случаев выбора предела интегрирования A_s получаем представление (21), из которого, с учетом (19), имеем

$$\frac{y'(t)}{\varphi_s(y(t))} = \alpha_s J_s(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{22}$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_1 до t ($t_1 \in]t_0,\omega[$), получим

$$\int\limits_{y(t_1)}^{y(t)} \frac{ds}{\varphi_s(s)} = \alpha_s \int\limits_{t_1}^{t} J_s(\tau)[1+o(1)]\, d\tau \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{23}$$

Поскольку в силу первого из условий (5) $\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0$, то из (22) ясно, что несобственные интегралы

$$\int\limits_{y(t_1)}^{Y_0} \frac{ds}{\varphi_s(s)} \quad \text{и} \quad \int\limits_{t_1}^{\omega} J_s(\tau)\, d\tau$$

сходятся или расходятся одновременно. Ввиду этого факта и выбора пределов интегрирования A_{ss} и B_s в функциях J_{ss} и H_s, соотношение (23) может быть записано в виде

$$H_s(y(t)) = \alpha_s J_{ss}(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{24}$$

Из (24) в силу первого из условий (5) и свойств функции H следует выполнение первого из условий (12).

Из соотношений (18) и (22) имеем

$$\frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \frac{\pi_\omega(t) J_s'(t)}{J_s(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому в силу соотношения (8) леммы 1 соблюдается второе из условий (12). Кроме того, из соотношения (8) леммы 1 непосредственно вытекает второе из неравенств (11).

Далее, в силу (24) имеем

$$y(t) = H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)[1 + o(1)]) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{25}$$

Здесь H_s^{-1} является правильно меняющейся функцией порядка $\frac{1}{1-\sigma_s}$ при $z \to Z_s$ как обратная для правильно меняющейся при $y \to Y_0$ функции H_s порядка $1-\sigma_s \neq 0$. Более того, в силу первого из условий (12), существует $t_2 \in [t_1,\omega[$ такое, что функция $z(t) = \alpha_s J_{ss}(t)[1 + o(1)]$ такова, что $\lim_{t\uparrow\omega} z(t) = Z_s$ и $z(t) \in \Delta_{Z_s}(c_s)$ при $t \in [t_2,\omega[$. Поэтому, с учетом свойств правильно меняющихся функций, соотношение (25) можно переписать в виде (15). Кроме того, принимая во внимание предельное соотношение (10), из (24) получим

$$\frac{y(t)}{\varphi_s(y(t))} = \alpha_s(1 - \sigma_s) J_{ss}(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{26}$$

Из (26) следует первое из условий (11). Из (22) и (26) имеем

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{J_s(t)}{(1 - \sigma_s) J_{ss}(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

откуда с учетом (15) следует (16). Кроме того, с учетом последнего предельного соотношения, из (18), (22) и последнего из условий (5) следует третье из условий (12).

Поскольку при $s \in \{1,...,l\}$ функции φ_i $(i = \overline{1,l})$ являются правильно меняющимися при $y \to Y_0$, а функция z удовлетворяет указанным выше условиям, то

$$\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)[1 + o(1)])) = \varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Тогда в силу (15) при $i \in \{1,...,l\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))[1 + o(1)]}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))[1 + o(1)]} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))},$$

откуда, с учетом (6), следует справедливость условий (13).

При $i \in \{l+1,...,m\}$ из (25), с учетом свойств функции z, имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)[1+o(1)])}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))}. \tag{27}$$

В силу монотонности функций $\varphi_i(H_s^{-1}(z))$ $(i=\overline{l+1,m})$ на промежутке $\Delta_{Z_s}(c_s)$ для любых δ_i из некоторой окрестности нуля существует $t_3 \in [t_2,\omega[$ такое, что при $t \in [t_3,\omega[$

$$\frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)[1+o(1)]))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))}\geqslant\frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)[1+\delta_i]))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))}>0,$$

откуда с учетом (6) и (27) следует справедливость условий (14). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Используя преобразование

$$H_s(y(t))=\alpha_s J_{ss}(t)[1+u_1(t)],\quad \frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{J_s(t)}{(1-\sigma_s)J_{ss}(t)}[1+u_2(t)], \tag{28}$$

сведем дифференциальное уравнение (1) к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u_1'=h_1(t)\left[\frac{G(t,u_1)}{\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)}(1+u_2)-(1+u_1)\right], \\ u_2'=h_2(t)\left[(q(t)-1)(1+u_2)-\frac{q(t)}{1-\sigma_s}(1+u_2)^2+\frac{\alpha_s(1-\sigma_s)J_{ss}(t)(1+R(t,u_1))}{G(t,u_1)}\right], \end{cases} \tag{29}$$

в которой

$$h_1(t)=\frac{J_{ss}'(t)}{J_{ss}(t)},\quad h_2(t)=\frac{p_s(t)}{J_s(t)},\quad q(t)=\frac{J_s^2(t)}{p_s(t)J_{ss}(t)},\quad G(t,u_1)=\frac{Y(t,u_1)}{\varphi_s(Y(t,u_1))},$$

$$Y(t,u_1)=H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)(1+u_1)), \tag{30}$$

$$R(t,u_1)=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{m}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(Y(t,u_1))}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(Y(t,u_1))}. \tag{31}$$

Учитывая первое из условий (12), подберем число $t_0 \in [a,\omega[$ так, чтобы при $|u_1| \leqslant \delta$

$$\alpha_s J_{ss}(t)(1+u_1)\in\Delta_{Z_s}(c_s),\quad Y(t,u_1)\in\Delta_{Y_0}(b),$$

и рассмотрим систему (29) на множестве

$$\Omega=[t_0,\omega[\times D,\quad \text{где}\quad D=\{(u_1,u_2):|u_i|\leqslant\delta,\quad i=1,2\}.$$

Тогда в силу (9) и первого из условий (12)

$$\lim_{t\uparrow\omega}Y(t,u_1)=Y_0\quad \text{равномерно по}\quad u_1\in[-\delta,\delta]. \tag{32}$$

Отсюда, с учетом (10) и вида функции G, следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{G(t,u_1)}{H_s(Y(t,u_1))}=1-\sigma_s\quad \text{равномерно по}\quad u_1\in[-\delta,\delta],$$

то есть

$$G(t,u_1) = [1 - \sigma_s + R_1(t,u_1)]H_s(Y(t,u_1))$$

и

$$\frac{1}{G(t,u_1)} = \frac{1/(1-\sigma_s) + R_2(t,u_1)}{H_s(Y(t,u_1))},$$

где функции $R_i \quad (i = 1,2)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega} R_i(t,u_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1 \in [-\delta,\delta]. \tag{33}$$

Следовательно, с учетом вида функции $Y(t,u_1)$, имеют место представления

$$G(t,u_1) = \alpha_s J_{ss}(t)[1 - \sigma_s + R_1(t,u_1)](1 + u_1), \tag{34}$$

$$\frac{1}{G(t,u_1)} = \frac{1/(1-\sigma_s) + R_2(t,u_1)}{\alpha_s J_{ss}(t)(1+u_1)}. \tag{35}$$

Кроме того, покаже, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} R(t,u_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1 \in [-\delta,\delta]. \tag{36}$$

Так как функции φ_i $(i = \overline{1,l})$ являются правильно меняющимися при $y \to Y_0$ $(y \in \Delta_{Y_0}(b))$ порядков σ_i, то в силу представлений (4), с учетом свойств медленно меняющихся функций, имеем

$$\begin{gathered}
\varphi_i(Y(t,u_1)) = \varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)(1+u_1))) = \\
= |H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)(1+u_1))|^{\sigma_i} L_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)(1+u_1))) = \\
= |H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)(1+u_1))|^{\sigma_i} L_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))(1 + r_i(t,u_1)) = \\
= \varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))(1+u_1)^{\sigma_i}(1 + r_i(t,u_1)), \quad (i = \overline{1,l}),
\end{gathered}$$

где функции r_i таковы, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_i(t,u_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1 \in [-\delta,\delta].$$

С учетом этих условий

$$\lim_{t\uparrow\omega} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{l} \frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(Y(t,u_1))}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(Y(t,u_1))} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1 \in [-\delta,\delta], \tag{37}$$

поскольку в силу условий (13)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{l} \frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(Y(t,u_1))}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(Y(t,u_1))} = \lim_{t\uparrow\omega} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{l} \frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))(1+u_1)^{\sigma_i}[1 + r_i(t,u_1)]}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))(1+u_1)^{\sigma_s}[1 + r_s(t,u_1)]} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{l} \frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s J_{ss}(t)))} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1 \in [-\delta,\delta].$$

Из (37) и (17), в силу вида функции R, следует (36).

Учитывая (31), (34) и (35), систему дифференциальных уравнений (29) запишем в виде

$$\begin{cases} u_1' = h_1(t)\left[f_1(t,u_1,u_2) + u_2 + V_1(u_1,u_2)\right], \\ u_2' = h_2(t)\left[f_2(t,u_1,u_2) - u_1 - u_2 + V_2(u_1)\right], \end{cases} \tag{38}$$

где

$$f_1(t,u_1,u_2) = (1-\sigma_s)^{-1}R_1(t,u_1)(1+u_1)(1+u_2), \quad V_1(u_1,u_2) = u_1u_2,$$

$$f_2(t,u_1,u_2) = (1-\sigma_s)R_2(t,u_1)(1+u_1)^{-1} + (1+(1-\sigma_s)R_2(t,u_1))R(t,u_1)(1+u_1)^{-1} - \\ -(1-\sigma_s)^{-1}q(t)(1+u_1)(\sigma_s+u_2), \quad V_2(u_1) = (1+u_1)^{-1} - 1 + u_1.$$

В этой системе уравнений слагаемые V_1 и V_2 удовлетворяют условиям

$$\lim_{|u_1|+|u_2|\to 0} \frac{V_1(u_1,u_2)}{|u_1|+|u_2|} = 0, \quad \lim_{u_1\to 0}\frac{V_2(u_1)}{u_1} = 0,$$

а в силу третьего из условий (12), с учетом (33) и (36),

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_i(t,u_1,u_2) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad u_1,u_2 \in [-\delta,\delta] \quad (i=1,2).$$

Кроме того,

$$\int\limits_{t_0}^{\omega} h_1(\tau)\,d\tau = \int\limits_{t_0}^{\omega} \frac{J_{ss}'(\tau)}{J_{ss}(\tau)}\,d\tau = \ln|J_{ss}(\tau)|\Big|_{t_0}^{\omega} = \pm\infty$$

и, с учетом третьего из условий (12),

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{h_1(t)}{h_2(t)} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{J_s^2(t)}{p_s(t)J_{ss}(t)} = 0.$$

Тем самым показано, что для системы (38) выполняются все условия теоремы 2.8 из работы В. М. Евтухова и А. М. Самойленко [10]. Согласно этой теореме система дифференциальных уравнений (38) имеет хотя бы одно решение $(u_1,u_2) : [t_*,\omega[\to \mathbb{R}^2$ $(t_* \geqslant t_0)$, стремящееся к нулю при $t\uparrow\omega$. Каждому такому решению системы (38), в силу замен (28), соответствует решение дифференциального уравнения (1), допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (15) и (16), причем это решение является $P_\omega(Y_0,0)$-решением уравнения (1). Более того, из этой теоремы следует, что если $\frac{J_{ss}'(t)}{J_{ss}(t)} > 0$ при $t\in]a,\omega[$ (данное условие, в силу (11), равносильно выполнению неравенства $\alpha_s\nu_0(1-\sigma_s)\pi_\omega(t) < 0$ при $t\in]a,\omega[$), то при $\omega=+\infty$ у системы (38) существует однопараметрическое семейство таких решений, а при $\omega<+\infty$ — двухпараметрическое семейство. Теорема доказана.

Пример. *Рассмотрим дифференциальное уравнение вида*

$$y'' = \alpha_1 p_1(t)|y|^\sigma + \alpha_2 p_2(t)e^{\mu y}, \tag{39}$$

в котором $\alpha_i \in \{-1,1\}$ $(i=1,2)$, $p_i : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(i=1,2)$ *— непрерывные функции,* $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, $\sigma\neq 1$, $\mu\neq 0$.

Из теорем 1 и 2 имеем

Следствие. *Пусть $\sigma \neq 1$. Тогда для существования у дифференциального уравнения (39) $P_\omega(Y_0,0)$-решений, удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = \pm\infty \quad (Y_0 = \pm\infty) \quad \text{и} \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_2(t)e^{\mu y(t)}}{p_1(t)|y(t)|^\sigma} = 0,$$

необходимо, а если

$$p_2(t) = o\left(\frac{p_1(t)|(1-\sigma)J_{11}(t)|^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}}{e^{\mu\nu_0|(1-\sigma)(\alpha_1 J_{11}(t)(1+u)+C)|^{\frac{1}{1-\sigma}}}}\right) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega$$

равномерно по $u \in [-\delta,\delta]$ для некоторого $0<\delta<1$, где

$$C = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \sigma > 1, \\ \frac{\nu_0|b|^{1-\sigma}}{1-\sigma}, & \text{если} \quad \sigma < 1, \end{cases}$$

то и достаточно, чтобы

$$\alpha_1\nu_0(1-\sigma)J_{11}(t) > 0, \quad \alpha_1\nu_1\pi_\omega(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in]a,\omega[,$$

$$\alpha_1 \lim_{t\uparrow\omega} J_{11}(t) = Z_1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J_1'(t)}{J_1(t)} = -1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{J_1^2(t)}{p_1(t)J_{11}(t)} = 0.$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$y(t) = \nu_0|(1-\sigma)J_{11}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

$$y'(t) = \frac{\nu_0 J_1(t)|(1-\sigma)J_{11}(t)|^{\frac{1}{1-\sigma}}}{(1-\sigma)J_{11}(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

причем если $\alpha_s\nu_0(1-\sigma_s)\pi_\omega(t) < 0$ при $t \in]a,\omega[$, то при $\omega = +\infty$ таких решений существует однопараметрическое семейство, а при $\omega < +\infty$ — двухпараметрическое семейство.

Заключение. В настоящей работе исследован вопрос о наличии и асимптотике медленно меняющихся решений дифференциального уравнения (1) в случае, когда в правой части уравнения (1) главным является слагаемое с правильно меняющейся при $y \to Y_0$ (Y_0 равно либо 0, либо $\pm\infty$) нелинейностью. Аналогично можно рассмотреть случай, когда в правой части несколько главных слагаемых, среди которых хотя бы одно с правильно меняющейся при $y \to Y_0$ нелинейностью.

1. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета – М. : Наука, 1985. – 144 с.
2. **Marić V.** Regular Variation and Differential Equations / V. Marić – Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000. – 128 p. – (Lecture Notes in Mathematics 1726).

3. **Касьянова В. А.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, асимптотически близкими к степенным: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / В. А. Касьянова. – Одесса, 2009. – 154 с.
4. **Евтухов В. М.** Асимптотика медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью / В. М. Евтухов, А. Г. Черникова // Нелинейные колебания. – 2016. – Т. 19, № 4. – С. 458–475.
5. **Евтухов В. М.** Асимптотическое поведение медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью / В. М. Евтухов, А. Г. Черникова // Нелинейные колебания. – 2017. – Т. 20, № 3. – С. 346–360.
6. **Евтухов В. М.** Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями / В. М. Евтухов, А. Г. Черникова // Укр. мат. журн.– 2017. – Т. 69, № 10. – С. 1345–1363.
7. **Черникова А. Г.** Асимптотика быстро изменяющихся решений дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью / А. Г. Черникова // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2015. – Т. 20, № 2. – С. 52–68.
8. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений с правильно и быстро меняющимися нелинейностями / В. М. Евтухов, Н. П. Колун // Математические методы и физико-механические поля. – 2017. – Т. 60, № 1. – С. 32–43.
9. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02 / В. М. Евтухов. – Киев, 1998. – 295 с.
10. **Евтухов В. М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Укр. мат. журн. – 2010. –Т. 62, № 1. – С. 52–80.

Колун Н. П.

Асимптотика повільно змінних розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з правильно та швидко змінними нелінійностями

Резюме

У цій роботі для диференціального рівняння другого порядку, яке містить в правій частині суму доданків з правильно та швидко змінними нелінійностями, встановлюються необхідні та достатні умови існування так званих $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків (Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$) в особливому випадку, коли параметр $\lambda_0 = 0$. При такому значенні параметра λ_0 досліджувані розв'язки є повільно змінними при $t \uparrow \omega$ ($\omega \leqslant +\infty$) функціями. Також встановлюються асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення для таких розв'язків та їх похідних першого порядку. Результати роботи отримані в припущенні, що на кожному розв'язку із класу, що розглядається, права частина досліджуваного диференціального рівняння еквівалентна при $t \uparrow \omega$ одному доданку з правильно змінною нелінійністю. Розглянуто приклад диференціального рівняння, що ілюструє отримані в роботі результати.
Ключові слова: правильно змінні функції, швидко змінні функції, нелінійні диференціальні рівняння, $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язки, асимптотика $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків, асимптотичне зображення $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків .

Kolun N. P.

Asymptotics of slowly varying solutions of second-order differential equations with regularly and rapidly varying nonlinearities.

Summary

In this paper for the second-order differential equation which has a right-hand side containing the sum of the terms with regularly and rapidly varying nonlinearities the necessary and sufficient conditions of the existence so-called $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-solutions (Y_0 is either 0, or $\pm\infty$, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$) in a special case when the parameter $\lambda_0 = 0$ are established. At this value of the parameter λ_0 researched solutions are slowly varying as $t \uparrow \omega$ ($\omega \leqslant +\infty$) functions. The asymptotic representations when $t \uparrow \omega$ for such solutions and their first-order derivatives also are established. The results of the work were obtained on the assumption that on each solution from the class under consideration the right-hand side of the differential equation being studied is equivalent when $t \uparrow \omega$ to one term with a regularly varying nonlinearity. An example of a differential equation that illustrates the results obtained in this paper is considered.

Key words: regularly varying functions, rapidly varying functions, non-linear differential equation, $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-solutions, asymptotic of $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-solutions, asymptotic representations of $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-solutions.

References

1. Seneta, E. (1985). *Pravilno menyayuschiesya funktsii [Regularly varying functions]*. M: Nauka, 144 p.

2. Maric, V. (2000). Regular Variation and Differential Equations. *Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg,*, Vol. 1726, 128.

3. Kasyanova, V. A. (2009). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy neavtonomnyih obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka s nelineynostyami, asimptoticheski blizkimi k stepennyim [Asymptotic representations of solutions of non-autonomous ordinary Differential equations of the second order with nonlinearities asymptotically close to power], *Dissertacia cand. fiz.-mat. nauk: spec. 01.01.02 "Differencial'nie uravneniya" – Dissertation of cand. phys.-math. sci.: spec. 01.01.02 "Differential equations",* 154 [in Russian].

4. Evtukhov, V. M., Chernikova, A. G. (2016). Asimptotika medlenno menyayuschihsya resheniy obyiknovennyih dvuchlennyih differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka s byistro menyayuscheysya nelineynostyu [Asymptotics of slowly varying solutions of ordinary second-order two-term differential equations with rapidly varying nonlinearity]. *Nelineynyie kolebaniya*, Vol. 19, №4, P. 458–475.

5. Evtukhov, V. M., Chernikova, A. G. (2017). Asimptoticheskoe povedenie medlenno menyayuschihsya resheniy obyiknovennyih dvuchlennyih differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka s byistro menyayuscheysya nelineynostyu [Asymptotic behavior of slowly varying solutions of second-order binomial differential equations with rapid varying nonlinearity]. *Nelineynyie kolebaniya*, Vol. 20, №3, P. 346–360.

6. Evtukhov, V. M., Chernikova, A. G. (2017). Asimptoticheskoe povedenie resheniy obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka s byistro

menyayuschimisya nelineynostyami [Asymptotic behavior of the solutions of second-order differential equations with rapidly varying nonlinearities]. *Ukr. Mat. Zh. – Ukr. Math. J.,* Vol. 69, №10, P. 1345–1363.

7. Chernikova, A. G. (2015). Asimptotika byistro izmenyayuschihsya resheniy differentsialnyih uravneniy vtorogo poryadka s byistro menyayuscheysya nelineynostyu [Asymptotics of rapidly varying solutions of second-order differential equations with rapidly varying nonlinearity]. *Vistnik Od. nats. un-tu im. Mat. i Meh.*, Vol. 20, №2, P. 52–68.
8. Evtukhov, V. M., Kolun, N. P. (2017). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy differentsialnyih uravneniy s pravilno i byistro menyayuschimisya nelineynostyami [Asymptotic representations of solutions of differential equations with regularly and rapidly varying nonlinearities]. *Matematicheskie metodyi i fiziko-mehanicheskie polya*, Vol. 60, №1, P. 32–43.
9. Evtukhov, V. M. (1998). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy neavtonomnih obiknovennih differencial'nih uravneniy [Asymptotic presentations of the solutions for the nonautonomous ordinary differential equations]. *Dissertacia d. fiz.-mat. nauk: spec. 01.01.02 "Differencial'nie uravneniya" – Dissertation of d. phys.-math. sci.: spec. 01.01.02 "Differential equations",* 295 [in Russian].
10. Evtukhov, V. M., Samoylenko, A. M. (2010). Usloviya sushestvovaniya ischezayushih v osoboy tochke resheniy u veshestvennih neavtonomnih system kvazilineynih differencial'nih uravneniy [Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point]. *Ukr. Mat. Zh. – Ukr. Math. J.,* Vol. 62, №1, P. 52–80.

УДК 517.988 : 519.633

М. В. Сидоров
Харківський національний університет радіоелектроніки

МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ І МЕТОД ПРЯМИХ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОВИМІРНОГО НАПІВЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянуто першу початково-крайову задачу для одновимірного напівлінійного рівняння теплопровідності. На основі модифікованого методу Роте на кожному часовому шарі вихідна нестаціонарна задача замінена нелінійною крайовою задачею для звичайного диференціального рівняння. Методом функцій Гріна від цієї задачі виконано перехід до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке далі розглянуто як нелінійне операторне рівняння з гетеротонним оператором у просторі неперервних функцій, напівупорядкованому конусом невід'ємних функцій. Для знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння (а отже, і узагальненого розв'язку відповідної крайової задачі) на кожному часовому шарі побудовано метод послідовних наближень з двобічним характером збіжності. Отже, у роботі для першої початково-крайової задачі для одновимірного напівлінійного рівняння теплопровідності зі змінним коефіцієнтом теплопровідності вперше побудовано напівдискретний метод її розв'язання, який базується на сумісному використанні модифікованого методу прямих Роте та методу двобічних наближень. Обчислювальний експеримент проведено для задачі з експоненціальним коефіцієнтом теплопровідності, гетеротонною степеневою нелінійністю і параболічним початковим розподілом температури.
MSC: 65M20.
Ключові слова: напівлінійне рівняння теплопровідності, додатний розв'язок, двобічні наближення .
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149705.

Вступ. Проблема математичного моделювання різноманітних біологічних та фізико-хімічних явищ і процесів приводить до необхідності розв'язання початкових або початково-крайових задач для напівлінійного параболічного рівняння вигляду [13, 20]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x,t)u = f(x,t,u). \tag{1}$$

При цьому, виходячи з сенсу функції $u(x,t)$ у тій чи іншій предметній області, природно постає задача знаходження додатного розв'язку рівняння (1).

Рівняння (1) досліджується у багатьох працях, зокрема можна відмітити роботи [2, 8, 10, 13]. Для чисельного аналізу задач для рівняння (1) використовуються скінченно-різницеві методи (метод сіток), скінченно-елементні методи та напівдискретні методи (метод прямих, або метод Роте) [6, 10, 11, 20, 21]. Метод Роте, запропонований вперше у [21], дозволяє зводити розв'язання початково-крайових задач для нестаціонарних рівнянь до розв'язання послідовності крайових задач для стаціонарних рівнянь. Його перевагою порівняно, наприклад, з сітковими методами, є відсутність умов стійкості типу Куранту—Леві. На сьогодні цей метод

Надійшла 23.09.2018

широко використовується у математичному моделюванні проблем математики та механіки [16, 17, 19, та ін.].

Метою даної роботи є розробка нового методу розв'язання першої початково-крайової задачі для рівняння (1) на основі сумісного використання модифікованого метода Роте і методу двобічних наближень. Двобічні наближені методи розв'язання нелінійних операторних рівнянь, засновані на використанні теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах, розроблялись у роботах [1, 3–5, 9, 12, 14]. Дана робота продовжує дослідження, розпочаті в [1], і розповсюджує їх на нестаціонарні рівняння.

Основні результати

1. Побудова модифікованим методом Роте напівдискретної апроксимації задачі. Розглянемо першу початково-крайову задачу для одновимірного напівлінійного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x,t)u = f(x,t,u), \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,T_0], \tag{2}$$

$$u(x,t) > 0, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,T_0], \tag{3}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T_0], \tag{4}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in (0,l). \tag{5}$$

Позначимо $\bar{Q}_{T_0} = \{(x,t)|x \in [0,l], t \in [0,T_0]\}$. Вважатимемо, що

$$p(x,t) > 0,\ q(x,t) \geqslant 0, \text{ якщо } (x,t) \in \bar{Q}_{T_0},$$

$$p(x,t),\ \frac{\partial p(x,t)}{\partial x},\ q(x,t) \text{ неперервні, якщо } (x,t) \in \bar{Q}_{T_0},$$

$$f(x,t,u) \text{ неперервна і додатна, якщо } (x,t) \in \bar{Q}_{T_0},\ u > 0,$$

$$\varphi(x) \text{ неперервна і додатна, якщо } x \in (0,l),\ \varphi(0) = \varphi(l) = 0.$$

На відрізку $[0,T_0]$ введемо часову сітку з кроком τ, яка складається з точок

$$t_j = j\tau, \quad j = 0,1,2,...,m, \quad m\tau = T_0,$$

і позначимо

$$U_j = U_j(x) = u(x,t_j), \quad j = 0,1,2,...,m.$$

Відповідно до методу прямих (методу Роте) диференціальний оператор $\frac{\partial u}{\partial t}$ в рівнянні (2) апроксимуємо відношенням скінченних різниць і розв'язок задачі (2) – (5) шукатимемо вздовж прямих $t = \mathrm{const}$.

Рівняння (2) замінимо на прямій $t = t_j$, $j = 1,2,...,m$, з похибкою $O(\tau)$ звичайним диференціальним рівнянням

$$\frac{U_j - U_{j-1}}{\tau} - \frac{d}{dx}\left(p(x,t_j)\frac{dU_j}{dx}\right) + q(x,t_j)U_j = f(x,t_j,U_j). \tag{6}$$

Зауважимо, що на відміну від оригінального методу Роте [21] у (6) нелінійність $f(x,t,u)$ апроксимується на поточному, а не на попередньому часовому шарі.

На нульовому часовому шарі відповідно початковій умові (5) покладемо

$$U_0(x) = \varphi(x).$$

Рівняння (6) розглядаються при $x \in (0,l)$. Використовуючи крайові умови (4) вихідної задачі, для кожного з рівнянь (6) поставимо першу крайову задачу.

Тоді розв'язання початково-крайової задачі (2) – (5) зводиться до розв'язання послідовності напівлінійних крайових задач

$$-\frac{d}{dx}\left(P_j(x)\frac{dU_j}{dx}\right) + Q_j(x)U_j = \frac{1}{\tau}U_{j-1} + f(x,t_j,U_j), \quad x \in (0,l), \tag{7}$$

$$U_j(x) > 0, \quad x \in (0,l), \tag{8}$$

$$U_j(0) = 0, \quad U_j(l) = 0, \tag{9}$$

$$j = 1, ..., m;$$

$$U_0(x) = \varphi(x),$$

де позначено

$$P_j(x) = p(x,t_j), \quad Q_j(x) = q(x,t_j) + \frac{1}{\tau}.$$

Зауважимо, що $Q_j(x) > 0$ на $[0,l]$ при будь-якому $\tau > 0$.

Збіжність метода Роте при $\tau \to 0$ доведена у різних класах гладких та узагальнених розв'язків для широкого класу нелінійностей у рівнянні (2) [6, 21].

Крайові задачі (7) – (9) розв'язуються послідовно. Отже, при знаходженні функції $U_j(x)$ функція $U_{j-1}(x)$ вже знайдена як розв'язок попередньої задачі, тому праву частину рівняння (7) позначимо через $F(x, U_j)$:

$$F_j(x, U_j) = \frac{1}{\tau}U_{j-1}(x) + f(x,t_j,U_j). \tag{10}$$

2. Розв'язання методом двобічних наближень задачі (7) – (9)**.** Для розв'язання кожної з задач (7) – (9) застосуємо метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна [1] і методів теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [5, 9, 15, 18].

Розглядатимемо задачу (7) – (9) для деякого фіксованого j. Нехай $G_j(x,s)$ – функція Гріна розглядуваної крайової задачі. Тоді задача еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$U_j(x) = \int_0^l G_j(x,s)F_j(s, U_j(s))ds. \tag{11}$$

Як відомо, $G(x,s) = G(s,x)$, $G(x,s) > 0$, якщо $0 < x,s < l$, і $G(x,s) = 0$, якщо $x = 0$, $s = 0$, $x = l$ чи $s = l$.

Рівняння (11) розглядатимемо у банаховому просторі $C[0,l]$ неперервних на відрізку $[0,l]$ функцій з нормою $\|U\| = \max\limits_{x\in[0,l]} |U(x)|$. У просторі $C[0,l]$ виділимо конус $\mathcal{K}_+$ невід'ємних на відрізку $[0,l]$ функцій. Конус $\mathcal{K}_+$ у $C[0,l]$ є нормальним (і навіть гострим) [5, 9, 15]. За допомогою конуса $\mathcal{K}_+$ у просторі $C[0,l]$ введемо напівупорядкованість за правилом:

$$\text{для } U,V \in C[0,l] \quad U \leqslant V, \text{ якщо } V-U \in \mathcal{K}_+,$$

тобто

$$U \leqslant V, \text{ якщо } U(x) \leqslant V(x) \text{ для всіх } x \in [0,l].$$

Шукатимемо узагальнений розв'язок $U_j(x)$ крайової задачі (7) – (9), тобто неперервний розв'язок інтегрального рівняння (11).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор T_j, що діє у $C[0,l]$ за правилом

$$T_j(U)(x) = \int_0^l G_j(x,s)F_j(s,U(s))ds. \tag{12}$$

Нехай функція $f(x,t,u)$ дозволяє діагональне подання $f(x,t,u) = \hat{f}(x,t,u,u)$, де невід'ємна функція $\hat{f}(x,t,v,w)$ є неперервною за сукупністю змінних x, t, v, w, монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $x \in (0,l)$, $t \in (0,T_0]$. Тоді діагональне подання дозволятиме і функція $F_j(x,U_j)$ вигляду (10): $F_j(x,U_j) = \hat{F}_j(x,U_j,U_j)$, де функція $\hat{F}_j(x,v,w)$ задається рівністю

$$\hat{F}_j(x,v,w) = \frac{1}{\tau}U_{j-1}(x) + \hat{f}(x,t_j,v,w). \tag{13}$$

Оскільки функція $U_{j-1}(x)$ неперервна і невід'ємна на $[0,l]$, то й $\hat{F}_j(x,v,w)$ буде неперервною за сукупністю змінних x, v, w невід'ємною функцією, яка монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $x \in (0,l)$.

Отже, оператор T_j вигляду (12) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}_j(v,w)(x) = \int_0^l G_j(x,s)\hat{F}_j(s,v(s),w(s))ds. \tag{14}$$

Оператори T_j і $\hat{T}_j$ є цілком неперервними.

Крім того, оператор T_j вигляду (12) є:

а) додатним оператором, тобто залишає інваріантним конус $\mathcal{K}_+$ (якщо $U \in \mathcal{K}_+$, то і $T_j(U) \in \mathcal{K}_+$);

б) u_0-додатним оператором з функцією $u_0^j(x)$, яка задається формулою

$$u_0^j(x) = \int_0^l G_j(x,s)ds, \tag{15}$$

якщо функція Гріна задачі (7) – (9) допускає оцінку

$$\varphi_j(s)u_0^j(x) \leqslant G_j(x,s) \leqslant \psi_j(s)u_0^j(x), \quad 0 \leqslant x,s \leqslant l, \tag{16}$$

де $\varphi_j(s)$, $\psi(s)$ – невід'ємні неперервні на $[0,l]$ функції, відмінні від тотожного нуля (u_0-додатність оператора T означає, що для будь-якого $U \in \mathcal{K}_+$ існують такі числа $\alpha = \alpha(U) > 0$, $\beta = \beta(U) > 0$, що $\alpha u_0 \leqslant T(U) \leqslant \beta u_0$);

в) гетеротонним оператором з супровідним оператором вигляду (14), якщо функція $f(x,t,u)$ дозволяє діагональне подання $f(x,t,u) = \hat{f}(x,t,u,u)$, де невід'ємна функція $\hat{f}(x,t,v,w)$ є неперервною за сукупністю змінних x, t, v, w, монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $x \in (0,l)$, $t \in (0,T_0]$;

г) псевдоувігнутим і навіть u_0-псевдоувігнутим оператором з функцією $u_0^j(x)$, яка має вигляд (13), якщо виконується умова: для всіх $v, w > 0$ і при будь-якому $\nu \in (0,1)$

$$\hat{f}\left(x,t,\nu v,\frac{1}{\nu}w\right) > \nu\hat{f}(x,t,v,w), \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,T_0]. \tag{17}$$

Позначимо через $K(u_0)$ підмножину функцій U з $\mathcal{K}_+$, для яких існують числа $\alpha, \beta > 0$ такі, що $\alpha u_0 \leqslant U \leqslant \beta u_0$. Тоді гетеротонний оператор T називається псевдоувігнутим [9], якщо для будь-яких ненульових елементів V, W з $\mathcal{K}_+$ маємо, що $\hat{T}(V,W) \in K(u_0)$, і для всіх $V, W \in K(u_0)$ та будь-якого $\nu \in (0;1)$ виконується нерівність $\hat{T}\left(\nu V, \frac{1}{\nu}W\right) > \nu\hat{T}(V,W)$. Умова u_0-псевдоувігнутості для псевдоувігнутого оператора є більш жорсткою, ніж умова просто псевдоувігнутості [9]: для всіх $V, W \in K(u_0)$ та будь-якого $\nu \in (0;1)$ існує $\eta = \eta(V,W,\nu) > 0$ таке, що має місце нерівність $\hat{T}\left(\nu V, \frac{1}{\nu}W\right) > \nu(1+\eta)\hat{T}(V,W)$.

Вважатимемо, що оператор T_j вигляду (12) є гетеротонним з супровідним оператором $\hat{T}_j$ вигляду (14). Побудуємо метод двобічних наближень знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння (11) (а отже, і крайової задачі (7) – (9)).

Для гетеротонного оператора T_j виділимо у конусі $\mathcal{K}_+$ сильно інваріантний конусний відрізок $< v_j^0, w_j^0 >$. Відповідні умови $\hat{T}_j(v_j^0,w_j^0) \geqslant v_j^0$, $\hat{T}_j(w_j^0,v_j^0) \leqslant w_j^0$ набувають вигляду

$$\int_0^l G_j(x,s)\hat{F}_j(s,v_j^0(s),w_j^0(s))ds \geqslant v_j^0(x) \text{ для всіх } x \in [0,l],$$

$$\int_0^l G_j(x,s)\hat{F}_j(s,w_j^0(s),v_j^0(s))ds \leqslant w_j^0(x) \text{ для всіх } x \in [0,l]$$

або (з урахуванням (13))

$$\varphi_j(x) + \int_0^l G_j(x,s)\hat{f}(s,t_j,v_j^0(s),w_j^0(s))ds \geqslant v_j^0(x) \text{ для всіх } x \in [0,l], \tag{18}$$

$$\varphi_j(x) + \int_0^l G_j(x,s)\hat{f}(s,t_j,w_j^0(s),v_j^0(s))ds \leqslant w_j^0(x) \text{ для всіх } x \in [0,l], \tag{19}$$

де позначено

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{\tau}\int_0^l G_j(x,s)U_{j-1}(s)ds.$$

Зауважимо, що $\varphi_j(x) > 0$ для всіх $x \in (0,l)$ і $\varphi_j(0) = \varphi_j(l) = 0$.

Сформуємо ітераційний процес за схемою $v^{(k+1)} = \hat{T}_j(v^{(k)},w^{(k)})$, $w^{(k+1)} = \hat{T}_j(w^{(k)},v^{(k)})$, $k = 0,1,2,...$, починаючи з кінців відрізка $< v_j^0, w_j^0 >$:

$$v^{(k+1)}(x) = \int_0^l G_j(x,s)\hat{F}_j(s, v^{(k)}(s), w^{(k)}(s))ds, \quad k = 0,1,2,...,$$

$$w^{(k+1)}(x) = \int_0^l G_j(x,s)\hat{F}_j(s, w^{(k)}(s), v^{(k)}(s))ds, \quad k = 0,1,2,...,$$

$$v^{(0)}(x) = v_j^0(x), \quad w^{(0)}(x) = w_j^0(x).$$

З урахуванням (13) ітераційні формули набувають вигляду

$$v^{(k+1)}(x) = \varphi_j(x) + \int_0^l G_j(x,s)\hat{f}(s, t_j, v^{(k)}(s), w^{(k)}(s))ds, \quad k = 0,1,2,..., \tag{20}$$

$$w^{(k+1)}(x) = \varphi_j(x) + \int_0^l G_j(x,s)\hat{f}(s, t_j, w^{(k)}(s), v^{(k)}(s))ds, \quad k = 0,1,2,..., \tag{21}$$

$$v^{(0)}(x) = v_j^0(x), \quad w^{(0)}(x) = w_j^0(x). \tag{22}$$

Відмітимо, що всі функції $v^{(k)}(x)$, $w^{(k)}(x)$, $k = 1,2,...$, задовольняють однорідні крайові умови: $v^{(k)}(0) = v^{(k)}(l) = 0$, $w^{(k)}(0) = w^{(k)}(l) = 0$.

Послідовність $\{v^{(k)}(x)\}$ не спадає за конусом $\mathcal{K}_+$, а послідовність $\{w^{(k)}(x)\}$ не зростає за конусом $\mathcal{K}_+$, який є нормальним, та існують границі цих послідовностей $v^*(x)$ і $w^*(x)$. Функції $v^*(x)$ і $w^*(x)$ є розв'язком системи рівнянь

$$v(x) = \varphi_j(x) + \int_0^l G_j(x,s)\hat{f}(s, t_j, v(s), w(s))ds, \tag{23}$$

$$w(x) = \varphi_j(x) + \int_0^l G_j(x,s)\hat{f}(s, t_j, w(s), v(s))ds. \tag{24}$$

Теорема 1. *Нехай $< v_j^0, w_j^0 >$ – сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора T_j вигляду* (12) *з супровідним оператором $\hat{T}_j$ вигляду* (14) *і система рівнянь* (23), (24) *не має на $< v_j^0, w_j^0 >$ розв'язків таких, що $v \neq w$. Тоді ітераційний процес* (20) – (22) *двобічно збігається у нормі простору $C[0,l]$ до единого на $< v_j^0, w_j^0 >$ неперервного додатного розв'язку $U_j^*(x)$ крайової задачі* (7) – (9).

Двобічна збіжність ітераційного процесу (20) – (22) означає виконання ланцюга нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leqslant v^{(1)} \leqslant ... \leqslant v^{(k)} \leqslant ... \leqslant U_j^* \leqslant ... \leqslant w^{(k)} \leqslant ... \leqslant w^{(1)} \leqslant w^{(0)} = w^0. \quad (25)$$

Ця теорема може бути уточнена за рахунок накладання додаткових умов, за виконання яких система рівнянь (23), (24) не має на $< v_j^0, w_j^0 >$ розв'язків таких, що $v \neq w$, і ми отримаємо умови розв'язності задач (7) – (9) для всіх $j = 1, ..., m$. Однією з таких умов є умова u_0-псевдоувігнутості оператора T_j.

Отже, справджується така теорема.

Теорема 2. *Нехай* $< v_j^0, w_j^0 >\subset K(u_0^j)$ *– сильно інваріантний конусний відрізок для гетеротонного оператора* T_j *вигляду* (12) *з супровідним оператором* $\hat{T}_j$ *вигляду* (14), $j = 1, ..., m$, *та для всіх* $v, w > 0$ *і при будь-якому* $\nu \in (0, 1)$

$$\hat{f}\left(x, t, \nu v, \frac{1}{\nu} w\right) > \nu \hat{f}(x, t, v, w), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T_0]. \quad (26)$$

Тоді при кожному j, $j = 1, ..., m$, *ітераційний процес* (20) – (22) *двобічно збігається у нормі простору* $C[0, l]$ *до единого на* $< v_j^0, w_j^0 >$ *неперервного додатного розв'язку* $U_j^*(x)$ *крайової задачі* (7) – (9).

За наближений розв'язок вихідної нестаціонарної задачі (2) – (5) на j-му часовому шарі на k-й ітерації приймаємо функцію

$$U_j^{(k)}(x) = \frac{w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x)}{2}. \quad (27)$$

Перевагою побудованого двобічного ітераційного процесу є те, що на кожній k-й ітерації ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку (27):

$$\left\| U_j^* - U_j^{(k)} \right\| \leqslant \frac{1}{2} \max_{x \in [0,l]} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)).$$

Тоді якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес розв'язання j-ї задачі, $j = 1, ..., m$, слід проводити до виконання нерівності

$$\max_{x \in [0,l]} \left| w^{(k_j)}(x) - v^{(k_j)}(x) \right| < 2\varepsilon$$

і з точністю ε можна вважати, що

$$u^*(x, t_j) = U_j^*(x) \approx U_j^{(k_j)}(x).$$

Отже, застосовуючи запропонований метод двобічних наближень до крайових задач методу прямих на кожному часовому шарі, ми отримаємо набір функцій

$$U_0(x) = \varphi(x), \quad U_1^{(k_1)}(x), \quad U_2^{(k_2)}(x), \quad \dots, \quad U_m^{(k_m)}(x). \quad (28)$$

З теореми 2 відповідно до загальних теорем збіжності метода Роте [6, 21] випливає збіжність запропонованої схеми до розв'язку задачі (2) – (5) при $\tau \to 0$.

За набором функцій (28) можна, використовуючи, наприклад, апарат теорії інтерлінації [7], побудувати наближений розв'язок задач (2) – (5) у вигляді функції $u_m(x,t)$, визначеної при всіх $x \in [0,l]$, $t \in [0,T_0]$. Цей наближений розв'язок має точність $O(\tau)$. Якщо зробити розрахунки з кроком $\frac{\tau}{2}$, то отримаємо наближений розв'язок $u_{2m}(x,t)$, який відповідно до правила Рунге можна уточнити до порядку $O(\tau^2)$ за формулою

$$u(x,t) = 2u_{2m}(x,t) - u_m(x,t).$$

Для побудови сильно інваріантного конусного відрізка $< v_j^0, w_j^0 >$ при чисельній реалізації методу двобічних наближень розв'язання задач (7) – (9) можна надати такі рекомендації.

Якщо шукати відрізок $< v_j^0, w_j^0 >$ у вигляді $v_j^0(x) = \alpha_j u_0^j(x)$, $w_j^0(x) = \beta_j u_0^j(x)$, то для визначення чисел α_j, β_j $(0 < \alpha_j < \beta_j)$ з (18), (19) отримаємо систему нерівностей

$$\alpha_j \leqslant \min_{x\in[0,l]} h_1^j(x;\alpha_j,\beta_j), \quad \beta_j \geqslant \max_{x\in[a,b]} h_2^j(x;\alpha_j,\beta_j), \tag{29}$$

де

$$h_1^j(x;\alpha_j,\beta_j) = \frac{\varphi_j(x)}{u_0^j(x)} + \int_0^l \frac{G_j(x,s)}{u_0^j(x)} \hat{f}(s,t_j,\alpha_j u_0^j(s),\beta_j u_0^j(s))ds,$$

$$h_2^j(x;\alpha_j,\beta_j) = \frac{\varphi_j(x)}{u_0^j(x)} + \int_0^l \frac{G_j(x,s)}{u_0^j(x)} \hat{f}(s,t_j,\beta_j u_0^j(s),\alpha_j u_0^j(s))ds.$$

Якщо ж функція $f(x,t,u)$ визначена при $u = 0$, то незалежно від того $f(x,t,0) > 0$ чи $f(x,t,0) = 0$, конусний відрізок $< v_j^0, w_j^0 >$ можна шукати у вигляді $v_j^0(x) = 0$, $w_j^0(x) = \beta_j$. Це приводить до нерівностей

$$\varphi_j(x) + \int_0^l G_j(x,s)\hat{f}(s,t_j,0,\beta)ds \geqslant 0 \text{ для всіх } x \in [0,l],$$

$$\varphi_j(x) + \int_0^l G_j(x,s)\hat{f}(s,t_j,\beta,0)ds \leqslant \beta \text{ для всіх } x \in [0,l],$$

перша з яких завжди виконуватиметься, а друга приводиться до вигляду

$$\max_{x\in[0,l]} \varphi_j(x) + M^j \max_{x\in[0,l]} \hat{f}(x,t_j,\beta,0) \leqslant \beta,$$

де $M^j = \max\limits_{x\in[0,l]} u_0^j(x)$.

3. Обчислювальний експеримент. Роботу запропонованого методу продемонструємо на тестовій задачі з експоненціальним коефіцієнтом теплопровідності та гетеротонною степеневою нелінійністю:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\delta x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \kappa^2 u = \lambda u^p + \mu u^{-q}, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,T_0], \tag{30}$$

$$u(x,t) > 0, \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,T_0], \tag{31}$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,T_0], \tag{32}$$

$$u\big|_{t=0} = x(l-x), \quad x \in (0,l), \tag{33}$$

де $p,q > 0$, $\lambda,\mu > 0$.

Для функції $f(x,t,u) = \lambda u^p + \mu u^{-q}$ обираємо $\hat{f}(x,t,v,w) = \lambda v^p + \mu w^{-q}$. Умова u_0-псевдоувігнутості (26), записана для функції $f(x,t,u)$, приводить до нерівності

$$\lambda\nu(\nu^{p-1}-1)v^p + \mu\nu(\nu^{q-1}-1)w^{-q} > 0,$$

яка виконуватиметься для всіх $\nu \in (0,1)$, $v,w > 0$ і для будь-яких $\lambda,\mu > 0$, якщо $0 < p < 1$, $0 < q < 1$.

Задача (7) – (9) для j-го часового шару, відповідна нестаціонарній задачі (30)–(33), матиме вигляд

$$-\frac{d}{dx}\left(e^{\delta x}\frac{dU_j}{dx}\right) + \left(\kappa^2 + \frac{1}{\tau}\right)U_j = \frac{1}{\tau}U_{j-1} + \lambda U_j^p + \mu U_j^{-q}, \quad x \in (0,l), \tag{34}$$

$$U_j(x) > 0, \quad x \in (0,l), \tag{35}$$

$$U_j(0) = 0, \quad U_j(l) = 0, \tag{36}$$

$$j = 1, ..., m;$$

$$U_0(x) = x(l-x).$$

Як відомо з теорії звичайних диференціальних рівнянь, функція Гріна $G(x,s)$ задачі

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \quad x \in (0,l),$$

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0,$$

де $p(x) \in C^1[0,l]$, $q(x), f(x) \in C[0,l]$, визначається такими умовами:

1) $G(x,s)$ задовольняє однорідне рівняння

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = 0$$

всюди, крім точки $x = s$ (ξ – довільна, але фіксована точка з $(0,l)$);

2) $G(x,s)$ задовольняє крайовим умовам $u(0) = 0$, $u(l) = 0$;

3) $G(x,s)$ неперервна за x при будь-якому фіксованому ξ;

4) має місце співвідношення

$$G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = -\frac{1}{p(s)}.$$

Доведено, що цим умовам задовольняє функція

$$G(x,s)=\begin{cases}-\frac{u_1(x)u_2(s)}{p(s)|W(s)|}, & 0\leqslant x\leqslant s,\\ -\frac{u_1(s)u_2(x)}{p(s)|W(s)|}, & s<x\leqslant l,\end{cases}$$

де $u_1(x)$ – нетривіальний розв'язок задачі $-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du_1}{dx}\right)+q(x)u_1=0$, $u_1(0)=0$, $u_2(x)$ – нетривіальний розв'язок задачі $-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du_2}{dx}\right)+q(x)u_2=0$, $u_2(l)=0$, $|W(s)|=\begin{vmatrix}u_1(s) & u_2(s)\\ u_1'(s) & u_2'(s)\end{vmatrix}$ – визначник Вронського функцій u_1, u_2.

Фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння

$$-\frac{d}{dx}\left(e^{\delta x}\frac{dU}{dx}\right)+\left(\kappa^2+\frac{1}{\tau}\right)U=0$$

утворюють функції $e^{-\frac{\delta}{2}x}I_1\left(\frac{2e^{-\frac{\delta}{2}x}\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)$ та $e^{-\frac{\delta}{2}x}K_1\left(\frac{2e^{-\frac{\delta}{2}x}\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)$, де $I_1(z)$ і $K_1(z)$ – модифіковані функції Бесселя першого і другого роду відповідно.

Крайовій умові $U(0)=0$ задовольняє функція

$$g_1(x)=e^{-\frac{\delta}{2}x}\left[\frac{K_1\left(\frac{2e^{-\frac{\delta}{2}x}\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)}{K_1\left(\frac{2\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)}-\frac{I_1\left(\frac{2e^{-\frac{\delta}{2}x}\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)}{I_1\left(\frac{2\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)}\right],$$

а крайовій умові $U(l)=0$ – функція

$$g_2(x)=e^{-\frac{\delta}{2}x}\left[\frac{I_1\left(\frac{2e^{-\frac{\delta}{2}x}\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)}{I_1\left(\frac{2e^{-\frac{\delta}{2}l}\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)}-\frac{K_1\left(\frac{2e^{-\frac{\delta}{2}x}\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)}{K_1\left(\frac{2e^{-\frac{\delta}{2}l}\sqrt{1+\tau\kappa^2}}{\delta\sqrt{\tau}}\right)}\right].$$

Якщо $|W(x)|=\begin{vmatrix}g_1(x) & g_2(x)\\ g_1'(x) & g_2'(x)\end{vmatrix}$ – визначник Вронського функцій $g_1(x)$ і $g_2(x)$, то функція Гріна задачі (34) – (36) матиме вигляд

$$G(x,s)=-\begin{cases}\dfrac{g_1(x)g_2(s)}{e^{\delta s}\,|W(s)|}, & 0\leqslant x\leqslant s,\\ \dfrac{g_1(s)g_2(x)}{e^{\delta s}\,|W(s)|}, & s\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

Шукаючи на j-му часовому шарі кінці сильно інваріантного конусного відрізка $< v_j^0, w_j^0 >$ у вигляді $v_j^0(x)=\alpha_j u_0(x)$, $w_j^0(x)=\beta_j u_0(x)$, де $u_0(x)=\int\limits_0^l G(x,s)ds$, відповідно до (29) для визначення чисел α_j, β_j $(0<\alpha_j<\beta_j)$ отримаємо систему нерівностей

$$\alpha_j\leqslant m_0^j+\lambda m_1\alpha_j^p+\mu m_2\beta_j^{-q},\quad \beta_j\geqslant M_0^j+\lambda M_1\alpha_j^p+\mu M_2\beta_j^{-q},\tag{37}$$

де

$$m_0^j = \min_{x\in[0,l]} \frac{\varphi_j(x)}{u_0(x)}, \quad M_0^j = \max_{x\in[0,l]} \frac{\varphi_j(x)}{u_0(x)},$$

$$m_1 = \min_{x\in[0,l]} \int\limits_0^l \frac{G(x,s)}{u_0(x)} u_0^p(s)ds, \quad M_1 = \max_{x\in[0,l]} \int\limits_0^l \frac{G(x,s)}{u_0(x)} u_0^p(s)ds,$$

$$m_2 = \min_{x\in[0,l]} \int\limits_0^l \frac{G(x,s)}{u_0(x)} u_0^{-q}(s)ds, \quad M_2 = \max_{x\in[0,l]} \int\limits_0^l \frac{G(x,s)}{u_0(x)} u_0^{-q}(s)ds.$$

Отже, для $\lambda, \mu > 0$ і $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ згідно з теоремою 2 на кожному часовому шарі j, $j = 1, ..., m$, ітераційний процес

$$v^{(k+1)}(x) = \varphi_j(x) + \int\limits_0^l G(x,s)\{\lambda[v^{(k)}(s)]^p + \mu[w^{(k)}(s)]^{-q}\}ds, \quad k = 0,1,2,..., \quad (38)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \varphi_j(x) + \int\limits_0^l G(x,s)\{\lambda[w^{(k)}(s)]^p + \mu[v^{(k)}(s)]^{-q}\}ds, \quad k = 0,1,2,..., \quad (39)$$

$$v^{(0)}(x) = \alpha_j u_0(x), \quad w^{(0)}(x) = \beta_j u_0(x), \quad (40)$$

де α_j, β_j $(0 < \alpha_j < \beta_j)$ є розв'язком системи нерівностей (37), двобічно збігається до функції $U_j^*(x)$, яка є наближенням за модифікованим методом Роте для функції $u(x, t_j)$.

Для проведення обчислень оберемо $l = 1$, $\delta = 1$, $\kappa = 1$, $\lambda = \mu = 1$, $p = q = \frac{1}{2}$, $T_0 = 0{,}3$. Візьмемо крок сітки за часом $\tau = 0{,}1$ і побудуємо з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ наближення $U_1(x)$ до функції $u(x,t)$ на першому часовому шарі $t = \tau$.

Знаходимо

$$\varphi_1(x) = 10 \int\limits_0^1 G(x,s)s(1-s)ds, \quad u_0(x) = \int\limits_0^1 G(x,s)ds,$$

$$m_0^1 = 1{,}4539, \quad M_0^1 = 2{,}1171, \quad m_1 = 0{,}1554,$$

$$M_1 = 0{,}1942, \quad m_2 = 5{,}2837, \quad M_2 = 8{,}5482.$$

Множину значень (α_1,β_1), що задовольняють при $j = 1$ систему нерівностей (37), наведено на рис. 1.

Для реалізації ітераційного процесу (38) – (40) обираємо $\alpha_1 = 3{,}7444$, $\beta_1 = 7{,}0503$. Для досягнення заданої точності було зроблено шість ітерацій. На рис. 2 наведено графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ (суцільна лінія) та нижніх $v^{(k)}(x)$ (штрихована лінія) наближень до $U_1^*(x)$ для $k = 0, 2, 4, 6$.

Розглядаючи відношення $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}}$, $k = 0, 1, ..., 5$, похибок $\varepsilon_k = \frac{1}{2} \max_{x\in[0,l]} (w^{(k)}(x) - -v^{(k)}(x))$, отримали, що $\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} \approx 0{,}301$. Це свідчить про геометричну швидкість збіжності ітераційної послідовності з показником 0,301.

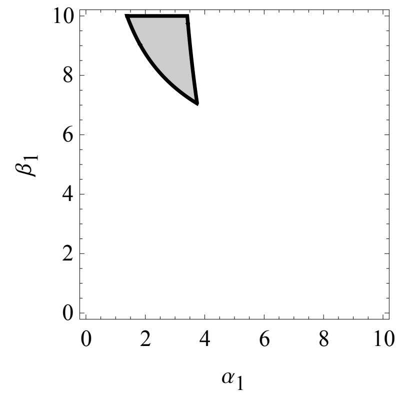

Рис. 1. Розв'язок системи нерівностей (37) при $j = 1$ ($\tau = 0{,}1$)

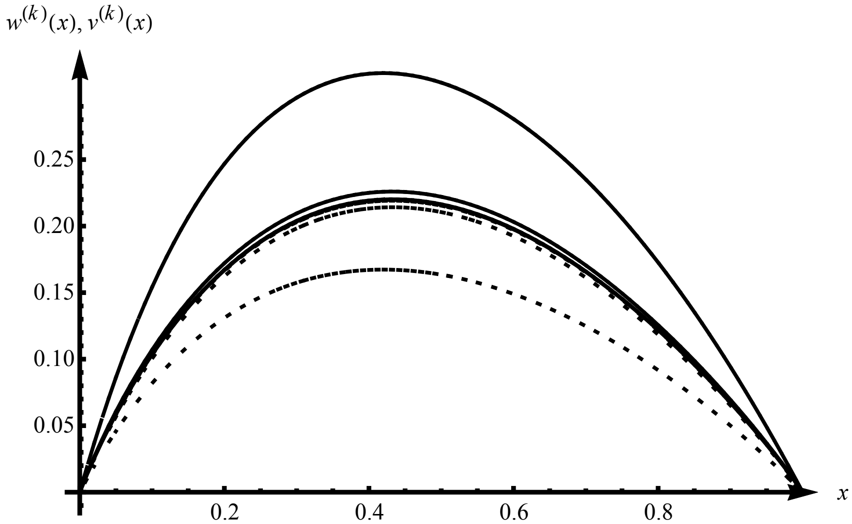

Рис. 2. Графіки верхніх $w^{(k)}(x)$ та нижніх $v^{(k)}(x)$ наближень до $U_1^*(x)$ для $k = 0, 2, 4, 6$ ($\tau = 0{,}1$)

Аналогічно було знайдено з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ наближення до $u(x,t)$ на часових шарах $t_j = 0{,}1j$ при $j = 2{,}3$. Отримані функції $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ наближають з точністю $O(\tau)$ значення $u(x,t)$ у моменти часу $t_1 = 0{,}1$, $t_2 = 0{,}2$, $t_3 = 0{,}3$ відповідно. Для їх уточнення до порядку $O(\tau^2)$ було з тією ж самою точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ отримано розв'язки $\tilde{U}_1(x)$, $\tilde{U}_2(x)$, $\tilde{U}_3(x)$, $\tilde{U}_4(x)$, $\tilde{U}_5(x)$, $\tilde{U}_6(x)$ з кроком $\tau = 0{,}05$ для відповідних моментів часу $t_1 = 0{,}05$, $t_2 = 0{,}1$, $t_3 = 0{,}15$, $t_4 = 0{,}2$, $t_5 = 0{,}25$, $t_6 = 0{,}3$. З їх допомогою значення $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ було уточнено за формулами

$$u(x{,}0{,}1) \approx 2\tilde{U}_2(x) - U_1(x), \quad u(x{,}0{,}2) \approx 2\tilde{U}_4(x) - U_2(x), \quad u(x{,}0{,}3) \approx 2\tilde{U}_6(x) - U_3(x).$$

Значення функції $u(x{,}0) = x(1-x)$ та наближень до $u(x{,}0{,}1)$, $u(x{,}0{,}2)$, $u(x{,}0{,}3)$ у точках відрізка $[0{,}1]$ з кроком 0,1 наведено у таблиці.

Таблиця

Значення наближеного розв'язку задачі (30) – (33)

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$u(x_i,0)$	0	0,09	0,16	0,21	0,24	0,25	0,24	0,21	0,16	0,09	0
$u(x_i,0,1)$	0	0,104	0,167	0,201	0,213	0,208	0,188	0,157	0,115	0,064	0
$u(x_i,0,2)$	0	0,102	0,162	0,195	0,207	0,203	0,184	0,154	0,113	0,063	0
$u(x_i,0,3)$	0	0,101	0,162	0,195	0,207	0,202	0,202	0,154	0,113	0,063	0

Висновки. Для розв'язання першої початково-крайової задачі для напівлінійного одновимірного рівняння теплопровідності зі змінним коефіцієнтом теплопровідності у роботі вперше запропоновано комбінацію модифікованого метода Роте і метода двобічних наближень на основі використання функції Гріна. Обчислювальний експеримент, проведений для задачі з експоненціальним коефіцієнтом теплопровідності та гетеротонною степеневою нелінійністю, продемонстрував можливості та ефективність метода. Запропонований метод може бути використаний при розв'язанні прикладних задач, математичними моделями яких є початково-крайові задачі вигляду (2)–(5), і розповсюджений на задачі для багатовимірних параболічних рівнянь. Перевагами запропонованого методу як методу обчислювальної математики є відсутність залежності між кроком за часом та кількістю ітерацій на кожному часовому шарі, яка у сіткових методах визначає стійкість різницевої схеми (вибір кроку за часом визначається лише необхідною точністю), та наявність зручної апостеріорної оцінки похибки на кожному часовому шарі при реалізації послідовних наближень. Цим визначається наукова новизна та практична значущість отриманих результатів.

1. **Вороненко М. Д.** Конструктивне дослідження нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь / М.Д. Вороненко, М.В. Сидоров // Радиоэлектрон. и инф. – 2018. – № 1 (80). – С. 48–54.
2. **Зельдович Я. Б.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – 2-е изд., доп. / Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер. – М.: Наука, 1966. – 686 с.
3. **Колосов А. И.** Конструктивное исследование краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений / А. И. Колосов, С. В. Колосова, М. В. Сидоров // Вісн. Запоріз. нац. у–ту. Сер.: фіз.-мат. н. – 2012. – № 2. – С. 50–57.
4. **Колосова С. В.** О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане—Эмдена / С. В. Колосова, В. С. Луханин, М. В. Сидоров // Вісн. Запоріз. нац. у–ту. Сер.: фіз.-мат. н. – 2015. – № 3. – С. 107–120.
5. **Красносельский М. А.** Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
6. **Ладыженская О. А.** Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений / О. А. Ладыженская // Тр. ММО. – 1958. – Т. 7. – С. 149–177.
7. **Литвин О. М.** Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.

8. **Маслов В. П.** Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. Эволюция диссипативных структур / В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
9. **Опойцев В. И.** Нелинейные операторы в пространствах с конусом / В. И. Опойцев, Т. А. Хуродзе. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.
10. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. – М.: Наука, 1987. – 478 с.
11. **Самарский А. А.** Численные методы математической физики. – 2-е изд. / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.
12. **Сидоров М. В.** Застосування методів функцій Гріна та квазіфункцій Гріна—Рвачова для побудови двобічних ітераційних процесів розв'язання нелінійних крайових задач / М. В. Сидоров // Вісн. Запоріз. нац. у-ту. Сер.: фіз.-мат. н. – 2017. – № 2. – С. 250–259.
13. **Франк-Каменецкий Д. А.** Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике / Д. А. Франк-Каменецкий. – М.: Интеллект, 2008. – 408 с.
14. **Шувар Б. А.** Двосторонні наближені методи / Б. А. Шувар, М. І. Копач, С. М. Ментинський, А. Ф. Обшта. – Івано-Франковськ: ВДВ ЦІТ, 2007. – 515 с.
15. **Amann H.** Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces / H. Amann // SIAM Review. – 1976. – Vol. 18. – № 4. – P. 620–709.
16. **Bartosz K.** The Rothe method for variational-hemivariational inequalities with applications to contact mechanics / K. Bartosz, M. Sofonea // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 2016. – Vol. 48. – № 2. – P. 861–883.
17. **Chaoui A.** On the solution of a fractional diffusion integrodifferential equation with Rothe time discretization / A. Chaoui, A. Hallaci // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2018. – Vol. 39. – № 6. – P. 643–654.
18. **Guo D.** Coupled fixed points of nonlinear operators with applications / D. Guo, V. Lakshmikantham // Nonlinear Anal. – 1987. – Vol. 11. – № 5. – P. 623–632.
19. **Nochetto R.** Space-time methods for time-dependent partial differential equations / R. Nochetto, S. Sauter, C. Wieners // Oberwolfach Rep. – 2017. – Vol. 14. – P. 863–947.
20. **Pao C. V.** Nonlinear parabolic and elliptic equations / C. V. Pao. – New York: Plenum Press, 1992. – 794 p.
21. **Rothe E.** Zweidimensionale parabolische randwertaufgaben als grenzfall eindimensionaler randwertaufgaben // Math. Ann. – 1930. – Vol. 102. – № 1. – P. 650–670.

Сидоров М. В.

Метод двусторонних приближений и метод прямых решения задач для одномерного полулинейного уравнения теплопроводности

Резюме

Рассмотрена первая начально-краевая задача для одномерного полулинейного уравнения теплопроводности. На основании модифицированного метода Роте на каждом временном слое исходная нестационарная задача заменена нелинейной краевой задачей для обыкновенного дифференциального уравнения. Методом функций Грина от этой задачи выполнен переход к эквивалентному интегральному уравнению Гаммерштейна, которое рассмотрено далее как нелинейное операторное уравнение с гетеротонным

оператором в пространстве непрерывных функций, полуупорядоченном конусом неотрицательных функций. Для нахождения положительного решения интегрального уравнения (а значит, и обобщенного решения соответствующей краевой задачи) на каждом временном слое построен метод последовательных приближений с двусторонним характером сходимости. Итак, в работе для первой начально-краевой задачи для одномерного полулинейного уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности впервые построен полудискретный метод её решения, основанный на совместном использовании модифицированного метода прямых Роте и метода двусторонних приближений. Вычислительный эксперимент был проведен для задачи с экспоненциальным коэффициентом теплопроводности, гетеротонной степенной нелинейностью и параболическим начальным распределением температуры.
Ключевые слова: полулинейное уравнение теплопроводности, положительное решение, двусторонние приближения .

Sidorov M. V.

Two-sided approximations method and Rothe method for solving problems for the one-dimensional semilinear heat equation

Summary

We consider the first initial-boundary problem for the one-dimensional semilinear heat equation. Based on the modified Rothe method at each time layer the original non-stationary problem is replaced by a nonlinear boundary-value problem for an ordinary differential equation. Using the Green's functions method of nonlinear boundary value problems for an ordinary differential equation, a transition to an equivalent Hammerstein integral equation is considered, which is investigated as a nonlinear operator equation with a heterotone operator in the space of continuous functions that is semiordered by a cone of non-negative functions. To find a positive solution of the integral equation (and hence a generalized solution of the corresponding boundary value problem), a method of successive approximations with a two-sided character of convergence is constructed on each time layer. Thus, in the work for the first initial-boundary value problem for the one-dimensional semilinear heat equation with a variable heat conduction coefficient, a semi-discrete method for its solution was first built, based on the combined use of the modified Rothe lines method and the two-sided approximation method. A computational experiment was carried out for a heterotone power nonlinearity problem with exponential coefficient of thermal conductivity and parabolic initial temperature distribution.
Key words: semilinear heat equation, positive solution, two-sided approximations.

References

1. Voronenko M. D., Sidorov M. V. (2018) Constructive investigation of nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations. [in Russian] // Radioelektronica i informatika, Vol. 1 (80). – P. 48–54.
2. Zel'dovich Ya. B., Raizer Yu. P. (1966) Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena [in Russian], Nauka, Moscow.
3. Kolosov A. I., Kolosova S. V., Sidorov M. V. (2012) Constructive research of boundary value problems for nonlinear differential equations. [in Russian] // Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences, Vol. 2. – P. 50–57.

4. Kolosova S. V., Lukhanin V. S., Sidorov M. V. (2015) On the construction of two-sided approximations to the positive solution of the Lane-Emden equation. [in Russian] // Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences, Vol. 3. – P. 107–120.
5. Krasnosel'skij M. A. (1962) Positive Solutions of Operator Equations [in Russian], Fizmatgiz, Moscow.
6. Ladyženskaya O. A. (1958) Solution of the first boundary problem in the large for quasilinear parabolic equations. [in Russian] // Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshestva, Vol. 7. – P. 149–177.
7. Lytvyn O. M. (2002) Interlineation of Functions and some its Applications [in Ukrainian], Osnova, Kharkiv.
8. Maslov V. P., Danilov V. G., Volosov K. A. (1987) Mathematical Modeling of Heat and Mass Transfer Processes. Evolution of Dissipative Structures [in Russian], Nauka, Moscow.
9. Opojtsev V. I., Khurodze T. A. (1984) Nonlinear Operators in Spaces with a Cone [in Russian], Izdatel'stvo Tbilisskogo Universiteta, Tbilisi.
10. Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P. (1987) Regimes with Peaking in Problems for Quasilinear Parabolic Equations [in Russian], Nauka, Moscow.
11. Samarskii A. A., Gulin A. V. (2003) Numerical Methods of Mathematical Physics [in Russian], Nauchnyj mir, Moscow.
12. Sidorov M. V. (2017) Construction two-sided iterative processes for solving nonlinear boundary value problems using methods of Green's functions and the quasi-functions of Green-Rvachev. [in Ukrainian] // Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and mathematical Sciences, Vol. 2. – P. 250–259.
13. Frank-Kamenetskii D. A. (2008) Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics [in Russian], Intellekt, Moscow.
14. Shuvar B. A., Kopach M. I., Mentins'kij S. M., Obshta A. F. (2007) Two-sided Approximates Methods [in Ukrainian], VDV CIT, Ivano-Frankovs'k.
15. Amann H. (1976) Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces // SIAM Review, Vol. 18 (4). – P. 620–709.
16. Bartosz K., Sofonea M. (2016) The Rothe method for variational-hemivariational inequalities with applications to contact mechanics // SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 48 (2). – P. 861–883.
17. Chaoui A., Hallaci A. (2018) On the solution of a fractional diffusion integrodifferential equation with Rothe time discretization // Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol. 39 (6). – P. 643–654.
18. Guo D., Lakshmikantham V. (1987) Coupled fixed points of nonlinear operators with applications // Nonlinear Anal., Vol. 11 (5). – P. 623–632.
19. Nochetto R., Sauter S., Wieners C. (2017) Space-time methods for time-dependent partial differential equations // Oberwolfach Rep., Vol. 14. – P. 863–947.
20. Pao C. V. (1992) Nonlinear parabolic and elliptic equations // New York: Plenum Press. – 794 p.
21. Rothe E. (1930) Zweidimensionale parabolische randwertaufgaben als grenzfall eindimensionaler randwertaufgaben // Math. Ann., Vol. 102 (1). – P. 650–670.

УДК 517.911.5

Н. В. Скрипник
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

СХЕМА ПОЛНОГО УСРЕДНЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С НЕЧЕТКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ В ТЕРМИНАХ R-РЕШЕНИЙ

В работах Т. А. Комлевой, А. В. Плотникова, Л. И. Плотниковой доказана возможность применения метода усреднения на конечном промежутке для дифференциальных включений с нечеткой правой частью, содержащих малый параметр в терминах множеств решений (с переходом к отдельным α-решениям при доказательстве), а в работах Н. В. Скрипник аналогичные результаты получены для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью. В дальнейшем в работах Т. А. Комлевой, А. В. Плотникова введено понятие R-решения дифференциального включения с нечеткой правой частью и обоснована возможность применения метода усреднения в терминах R-решений (без перехода к α-решений при доказательстве). В данной статье эти результаты перенесены на импульсный случай, а именно, введено понятие R-решения и обоснована возможность применения схемы полного усреднения для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью в терминах R-решений.
MSC: 03E72, 34A37, 34A60, 34C29.
Ключевые слова: нечеткие системы, дифференциальные включения, импульсы, метод усреднения, R-решение.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149706.

Введение. Нечеткие системы — очень важная тема как с теоретической точки зрения, так и с практической. Они применяются, например, в автомобильной, аэрокосмической и транспортной промышленности, в строительстве, при создании гидравлических и популяционных моделей, в сфере финансов, анализа и принятия управленческих решений, при прогнозировании разных экономических, политических, биржевых ситуаций и тому подобное. Нечеткие системы являются естественным способом моделирования динамических систем в условиях неопределенности. Формализация нечетких понятий позволяет приближенно описывать поведение систем настолько сложных, что они не поддаются точному математическому анализу. В ряде случаев такое описание является единственно возможным, так как в реальных ситуациях закономерности, ограничения, критерии выбора в большей части субъективны и точно не определены. С 1965 г., когда L. Zadeh [1] опубликовал свою новаторскую работу, были рассмотрены сотни примеров, в которых природа неопределенности в поведении системы является скорее нечеткой, нежели имеет стохастический характер.

Асимптотические методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений занимают центральное место в нелинейной механике и смежных разделах математики, механики, физики и техники. Разработка общего алгоритма, получившего название метода усреднения Крылова—Боголюбова, и теорема о близости решений точной и усредненной систем принадлежат Н. М. Крылову и Н. Н. Боголюбову [2]. В дальнейшем Н. Н. Боголюбов создал строгую теорию

Получена 20.01.2018

метода усреднения и показал, что этот метод органично связан с существованием замены переменных, позволяющей исключить время t из правых частей рассматриваемых уравнений с наперед заданной степенью точности относительно малого параметра ε, обосновал асимптотический характер приближений, получаемых методом усреднения, и установил соответствие между решениями точных и усредненных уравнений на бесконечном временном интервале.

Полученные результаты получили дальнейшее развитие в работах Ю. А. Митропольского, А. М. Самойленко, Л. Д. Акуленко, В. М. Волосова, Е. А. Гребенникова, М. А. Красносельского, С. Г. Крейна, Н. Н. Моисеева, Н. А. Перестюка, В. А. Плотникова, А. Н. Филатова, Ф. Л. Черноусько и др. для нелинейных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами, многочастотных систем, уравнений в частных производных, разностных уравнений, уравнений с разрывными правыми частями, импульсных дифференциальных уравнений, уравнений с запаздыванием, стохастических уравнений, уравнений в бесконечномерных пространствах, дифференциальных включений, дифференциальных уравнений и включений с производной Хукухары, многозначных интегральных и интегро–дифференциальных уравнений, квазидифференциальных уравнений, нечетких уравнений и включений и тому подобное (см. [3]– [18] и ссылки в них).

В данной статье рассматривается обоснование метода полного усреднения для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью на конечном промежутке в терминах R-решений.

Предварительные результаты. Введем в рассмотрение **нечеткое пространство** $\mathbb{E}^n$ отображений $u : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) u полунепрерывно сверху по Бэру, т.е. для любых $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\tilde{y},\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\|y-\tilde{y}\| < \delta$ справедливо неравенство $u(y) < u(\tilde{y})+\varepsilon$;

2) u нормально, т.е. существует вектор $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $u(y_0) = 1$;

3) u нечетко выпукло, т.е. для любых $y_1,y_2 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство $u(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \geqslant \min\{u(y_1), u(y_2)\}$;

4) замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве $\mathbb{E}^n$ является отображение

$$\hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in \mathbb{R}^n \backslash 0. \end{cases}$$

Определение 1. **α-срезкой** $[u]^\alpha$ *нечеткого множества* $u \in \mathbb{E}^n$ *называется множество* $\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) \geqslant \alpha\}$ *при* $\alpha \in (0,1]$ *и замыкание множества* $\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) > 0\}$ *при* $\alpha = 0$.

Теорема 1. [19] *Если* $u \in \mathbb{E}^n$, *то*

1) $[u]^\alpha \in conv(\mathbb{R}^n)$ *для всех* $\alpha \in [0,1]$;

2) $[u]^{\alpha_2} \subset [u]^{\alpha_1}$ *для всех* $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1$;

3) если $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– неубывающая последовательность, стремящаяся к* α, *то* $[u]^\alpha = \bigcap\limits_{k\geqslant 1} [u]^{\alpha_k}$.

Наоборот, если семейство множеств $\{A_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ *из пространства* $conv(\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет свойствам 1)–3), то существует* $u \in \mathbb{E}^n$ *такое, что* $[u]^\alpha = A_\alpha$ *для всех* $\alpha \in (0,1]$ *и* $[u]^0 = \overline{\bigcup_{0<\alpha\leqslant 1} A_\alpha} \subset A_0$.

Определим в пространстве $\mathbb{E}^n$ **метрику** $D : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}_+$, полагая

$$D(u,v) = \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} h([u]^\alpha,[v]^\alpha),$$

где $h : conv(\mathbb{R}^n) \times conv(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+-$ расстояние по Хаусдорфу.

В 1989 г. В.А.Байдосов [20, 21] и J.-P.Aubin [22] ввели понятие дифференциального включения с нечеткой правой частью:

$$\dot{x} \in F(t,x),\ x(t_0) \in X_0, \tag{1}$$

где $t \in I = [t_0,T]-$ время, $x : I \to \mathbb{R}^n-$ фазовая переменная, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}-$ производная вектор-функции $x(\cdot)$, $F : I\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n-$ нечеткое отображение, $X_0 \in \mathbb{E}^n-$ нечеткое множество начальных состояний.

Определение 2. *[23]* $\alpha-$ **решением** *включения (1) назовем абсолютно непрерывную функцию* $x : I \to \mathbb{R}^n$ *такую, что* $\dot{x}(t) \in [F(t,x(t))]^\alpha$ *почти всюду на* I *и* $x(t_0) \in [X_0]^\alpha$.

Множество всех α*-решений включения (1) в момент времени* t *обозначим* $X_\alpha(t)$. *В случае, если семейство* $\{X_\alpha(t),\ \alpha \in [0,1]\}$ *определяет нечеткое множество* $X(t)$, *то* $X(t)$ *называется* **множеством решений** *включения (1) в момент времени* t.

Вопросы существования множества $X(t)$, его свойства рассматривались в работах А. В. Плотникова, S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, P. Balasubramaniam, Y. Chalco-Cano, E. Hullermeier, V. Laksmikantham, O. Lopez-Pouso, K. K. Majumdar, R. N. Mohapatra, J. J. Nieto, J. Y. Park, D. O'Regan, H. Roman-Flores, A. A. Tolstonogov и др.

Очевидно, что семейство $\{X_\alpha(t),\ \alpha \in [0,1]\}$ может не удовлетворять условиям теоремы 1, т.е. не определять нечеткое множество $X(t)$, поэтому в работах [24, 25] введено понятие R-решения дифференциального включения с нечеткой правой частью.

Определение 3. *[24, 25] Полунепрерывное сверху нечеткое отображение* $R : I \to \mathbb{E}^n$, $R(t_0) = X_0$, *удовлетворяющее условию*

$$\lim_{\sigma\downarrow 0} \frac{1}{\sigma} \sup_{\alpha\in[0,1]} h\left([R(t+\sigma)]^\alpha, \bigcup_{x\in[R(t)]^\alpha} \left\{x + \int_t^{t+\sigma} [F(s,x)]^\alpha ds\right\}\right) = 0,$$

называется R-**решением** *дифференциального включения с нечеткой правой частью (1).*

Определение 4. *Говорят, что отображение* $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$ **вогнутозначно** *по* x, *если*

$$\beta[F(t,x)]^\alpha + (1-\beta)[F(t,y)]^\alpha \subset [F(t,\beta x + (1-\beta)y)]^\alpha$$

для любых $\alpha, \beta \in [0,1]$.

Теорема 2. [24, 25] *Пусть нечеткое отображение $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *измеримо по t при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$;*

2) *удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной λ при почти всех $t \in I$;*

3) *существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что $D(F(t,x),\hat{0}) \leqslant \gamma$ для почти всех $t \in I$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$;*

4) *вогнутозначно по x для почти всех $t \in I$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$.*

Тогда существует единственное R*-решение $R(\cdot)$ включения (1), определенное на промежутке $[t_0,t_0 + d] \subset I$.*

Многие процессы в биологии, теории управления, электронике описываются при помощи импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью [26]:

$$\dot{x} \in F(t,x),\ t \neq \tau_i,\ x(0) = x_0, \tag{2}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} \in I_i(x),$$

где $\tau_i \in I$, $i \in \overline{1,m}-$ моменты импульсов, занумерованные в возрастающем порядке, $\Delta x|_{t=\tau_i} = x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0) = x(\tau_i + 0) - x(\tau_i)-$ скачок фазового вектора в точке импульса τ_i, $I_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n-$ нечеткие отображения.

Введем в рассмотрение понятие R-решения импульсного дифференциального включения с нечеткой правой частью вида (2).

Определение 5. *Нечеткое отображение $R : I \to \mathbb{E}^n$, $R(t_0) = X_0$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) на промежутках между моментами импульсов $R(\cdot)$ полунепрерывно сверху и

$$\lim_{\sigma\downarrow 0} \frac{1}{\sigma} \sup_{\alpha\in[0,1]} h\left([R(t+\sigma)]^\alpha, \bigcup_{x\in[R(t)]^\alpha} \left\{x + \int_t^{t+\sigma} [F(s,x)]^\alpha ds\right\}\right) = 0;$$

2) $R(\cdot)$ непрерывно слева в точках импульсов τ_i и $R(\tau_i+0) = \bigcup\limits_{x\in R(\tau_i)} \{x+I_i(x)\}$

*называется R-**решением** импульсного дифференциального включения с нечеткой правой частью (2).*

Очевидно, что существование и единственность R-решения задачи (2) имеет место, если нечеткое отображение $F(t,x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 на промежутках между моментами импульсов и нечеткие отображения $I_i(x)$ ограничены, вогнутозначны и удовлетворяют условию Липшица.

В работах [27, 28] обоснована возможность применения метода усреднения на конечном промежутке для дифференциальных включений с нечеткой правой частью, содержащих малый параметр. При этом при доказательстве осуществлялся переход к отдельным α-решениям и в результате показана близость множеств решений исходного и усредненного включений. Аналогичные результаты для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью получены в работах [29–32].

В [24, 25] обоснована возможность применения метода усреднения в терминах R-решений для дифференциальных включений с нечеткой правой частью с малым параметром. В данной статье перенесем полученные в [24, 25] результаты на импульсный случай.

Основные результаты. Рассмотрим дифференциальное включение с нечеткой правой частью стандартного вида с импульсами

$$\dot{x} \in \varepsilon F(t,x),\ t \neq \tau_i,\ x(0) \in X_0, \tag{3}$$

$$\Delta x\,|_{t=\tau_i} \in \varepsilon I_i(x),$$

где $t \in \mathbb{R}_+$ — время, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовая переменная, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$, $I_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$ — нечеткие отображения, моменты импульсов τ_i занумерованы множеством натуральных чисел в возрастающем порядке.

Поставим в соответствие включению (3) следующее усредненное дифференциальное включение

$$\dot{\xi} \in \varepsilon \widetilde{F}(\xi),\ \xi(0) \in X_0, \tag{4}$$

где нечеткое отображение $\widetilde{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^n$ таково, что

$$\widetilde{F}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} D\left(\int_t^{t+T} F(t,x)dt + \sum_{t \leqslant \tau_i \leqslant t+T} I_i(x) \right). \tag{5}$$

Теорема 3. *Пусть в области $Q = \{t \geqslant 0, x \in G \subset \mathbb{R}^n\}$ выполнены следующие условия:*

1) нечеткие отображения $F(t,x), I_i(x)$ непрерывны, равномерно ограничены постоянной M, удовлетворяют по x условию Липшица с постоянной λ, вогнутозначны по x;

2) равномерно относительно t, x существует предел (5) и

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T}\, i(t,t+T) = d < \infty,$$

где $i(t,t+T)$ — количество точек последовательностей $\{t_i\}$ на промежутке $[t, t+T]$;

3) R*-решения включения (4) для всех $X_0 \subset G' \subset G$ при $t \in [0, L^*\varepsilon^{-1}]$ лежат вместе с некоторой ρ-окрестностью в области G.*

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L \in (0, L^*]$ существует такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливо следующее неравенство

$$D(R(t,\varepsilon), \widetilde{R}(t,\varepsilon)) < \eta, \tag{6}$$

где $R(t,\varepsilon), \widetilde{R}(t,\varepsilon)$ — R*-решения включений (3) и (4) соответственно, $R(0,\varepsilon) = \widetilde{R}(0,\varepsilon)$.*

Доказательство. Из условий 1) и 2) следует, что нечеткое отображение $\bar{F} : G \to \mathbb{E}^n$ равномерно ограничено постоянной $M(1+d)$ и удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\lambda(1+d)$.

Действительно,

$$D(\widetilde{F}(x),\{\hat{0}\}) \leqslant D\left(\widetilde{F}(x), \frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} I_i(x)\right) +$$

$$+D\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} I_i(x),\{\hat{0}\}\right) < \delta + \frac{1}{T}\int_t^{t+T} D(F(s,x),\{\hat{0}\})ds+$$

$$+\frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} D(I_i(x),\{\hat{0}\}) < \delta + M + dM = \delta + M(1+d);$$

$$D(\widetilde{F}(x_1),\widetilde{F}(x_2)) \leqslant D\left(\widetilde{F}(x_1),\frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x_1)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} I_i(x_1)\right) +$$

$$+D\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x_1)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} I_i(x_1), \frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x_2)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} I_i(x_2)\right) +$$

$$+D\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x_2)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} I_i(x_2), \widetilde{F}(x_2)\right) <$$

$$< 2\delta + \frac{1}{T}\int_t^{t+T} D(F(s,x_1),F(s,x_2))ds + \frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} D(I_i(x_1),I_i(x_2)) \leqslant$$

$$\leqslant 2\delta + \lambda||x_1 - x_2|| + \lambda d||x_1 - x_2|| = 2\delta + \lambda(1+d)||x_1 - x_2||,$$

где δ может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора T. Таким образом,

$$D(\widetilde{F}(x),\{\hat{0}\}) \leqslant M(1+d),\ D(\widetilde{F}(x_1),\widetilde{F}(x_2)) \leqslant \lambda(1+d)||x_1 - x_2||.$$

Кроме того, нечеткое отображение $\widetilde{F}(x)$ является вогнутозначным. Выберем произвольные $\alpha,\beta \in [0,1]$ $x,y \in G$. Тогда

$$\beta[\widetilde{F}(x)]^\alpha + (1-\beta)[\widetilde{F}(y)]^\alpha =$$

$$= \beta\left[\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,x)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} I_i(x)\right)\right]^\alpha +$$

$$+(1-\beta)\left[\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(t,y)dt + \frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} I_i(y)\right)\right]^\alpha =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} (\beta[F(t,x)]^\alpha + (1-\beta)[F(t,y)]^\alpha)dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T} (\beta[I_i(x)]^\alpha + (1-\beta)[I_i(y)]^\alpha)\right) \subset$$

$$\subset \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T}[F(t,\beta x+(1-\beta)y)]^\alpha dt+\frac{1}{T}\sum_{t\leqslant\tau_i<t+T}[I_i(\beta x+(1-\beta)y)]^\alpha\right)=$$

$$=[\widetilde{F}(\beta x+(1-\beta)y)]^\alpha.$$

В силу условий теоремы R-решения включений (3) и (4) существуют.

Для любого целого $m>1$ разобъем отрезок $[0,L\varepsilon^{-1}]$ на m равных частей точками $t_k=\frac{kL}{\varepsilon m}, k=\overline{0,m}$.

Построим нечеткие отображения $R^m(t,\varepsilon)$ и $\widetilde{R}^m(t,\varepsilon)$ такие, что

$$[R^m(t,\varepsilon)]^\alpha=\bigcup_{x\in[R^m(t_k,\varepsilon)]^\alpha}\left\{x+\varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}[F(s,x)]^\alpha ds+\varepsilon\sum_{t_k\leqslant\tau_i<t}[I_i(x)]^\alpha\right\},\ [R^m(0,\varepsilon)]^\alpha=[X_0]^\alpha,$$

$$[\widetilde{R}^m(t,\varepsilon)]^\alpha=\bigcup_{y\in[\widetilde{R}^m(t_k,\varepsilon)]^\alpha}\left\{y+\varepsilon(t-t_k)[\widetilde{F}(y)]^\alpha ds\right\},\ [\widetilde{R}^m(0,\varepsilon)]^\alpha=[X_0]^\alpha,$$

для всех $\alpha\in[0,1]$, $t\in(t_k,t_{k+1}]$, $k=\overline{0,m-1}$.

При $t\in(t_k,t_{k+1}]$ справедлива оценка

$$D\Big(R^m(t_k,\varepsilon),R^m(t,\varepsilon)\Big)=$$

$$=\sup_{\alpha\in[0,1]}h\left([R^m(t_k,\varepsilon)]^\alpha,\bigcup_{x\in[R^m(t_k,\varepsilon)]^\alpha}\left\{x+\varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}[F(s,x)]^\alpha ds+\varepsilon\sum_{t_k\leqslant\tau_i<t}[I_i(x)]^\alpha\right\}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon M(t-t_k)+\varepsilon Md(t-t_k)\leqslant\frac{ML(1+d)}{m}.$$

Аналогично

$$D\left(\widetilde{R}^m(t_k,\varepsilon),\widetilde{R}^m(t,\varepsilon)\right)\leqslant\frac{ML(1+d)}{m},$$

$$D\left(R(t_k,\varepsilon),R(t,\varepsilon)\right)\leqslant\frac{ML(1+d)}{m},$$

$$D\left(\widetilde{R}(t_k,\varepsilon),\widetilde{R}(t,\varepsilon)\right)\leqslant\frac{ML(1+d)}{m}.$$

Докажем, что

$$\lim_{m\to\infty}D\Big(R^m(t,\varepsilon),R(t,\varepsilon)\Big)=0,\quad \lim_{m\to\infty}D\Big(\widetilde{R}^m(t,\varepsilon),\widetilde{R}(t,\varepsilon)\Big)=0.$$

Пусть $t\in(t_k,t_{k+1}]$. Обозначим через $\tau_1^k,\tau_2^k,\ldots,\tau_p^k$ моменты импульсных воздействий τ_i на промежутке $[t_k,t_{k+1}]$. Тогда для всех $\alpha\in[0,1]$ имеем

$$[R(t,\varepsilon)]^\alpha=\bigcup_{x\in[R(t_k,\varepsilon)]^\alpha}\ \bigcup_{v(s)\in[F(s,y(s))]^\alpha}\left\{y(t)=x+\varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}v(s)ds\right\},\quad t_k\leqslant t\leqslant\tau_1^k,$$

$$[R(t,\varepsilon)]^\alpha = \bigcup_{x\in[R(\tau_q^k,\varepsilon)]^\alpha} \bigcup_{v(\cdot),r} \left\{ y(t) = z + \varepsilon \int_{\tau_q^k}^t v(s)ds : \quad \begin{array}{c} v(s) \in [F(s,y(s))]^\alpha, \\ z = x + \varepsilon r, \quad r \in [I_{\tau_q^k}(x)]^\alpha \end{array} \right\},$$

$$\tau_q^k < t \leqslant \tau_{q+1}^k, \quad q = \overline{1,p}.$$

Пусть $\delta_k = D\Big(R(t_k,\varepsilon), R^m(t_k,\varepsilon)\Big)$. Тогда при $t \in [t_k, \tau_1^k]$, $\alpha \in [0,1]$ получим

$$h\Big([R(t,\varepsilon)]^\alpha,[R^m(t,\varepsilon)]^\alpha\Big) =$$

$$= h\Bigg(\bigcup_{x\in[R(t_k,\varepsilon)]^\alpha} \bigcup_{v(s)\in[F(s,y(s))]^\alpha} \{y(t) = x+\varepsilon \int_{t_k}^t v(s)ds\}, \bigcup_{z\in[R^m(t_k,\varepsilon)]^\alpha} \{z+\varepsilon \int_{t_k}^t [F(s,z)]^\alpha ds\}\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x,z,v(\cdot)} \rho \left(x + \varepsilon \int_{t_k}^t v(s)ds, z + \varepsilon \int_{t_k}^t [F(s,z)]^\alpha ds \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x,z,v(\cdot)} \left(||x - z|| + \varepsilon \int_{t_k}^t \rho(v(s),[F(s,z)]^\alpha)ds \right) \leqslant$$

$$\leqslant \delta_k + \varepsilon \int_{t_k}^t \sup_{x,z,v(\cdot)} h\left([F(s,y(s))]^\alpha,[F(s,z)]^\alpha)ds\right) \leqslant$$

$$\leqslant \delta_k + \varepsilon\lambda \int_{t_k}^t \left[\sup_{x,v(\cdot)} ||y(s) - x|| + \delta_k \right] ds \leqslant \delta_k + \varepsilon\lambda \left[\varepsilon M \frac{L}{\varepsilon m} + \delta_k \right] \frac{L}{\varepsilon m} =$$

$$= \delta_k \left(1 + \frac{\lambda L}{m} \right) + \frac{\lambda M L^2}{m^2}.$$

При $t \in (t_q^k, t_q^{k+1}]$, $\alpha \in [0,1]$ имеем

$$h\Big([R(t,\varepsilon)]^\alpha,[R^m(t,\varepsilon)]^\alpha\Big) =$$

$$= h\Bigg(\bigcup_{x\in[R(t_k,\varepsilon)]^\alpha} \bigcup_{v(s)\in[F(s,y(s))]^\alpha} \left\{ y(t) = x + \varepsilon \int_{t_k}^t v(s)ds + \varepsilon \sum_{t_k \leqslant \tau_i < t} \Delta_i,\ \Delta_i \in [I_i(y(t_i))]^\alpha \right\},$$

$$\bigcup_{v\in[R^m(\tau_k,\varepsilon)]^\alpha} \left\{ v + \varepsilon \int_{\tau_k}^t [F(s,v)]^\alpha ds + \varepsilon \sum_{\tau_k \leqslant t_i < t} [I_i(v)]^\alpha \right\}\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x,v,v(\cdot)} \rho \left(x + \varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} v(s)ds + \varepsilon \sum_{t_k \leqslant \tau_i < t} \Delta_i, v + \varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} [F(s,v)]^\alpha ds + \varepsilon \sum_{t_k \leqslant \tau_i < t} [I_i(v)]^\alpha \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x,v,v(\cdot)} \left(||x - v|| + \varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} \rho(v(s),[F(s,v)]^\alpha)ds + \varepsilon \sum_{t_k \leqslant \tau_i < t} \rho(\Delta_i, [I_i(v)]^\alpha) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \delta_k + \varepsilon\lambda \int\limits_{t_k}^{t} \left(\sup_{x,v(\cdot)} ||y(s) - x|| + \delta_k \right) ds + \frac{\lambda dL}{m} \left(\sup_{x,v(\cdot)} ||y(t_i) - x|| + \delta_k \right) \leqslant$$

$$\leqslant \delta_k \left(1 + \frac{\lambda L}{m} + \frac{\lambda dL}{m} \right) + \varepsilon\lambda \frac{L}{\varepsilon m} \left(\varepsilon M \frac{L}{\varepsilon m} + \varepsilon dM \frac{L}{\varepsilon m} \right) + \frac{\lambda dL}{m} \left(\varepsilon M \frac{L}{\varepsilon m} + \varepsilon dM \frac{L}{\varepsilon m} \right) =$$

$$= \delta_k \left(1 + \frac{\lambda L(1+d)}{m} \right) + \frac{\lambda M L^2 (1+d)^2}{m^2}.$$

Тогда

$$\delta_{k+1} \leqslant \delta_k \left(1 + \frac{\lambda L(1+d)}{m} \right) + \frac{\lambda M L^2 (1+d)^2}{m^2},\ \delta_0 = 0.$$

Следовательно,

$$\delta_k \leqslant \frac{\lambda M L^2 (1+d)^2}{m^2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\lambda L(1+d)}{m} \right)^k - 1}{\frac{\lambda L(1+d)}{m}} \leqslant \frac{ML(1+d)}{m} \left(e^{\lambda L(1+d)} - 1 \right).$$

Таким образом,

$$D(R(t,\varepsilon), R^m(t,\varepsilon)) \leqslant$$
$$\leqslant D(R(t,\varepsilon),R(\tau_k,\varepsilon)) + D(R(\tau_k,\varepsilon), R^m(\tau_k,\varepsilon)) + D(R^m(\tau_k,\varepsilon),R^m(t,\varepsilon)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2ML(1+d)}{m} + \frac{ML(1+d)}{m} \left(e^{\lambda L(1+d)} - 1 \right) = \frac{ML(1+d)}{m} \left(e^{\lambda L(1+d)} + 1 \right). \tag{7}$$

Аналогично можно получить оценку

$$D\left(\widetilde{R}(t,\varepsilon),\widetilde{R}^m(t,\varepsilon) \right) \leqslant \frac{ML(1+d)}{m} \left(e^{\lambda L(1+d)} + 1 \right). \tag{8}$$

Обозначим через $\sigma_k = D(R^m(t_k,\varepsilon),\widetilde{R}^m(t_k,\varepsilon))$. При $t \in (t_k, t_{k+1}],k = \overline{0,m-1}$, $\alpha \in [0,1]$ оценим

$$h([R^m(t,\varepsilon)]^\alpha,[\widetilde{R}^m(t,\varepsilon)]^\alpha) = h\Bigg(\bigcup_{x \in [R^m(t_k,\varepsilon)]^\alpha} \Bigg\{ x + \varepsilon \int\limits_{t_k}^{t} [F(s,x)]^\alpha ds +$$

$$
+\,\varepsilon \sum_{t_k\leqslant\tau_i<t}[I_i(x)]^\alpha\Bigg\},\ \bigcup_{y\in[\widetilde{R}^m(t_k,\varepsilon)]^\alpha}\Bigg\{y+\varepsilon\int\limits_{t_k}^{t}[\widetilde{F}(y)]^\alpha ds\Bigg\}\Bigg)\leqslant
$$

$$
\leqslant\sup_{x,y}\left(||x-y||+\varepsilon h\left(\int\limits_{t_k}^{t}[F(s,x)]^\alpha ds+\sum_{t_k\leqslant\tau_i<t}[I_i(x)]^\alpha,\int\limits_{\tau_k}^{t}[\widetilde{F}(y)]^\alpha ds\right)\right)\leqslant
$$

$$
\leqslant\sup_{x,y}\left(||x-y||+\varepsilon h\left(\int\limits_{t_k}^{t}[F(s,x)]^\alpha ds+\sum_{t_k\leqslant\tau_i<t}[I_i(x)]^\alpha,\int\limits_{t_k}^{t}[F(s,y)]^\alpha ds+\sum_{t_k\leqslant\tau_i<t}[I_i(y)]^\alpha\right)+\right.
$$

$$
\left.+\varepsilon h\left(\int\limits_{t_k}^{t}[F(s,y)]^\alpha ds+\sum_{t_k\leqslant\tau_i<t}[I_i(y)]^\alpha,\int\limits_{t_k}^{t}[\widetilde{F}(y)]^\alpha ds\right)\right)\leqslant
$$

$$
\leqslant\sup_{x,y}\left(||x-y||+\varepsilon\lambda\int\limits_{t_k}^{t}||x-y||ds+\varepsilon\lambda d\frac{L}{\varepsilon m}||x-y||\right)+\varepsilon\frac{L}{\varepsilon m}\eta_1\leqslant
$$

$$
\leqslant\sigma_k\left(1+\frac{\lambda L(1+d)}{m}\right)+\frac{L\eta_1}{m}\leqslant\frac{L\eta_1}{m}\cdot\frac{\left(1+\frac{\lambda L(1+d)}{m}\right)^{k+1}-1}{\frac{\lambda L(1+d)}{m}}\leqslant
$$

$$
\leqslant\frac{\eta_1\left(e^{\lambda L(1+d)}-1\right)}{\lambda(1+d)}. \tag{9}
$$

Из (7)–(9) имеем

$$
D\Big(R(t,\varepsilon),\widetilde{R}(t,\varepsilon)\Big)\leqslant\frac{\eta_1\left(e^{\lambda L(1+d)}-1\right)}{\lambda(1+d)}+\frac{2ML(1+d)}{m}\left(e^{\lambda L(1+d)}+1\right). \tag{10}
$$

Выбирая

$$
m>\frac{4ML(1+d)\left(e^{\lambda L(1+d)}+1\right)}{\eta}\quad\text{и}\quad\eta_1<\frac{\lambda(1+d)\eta}{2(e^{\lambda L(1+d)}-1)},
$$

получим из (10) утверждение теоремы.

Замечание 1. *Если включения (3),(4) периодичны по времени, то оценка (6) принимает вид*

$$
D\Big(R(t,\varepsilon),\widetilde{R}(t,\varepsilon)\Big)\leqslant C\varepsilon.
$$

Заключение. Таким образом, в данной статье обоснована возможность применения схемы полного усреднения для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью на конечном промежутке в терминах R-решений. Полученные результаты обобщают аналогичные результаты для импульсных дифференциальных включений [11].

1. **Zadeh L.** Fuzzy sets / L. Zadeh // Inform. Control. – 1965. – № 8. – P. 338 – 353.
2. **Крылов Н.М.** Введение в нелинейную механику / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. – К.: Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.
3. **Боголюбов Н.Н.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
4. **Гребенников Е.А.** Метод усреднения в прикладных задачах / Е.А. Гребенников. – М.: Наука, 1986. – 256 с.
5. **Митропольский Ю.А.** Метод усреднения в нелинейной механике / Ю.А. Митропольский. – К.: Наукова думка, 1971. – 440 с.
6. **Митропольский Ю.А.** Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики / Ю.А. Митропольский, Г.Л. Хома. – К.: Наукова думка, 1983. – 216 с.
7. **Моисеев Н.Н.** Асимптотические методы нелинейной механики/ Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
8. **Перестюк Н.А.** Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / Н.А. Перестюк, В.А. Плотников, А.М. Самойленко, Н.В. Скрипник. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 428 с.
9. **Плотников А.В.** Дифференциальные уравнения с «четкой» и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы / А.В. Плотников, Н.В. Скрипник. – Одесса : Астропринт, 2009. – 192 с.
10. **Плотников В.А.** Метод усреднения в задачах управления / В.А. Плотников. – Киев;Одесса: Лыбидь, 1992. – 187 с.
11. **Плотников В.А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В.А. Плотников, А.В. Плотников, А.Н. Витюк. – Одесса: АстроПринт, 1999. – 354 с.
12. **Самойленко А.М.** Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк. – К.: Вища шк., 1987. – 288 с.
13. **Филатов А.Н.** Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегродифференциальных уравнений / А.Н. Филатов. – Ташкент: Фан, 1974. – 216 с.
14. **Черноусько Ф.Л.** Управление колебаниями / Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Б.Н. Соколов. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
15. **Gama R.** Stability and optimality of solutions to differential inclusions via averaging method / R. Gama, G. Smirnov // Set-Valued and Variational Analysis. – 2014. – Vol. 22, № 2. – P. 349–374.
16. **Klimchuk S.** Overview of V.A. Plotnikov 's research on averaging of differential inclusions / S. Klimchuk, A. Plotnikov, N. Skripnik // Physica D. - 2012. - Vol. 241, № 22. – P.1932 - 1947.
17. **Perestyuk N. A.** Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities (De Gruyter Studies in Mathematics: 40) / N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. V. Skripnik. - Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbHCo., 2011. - 307 p.
18. **Samoilenko A. M.** Impulsive differential equations / A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk. - Singapore: World Scientific, 1995. – 462 p.

19. **Park J. Y.** Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations / J. Y. Park, H. K. Han // Int. J. Math. Math. Sci. – 1999. – Vol. 22, № 2. – P. 271 – 279.

20. **Байдосов В. А.** Дифференциальные включения с нечеткой правой частью / В.А. Байдосов // Доклады АН СССР. – 1989. – Т. 309, № 4. – С. 781 – 783.

21. **Байдосов В. А.** Нечеткие дифференциальные включения / В. А. Байдосов // Прикл. матем. и мех. – 1990. – Т. 54, вып. 1. – С. 12 – 17.

22. **Aubin J.-P.** Fuzzy differential inclusions / J.-P. Aubin // Probl. Control Inf. Theory. – 1990. – Vol. 19, № 1. – P. 55 – 67.

23. **Hullermeier E.** An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical system / E. Hullermeier // Internat. J. Uncertainty, Fuzziness Knoeledge - Based Systems. – 1997. – №7. – P. 117 - 137.

24. **Plotnikov A.V.** A Procedure of complete averaging for fuzzy differential inclusions on a finite segment / A.V. Plotnikov // Ukrainian Math. J. – 2015. – Vol. 67, № 3. – P. 421-430. doi: 10.1007/s11253-015-1090-4

25. **Plotnikov A.V.** The averaging of fuzzy linear differential inclusions on finite interval / A.V. Plotnikov, T.A. Komleva // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B: Applications and Algorithms. - 2016. – Vol. 23, № 1. - P. 1-9.

26. **Guo M.** Impulsive functional differential inclusions and fuzzy population models / M. Guo, X. Xue, R. Li // Fuzzy sets and System. – 2003. - Vol. 138. – P. 601 -– 615.

27. **Plotnikov A.V.** The partial averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side / A.V. Plotnikov, T.A. Komleva, L.I. Plotnikova // J. Adv. Research Dyn. Control Systems. - 2010. – Vol. 2, № 2. – P. 26-34.

28. **Plotnikov A.V.** On the averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side when the average of the right-hand side is absent / A.V. Plotnikov, T.A. Komleva, L.I. Plotnikova // Iranian journal of optimization. - 2010. – Vol. 2, № 3. – P. 506-517.

29. **Скрипник Н. В.** Усреднение импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью / Н. В. Скрипник // Укр. мат. журн. – 2014. – Т.66, №11. – С. 1563–1577.

30. **Скрипник Н. В.** Схема частичного усреднения для импульсных дифференциальных включений с нечеткой правой частью / Н. В. Скрипник // Мат.студии. – 2015. – Т. 43, №2. – С. 129–139.

31. **Skripnik N.** Averaging of impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side when the average is absent / N. Skripnik // Asian-European J. Math. – Vol. 12, № 4. – 2015. – P.1550086-1–1550086-12.

32. **Skripnik N.** Step scheme of averaging method for impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side / N. Skripnik // Contemporary Methods in Mathematical Physics and Gravitation. – Vol. 1, № 1. – 2015. – P. 9–26.

Скрипник Н. В.

Схема повного усереднення імпульсних диференціальних включень з нечіткою правою частиною в термінах R-розв'язків

Резюме

В роботах Т. О. Комлєвої, А. В. Плотнікова, Л. І. Плотнікової доведено можливість застосування методу усереднення на скінченному проміжку для диференціальних включень з нечіткою правою частиною, що містять малий параметр, у термінах множин

розв'язків (з переходом до окремих α-розв'язків при доведенні), а в роботах Н. В. Скрипник аналогічні результати отримані для імпульсних диференціальних включень з нечіткою правою частиною. В подальшому в роботах Т. О. Комлєвої, А. В. Плотнікова введено поняття R-розв'язку диференціального включення з нечіткою правою частиною та обгрунтовано можливість застосування методу усереднення в термінах R-розв'язків (без переходу до α-розв'язків при доведенні). В даній статті ці результати перенесено на імпульсний випадок, а саме введено поняття R-розв'язку та обгрунтовано можливість застосування схеми повного усереднення для імпульсних диференціальних включень з нечіткою правою частиною в термінах R-розв'язків.
Ключові слова: нечіткі системи, диференціальні включення, імпульси, метод усереднення, R-розв'язок .

Skripnik N. V.

Full averaging scheme for impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side in terms of R-solutions

Summary

In the works of T. A. Komleva, A. V. Plotnikov, L. I. Plotnikova the possibility of applying the averaging method on a finite interval for differential inclusions with a fuzzy right-hand side containing a small parameter in terms of solution sets (with a transition to separate α-solutions in the proof), and in the works of N. V. Skripnik similar results were obtained for impulse differential inclusions with a fuzzy right-hand side. Later in the works of T. A. Komleva and A. V. Plotnikov the concept of R-solution of the differential inclusion with a fuzzy right-hand side was introduced and the possibility of applying the averaging method in terms of R-solutions was justified (without passing to α-solutions in the proof). In this article, these results are transferred to the impulse case, namely, the concept of R-solution is introduced and the possibility of using the full averaging scheme for impulse differential inclusions with a fuzzy right-hand side in terms of R-solutions is substantiated.
Key words: fuzzy systems, differential inclusions, impulses, averaging method, R-solution.

References

1. Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Inform. Control.*, № 8, P. 338 – 353.
2. Krylov, N. M. and N. N. Bogoliubov (1947). *Vvedenie v nelineynuyu mehaniku [Introduction to nonlinear mechanics]*. Kiev: Izd. AN USSR, 363 p.
3. Bogoliubov, N. N. and Yu. A. Mitropolsky (1974). *Asimptoticheskie metodyi v teorii nelineynyih kolebaniy [Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations]*. Moscow: Nauka, 503 p.
4. Grebennikov, Ye. A. (1986). *Metod usredneniya v prikladnyih zadachah [Averaging method in applied problems]*. Moscow: Nauka, 256 p.
5. Mitropolskiy, Yu. A. (1986). *Metod usredneniya v nelineynoy mehanike [Averaging method in nonlinear mechanics]*. Kiev: Naukova Dumka, 440 p.
6. Mitropolskiy, Yu. A. and Homa, G. L. (1983). *Matematicheskoe obosnovanie asimptoticheskih metodov nelineynoy mehaniki [Mathematical substantiation of asymptotical methods in nonlinear mechanics]*. Kiev: Naukova dumka, 216 p.
7. Moiseev, N. N. (1981). *Asimptoticheskie metody nelineynoy mehaniki [Asymptotical methods of nonlinear mechanics]*. Moscow: Nauka, 400 p.

8. Perestyuk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M. and Skripnik N.V. (2007). *Impulsnyie differentsialnyie uravneniya s mnogoznachnoy i razryivnoy pravoy chastyu [Impulsive differential equations with multivalued and discontinuous right-hand side]*, Kiev: IM NAN Ukraine, 428 p.

9. Plotnikov, A. V. and Skripnik, N. V. (2009). *Differentsialnyie uravneniya s "chetkoy" i nechetkoy mnogoznachnoy pravoy chastyu. Asimptoticheskie metody [Differential equations with "clear" and fuzzy set valued right - hand side. Asymptotical methods]*, Odessa: Astroprint, 192 p.

10. Plotnikov, V. A. (1992). *Metod usredneniya v zadachah upravleniya [Averaging method in control problems]*, Kiev - Odessa: Lybid, 187 p.

11. Plotnikov, V. A., Plotnikov, A. V. and Vityuk, A. N. (1999). *Differentsialnyie uravneniya s mnogoznachnoy pravoy chastyu. Asimptoticheskie metody [Differential equations with a multivalued right-hand side. Asymptotic methods]*, Odessa: AstroPrint, 354 p.

12. Samoilenko, A.M. and Perestyuk, N.A. (1987). *Differentsialnyie uravneniya s impulsnyim vozdeystviem [Differential equations with impulses]*, Kiev: Vischa shkola, 288 p.

13. Filatov, A. N. (1974). *Asimptoticheskie metody v teorii differentsialnyih i integro-differentsialnyih uravneniy [Asymptotical methods in the theory of differential and integro-differential equations]*, Tashkent: Fan, 216 p.

14. Chernous'ko, F. L., Akulenko, L. D. and Sokolov, B. N. (1980). *Upravleniye kolebaniyami [Control of oscillations]*, Moscow: Nauka, 384 p.

15. Gama, R. (2014). Stability and optimality of solutions to differential inclusions via averaging method. *Set-Valued and Variational Analysis*, Vol. 22, № 2, P. 349–374.

16. Klimchuk, S., Plotnikov, A. and Skripnik N. (2012). Overview of V.A. Plotnikov 's research on averaging of differential inclusions. *Physica D*, Vol. 241, № 22, P.1932 - 1947.

17. Perestyuk, N. A., Plotnikov, V. A., Samoilenko, A. M. and Skripnik N.V. (2011). *Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities (De Gruyter Studies in Mathematics: 40)*, Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbHCo., 307 p.

18. Samoilenko, A. M. and Perestyuk, N. A. (1995). *Impulsive differential equations*, Singapore: World Scientific, 462 p.

19. Park, J. Y. and Han, H. K. (1999). Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations. *Int. J. Math. Math. Sci.*, Vol. 22, № 2, P. 271 – 279.

20. Baidosov, V. A. (1990). Differentsialnyie vklyucheniya s nechetkoy pravoy chastyu [Differential inclusions with fuzzy right-hand side]. *Soviet Mathematics*, Vol. 40, № 3, P. 567–569.

21. Baidosov, V. A. (1990). Nechetkie differentsialnyie vklyucheniya [Fuzzy differential inclusions]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 54, № 1, P. 8–13.

22. Aubin, J.-P. (1990). Fuzzy differential inclusions. *Probl. Control Inf. Theory*, Vol. 19, № 1, P. 55 – 67.

23. Hullermeier, E. (1997). An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical system. *Internat. J. Uncertainty, Fuzziness Knoeledge - Based Systems*, №7, P. 117 - 137.

24. Plotnikov, A. V. (2015). A Procedure of complete averaging for fuzzy differential inclusions on a finite segment. *Ukrainian Math. J.*, Vol. 67, № 3, P. 421-430.

25. Plotnikov, A. V. and Komleva, T. A. (2016). The averaging of fuzzy linear differential inclusions on finite interval. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B: Applications and Algorithms*, Vol. 23, № 1, P. 1-9.

26. Guo, M., Xue, X. and Li, R. (2003) Impulsive functional differential inclusions and fuzzy population models. *Fuzzy sets and System*, Vol. 138, P. 601 -– 615.

27. Plotnikov, A. V., Komleva, T. A. and Plotnikova L. I. (2010). The partial averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side. *J. Adv. Research Dyn. Control Systems*, Vol. 2, № 2, P. 26-34.

28. Plotnikov, A. V., Komleva, T. A. and Plotnikova L. I. (2010). On the averaging of differential inclusions with fuzzy right-hand side when the average of the right-hand side is absent. *Iranian journal of optimization*, Vol. 2, № 3, P. 506-517.

29. Skripnik, N. V. (2015). Usrednenie impulsnyih differentsialnyih vklyucheniy s nechetkoy pravoy chastyu [Averaging of impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side]. *Ukr.Math.J.*, Vol. 66, №1 , P. 1563 - 1577.

30. Skripnik, N. V. (2015). Shema chastichnogo usredneniya dlya impulsnyih differentsialnyih vklyucheniy s nechetkoy pravoy chastyu [The scheme of partial averaging for impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side]. *Math. Studii*, Vol. 43, № 2, P. 129-139.

31. Skripnik, N. (2015). Averaging of impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side when the average is absent. *Asian-European J. Math.*, Vol. 12, № 4, P.1550086-1 - 1550086-12.

32. Skripnik, N. (2015). Step scheme of averaging method for impulsive differential inclusions with fuzzy right-hand side. *Contemporary Methods in Mathematical Physics and Gravitation*, Vol. 1, № 1, P. 9 - 26.

Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 2(32). – С. 99–107

УДК 519.651; 536.423; 538.9534

С. Ю. Ушкац, М. В. Ушкац, А. Н. Алексеев
Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

ГРУППОВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ МОДЕЛИ РЕШЕТОЧНОГО ГАЗА

Финансовая поддержка работы осуществлялась Министерством образования и науки Украины в рамках выполнения г/б НИР № 0117U000348.

В работе предлагается новый метод определения приводимых групповых интегралов высоких порядков для известной статистической модели решеточного газа на основе теоремы Коши—Адамара и недавно полученной точной информации о радиусе сходимости вириальных разложений для давления и плотности по степеням активности. По сравнению с предыдущими исследованиями (в которых весь ряд приводимых групповых интегралов определялся только на основе очень ограниченного числа неприводимых интегралов низких порядков) предложенный комбинированный метод аппроксимации приводимых групповых интегралов дает теоретические значения давления в точках насыщения и кипения существенно ближе друг к другу и к известному точному решению Ли—Янга для двумерного решеточного газа.
MSC: 41A25, 41A60, 70F45, 82B20, 82B26.
Ключевые слова: решеточный газ, вириальный ряд, групповой интеграл, теорема Коши—Адамара, радиус сходимости .
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149707.

Введение. Одной из широко использующихся в статистической механике упрощенных моделей вещества является решеточный газ, частицы которого могут занимать только строго определенные положения в пространстве (ячейки периодической пространственной решетки) без каких-либо ограничений на значения их вектора скорости. Иными словами, решеточный газ представляет собой термодинамическую систему с дискретным конфигурационным пространством и непрерывным пространством импульсов. С моделью решеточного газа формально связана и широко известная в статистической механике задача Изинга [1] (микроскопическая теория намагничивания).

Если интерес к задаче Изинга обусловлен в основном исследованиями критических явлений (фазовых переходов II рода), то модель решеточного газа предоставляет, по сути, единственный на сегодня пример строгого (т.е. без привлечения значительных «нефизических» упрощений — таких, например, как аппроксимация среднего поля [2]) статистического описания конденсации вещества (фазового перехода I рода как превращения газообразного состояния в конденсированное). Речь идет об известном решении Ли и Янга [3] для двумерного решеточного газа, в котором абсолютно «твердые» частицы притягивают только своих ближайших «соседей». Несмотря на свою значительную упрощенность, этот так называемый Square-Well потенциал (потенциал взаимодействия в виде прямоугольной ямы) относят к классу реалистичных моделей взаимодействия, т.е.

Получена 18.07.2018

таких, которые учитывают как притяжение, так и отталкивание между частицами.

С другой стороны, описанный пример касается описания только самого фазового перехода (решение Ли—Янга [3] для заданной температуры определяет только параметры перехода: давление, активность и плотность в точках насыщения и кипения) и не дает точной информации о поведении системы вне области конденсации, т.е. в газообразном и жидком состояниях.

Некоторые успехи в статистическом описании как газообразных состояний в окрестности точки насыщения, так и начала процесса конденсации непосредственно за этой точкой были достигнуты недавно на основе нового подхода к групповому разложению Майера [4] для статистической суммы в форме как приводимых [5], так и неприводимых [6, 7] групповых интегралов. К сожалению, все эти возможности пока остаются чисто теоретическими, так как определение соответствующих групповых интегралов высоких порядков все еще остается серьезной технической проблемой. Несмотря на качественно «физическое» поведение полученных теоретических изотерм, на количественном уровне уравнения с ограниченным набором известных групповых интегралов дают результаты, существенно отличающиеся от данных экспериментов или компьютерных симуляций. Если для некоторых, наиболее широко используемых, непрерывных моделей вещества (таких, например, как модели Леннард—Джонса [8], Морзе [9] и др.) уже были предложены различные аппроксимации всего бесконечного вириального ряда групповых интегралов [10, 11], то данные для решеточного газа пока остаются очень ограниченными.

Совсем недавно [12] было получено строгое выражение для активности решеточного газа в области фазового перехода и доказано, что уравнения с истинно бесконечным числом вириальных коэффициентов (групповых интегралов) должны давать точное совпадение значений давления при подходе к фазовому переходу как со стороны газообразных состояний (т.е. в точке насыщения), так и со стороны конденсированных состояний (т.е. в точке кипения). На практике же, значения давления в точках насыщения и кипения, рассчитанные на основе ограниченного числа известных групповых интегралов [13], сильно отличаются друг от друга и от точного решения Ли – Янга [3].

В данной работе предлагается совершенно новый способ определения групповых интегралов высоких порядков на основе информации про активность фазового перехода решеточного газа, который, хоть и является довольно приближенным, но приводит к значительно лучшей сходимости результатов (и существенно приближает их к точному решению Ли - Янга) по сравнению с существующими подходами.

Основные результаты

1. Определение групповых интегралов на основе теоремы Коши – Адамара. Групповое разложение Майера [4] для большого канонического ансамбля позволяет непосредственно выразить логарифм большой статистической суммы (давление P) и его производную по химическому потенциалу μ (плотность числа частиц $\rho = N/V$) в виде рядов по степеням активности $z = \lambda^{-3} \exp(\mu/k_B T)$ (где $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$ – длина волны де Бройля частиц):

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{P}{k_B T} &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \\ \rho &= \sum_{n=1}^{\infty} n b_n z^n \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Для модели решеточного газа существует формальная симметрия гамильтониана по отношению к замене частиц на «дырки» (пустые ячейки решетки) [14] и на основе этой симметрии, сравнительно недавно [15], были получены разложения для давления и плотности числа дырок $\rho' = \rho_0 - \rho$ (ρ_0 соответствует плотной упаковке)

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{P}{k_B T} &= \rho_0 \left(\tfrac{u_0}{k_B T} + \ln \tfrac{\rho_0}{\eta}\right) + \sum_{n \geqslant 1} b_n \eta^n \\ \rho &= \rho_0 - \sum_{n \geqslant 1} n b_n \eta^n \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

по степеням обратной активности

$$\eta = \frac{\rho_0^2}{z} \exp\left(\frac{2u_0}{k_B T}\right).$$

Точность обоих уравнений (1) и (2) напрямую зависит от точности определения всего бесконечного ряда приводимых групповых интегралов $\{b_n\}$ [4] для заданной температуры T. В случае приближенного или ограниченного набора этих интегралов точность уравнений (1) и (2) будет максимальной в самых разреженных ($\rho \to 0$) и наиболее плотных ($\rho \to \rho_0$) состояниях соответственно.

Недавно в работе [12] было показано, что фазовому переходу решеточного газа соответствует значение активности

$$z_0 = \rho_0 \exp\left(\frac{u_0}{k_B T}\right), \tag{3}$$

где величина u_0 определяется как потенциальная энергия одной частицы в состоянии плотной упаковки.

При $z = z_0$ активность в уравнении (1) совпадает с обратной активностью η в уравнении (2), что соответствует равенству химического потенциала в различных фазах и является одним из термодинамических условий фазового перехода (правило Максвелла). Кроме того, величина z_0 из (3) является радиусом сходимости соответствующих серий в уравнениях (1) и (2) (по степеням z и η соответственно), и оба уравнения при этом дают разрыв (скачок) плотности [5,13] при строго одинаковом давлении [12], что также отвечает известным признакам фазовых переходов I рода.

К сожалению, все эти свойства уравнений (1) и (2) на сегодня имеют только теоретическое обоснование [12], а любые практические расчеты на их основе дают результаты, существенно отличающиеся от теории. Дело в том, что в традиционном методе расчета приводимых групповых интегралов $\{b_n\}$ используются уже известные значения неприводимых групповых интегралов $\{\beta_k\}$ (вириальных коэффициентов) [4], число которых остается все еще очень ограниченным. Например, для модели решеточного газа Ли—Янга были определены (в виде точной функциональной зависимости от температуры) только неприводимые интегралы до шестого порядка (вириальные коэффициенты до седьмого порядка) [15]. В принципе, на основе такого конечного набора неприводимых интегралов $\{\beta_k\}$ можно рассчитать приводимые интегралы сколь угодно больших порядков (до тысяч и даже десятков тысяч, как это и было сделано в работе [13]), но по-настоящему точными будут при этом $\{b_n\}$ только до того же самого седьмого порядка ($n \leqslant k+1$), а значения всех остальных интегралов ($n > k+1$) будут уже очень приближенными (полученными в предположении, что все неприводимые интегралы порядков $k > 6$ просто равны нулю, что не отвечает действительности, так как они остаются просто неизвестными). Несмотря на то, что уравнения (1) и (2) с таким большим, но приближенным набором приводимых интегралов все-таки демонстрируют поведение, соответствующее теории на качественном уровне (дают скачок плотности при постоянном давлении), количественные результаты пока остаются далекими от ожидаемых (см. пунктирные линии на рис. 1: активность перехода существенно отличается от теоретической z_0, а величины постоянного давления в уравнениях (1) и (2) очень сильно отличаются как друг от друга, так и от точного решения Ли—Янга [3]). Исследования, проведенные в работе [13], показали, что с ростом порядка известных групповых интегралов расчетные изотермы постепенно приближаются к точному решению, но эта сходимость на практике оказалась очень медленной.

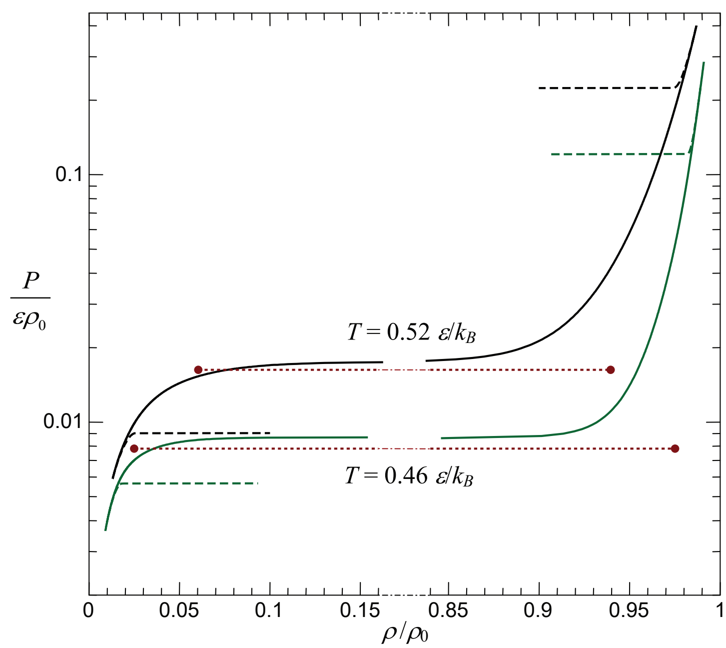

Рис 1. Изотермы уравнений (1) (слева) и (2) (справа) модели решеточного газа Ли—Янга с приводимыми интегралами до порядка $n = 10000$, рассчитанными только на основе первых шести неприводимых интегралов (пунктир) и с использованием уравнения (5) (сплошная линия). Точки соответствуют точным параметрам фазового перехода [3]

С другой стороны, точная информация о радиусе сходимости рядов по степеням активности (или обратной активности) предоставляет возможность определения групповых интегралов $\{b_n\}$ (как степенных коэффициентов этих рядов) очень высоких порядков абсолютно независимо от информации о неприводимых интегралах. В книге Майеров [4], как и в других работах [5–7, 12], связанных с групповым разложением статистической суммы, показано, что активность фазового перехода является в точности точкой сингулярности ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n z^n. \tag{4}$$

Несмотря на то, что ряды для плотности $\left(\sum n b_n z^n\right)$ и давления $\left(\sum b_n z^n\right)$ в (1) и (2) тоже должны расходиться непосредственно справа от сингулярности ряда (4) (благодаря тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$), уравнение (3) должно выражать точный радиус сходимости именно для ряда (4) или ряда $\sum n^2 b_n z^{n-1}$, где степень активности уменьшена на единицу с целью сделать ряд безразмерным. Тогда согласно теореме Коши—Адамара [16],

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^2 b_n\right) = z_0^{-(n-1)},$$

что, в свою очередь, позволяет определить приводимый групповой интеграл достаточно высокого порядка n:

$$b_n \approx n^{-2} z_0^{-(n-1)}. \tag{5}$$

2. Результаты расчетов для модели решеточного газа Ли—Янга. Для определения достаточно большого ряда приводимых групповых интегралов $\{b_n\}$ решеточного газа (с целью использования их в расчетах изотерм с помощью уравнений (1) и (2) со стороны газообразных и конденсированных состояний соответственно) использовались два различных подхода: как традиционный, так и основанный на уравнении (5).

«Традиционный» подход означает вычисление приводимого интеграла любого порядка n на основе известного ряда неприводимых интегралов $\{\beta_k\}$ с помощью недавно полученного рекурсивного соотношения [5, 13]:

$$n^2 b_n = B_{n,n-1}, \tag{6}$$

где

$$B_{n,i} = n \sum_{k=1}^{i} \frac{k}{i} \beta_k B_{n,i-k}.$$

Другой подход заключался в том, что с помощью рекурсивного соотношения (6) вычислялись приводимые интегралы только до порядка, соответствующего набору известных неприводимых интегралов ($n \leqslant k+1$), а значения приводимых интегралов всех более высоких порядков определялись уже уравнением (5) (т. е. на основе теоремы Коши—Адамара).

Изотермы уравнений (1) и (2) с различными наборами приводимых групповых интегралов модели решеточного газа Ли—Янга $\{b_n\}$ до $n = 10000$ для двух докритических температур представлены на Рис. 1. Пунктиром показаны изотермы, где весь набор приводимых интегралов определялся рекурсивным соотношением (6) на основе набора первых шести неприводимых интегралов $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6\}$. Сплошная линия соответствует набору $\{b_n\}$, где на основе того же набора неприводимых интегралов определялись только $\{b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$, а все остальные (до $n = 10000$) — с использованием уравнения (5). На этом же рисунке горизонтальные отрезки показывают точное решение Ли—Янга [3] для рассмотренных температур.

Наблюдаемая разница в поведении изотерм по мере приближения к области фазового перехода является принципиальной. Изотермы уравнений (1) и (2) с набором приводимых интегралов, для определения которых использовалось уравнение (5), хоть и не совпадают с решением Ли—Янга в точности, но дают значения давления при фазовом переходе принципиально более близкие друг к другу и к точному решению по сравнению с изотермами, где весь набор $\{b_n\}$ определялся с помощью соотношения (6).

Эти результаты вполне объяснимы: уравнение (5), по сути, гарантирует расходимость рядов по степеням активности в (1) и (2) (т.е. скачок плотности или фазовый переход) при значении активности z_0 из (3), которое в точности соответствует решению Ли—Янга. С учетом того, что хотя бы несколько первых приводимых интегралов также определены точно, совсем не удивительно, что значения давления и плотности в точках насыщения и кипения тоже оказываются близки к точному решению.

С другой стороны, не такие существенные как полученные ранее (при «традиционном» определении групповых интегралов), но все еще заметные отличия от точного решения тоже довольно легко объяснимы: в наборе $\{b_n\}$ теперь точно определяются только несколько первых интегралов и асимптотические значения интегралов очень высоких порядков, в то время как значения $\{b_n\}$ «средних» порядков задаются очень приблизительно (в абсолютно необоснованном предположении, что они должны определяться тем же асимптотическим выражением (5), что и интегралы высоких порядков).

Заключение.

В работе показано, как установленная недавно [12] для модели решеточного газа точная информация о радиусе сходимости [см. уравнение (3)] вириальных рядов по степеням активности и обратной активности [см. уравнения (1) и (2)] позволяет определить приводимые групповые интегралы $\{b_n\}$ высоких порядков без использования каких-либо дополнительных данных [см. уравнение (5)].

Непосредственные расчеты показали, что уравнения состояния решеточного газа с определенным таким образом [т.е. с использованием уравнения (5)] набором приводимых интегралов принципиально точнее описывают состояния, близкие к фазовому переходу (в окрестностях точек насыщения и кипения), по сравнению с уравнениями, где весь набор интегралов $\{b_n\}$ (на практике, просто большой набор) определяется только на основе ограниченного набора известных неприводимых интегралов (вириальных коэффициентов).

Несмотря на то, что предложенный метод определения приводимых интегралов все еще является приближенным (по сути, точно определяются только несколько первых приводимых интегралов и интегралы самых высоких порядков), он может иметь большие перспективы для дальнейшего развития и уточнения.

Важным является уже сам факт того, что при определении вириального ряда существуют возможности «двигаться» одновременно с двух направлений: как со стороны низких порядков, так и бесконечных. В перспективе дальнейшее повышение точности становится возможным уже только за счет более «реалистичных» аппроксимаций групповых интегралов «средних» порядков. Кроме того, несмотря на то, что в данной работе рассматривались исключительно уравнения с приводимыми групповыми интегралами, некоторые дополнительные возможности могут открыться при исследовании соответствующей асимптотики строго связанных с ними неприводимых интегралов (или вириальных коэффициентов).

Также можно отметить то, что представленные в работе результаты относятся пока только к специфической модели двумерного решеточного газа, для которой существует точное решение Ли—Янга, хотя сами по себе базовые уравнения (3) и (5) остаются абсолютно применимыми и для более сложных моделей, а это, в свою очередь, тоже открывает дополнительные перспективы для дальнейших исследований.

1. **Ising E.** Contribution to the Theory of Ferromagnetism / E. Ising // Z. Phys. – 1925. – V. 31 – P. 253–258.
2. **Lebowitz J. L.** Rigorous Treatment of the Van Der Waals-Maxwell Theory of the Liquid-Vapor Transition / J. L. Lebowitz, O. Penrose // Journal of Mathematical Physics – 1966. – V. 7, №. 1 – P. 98-113.
3. **Lee T. D.** Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model / T. D. Lee, C. N. Yang // Phys. Rev. – 1952. – V. 87, №. 3 – P. 410–419.
4. **Mayer J. E.** Statistical Mechanics / J. E. Mayer, M. G. Mayer – N.–Y.: John Wiley, 1977. – 544 p.
5. **Ushcats M. V.** Divergence of activity expansions: Is it actually a problem? / M. V. Ushcats, L. A. Bulavin, V. M. Sysoev, S. Y. Ushcats // Phys. Rev. E – 2017. – V. 96, №. 6 – P. 062115(4).
6. **Ushcats M. V.** Equation of State Beyond the Radius of Convergence of the Virial Expansion / M. V. Ushcats // Phys. Rev. Lett. – 2012. – V. 109, №. 4 – P. 040601(4).
7. **Ushcats M. V.** Statistical theory of condensation – Advances and challenges / M. V. Ushcats, L. A. Bulavin, V. M. Sysoev, V. Yu. Bardik, A. N. Alekseev // Journal of Molecular Liquids – 2016. – V. 224, Part A – P. 694 - 712.
8. **Lennard-Jones J. E.** On the Determination of Molecular Fields. I. From the Equation of State of a Gas / J. E. Lennard-Jones // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science – 1924. – V. 106, №. 738 – P. 463-477.
9. **Morse P. M.** Diatomic Molecules According to the Wave Mechanics. II. Vibrational Levels / P. M. Morse // Phys. Rev. – 1929. – V. 34, №. 1 – P. 57–64.
10. **Ushcats M. V.** Communication: Low-temperature approximation of the virial series for the Lennard-Jones and modified Lennard-Jones models / M. V. Ushcats // The Journal of Chemical Physics – 2014. – V. 141, №. 10 – P. 101103(4).
11. **Ushcats M. V.** Virial coefficients of Morse potential / M. V. Ushcats, S. Y. Ushcats, A. A. Mochalov // Ukrainian Journal of Physics – 2016. – V. 61, №. 2 – P. 160-167.

12. **Ushcats M. V.** Evidence for the first-order phase transition at the divergence region of activity expansions / M. V. Ushcats, L. A. Bulavin // Phys. Rev. E – 2018. – (submitted).

13. **Ushcats M. V.** Lattice gas condensation and its relation to the divergence of virial expansions in the powers of activity / M. V. Ushcats, L. A. Bulavin, V. M. Sysoev, S. Y. Ushcats // Ukrainian Journal of Physics – 2017. – V. 62, №. 6 – P. 533-538.

14. **Ushcats M. V.** High-density equation of state for a lattice gas / M. V. Ushcats // Phys. Rev. E – 2015. – V. 91, №. 5 – P. 052144(4).

15. **Ushcats M. V.** Virial and high-density expansions for the Lee-Yang lattice gas / M. V. Ushcats, L. A. Bulavin, V. M. Sysoev, S. Y. Ushcats // Phys. Rev. E – 2016. – V. 94, №. 1 – P. 012143(5).

16. **Hadamard J.** Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor / J. Hadamard // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées – 1892. – V. 8, №. 4 – P. 101-186.

Ушкац С. Ю., Ушкац М. В., Алексеев О. М.
Групові інтеграли високих порядків для моделі ґраткового газу

Резюме

У роботі запропоновано новий метод визначення звідних групових інтегралів високих порядків для відомої статистичної моделі ґраткового газу на основі теореми Коші—Адамара та нещодавно отриманої точної інформації стосовно радіуса збіжності віріальних розкладів для тиску й густини за степенями активності. У порівнянні з попередніми дослідженнями (в яких увесь ряд звідних групових інтегралів визначався лише на основі дуже обмеженого числа незвідних інтегралів низьких порядків) запропонований комбінований метод апроксимації звідних групових інтегралів дає теоретичні значення тиску в точках насичення й кипіння суттєво ближчі одне до одного та до розв'язку Лі—Янга для двовимірного ґраткового газу.
Ключові слова: ґратковий газ, віріальний ряд, груповий інтеграл, теорема Коші—Адамара, радіус збіжності .

Ushcats S. Y., Ushcats M. V., Alekseev A. N.
High-order cluster integrals for the lattice-gas model

Summary

In the paper, for the known statistical lattice-gas model, a new method is proposed to define the high-order reducible cluster integrals on the basis of the Cauchy–Hadamard theorem and recently established strict information about the convergence radius of the virial expansions for pressure and density in powers of activity. Compared with previous studies (where the whole set of reducible cluster integrals were evaluated on the basis of the extremely limited number of low-order irreducible integrals), the proposed complex method to approximate the reducible cluster integrals yields the theoretical values of pressure at the saturation and boiling points considerably close to each other as well as to the Lee–Yang solution for the two-dimensional lattice gas.
Key words: lattice gas, virial series, cluster integral, Cauchy-Hadamard theorem, radius of convergence .

References

1. Ising, E. (1925). Contribution to the Theory of Ferromagnetism. *Z. Phys.*, Vol. 31, P. 253–258.
2. Lebowitz, J. L., Penrose, O. (1966). Rigorous Treatment of the Van Der Waals-Maxwell Theory of the Liquid-Vapor Transition. *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 7, №. 1, P. 98-113.
3. Lee, T. D., Yang, C. N. (1952). Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model. *Phys. Rev.*, Vol. 87, №. 3, P. 410–419.
4. Mayer, J. E. (1977). *Statistical Mechanics* New-York: John Wiley, 544 p.
5. Ushcats, M. V., Bulavin, L. A., Sysoev, V. M., Ushcats, S. Y. (2017). Divergence of activity expansions: Is it actually a problem? *Phys. Rev. E*, Vol. 96, №. 6, P. 062115(4).
6. Ushcats, M. V. (2012). Equation of State Beyond the Radius of Convergence of the Virial Expansion. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 109, №. 4, P. 040601(4).
7. Ushcats, M. V., Bulavin, L. A., Sysoev, V. M., Bardik, V. Yu., Alekseev, A. N. (2016). Statistical theory of condensation – Advances and challenges. *Journal of Molecular Liquids*, Vol. 224, Part A, P. 694 - 712.
8. Lennard-Jones, J. E. (1924). On the Determination of Molecular Fields. I. From the Equation of State of a Gas. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, Vol. 106, P. 463-477.
9. Morse, P. M. (1929). Diatomic Molecules According to the Wave Mechanics. II. Vibrational Levels. *Phys. Rev*, Vol. 34, №. 1, P. 57–64.
10. Ushcats, M. V. (2014). Communication: Low-temperature approximation of the virial series for the Lennard-Jones and modified Lennard-Jones models. *The Journal of Chemical Physics*, V. 141, №. 10, P. 101103(4).
11. Ushcats, M. V., Ushcats, S. Y., Mochalov, A. A. (2016). Virial coefficients of Morse potential. *Ukrainian Journal of Physics*, Vol. 61, №. 2, P. 160-167.
12. Ushcats, M. V., Bulavin, L. A. (2018). Evidence for the first-order phase transition at the divergence region of activity expansions. *Phys. Rev. E*, (submitted).
13. Ushcats, M. V., Bulavin, L. A., Sysoev, V. M., Ushcats, S. Y. (2017). Lattice gas condensation and its relation to the divergence of virial expansions in the powers of activity. *Ukrainian Journal of Physics*, Vol. 62, №. 6, P. 533-538.
14. Ushcats, M. V. (2015). High-density equation of state for a lattice gas. *Phys. Rev. E*, V. 91, №. 5, P. 052144(4).
15. Ushcats, M. V., Bulavin, L. A., Sysoev, V. M., Ushcats, S. Y. (2016). Virial and high-density expansions for the Lee-Yang lattice gas. *Phys. Rev. E*, Vol. 94, №. 1, P. 012143(5).
16. Hadamard, J. (1892). Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Vol. 8, №. 4, P. 101-186.

Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 2(32). – С. 108–117

УДК 517.925

О. О. Чепок
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ З ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ ПОХІДНИМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ПРАВИЛЬНО ТА ШВИДКО ЗМІННИМИ ФУНКЦІЯМИ

Диференціальні рівняння другого порядку, що містять у правій частині й степеневі, й експоненціальні нелінійності, відіграють важливу роль у розвитку якісної теорії диференціальних рівнянь. Серед робіт, що стосуються встановлення асимптотичних зображень розв'язків, більшу частину складають дослідження рівнянь зі степеневими та з правильно змінними нелінійностями. Останнім часом почався розгляд диференціальних рівнянь, які містять у правій частині експоненціальні та більш широкий клас функцій, ніж екcпоненціальні — швидко змінні функції. У даній роботі встановлюються асимптотичні зображення розв'язків з повільно змінними похідними одного нового класу диференціальних рівнянь другого порядку з швидко та правильно змінними нелінійностями.

MSC: 34A34, 34C41, 34E99.
Ключові слова: диференціальні рівняння другого порядку, асимптотичні зображення розв'язків, швидко змінні функції, правильно змінні функції, повільно змінні перші похідні .
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149708.

Вступ. Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1;1\}$,$p : [a,\omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leqslant +\infty)$, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(i \in \{0,1\})$ є неперервними функціями, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — або проміжок $[y_i^0, Y_i[$*, або — $]Y_i,y_i^0]$. Крім того, будемо вважати, що функція φ_1 є правильно змінною при $y \to Y_1$ $(y \in \Delta_{Y_1})$ порядку σ_1 ([3], с.10-15), а функція φ_0 двічі неперервно диференційовна, строго монотонна на Δ_{Y_0} та така, що

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi_0(y) \in \{0, +\infty\}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(y)\varphi_0''(y)}{\left(\varphi_0'(y)\right)^2} = 1. \tag{2}$$

В силу умов (2) функція φ_0 та її похідна першого порядку є (см. [1], с. 91-92) швидко змінними при прямуванні аргументу до Y_0.

У силу властивостей функції φ_0 та теореми 3.10.8 з роботи [2] функція φ_0 та її похідна першого порядку належать класу функцій Г, який був введений Л. Ханом (см., наприклад, [2], с. 75), а також класу $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, який був введений у роботі [6] як узагальнення класу Г.

*При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ вважаємо, що $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ відповідно.

Надійшла 12.07.2018

У монографії V. Maric [1] було розглянуто рівняння виду (1), де функція $\varphi_1 \equiv 1$, p є правильно змінною функцією при $t \to +\infty$, φ_0 є швидко змінною функцією при прямуванні аргументу до нуля праворуч. Для таких рівнянь були отримані асимптотичні зображення для всіх додатних розв'язків, що прямують до нуля, а також їх похідних першого порядку. У роботах В. М. Євтухова, А. Г. Чернікової ([5]– [7]) було розглянуто диференціальне рівняння виду (1), у якому $\varphi_1 \equiv 1$, для цього рівняння були встановлені необхідні і достатні умови існування правильно та швидко змінних розв'язків при $t \uparrow \omega$.

У даній роботі результати отримано для загального виду рівняння (1), що потребує зміни методики досліджень у порівнянні з попередніми результатами.

Основні результати

Означення 1. [4] *Розв'язок y, визначений на $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$, рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-розв'язком ($-\infty \leqslant \lambda_0 \leqslant +\infty$), якщо*

$$y^{(i)} : [t_0,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0,1), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{3}$$

Метою даної роботи є встановлення необхідних і достатніх умов існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$-розв'язків, а також асимптотичних зображень при $t \uparrow \omega$ для цих розв'язків та їх похідних першого порядку. При цьому було застосовано методику, що використовувалась у роботах В. М. Євтухова та А. Г. Чернікової при дослідженні рівнянь виду (1), де $\varphi_1 \equiv 1$.

Згідно з лемою 2.1. роботи [4] випливають наступні твердження стосовно асимптотичних властивостей таких розв'язків.

Лема 1.

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = [1 + o(1)], \quad \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = o(1) \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{4}$$

де

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \textit{якщо } \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \textit{якщо } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Означення 2. *Нехай $Y \in \{0,\infty\}$, Δ_Y — деякий однобічний окіл Y. Неперервно диференційовна функція $L : \Delta_Y \to]0;+\infty[$ називається нормалізованою повільно змінною функцією при $y \to Y$ $(y \in \Delta_Y)$ ([1], с. 2–3), якщо*

$$\lim_{\substack{y\to Y\\ y\in\Delta_Y}} \frac{yL'(y)}{L(y)} = 0.$$

Означення 3. *Говорять, що повільно змінна при $y \to Y$ $(y \in \Delta_Y)$ функція $\theta : \Delta_Y \to]0;+\infty[$ задовільняє умову S при прямуванні аргументу до Y (див., наприклад, у [4]), якщо для будь-якої нормалізованої повільно змінної при $y \to Y$ $(y \in \Delta_Y)$ функції $L : \Delta_Y \to]0;+\infty[$ має місце співвідношення*

$$\theta(yL(y)) = \theta(y)(1 + o(1)) \quad \textit{при } y \to Y \quad (y \in \Delta_Y).$$

Отримано наступну терему.

Теорема 1. *Нехай* $\sigma_1 \neq 1$, *функція* $\varphi_1(y')|y'|^{-\sigma_1}$ *задовольняє умову* S *при* $y' \to Y_1 \quad (y' \in \Delta_{Y_1})$. *Тоді кожен* $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$*-розв'язок диференціального рівняння* (1) *може бути представлений у вигляді*

$$y(t) = \pi_\omega(t)L(t), \tag{5}$$

де $L : [t_0, \omega[\to R$ *– двічі неперервно диференційовна функція така, що*

$$y_0^0 \pi_\omega(t)L(t) > 0, \quad L'(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[\quad (t_0 \leqslant t_1 < \omega), \tag{6}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} L(t) \in \{0; \pm\infty\}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t)L(t) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} = 0. \tag{7}$$

При цьому у випадку існування скінченної або нескінченної границі

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)} \tag{8}$$

мають місце наступні співвідношення

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)} = -1, \quad \alpha_0 L'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[(t_0 \leqslant t_1 < \omega), \tag{9}$$

$$p(t) = \frac{\alpha_0 L'(t)}{\varphi_1(L(t))\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{10}$$

Доведення. Нехай функція $y : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_0}$ $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ є розв'язком рівняння (1). Тоді даний розв'язок та його похідні першого та другого порядків зберігають знак на деякому проміжку $[t_1, \omega[(t_0 \leqslant t_1 < \omega)$ та виконуються умови (4). У силу першої з цих умов існує ([3], с. 15) така нормалізована повільно змінна при $t \uparrow \omega$ функція $L(t) : [t_0, \omega[\longrightarrow R$, яка задовольняє першу з умов (6) та останню з умов (7), що має місце асимптотичне зображення (5).

З (4) та (5) випливає, що

$$y'(t) = L(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{11}$$

звідки, зважаючи на (3), виконуються перша та друга з умов (7).

З (5), (11) та оскільки y є розв'язком рівняння (1), то має місце рівність

$$2L'(t) + \pi_\omega(t)(t)L''(t) = \alpha_0 p(t)\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))\varphi_1(y'(t)). \tag{12}$$

У випадку існування скінченної або нескінченної границі (8), використовуючи правило Лопіталя у формі Штольца, з урахуванням умов (6) та (7), маємо

$$0 = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} = 1 + \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega L''(t)}{L'(t)},$$

звідки випливає перша з умов (9). З останнього та (12) маємо

$$\alpha_0 p(t)\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))\varphi_1(y'(t)) = L'(t)\left[2 + \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}\right] = L'(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Так як функція θ_1 задовольняє умову S та виконується (11), то

$$\alpha_0 p(t)\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))\varphi_1(L(t)) = L'(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Отже, справедливими є друга з умов (9) та асимпотичне зображення (10). Теорема доведена.

Означення 4. *Будемо говорити, що виконується умова N, якщо для деякої неперервно диференційовної функції $L(t) : [t_0,\omega[\longrightarrow R(t_0 \in [a,\omega[)$, яка задовольняє умови (5)–(7) та (9), має місце зображення*

$$p(t) = \frac{\alpha_0 L'(t)}{\varphi_1(L(t))\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))}[1+r(t)], \tag{13}$$

де $r(t) : [t_0,\omega[\longrightarrow]-1;+\infty[$ — неперервна функція, яка прямує до нуля при $t\uparrow\omega$.

Введемо наступні позначення

$$\mu_0 = \operatorname{sign}\varphi_0'(y), \quad \theta_1(y') = \varphi_1(y')|y'|^{-\sigma_1},$$

$$H(t) = \frac{L^2(t)\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))}{L'(t)\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))}, \quad q_1(t) = \left.\frac{\left(\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)}\right)^2}\right|_{y=\pi_\omega(t)L(t)},$$

$$e_1(t) = 1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}, \quad e_2(t) = 2 + \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}.$$

Для цих функцій у силу (2) та (7) виконуються наступні твердження:
1)

$$\lim_{t\uparrow\omega} e_1(t) = \lim_{t\uparrow\omega} e_2(t) = 1, \tag{14}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} H(t) = \pm\infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega} q_1(t) = 0, \tag{15}$$

2) якщо існує границя

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \cdot \frac{H'(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}},$$

тоді

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \cdot \frac{H'(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}} = 0. \tag{16}$$

Справедливою є наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай $\sigma_1 \neq 1$, функція θ_1 задовольняє умову S, виконується умова N та*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}|H(t)|^{\frac{1}{2}} = \pm\infty. \tag{17}$$

Тоді якщо $\alpha_0\mu_0 > 0$, то диференціальне рівняння (1) має однопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$-розв'язків, для кожного з яких мають місце наступні асимптотичні зображення при $t\uparrow\omega$.

$$y(t) = \pi_\omega(t) \cdot L(t) + \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))} \cdot o(1), \tag{18}$$

$$y'(t) = [L(t) + \pi_\omega(t) \cdot L'(t)] \cdot [1 + |H(t)|^{-\frac{1}{2}} \cdot o(1)]. \tag{19}$$

Доведення. До рівняння (1) застосуємо перетворення

$$y(t) = \pi_\omega(t) \cdot L(t) + \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t) \cdot L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t) \cdot L(t))} \cdot z_1(t),$$

$$y'(t) = [L(t) + \pi_\omega(t) \cdot L'(t)] \cdot [1 + z_2(t)].$$

Отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$z_1' = L(t) \cdot e_1(t) \cdot \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))} \cdot [q_1(t)z_1 + z_2], \tag{20}$$

$$z_2' = \frac{L'(t)}{L(t)} \cdot \frac{e_2(t)}{e_1(t)} \times$$

$$\times \left[\frac{\alpha_0 p(t)|e_1(t) \cdot L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(L(t)) \varphi_0(Y_1(t,z_2)) \cdot K(t,z_2)}{L'(t) \cdot e_2(t)} \cdot [1 + z_2]^{\sigma_1} - [1 + z_2] \right], \tag{21}$$

де

$$K(t,z_2) = \frac{\theta_1(Y_2(t,z_2))}{\theta_1(L(t))}, \quad Y_1(t,z_1) = \pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))} \cdot z_1,$$

$$Y_2(t,z_2) = [L(t) + \pi_\omega(t)L'(t)] \cdot [1 + z_2].$$

Так як функція $\dfrac{[L(t) + \pi_\omega(t)L'(t)]}{L(t)} \cdot [1 + z_2(t)]$ є повільно змінною, функція θ_1 задовольняє умову S, то

$$\lim_{t \uparrow \omega} K(t,z_2) = 1 \text{ рівномірно по } \quad z_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]. \tag{22}$$

У силу умови N

$$\frac{\alpha_0 p(t)|L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(L(t)) \varphi_0(Y_1(t,z_1))}{L'(t)} = \frac{\varphi_0(Y_1(t,z_1))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))}[1 + r(t)].$$

Розкладаючи праву частину (23) при фіксованому $t \in [t_1;\omega[$ за формулою Маклорена з залишком у формі Лагранжа, маємо

$$\frac{\varphi_0(Y_1(t,z_1))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))} \cdot [1 + r(t)] = [1 + r(t)] \cdot (1 + z_1) + R(t,z_1),$$

де

$$R(t,z_1) = [1 + r(t)] \cdot \frac{\varphi_0''\left(\pi_\omega(t)L(t) + \dfrac{\varphi_0'(\pi_\omega(t) \cdot L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t) \cdot L(t))} \cdot \xi\right) \varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))} \cdot z_1^2,$$

$$|\xi| < |z_1|.$$

Оскільки

$$Y(t,z_1) = \pi_\omega(t)L(t))\left[1 + \frac{1}{\frac{\pi_\omega(t)L(t))\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))}}\xi\right],$$

з умов (2) та (7) випливає, що

$$\varphi_0''\left(\pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t)\cdot L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)\cdot L(t))}\cdot\xi\right) = \frac{\varphi_0'^2\left(\pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t)\cdot L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)\cdot L(t))}\cdot\xi\right)}{\varphi_0\left(\pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t)\cdot L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)\cdot L(t))}\cdot\xi\right)}\times$$

$$\times[1 + d_1(t,z_1)],$$

де

$$\lim_{t\uparrow\omega} d_1(t,z_1) = 0 \text{ рівномірно по } \quad z_1 \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

За лемою 1.2 з [7] так як $\varphi_0,\varphi_0' \in \Gamma_{Y_0}(Z_0)$ з додатковою функцією $g(y) = \frac{\varphi_0(y)}{\varphi_0'(y)}$, тому справедливою є рівність

$$\varphi_0''\left(\pi_\omega(t)L(t) + \frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t)\cdot L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)\cdot L(t))}\cdot\xi\right) = \frac{\varphi_0'^2(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))}e^{\xi}[1 + d_1(t,z_1)],$$

де

$$\lim_{t\uparrow\omega} d_1(t,z_1) = 0 \text{ рівномірно по } \quad z_1 \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

Таким чином, показано, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують такі $t_1 \in [t_0;\omega[$ та $0 < \delta \leqslant \frac{1}{2}$, що

$$|R(t,z_1)| \leqslant (1+\varepsilon)|z_1|^2 \quad \text{при} \quad t \in [t_1;\omega[, |z_1| \leqslant \delta.$$

Вибираємо довільним чином число $\varepsilon > 0$ та розглянемо систему (20)–(21) на множині

$$\Omega = [t_1;\omega[\times D, \quad \text{де } D = \{(z_1;z_2) \in R^2, \quad |z_1| \leqslant \delta, \quad |z_2| \leqslant \frac{1}{2}\}.$$

Система (20)–(21) на Ω має вигляд:

$$z_1' = L(t)\cdot e_1(t)\cdot\frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))}\cdot[q_1(t)z_1 + z_2], \tag{23}$$

$$z_2' = \frac{L'(t)}{L(t)}\cdot\frac{e_2(t)}{e_1(t)}\times$$

$$\times\left[A_{21}(t)z_1 + A_{22}(t)z_2 + R_1(t,z_1,z_2) + R_2(t,z_1,z_2)\right], \tag{24}$$

де

$$A_{21}(t) = \frac{[1+r(t)]\cdot K(t,z_2)e_1^{\sigma_1}(t)}{e_2(t)}, \quad A_{22}(t) = A_{21}\cdot\sigma_1 - 1,$$

$$R_1(t,z_1,z_2) = A_{21}(t) - 1,$$

$$R_2(t,z_1,z_2) = A_{21}(t)z_1([1+z_2]^{\sigma_1}-1) + \frac{A_{21}(t)R(t,z_1)}{1+r(t)}[1+z_2]^{\sigma_1} +$$

$$+A_{21}(t)([1+z_2]^{\sigma_1} - 1 - \sigma_1 z_2).$$

Зауважимо, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} A_{21} = 1,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} A_{22} = \sigma_1 - 1,$$

$$\lim_{t\to+\infty} R_1(t;z_1;z_2) = 0 \text{ рівномірно по } \quad z_1,z_2 : \ |z_i| < \frac{1}{2}, \ i = 1{,}2.$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{R_2(t;z_1;z_2)}{|z_1|+|z_2|} = 0\ .$$

Застосуємо до системи (23)–(24) додаткове перетворення

$$z_1(t) = v_1(t), \tag{25}$$

$$z_2(t) = |H(t)|^{-\frac{1}{2}} v_2(t). \tag{26}$$

У результаті отримаємо

$$v_1' = h(t)[c_{11}(t)v_1 + c_{12}v_2], \tag{27}$$

$$v_2' = h(t)\Bigg[\frac{1}{2}\frac{H'(t)\mathrm{sign}H(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}}v_2 + \frac{e_2(t)}{e_1^2(t)}A_{21}v_1 +$$

$$+\frac{e_2(t)}{e_1^2(t)}\frac{A_{22}}{|H(t)|^{\frac{1}{2}}}v_2 + \frac{e_2(t)}{e_1^2(t)}R_1(t,v_1,|H(t)|^{-\frac{1}{2}}v_2(t)) + \frac{e_2(t)}{e_1^2(t)}R_2(t,v_1,|H(t)|^{-\frac{1}{2}}v_2(t))\Bigg], \tag{28}$$

де

$$h(t) = \frac{L'(t)e_1(t)}{L(t)}|H(t)|^{\frac{1}{2}}, \quad c_{11} = \alpha_0\mu_0 q_1(t)|H(t)|^{\frac{1}{2}}, \quad c_{12} = \alpha_0\mu_0. \tag{29}$$

З (6), (7), (22) та (23)

$$\int_{t_1}^{t} h(\tau)d\tau = \pm\infty. \tag{30}$$

З (14)–(16), (22) та (23) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} c_{12}(t) = \alpha_0\mu_0, \tag{31}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{e_2(t)}{e_1^2(t)}\frac{A_{22}}{|H(t)|^{\frac{1}{2}}} = 0, \tag{31}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{1}{2}\frac{H'(t)\mathrm{sign}H(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}}=0. \tag{32}$$

Оскільки

$$H'(t)=\left(\frac{L^2(t)}{L'(t)}\right)'\cdot\frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))}+\frac{L^2(t)}{L'(t)}\cdot(L(t)+\pi_\omega(t)L(t))\cdot\left(\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)}\right)'\Bigg|_{y=\pi_\omega(t)L(t)},$$

то

$$\left(\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)}\right)'\Bigg|_{y=\pi_\omega(t)L(t)}=\frac{H'(t)}{\frac{L^2(t)}{L'(t)}\cdot(L(t)+\pi_\omega(t)L(t))}-\frac{\varphi_0'(\pi_\omega(t)L(t))}{\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))}\times$$

$$\times\frac{\frac{L^2(t)}{L'(t)}}{\frac{L^2(t)}{L'(t)}\cdot(L(t)+\pi_\omega(t)L(t))}.$$

З останнього, з (7) та (9) маємо

$$q_1(t)|H(t)|^{\frac{1}{2}}=\frac{L(t)}{L'(t)e_1(t)}\cdot\frac{H'(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}}-\frac{1+o(1)}{\frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}\cdot e_1(t)|H(t)|^{\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{sign}H'(t)}\quad\text{при}\quad t\uparrow\omega. \tag{33}$$

У (33) перший доданок справа прямує до нуля, у силу (16), а другий теж прямує до нуля у силу умови (17).

Отже,

$$\lim_{t\uparrow\omega}c_{11}(t)=0.$$

Характеристичне рівняння граничної матриці коефіцієнтів при v_1 та v_2

$$\begin{pmatrix}0 & \alpha_0\mu_0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

має вигляд

$$\rho^2-\alpha_0\mu_0=0.$$

З умов теореми випливає, що у цього рівняння рівно два дійсних корені різних знаків.

Отримуємо, що для системи диференціальних рівнянь (27)–(28) виконано всі умови теореми 2.2 з [8]. Відповідно до цієї теореми система (27)–(28) має однопараметричне сімейство розв'язків $\{v_i\}_{i=1}^2:[t*,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}^2$ $(t*\geqslant t_1)$, які прямують до нуля при $t\uparrow\omega$. Цим розв'язкам відповідають розв'язки $y:[t*,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ $(t*\geqslant t_1)$ рівняння (1), що допускають при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (18)–(19).

В силу вигляду цих зображень ясно, що отримані розв'язки є $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$-розв'язками рівняння (1). Теорема повністю доведена.

Висновки. Диференціальні рівняння другого порядку, що містять у правій частині й степеневі, й експоненціальні нелінійності, відіграють важливу роль у розвитку якісної теорії диференціальних рівнянь. Серед робіт, що стосуються встановлення асимптотичних зображень розв'язків, більшу частину складають дослідження рівнянь зі степеневими та з правильно змінними нелінійностями. Останнім часом почався розгляд диференціальних рівнянь, які містять у правій частині експоненціальні та більш широкий клас функцій, ніж експоненціальні — швидко змінні функції. У даній роботі встановлено асимптотичні зображення розв'язків з повільно змінними похідними одного нового класу диференціальних рівнянь другого порядку з швидко та правильно змінними нелінійностями.

1. Maric V. Regular Variation and differential equations // Springer (Lecture notes in mathematics, 1726). – 2000. – 127p.
2. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge university press. Cambridge. – 1987. – 494p.
3. Seneta E. (1976) *Regularly varying functions* Lecture Notes in Math., vol. 508, Berlin: Springer-Verlag.
4. Евтухов В. М., Самойленко А. М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 5. – С. 628–650.
5. Евтухов В. М., Черникова А. Г. Асимптотика медленно меняющихся решений обыкновенных двучленных дифференциальных уравнений с быстро меняющейся нелинейностью // Нелинейные колебания. – 2016. – Т. 19, №4. – С. 2–19.
6. Евтухов В. М., Черникова А. Г. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями // Укр. мат. ж. – 2017. – Т. 69, № 10. – С. 1345–1363.
7. Черникова А. Г. Об асимптотике решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью // Дослідження в математиці і механіці. – 2017. – Т. 20, № 2(26). – С. 52–68.
8. Евтухов В. М., Самойленко А. М. Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. ж. – 2010. – Т. 62, №1. – С. 52–80.

Чепок О. О.

Асимптотические представления решений с медленно меняющимися производными уравнений второго порядка с правильно и быстро меняющимися нелинейностями

Резюме

Дифференциальные уравнения второго порядка, содержащие в правой части и степенные, и экспоненциальные нелинейности, играют важную роль в развитии качественной теории дифференциальных уравнений. Среди работ, касающихся установления асимптотических представлений решений, большую часть составляют исследования уравнений со степенными и с правильно меняющимися нелинейностями. В последнее время началось рассмотрение дифференциальных уравнений, содержащих в правой части экспоненциальные, и более широкий класс функций, чем эксспоненциальные — быстро меняющиеся функции. В данной работе устанавливаются асимптотические представления решений с медленно меняющимися производными первого порядка одного нового класса дифференциальных уравнений второго порядка с быстро и правильно меняющимися нелинейностями.
Ключевые слова: дифференциальные уравнения второго порядка, асимптотические

представления решений,быстро меняющиеся функции, правильно меняющиеся функции, медленно меняющиеся производные первого порядка .

Chepok O.O.

Asymptotic representations of solutions with slowly varying derivatives of the second order differential equations with rapidly and regularly varying nonlinearities

Summary

Second-order differential equations with power and exponential nonlinearities on the right hand side play an important role in the development of a qualitative theory of differential equations. The authors of most works devoted to the establishment of asymptotic representations of solutions investigate equations with power and with regularly varying nonlinearities. Recently, the consideration of differential equations with exponential and a wider class than exponential functions - rapidly varying functions - has begun. In this paper, the asymptotic representations of solutions with slowly varying first-order derivatives of some new class of second-order differential equations with rapidly and regularly varying nonlinearities are established.
Key words: second-order differential equations, asymptotic representations of solutions, rapidly varying functions, regularly varying functions, slowly varying first-order derivatives.

References

1. Maric V. (2000). Regular Variation and differential equations. *Springer (Lecture notes in mathematics, 1726)*, 127 p.
2. Bingham, N. H., Goldie, C. M. & Teugels, J. L. (1987). Regular variation. *Encyclopedia of mathematics and its applications.* Cambridge university press, Cambridge, 494p.
3. Seneta E. (1976) *Regularly varying functions* Lecture Notes in Math., vol. 508, Berlin: Springer-Verlag.
4. Yevtukhov V.M., Samoylenko A.M. Asimptoticheskiye predstavleniya resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsial'nyye uravneniya s pravil'no menyayushchimisya nelineynostyami // Differents. uravneniya. – 2011. - т. 47, № 5. - pp. 628-650.
5. Yevtukhov V.M., Chernikova A.G. Asimptotika medlenno menyayushchikhsya resheniy obyknovennykh dvuchlennykh differentsial'nykh uravneniy s bystro menyayushcheysya nelineynost'yu// Nelineynyye kolebaniya. - 2016. - vol. 19, №4. - pp. 2-19.
6. Yevtukhov V.M., Chernikova A.G. Asimptoticheskoye povedeniye resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka s bystro menyayushchimisya nelineynostyami//Ukr.Mat. ZH. - 2017. - vol. 69, № 10. - pp. 1345 - 1363.
7. Chernikova A. G. Ob asimptotike resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka s bystro menyayushcheysya nelineynost'yu // Doslidzhenzhennya v matematitsi i mekhanitsi.- 2017.- 20, №.2 (26) . - pp. 52-68
8. Yevtukhov V. M., Samoylenko A. M. Usloviya primeneniya ischezayushchikh v osoboy situatsii resheniy u veshchestvennykh neavtonomnykh sistem kvazilineynykh differentsial'nykh uravneniy // Ukr. Mat. ZH. - 2010, vol. 62, №1, pp. 52-80.

Researches in Mathematics and Mechanics. – 2018. – V. 23, Is. 2(32). – P. 118–127

UDC 517.926

S. A. Shchogolev
I. I. Mechnikov Odesa National University

ON THE STRUCTURE OF THE FUNDAMENTAL MATRIX OF THE LINEAR HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL SYSTEM OF THE SPECIAL KIND

For the linear homogeneous differenrial system, whose coefficients are represented as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency, the kind of the fundamental matrix are established by the condidtion of the some resonance relations.
MSC: 34A30, 34C25.
Key words: linear differential systems, fundamental matrix, Fourier series.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149709.

Introduction. In the theory of linear systems of differential equations is well known the Floquet-Lyapunov theorem [1]. The fundamental matrix $X(t)$ of the linear homogeneous system

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

where $A(t)$ – is a continuous T-periodic matrix, has a kind:

$$X(t) = F(t)\ e^{tK},$$

where $F(t)$ – is a T-periodic matrix, and K – is a constant matrix.

There exists many analogues of this theorem for the linear systems of different types, for example, for the systems with quasiperiodic coefficients [2], for the countable systems of differential equations [3], for the differential equations in the Banach spaces [4] and other.

The purpose of this paper is to obtain the kind of the fundamental matrix of the linear systems of the differential equations whose coefficients are represented as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency by the condition of the some resonance relations.

Notation. Let $G(\varepsilon_0) = \{t,\varepsilon :\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,\ -L\varepsilon^{-1} \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1},\ 0 < L < +\infty\}$.

Definition 1. We say, that a function $p(t,\varepsilon)$ belongs to a class $S_0(m;\varepsilon_0)$ $(m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, if

1) $p : G(\varepsilon_0) \to \mathbb{C}$, 2) $p(t,\varepsilon) \in C^m(G(\varepsilon_0))$ with respect t;
3) $d^k p(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k p_k^*(t,\varepsilon)$ $(0 \leqslant k \leqslant m)$,

$$\|p\|_{S_0(m;\varepsilon_0)} \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{m} \sup_{G(\varepsilon_0)} |p_k^*(t,\varepsilon)| < +\infty.$$

Under the slowly varying function we mean the function of the class $S_0(m;\varepsilon_0)$.

Received 30.08.2018

Definition 2. We say, that a function $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ belongs to a class $F_0(m;\varepsilon_0;\theta)$ ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), if this function can be represented as:

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon) \exp(in\theta(t,\varepsilon)),$$

and:

1) $f_n(t,\varepsilon) \in S_0(m;\varepsilon_0)$;

2)

$$\|f\|_{F_0(m;\varepsilon_0;\theta)} \overset{def}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|f_n\|_{S_0(m;\varepsilon_0)} < +\infty,$$

3) $\theta(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)d\tau$, $\varphi(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(t,\varepsilon) \in S_0(m;\varepsilon_0)$, $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)} \varphi(t,\varepsilon) = \varphi_0 > 0$.

State some properties of the functions of the classes $S_0(m;\varepsilon_0)$, $F_0(m;\varepsilon_0;\theta)$ (the proofs are given in [5]). Let $k =$ const, $p,q \in S_0(m;\varepsilon_0)$, $u,v \in F_0(m;\varepsilon_0;\theta)$. Then kp, $p \pm q$, pq belongs to the class $S_0(m;\varepsilon_0)$, ku, $u \pm v$, uv belongs to the class $F_0(m;\varepsilon_0;\theta)$, and

1) $\|kp\|_{S_0(m;\varepsilon_0)} = |k| \cdot \|p\|_{S_0(m;\varepsilon_0)}$.
2) $\|p \pm q\|_{S_0(m;\varepsilon_0)} \leqslant \|p\|_{S_0(m;\varepsilon_0)} + \|q\|_{S_0(m,\varepsilon_0)}$.
3) $\|pq\|_{S_0(m;\varepsilon_0)} \leqslant 2^m \|p\|_{S_0(m;\varepsilon_0)} \|q\|_{S_0(m;\varepsilon_0)}$.
4) $\|ku\|_{F_0(m;\varepsilon_0;\theta)} = |k| \cdot \|u\|_{F_0(m;\varepsilon_0;\theta)}$.
5) $\|u \pm v\|_{F_0(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \|u\|_{F_0(m;\varepsilon_0;\theta)} + \|v\|_{F_0(m;\varepsilon_0;\theta)}$.
6) $\|uv\|_{F_0(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant 2^m \|u\|_{F_0(m;\varepsilon_0;\theta)} \cdot \|v\|_{F_0(m;\varepsilon_0;\theta)}$.

Definition 3. We say, that a vector-function $a(t,\varepsilon) = \mathrm{colon}(a_1(t,\varepsilon), \ldots, a_N(t,\varepsilon))$ belongs to a class $S_1(m;\varepsilon_0)$, if $a_j(t,\varepsilon) \in S_0(m;\varepsilon_0)$ ($j = \overline{1,N}$). We say, that a matrix-function $A(t,\varepsilon) = (a_{jk}(t,\varepsilon))_{j,k=\overline{1,N}}$ belongs to a class $S_2(m;\varepsilon_0)$, if $a_{jk}(t,\varepsilon) \in S_0(m;\varepsilon_0)$ ($j,k = \overline{1,N}$).

We define the norms:

$$\|a(t,\varepsilon)\|_{S_1(m;\varepsilon_0)} = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \|a_j(t,\varepsilon)\|_{S_0(m;\varepsilon_0)},$$

$$\|A(t,\varepsilon)\|_{S_2(m;\varepsilon_0)} = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \sum_{k=1}^{N} \|a_{jk}(t,\varepsilon)\|_{S_0(m;\varepsilon_0)}.$$

Definition 4. We say, that a vector-function $b(t,\varepsilon,\theta) = \mathrm{colon}(b_1(t,\varepsilon,\theta), \ldots, b_N(t,\varepsilon,\theta))$ belongs to a class $F_1(m;\varepsilon_0;\theta)$, if $b_j(t,\varepsilon,\theta) \in F_0(m;\varepsilon_0;\theta)$ ($j = \overline{1,N}$). We say, that a matrix-function $B(t,\varepsilon,\theta) = (b_{jk}(t,\varepsilon,\theta))_{j,k=\overline{1,N}}$ belongs to a class $F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, if $b_{jk}(t,\varepsilon,\theta) \in F_0(m;\varepsilon_0;\theta)$ ($j,k = \overline{1,N}$).

We define the norms:

$$\|b(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_1(m;\varepsilon_0;\theta)} = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \|b_j(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_0(m;\varepsilon_0;\theta)},$$

$$\|B(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \sum_{k=1}^{N} \|b_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_0(m;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Thus, the matrix $B(t,\varepsilon,\theta)$ has a kind:

$$B(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)),$$

where $B_n(t,\varepsilon) \in S_2(m;\varepsilon_0)$, and

$$\|B(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|B_n(t,\varepsilon)\|_{S_2(m;\varepsilon_0)}.$$

It is easy to obtain, that, if $A,B \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, then $AB \in F_2(m;\varepsilon;\theta)$, and

$$\|AB\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant 2^m\|A\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} \cdot \|B\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)}. \qquad (2)$$

For $A(t,\varepsilon,\theta) \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$ we denote:

$$\Gamma_n[A] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(t,\varepsilon,\theta)\exp(-in\theta)d\theta \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Main Results

1. Statement of the problem. We consider the next system of differential equations:

$$\frac{dx}{dt} = (\Lambda(t,\varepsilon) + \varepsilon P(t,\varepsilon,\theta))x, \qquad (3)$$

where $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $\Lambda(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t,\varepsilon),\ldots,\lambda_N(t,\varepsilon)) \in S_2(m;\varepsilon_0)$, $P(t,\varepsilon,\theta) \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$.

We study the problem about the structure of fundamental matrix of the system (3).

2. Auxiliary results. Consider the linear homogeneous system:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A(t,\varepsilon)x, \qquad (4)$$

where $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $A(t,\varepsilon) = (a_{jk}(t,\varepsilon))_{j,k=\overline{1,N}} \in S_2(m;\varepsilon_0)$. Then there exists the matrizant $X(t,\varepsilon)$ of the system (4).

Lemma 1. *If $X(t,\varepsilon)$ – is the matrizant of the system (4), then $X(t,\varepsilon)$, $X^{-1}(t,\varepsilon)$ belongs to the class $S_2(m;\varepsilon_0)$.*

Proof. The matrix $X(t,\varepsilon)$ – is satisfied to matrix integral equation:

$$X(t,\varepsilon) = E + \varepsilon\int_0^t A(\tau,\varepsilon)X(\tau,\varepsilon)d\tau, \qquad (5)$$

where E – the unit matrix of order N.

We used the Euclid norm:

$$\|A(t,\varepsilon)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}|a_{jk}(t,\varepsilon)|^2}.$$

Based on (5) we obtain:

$$\|X(t,\varepsilon)\| \leqslant \sqrt{N} + \varepsilon \left| \int\limits_0^t \|A(\tau,\varepsilon)\| \cdot \|X(\tau,\varepsilon)\| d\tau \right|.$$

By virtue generalized Gronwall-Bellman Lemma [3, pp. 25–27] we have:

$$\|X(t,\varepsilon)\| \leqslant \sqrt{N} \exp \left(\varepsilon \left| \int\limits_0^t \|A(\tau,\varepsilon)\| d\tau \right| \right).$$

Hence

$$\sup_{G(\varepsilon_0)} \|X(t,\varepsilon)\| \leqslant \sqrt{N} \exp \left(L \cdot \sup_{G(\varepsilon_0)} \|A(t,\varepsilon)\| \right). \tag{6}$$

We have:

$$\frac{dX(t,\varepsilon)}{dt} = \varepsilon A(t,\varepsilon) X(t,\varepsilon). \tag{7}$$

Differentiating the identity (7) $(m-1)$ times, we obtain, that $X(t,\varepsilon)$ belongs to the class $S_2(m;\varepsilon_0)$.

Further we have:

$$\frac{d(X^{-1}(t,\varepsilon))}{dt} = -\varepsilon X^{-1}(t,\varepsilon) A(t,\varepsilon), \quad X^{-1}(0,\varepsilon) = E. \tag{8}$$

Then the matrix $X^{-1}(t,\varepsilon)$ is satisfied to integral equation:

$$X^{-1}(t,\varepsilon) = E - \varepsilon \int\limits_0^t X^{-1}(\tau,\varepsilon) A(\tau,\varepsilon) d\tau. \tag{9}$$

Hence

$$\|X^{-1}(t,\varepsilon)\| \leqslant \sqrt{N} + \varepsilon \left| \int_0^t \|X^{-1}(\tau,\varepsilon)\| \cdot \|A(\tau,\varepsilon)\| d\tau \right|,$$

and by virtue the same generalized Gronwall-Bellman Lemma:

$$\|X^{-1}(t,\varepsilon)\| \leqslant \sqrt{N} \exp \left(\varepsilon \left| \int\limits_0^t \|A(\tau,\varepsilon)\| d\tau \right| \right).$$

Differentiating the identity (8) $(m-1)$ times, we obtain, that $X^{-1}(t,\varepsilon)$ belongs to the class $S_2(m;\varepsilon_0)$ also.

Lemma 1 are proved.

Lemma 2. *Let we have the matrix equation*

$$\frac{dX}{dt} = \varepsilon A(t,\varepsilon,\theta), \tag{10}$$

where $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $A(t,\varepsilon,\theta) \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$. Then there exists the solution $X(t,\varepsilon,\theta)$ of the equation (10), which belongs to the class $F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, and there exists $K \in (0,+\infty)$, which not depending from $A(t,\varepsilon,\theta)$, such, that

$$\|X(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant K\|A(t,\varepsilon,\theta)\|_{F_2(m;\varepsilon_0;\theta)}. \tag{11}$$

Proof. We represent the matrix $A(t,\varepsilon,\theta)$ in a form:

$$A(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta),$$

where $A_n(t,\varepsilon) \in S_2(m;\varepsilon_0)$ $(n \in \mathbb{Z})$. We seek the solution of the equation (10) in a form:

$$X = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta), \tag{12}$$

where $(N \times N)$-matrices X_n $(n \in \mathbb{Z})$ must be defined. Then we have:

$$\frac{dX_n}{dt} = -in\varphi(t,\varepsilon)X_n + \varepsilon A_n(t,\varepsilon), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

In case $n = 0$ we have:

$$\frac{dX_0}{dt} = \varepsilon A_0(t,\varepsilon). \tag{13}$$

Consider the next solution of the equation (13):

$$X_0(t,\varepsilon) = \varepsilon \int_0^t A_0(\tau,\varepsilon)d\tau. \tag{14}$$

Obviously, this solution belongs to the class $S_2(m;\varepsilon_0)$, and there exists $K_0 \in (0,+\infty)$ such, that

$$\|X_0(t,\varepsilon)\|_{S_2(m;\varepsilon_0)} \leqslant K_0\|A_0(t,\varepsilon)\|_{S_2(m;\varepsilon_0)}. \tag{15}$$

In case $n \neq 0$ we state:

$$X_n = \varepsilon e^{-in\theta(t,\varepsilon)}\left(C_n(\varepsilon) + \int_0^t A_n(\tau,\varepsilon)e^{in\theta(\tau,\varepsilon)}d\tau\right), \tag{16}$$

where matrices $C_n(\varepsilon)$ are defined by formulas:

$$C_n(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \frac{D^j(A_n(t,\varepsilon))}{(in)^{j+1}\varphi(t,\varepsilon)}\Bigg|_{t=0},$$

and operators D^j are defined by the formulas:

$$D(U) = \frac{d}{dt}\left(\frac{U(t,\varepsilon)}{\varphi(t,\varepsilon)}\right), \quad D^j(U) = D(D^{j-1}(U)), \quad D^0(U) = U.$$

We apply to the integral in (16) the m-fold integration by the parts. We obtain:

$$X_n = \varepsilon \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \frac{D^j(A_n(t,\varepsilon))}{(in)^{j+1}\varphi(t,\varepsilon)} + \varepsilon(-1)^m \frac{e^{-in\theta(t,\varepsilon)}}{(in)^m} \int\limits_0^t D^m(A_n(\tau,\varepsilon))e^{in\theta(\tau,\varepsilon)}d\tau.$$

Hence

$$\frac{dX_n}{dt} = \varepsilon \sum_{j=0}^{m-2} (-1)^j \frac{D^{j+1}(A_n(t,\varepsilon))}{(in)^{j+1}} +$$

$$+\varepsilon(-1)^m \frac{\varphi(t,\varepsilon)e^{-in\theta(t,\varepsilon)}}{(in)^m} \int\limits_0^t D^m(A_n(\tau,\varepsilon))e^{in\theta(\tau,\varepsilon)}d\tau, \tag{17}$$

$$D^k\left(\frac{dX_n}{dt}\right) = \varepsilon \sum_{j=0}^{m-k-1} (-1)^j \frac{D^{j+k+1}(A_n(t,\varepsilon))}{(in)^{j+1}} +$$

$$+\varepsilon(-1)^{m-k-1} \frac{\varphi(t,\varepsilon)e^{-in\theta(t,\varepsilon)}}{(in)^{m-k-1}} \int\limits_0^t D^m(A_n(\tau,\varepsilon))e^{in\theta(\tau,\varepsilon)}d\tau,\ k = \overline{1,m-1}, \tag{18}$$

Since $A_n(t,\varepsilon) \in S_2(m;\varepsilon_0)$, then $D^k(A_n(t,\varepsilon)) = \varepsilon^k V_{nk}(t,\varepsilon)$, where $V_{nk}(t,\varepsilon) \in S_2(m-k;\varepsilon_0)$ $(k = \overline{0,m})$, and

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{G(\varepsilon_0)} \|V_{nk}(t,\varepsilon)\|_{S_2(m-k;\varepsilon_0)} < +\infty. \tag{19}$$

Based on (17), (18), (19) we can state, that $X_n(t,\varepsilon)$ belongs to the class $S_2(m;\varepsilon_0)$ $(n \in \mathbb{Z})$, and

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|X_n(t,\varepsilon)\|_{S_2(m;\varepsilon_0)} < +\infty,$$

therefore the matrix-function, which defined the formula (12), belongs to the class $F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$, and there exists $K \in (0,+\infty)$, which not depending from $A(t,\varepsilon,\theta)$, such, that holds unequality (11).

Lemma 2 are proved.

3. Principal result.

Theorem 1. *Let the system (3) such, that:*

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} |\mathrm{Re}(\lambda_j(t,\varepsilon) - \lambda_k(t,\varepsilon)| \geqslant \gamma > 0 \quad (j \neq k),$$

and $m \geqslant 1$. Then there exists $\varepsilon^* \in (0,\varepsilon_0)$ such, that forall $\varepsilon \in (0,\varepsilon^*)$ there exists the fundamental matrix $X^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)$ of the system (3), whih has a kind

$$X^{(1)}(t,\varepsilon,\theta) = R^{(1)}(t,\varepsilon,\theta) \exp\left(\int\limits_0^t \Lambda^{(1)}(\tau,\varepsilon)d\tau\right),$$

where $R^{(1)}(t,\varepsilon,\theta) \in F_2(m-1;\varepsilon^*;\theta)$, $\Lambda^{(1)}(t,\varepsilon)$ *– the diagonal matrix, belonging to the class* $S(m-1;\varepsilon^*)$.

This statement is a consequence of the Principal Result of the paper [6].

Theorem 2. *Let the system (3) such, that*

$$\Lambda(t,\varepsilon) = i\varphi(t,\varepsilon)J,$$

where $\varphi(t,\varepsilon)$ *– is the function in the Definition 2,* $J = \mathrm{diag}(n_1,\ldots,n_N)$, $n_j \in \mathbb{Z}$ $(j = \overline{1,N})$, *and* $m \geqslant 1$. *Then there exists* $\varepsilon^{**} \in (0,\varepsilon_0)$ *such, that for all* $\varepsilon \in (0,\varepsilon^{**})$ *there exists fundamental matrix* $X^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)$ *of the system (3), which has a kind:*

$$X^{(2)}(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \exp(i\theta(t,\varepsilon)J)R^{(2)}(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)),$$

where $R^{(2)}(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) \in F_2(m-1;\varepsilon^{**};\theta)$.

Proof. We make a substitution in the system (3):

$$x = \exp(i\theta(t,\varepsilon)J)y, \tag{20}$$

where y – a new unknown N-dimensional vector. We obtain:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon Q(t,\varepsilon,\theta)y, \tag{21}$$

where $Q(t,\varepsilon,\theta 0 = \exp(-i\theta(t,\varepsilon)J)P(t,\varepsilon,\theta)\exp(i\theta(t,\varepsilon)J)$ belongs to the class $F_2(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Now in the system (21) we make a substitution:

$$y = (E + \varepsilon\Phi(t,\varepsilon,\theta))z, \tag{22}$$

where the matrix Φ are defined from the equation:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = Q(t,\varepsilon,\theta) - U(t,\varepsilon), \tag{23}$$

in which $U(t,\varepsilon) = \Gamma_0[Q(t,\varepsilon,\theta)]$. Then

$$\Phi(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[Q(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi(t,\varepsilon)} \exp(in\theta) \in F_2(m;\varepsilon_0;\theta).$$

As a result of the substitution (22) we obtain:

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon(U(t,\varepsilon) + \varepsilon V(t,\varepsilon,\theta))z, \tag{24}$$

where the matrix V are defined from the equation:

$$(E + \varepsilon\Phi(t,\varepsilon,\theta))V = Q(t,\varepsilon,\theta)\Phi(t,\varepsilon,\theta) - \Phi(t,\varepsilon,\theta)U(t,\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Phi(t,\varepsilon,\theta)}{\partial t}. \tag{25}$$

The matrix $\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ belongs to the class $F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, then there exists $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon_0)$ such, that for all $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$ the equation (25) are solved with respect V, anf $V(t,\varepsilon,\theta)$ belongs to the class $F_2(m-1;\varepsilon_2;\theta_0)$.

Together with the system (24) we consider a truncated system:

$$\frac{dz^{(0)}}{dt} = \varepsilon U(t,\varepsilon) z^{(0)}. \tag{26}$$

Continuity of the matrix $U(t,\varepsilon)$ with respect t for all $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ guarantees the existence of the matrizant $Z^{(0)}(t,\varepsilon)$ of the system (25), and by virtue the Lemma 1 $Z^{(0)}(t,\varepsilon)$, $(Z^{(0)}(t,\varepsilon))^{-1}$ belongs to the class $S_2(m-1;\varepsilon_0)$.

We make in the system (24) the substitution:

$$z = Z^{(0)}(t,\varepsilon)\xi, \tag{27}$$

where ξ – the new unknown vector. We obtain:

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon^2 W(t,\varepsilon,\theta)\xi, \tag{28}$$

where $W = (Z^{(0)}(t,\varepsilon))^{-1} V(t,\varepsilon,\theta) Z^{(0)}(t,\varepsilon)) \in F_2(m-1;\varepsilon_2;\theta)$.

Now we show that there exists the substitution

$$\xi = (E + \varepsilon\Psi(t,\varepsilon,\theta))\eta, \tag{29}$$

where $\Psi \in F_2(m-1;\varepsilon_3;\theta)$ $(\varepsilon_3 \in (0,\varepsilon_2))$, which leads the system (28) to the system:

$$\frac{d\eta}{dt} = O\eta, \tag{30}$$

where O – the null $(N \times N)$-matrix. Really, we define the matrix Ψ from the equation:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \varepsilon W(t,\varepsilon,\theta) + \varepsilon^2 W(t,\varepsilon,\theta)\Psi. \tag{31}$$

Consider the truncated equation:

$$\frac{d\Psi^{(0)}}{dt} = \varepsilon W(t,\varepsilon,\theta). \tag{32}$$

By virtue Lemma 2 this equation has a solution $\Psi^{(0)}(t,\varepsilon,\theta) \in F_2(m-1;\varepsilon_2;\theta)$.

We construct the process of successive approximations, usef as initial approximation $\Psi^{(0)}(t,\varepsilon,\theta)$, and the subsequent approximations defining as a solutions from the class $F_2(m-1;\varepsilon_2;\theta)$ of the matrix-equations:

$$\frac{d\Psi^{(k+1)}}{dt} = \varepsilon W(t,\varepsilon,\theta) + \varepsilon^2 W(t,\varepsilon,\theta)\Psi^{(k)},\ k = 0,1,2,\dots\ , \tag{33}$$

Each of theese solutions exists by virtue Lemma 2. Then we have:

$$\frac{d(\Psi^{(k+1)} - \Psi^{(k)})}{dt} = \varepsilon^2 W(t,\varepsilon,\theta)(\Psi^{(k)} - \Psi^{(k-1)}),\ k = 1,2,\dots\ , \tag{34}$$

By virtue Lemma 2 and unequality (2) we obtain:

$$\|\Psi^{(k+1)} - \Psi^{(k)}\|_{F_2(m-1;\varepsilon_2;\theta)} \leqslant \varepsilon 2^{m-1} K \|\Psi^{(k)} - \Psi^{(k-1)}\|_{F_2(m-1;\varepsilon_2;\theta)},\ k = 1,2,\dots$$

(K are defined in the Lemma 2), therefore the convergence of the process (33) are guaranteed by the unequality $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$, where $\varepsilon_3 2^{m-1} K < 1$. As a result of the process (33) we obtain the solution $\Psi(t,\varepsilon,\theta)$, belongs to the class $F_2(m-1;\varepsilon_3;\theta)$, of the equation (31).

The matrizant of the system (30) is E. Thus, by virtue (20), (22), (27), (29) we obtain, that the fundamental matrix of the system (3) has a kind:

$$X^{(2)}(t,\varepsilon,\theta) = \exp(i\theta(t,\varepsilon)J)(E + \varepsilon\Phi(t,\varepsilon,\theta))Z^{(0)}(t,\varepsilon)(E + \varepsilon\Psi(t,\varepsilon,\theta)),$$

and the Theorem 2 are proved.

Remark 1. *In the sence of the condidtion of the Theorem 2 we say, that we have a resonance case.*

Conclusion. Thus, the kind of the fundamental matrix of the linear homogeneous systems of the differential equations, whose coefficients are represented as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency, are obtained in some resonance case.

References

1. **Yakubovich, V. A., and Starzhinskiy, V. M.** 1972, *Lineynyie differentsialnyie uravneniya s periodicheskimi koefficientami i ih prilozheniya* [The linear differential equations with periodic coefficients and their applications], M.: Nauka, 720 p.
2. **Shtokalo, I. Z.** 1960, *Lineynyie differentsialnyie uravneniya s peremennymi koefficientami* [The linear differential equations with variable coefficients], K.: Izd-vo AN USSR, 76 p.
3. **Samoylenko, A. M., and Teplinskiy, Yu. V.** 1993, *Schyotnyie sistemyi differentsialnyih uravneniy* [Countable systems of differential equations], K.: IM NAN Ukrainyi, 308 p.
4. **Daletskiy, Yu. L., and Kreyn, M. G.** 1970, *Ustoychivost resheniy differentsialnyih uravneniy v banahovom prostranstve* [The stability of solutions of differential equations in Banach spaces], M.: Nauka, 536 p.
5. **Shchogolev S. A.** 2012, *Deyaki zadachi teoryi kolyvanj dlya diferetsialnyih sistem, yaki mistyatj povilno zminni parametryi* [The some problems of the theory of oscillations for the differential systems, containing slowly varying parameters]. – Manuscript. – The thesis for obtaining the scientific degree of Doctor of physical and mathematical sciencies. Kyiv Taras Shevcenko National University, 290 p.
6. **Shchogolev S. A.** 2018 The analogue of the Floquet-Lyapunov Theorem for the linear differential systems of the special kind. *Researches in Mathematics and Mechanics, V.23,* Is 1(31), 149-156.

Щоголев С. А.

Про структуру фундаментальної матриці лінійної однорідної диференціальної системи спеціального вигляду

Резюме

Для лінійної однорідної диференціальної системи, коефіцієнти якої зображувані абсолютно та рівномірно збіжними рядами Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та

частотою, встановлено вигляд фундаментальної матриці за умови виконання певних резонансних співвідношень.
Ключові слова: лінійні диференціальні системи, фундаментальна матриця, ряди Фур'є.

Щёголев С. А.
О СТРУКТУРЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Резюме

Для линейной однородной дифференциальной системы, коэффицииенты которой представимы абсолютно и равномерно сходящимися рядами Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, установлен вид фундаментальной матрицы при условии выполнения некоторых резонансных соотношений.
Ключевые слова: линейные дифференциальные системы, фундаментальная матрица, ряды Фурье.

Researches in Mathematics and Mechanics. – 2018. – V. 23, Is. 2(32). – P. 128–142

UDC 517.9

A. O. Tsukanova
National Technical University of Ukraine
"Igor Sikorsky Kiev Polytechnic Institute", Kiev, Ukraine

COMPARISON THEOREM FOR NEUTRAL STOCHASTIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN HILBERT SPACE

In the present paper, we will discuss a comparison result for solutions to the Cauchy problems for two stochastic differential equations with delay. On this subject number of authors have obtained their comparison results. We deal with the Cauchy problems for two neutral stochastic integro-differential equations. Except transient- (or drift-) and diffusion-coefficients, our equations include also one integro-differential term. Basic difference of our case from the case of all earlier investigated problems is presence of this term. We intoduce a concept of solutions to our problems and prove the comparison theorem for them. According to our result, under certain assumptions on coefficients of equations under consideration, their solutions depend on the transient-coefficients in a monotone way.
MSC: 34A12, 34K40, 34K50, 60H10.
Key words: stochastic differential equation, comparison theorem, Hilbert space.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.2(32).149710.

Introduction. In the given paper the fallowing Cauchy problems for two neutral stochastic integro-differential equations

$$d\left(u_i(t,x) + \int\limits_{\mathbb{R}^d} b_i(t,x,u_i(\alpha(t),\xi),\xi)d\xi\right) = f_i(t,u_i(\alpha(t),x),x)dt \\ + \sigma(t,x)d\beta(t),\ 0 < t \leqslant T,\ x \in \mathbb{R}^d,\ i \in \{1,2\}, \tag{1}$$

$$u_i(t,x) = \phi_i(t,x),\ -r \leqslant t \leqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ r > 0,\ i \in \{1,2\}, \tag{1*}$$

are studied, where $T > 0$ is fixed, β is one-dimensional Brownian motion, $f_i\colon [0,T] \times \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2\}$, $\sigma\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ and $b_i\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2\}$, are some given functions to be specified later, $\phi_i\colon [-r,0] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2\}$, are initial-datum functions, $\alpha\colon [0,T] \to [-r,+\infty)$ is a delay function. For solutions u_1 and u_2 of these problems a comparison theorem is proved. According to the obtained result, if $f_1 \geqslant f_2$, then $u_1 \geqslant u_2$ with probability one.

A comparison problem for solutions to stochastic differential equations in finite-dimensional case has firstly arised in [9]. A comparison theorem for equation of the form $d\xi(t) = f(t,\xi(t))dt + \sigma(t,\xi(t))d\beta(t)$ has been proved in this work by A. V. Skorokhod. According to this theorem, under certain assumptions, a solution of the equation above is monotonously non-decreasing function, depending on drift-coefficient f. A more general presentation of the comparison theorem is given in [7], [8]. Variations of these results have been proposed in [1] – [6]. The aim of the given work was to prove the comparison theorem for solutions of problem (1) – (1*).

Received 21.03.2018

Main Results

1. Formulation of the problem Throughout the paper $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ will note a complete probability space. Let
$\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ be a normal filtration on $\mathcal{F}$. From now on $L_2(\mathbb{R}^d)$ will note real Hilbert space with the norm $\|g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

We impose the following conditions

1. $\alpha\colon [0,T] \to [-r, +\infty)$ belongs to $C^1([0,T])$ with $\alpha' \geqslant 1$, $\alpha(t) \leqslant t$.
2. $f_i\colon [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2\}$, $\sigma\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $b_i\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2\}$, are measurable with respect to all of their variables functions.
3. The initial-datum functions $\phi_i(t,x,\omega)\colon [-r,0]\times\mathbb{R}^d\times\Omega \to L_2(\mathbb{R}^d)$, $i \in \{1,2\}$, are $\mathcal{F}_0$-measurable random variables and such that
$$\sup_{-r\leqslant t\leqslant 0} \mathbf{E}\|\phi_i(t,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} < \infty,\ i \in \{1,2\}.$$
4. b_i, $i \in \{1,2\}$, satisfy the Lipshitz condition in the third argument of the form
$$\begin{gathered}|b_i(t,x,u,\xi) - b_i(t,x,v,\xi)| \leqslant l(t,x,\xi)|u-v|,\\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^d,\ \{u,v\} \subset \mathbb{R},\ i \in \{1,2\},\end{gathered} \tag{2}$$
where $l\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ is such that
$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx < \frac{1}{4}. \tag{3}$$
5. There exists a function $\chi\colon \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \to [0,\infty)$, satisfying the following condition
$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \chi(x,\xi)d\xi\right)^2 dx < \infty,$$
such that
$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |b_i(t,x,0,\xi)| \leqslant \chi(x,\xi),\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in \mathbb{R}^d,\ \xi \in \mathbb{R}^d,\ i \in \{1,2\}. \tag{4}$$
6. There exists a function $\eta\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ with
$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \eta^2(t,x)dx < \infty,$$
such that the following linear-growth and Lipschitz conditions are valid for f_i, $i \in \{1,2\}$,
$$|f_i(t,u,x)| \leqslant \eta(t,x) + L|u|,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ u \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d,\ i \in \{1,2\}, \tag{5}$$
$$|f_i(t,u,x) - f_i(t,v,x)| \leqslant L|u-v|,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ \{u,v\} \subset \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d,\ i \in \{1,2\}.$$

7. The following condition is true for σ

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\sigma(t,\,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}<\infty.$$

Let $u\equiv u_i$, $\phi\equiv\phi_i$, $b\equiv b_i$, $f\equiv f_i$, $i\in\{1,2\}$.

Definition 1. *A continuous random process $u(t,x,\omega)\colon[-r,T]\times\mathbb{R}^d\times\Omega\to L_2(\mathbb{R}^d)$ is called a **solution** to* (1) – (1*) *provided*

1. *It is $\mathcal{F}_t$-measurable for almost all $-r\leqslant t\leqslant T$.*
2. *It satisfies the following integral equation*

$$\begin{aligned}u(t,x)=\phi(0,x)&+\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(0,x,\phi(-r,\xi),\xi)d\xi-\int\limits_{\mathbb{R}^d}b(t,x,u(\alpha(t),\xi),\xi)d\xi\\&+\int\limits_0^t f(s,u(\alpha(s),x),x)ds+\int\limits_0^t\sigma(s,x)d\beta(s),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x\in\mathbb{R}^d,\end{aligned}\tag{6}$$

$$u(t,x)=\phi(t,x),\ -r\leqslant t\leqslant 0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ r>0.$$

3. *It satisfies the condition*

$$\mathbf{E}\int\limits_0^T\|u(t,\,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}dt<\infty.$$

Remark 1. *It is assumed in the definition above that all the integrals from* (6) *are well defined.*

Theorem 1. *Suppose assumptions 1 – 7 hold. Then* (6) *has a unique solution.*

Theorem 2 (comparison theorem)**.** *Suppose assumptions 1 – 7 are satisfied and*

1. *The initial-datum functions are such that*

$$\phi_1(t,x)\geqslant\phi_2(t,x),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ x\in\mathbb{R}^d,\ i\in\{1,2\}.$$

2. *The functions b_i, $i\in\{1,2\}$, satisfy the conditions*

$$\begin{aligned}&b_1(0,x,\phi_2(-r,\xi),\xi)=b_2(0,x,\phi_2(-r,\xi),\xi),\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^d,\\&b_1(0,x,\phi_1(-r,\xi),\xi)=b_2(0,x,\phi_1(-r,\xi),\xi),\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^d,\\&b_1(0,x,\phi_1(-r,\xi),\xi)=b_1(0,x,\phi_2(-r,\xi),\xi),\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^d,\\&b_1(t,x,u,\xi)\leqslant b_2(t,x,u,\xi),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^d,\ u\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

3. *For the functions f_i, $i\in\{1,2\}$, the following conditions are fulfilled*

$$f_1(t,u,x)\geqslant f_2(t,u,x),\ 0\leqslant t\leqslant T,\ u\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^d.$$

Let one of the following conditions be true

M1. b_1 *is monotonously non-increasing,* f_1 *is monotonously non-decreasing with respect to* u*.*

M2. b_2 *is monotonously non-increasing,* f_2 *is monotonously non-decreasing with respect to* u*.*

Then for all $0 \leqslant t \leqslant T$ *the solutions of* (1) – (1*) *satisfy the inequality*

$$u_1(t,x) \geqslant u_2(t,x),\ x \in \mathbb{R}^d,$$

with probability one.

1. Proof of the theorem 1. In order to prove existence and uniqueness of solution to (6) we use the method of successive approximations. The idea of the proof is to construct a sequence of approximations, which converges to the solution u. From now on x is supposed to be fixed. Let

$$u^{(0)}(t,\cdot) = \phi(0,\cdot),\ 0 < t \leqslant T, \tag{7}$$

$$u^{(0)}(t,\cdot) = \phi(t,\cdot),\ -r \leqslant t \leqslant 0, \tag{7*}$$

and for $n \in \{1, 2, \dots\}$ define $u^{(n)}$ as

$$\begin{aligned} u^{(n)}(t,\cdot) = \phi(0,\cdot) &+ \int\limits_{\mathbb{R}^d} b(0,\cdot,\phi(-r,\xi),\xi)d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}^d} b(t,\cdot,u^{(n-1)}(\alpha(t),\xi),\xi)d\xi \\ &+ \int\limits_0^t f(s,u^{(n-1)}(\alpha(s),\cdot),\cdot)ds + \int\limits_0^t \sigma(s,\cdot)d\beta(s),\ 0 < t \leqslant T, \end{aligned} \tag{8}$$

$$u^{(n)}(t,\cdot) = \phi(t,\cdot),\ -r \leqslant t \leqslant 0. \tag{8*}$$

1.1. Firstly let us choose a small $0 \leqslant T_1 \leqslant T$ and prove that $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T_1} \mathbf{E}\|u^{(n)}(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ has a bound, independent of n. We obtain

$$\begin{aligned} \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1} \mathbf{E}\|u^{(n)}(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant 8\mathbf{E}\|\phi(0,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 8\mathbf{E}\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(0,\cdot,\phi(-r,\xi),\xi)|d\xi\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &+ 2\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1} \mathbf{E}\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(t,\cdot,u^{(n-1)}(\alpha(t),\xi),\xi)|d\xi\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &+ 8\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1} \mathbf{E}\left\|\int\limits_0^t |f(s,u^{(n-1)}(\alpha(s),\cdot),\cdot)|ds\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 8\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\left\|\int\limits_0^t \sigma(s,\cdot)d\beta(s)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= 8\mathbf{E}\|\phi(0,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \sum_{j=1}^4 S_j,\ 0 < t \leqslant T. \end{aligned} \tag{9}$$

From (2) and (4) we have

$$|b(t,\,\cdot\,,u,\xi)| \leqslant |b(t,\,\cdot\,,u,\xi) - b(t,\,\cdot\,,0,\xi)| + |b(t,\,\cdot\,,0,\xi)| \leqslant l(t,\,\cdot\,,\xi)|u| + \chi(\,\cdot\,,\xi),$$
$$0 \leqslant t \leqslant T,\ u \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Then we obtain

$$S_1 = 8\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}|b(0,x,\phi(-r,\xi),\xi)|d\xi\right)^2 dx \leqslant 16\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} l(0,x,\xi)\phi(-r,\xi)d\xi\right)^2 dx$$
$$+ 16\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\chi(x,\xi)d\xi\right)^2 dx \leqslant 16\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(0,x,\xi)d\xi dx\right)\mathbf{E}\|\phi(-r,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$
$$+ 16\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\chi(x,\xi)d\xi\right)^2 dx,$$

$$S_2 = 2\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}|b(t,x,u^{(n-1)}(\alpha(t),\xi),\xi)|d\xi\right)^2 dx \leqslant 4\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\right)$$
$$\times\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(n-1)}(\alpha(t),\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 4\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\chi(x,\xi)d\xi\right)^2 dx. \tag{10}$$

According to properties of α, there exists a point $0 \leqslant t^* \leqslant T_1$, $\alpha(t^*) = 0$. Then

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(n-1)}(\alpha(t),\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant t^*}\mathbf{E}\|u^{(n-1)}(\alpha(t),\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} +$$
$$+ \sup_{t^*\leqslant t\leqslant \alpha(T_1)}\mathbf{E}\|u^{(n-1)}(\alpha(t),\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sup_{-r\leqslant t\leqslant 0}\mathbf{E}\|\phi(t,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} +$$
$$+ \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(n-1)}(t,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

and we get from (10)

$$S_2 \leqslant 4\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\right) \times \left(\sup_{-r\leqslant t\leqslant 0}\mathbf{E}\|\phi(t,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} +\right.$$
$$\left. + \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(n-1)}(t,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right) + 4\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\chi(x,\xi)d\xi\right)^2 dx.$$

If t^* does not exist, then $\alpha(t) < 0$ for all t and further conclusions are obvious, because

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(n-1)}(\alpha(t),\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \sup_{-r\leqslant t\leqslant 0}\mathbf{E}\|\phi(t,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

In order to estimate S_3, we take (5) into account and obtain

$$S_3 = 8 \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1} \mathbf{E} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^t |f(s,u^{(n-1)}(\alpha(s),x),x)|ds \right)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant 16T_1 \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1} \mathbf{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left(\eta^2(s,x) + L^2 \big(u^{(n-1)}(\alpha(s),x)\big)^2 \right) dxds \leqslant$$

$$\leqslant 16T_1 \left(T_1 \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1} \int_{\mathbb{R}^d} \eta^2(t,x)dx + L^2 \int_{-r}^{\alpha(T_1)} \mathbf{E}\|u^{(n-1)}(s,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} ds \right) \leqslant$$

$$\leqslant 16T_1^2 \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1} \int_{\mathbb{R}^d} \eta^2(t,x)dx + 16L^2T_1 \left(r \sup_{-r\leqslant s\leqslant 0} \mathbf{E}\|\phi(s,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{T_1} \mathbf{E}\|u^{(n-1)}(s,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} ds \right).$$

For S_4 we conclude

$$S_4 = 8 \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t \left(\sigma^2(s,x)ds \right) dx \leqslant 8 \int_0^{T_1} \|\sigma(s,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} ds.$$

Let denote

$$S(T_1) = 8\mathbf{E}\|\phi(0,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 16 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(0,x,\xi)d\xi dx \right) \mathbf{E}\|\phi(-r,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} +$$

$$+ 20 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi(x,\xi)d\xi \right)^2 dx + 4 \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx \right) \sup_{-r\leqslant t\leqslant 0} \mathbf{E}\|\phi(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} +$$

$$+ 16T_1^2 \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1} \int_{\mathbb{R}^d} \eta^2(t,x)dx + 16rL^2T_1 \sup_{-r\leqslant t\leqslant 0} \mathbf{E}\|\phi(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} +$$

$$+ 8 \int_0^{T_1} \|\sigma(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} dt < \infty.$$

Then from (9) we obtain

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1} \mathbf{E}\|u^{(n)}(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant S(T_1) + 4 \left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx \right) \times \tag{11}$$

$$\times \sup_{0\leqslant t\leqslant T_1} \mathbf{E}\|u^{(n-1)}(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 16L^2T_1 \int_0^{T_1} \mathbf{E}\|u^{(n-1)}(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} dt. \tag{12}$$

If $n = 1$, then from (11) we have

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(1)}(t,\,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant S(T_1) + 4\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\right)\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$
$$+ 16L^2T_1\int\limits_0^{T_1}\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}dt.$$

For an arbitrary $n \in \{2, 3, \ldots\}$ we obtain

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(n)}(t,\,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant S(T_1)\Bigg[1 + 4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx + \ldots$$
$$+\left(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\right)^{n-1}\Bigg] + 16L^2T_1\int\limits_0^{T_1}S(T_1)\Bigg[1 + 4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx + \ldots$$
$$+\left(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\right)^{n-2}\Bigg]ds + 16L^2T_1\int\limits_0^{T_1}\big(16L^2T_1\big(T_1 - s\big)\big)S(T_1)$$
$$\times\Bigg[1 + \ldots + \left(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\right)^{n-3}\Bigg]ds + \ldots$$
$$+ 16L^2T_1\int\limits_0^{T_1}\frac{\big(16L^2T_1\big(T_1 - s\big)\big)^{n-3}}{\big(n-3\big)!}S(T_1)\Bigg[1 + 4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\Bigg]ds$$
$$+\left(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\right)^{n-1}\Bigg[\left(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\right)\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$
$$+ 16L^2T_1\int\limits_0^{T_1}\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}ds\Bigg] + 16L^2T_1\left(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\right)^{n-2}$$
$$\times\int\limits_0^{T_1}\Bigg[\left(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\right)\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 16L^2T_1\int\limits_0^{T_1}\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}ds\Bigg]d\tau$$
$$+ \big(16L^2T_1\big)^2\left(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\right)^{n-3}\int\limits_0^{T_1}(T_1 - \tau)$$
$$\times\Bigg[\left(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\right)\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 16L^2T_1\int\limits_0^{T_1}\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}ds\Bigg]d\tau$$

$$+\ldots+\big(16L^2T_1\big)^{n-3}\Bigg(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\Bigg)^2\int\limits_0^{T_1}\frac{(T_1-\tau)^{n-4}}{(n-4)!}$$

$$\times\Bigg[\Bigg(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\Bigg)\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+16L^2T_1\int\limits_0^{T_1}\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}ds\Bigg]d\tau$$

$$+\big(16L^2T_1\big)^{n-2}\Bigg(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\Bigg)\int\limits_0^{T_1}\frac{(T_1-\tau)^{n-3}}{(n-3)!}$$

$$\times\Bigg[\Bigg(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\Bigg)\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+16L^2T_1\int\limits_0^{T_1}\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}ds\Bigg]d\tau$$

$$+\Bigg(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\Bigg)^{n-2}16L^2T_1\int\limits_0^{T_1}C(T_1)ds+\Bigg(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\Bigg)^{n-3}$$

$$\times 16L^2T_1\int\limits_0^{T_1}\big(16L^2T_1(T_1-s)\big)C(T_1)ds+\ldots+\Bigg(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\Bigg)^2 16L^2T_1$$

$$\times\int\limits_0^{T_1}\frac{\big(16L^2T_1(T_1-s)\big)^{n-4}}{(n-4)!}C(T_1)ds+\Bigg(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\Bigg)16L^2T_1$$

$$\times\int\limits_0^{T_1}\frac{\big(16L^2T_1(T_1-s)\big)^{n-3}}{(n-3)!}C(T_1)ds+16L^2T_1\int\limits_0^{T_1}\frac{\big(16L^2T_1(T_1-s)\big)^{n-2}}{(n-2)!}C(T_1)ds$$

$$+\Bigg(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\Bigg)^{n-2}16L^2T_1\int\limits_0^{T_1}\big(16L^2T_1(T_1-s)\big)\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}ds$$

$$+\Bigg(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\Bigg)^{n-3}16L^2T_1\int\limits_0^{T_1}\frac{\big(16L^2T_1(T_1-s)\big)^2}{2}\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}ds+$$

$$\ldots+\Bigg(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\Bigg)^2 16L^2T_1\int\limits_0^{T_1}\frac{\big(16L^2T_1(T_1-s)\big)^{n-3}}{(n-3)!}\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}ds$$

$$+\Bigg(4\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\Bigg)16L^2T_1\int\limits_0^{T_1}\frac{\big(16L^2T_1(T_1-s)\big)^{n-2}}{(n-2)!}\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}ds$$

$$+16L^2T_1\int\limits_0^{T_1}\frac{\big(16L^2T_1(T_1-s)\big)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}ds, \tag{13}$$

where $C(T_1) = S(T_1) + \left(4 \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\right)\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$. It is easy to see that if T_1 is small enough and assumption (3) is true, then the the right-hand of (13) is not more than

$$\frac{S(T_1)}{1-4\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx} + \frac{16L^2T_1\cdot S(T_1)\cdot \int\limits_0^{T_1}\exp\{16L^2T_1(T_1-s)\}ds}{1-4\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx}$$

$$+\frac{C(T_1)\cdot\exp\{16L^2T_1^2\}}{1-4\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx} + \frac{16L^2T_1\cdot \int\limits_0^{T_1}\exp\{16L^2T_1(T_1-s)\}ds}{1-4\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx}\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

$$=\frac{\big(S(T_1)+C(T_1)\big)\cdot\exp\{16L^2T_1^2\} + \big(\exp\{16L^2T_1^2\}-1\big)\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{1-4\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx} > 0.$$

Thus there exists $c(T_1) > 0$ such that for an arbitrary $n \in \{1, 2, \ldots\}$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(n)}(t,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c(T_1). \tag{14}$$

1.2. Second let us prove that $\big(u^{(n)}(t,\,\cdot\,), n\in\{1,2,\ldots\}\big)$, $0 < t \leqslant T_1$, is convergent. In order to do it we estimate $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(n+1)}(t,\,\cdot\,)-u^{(n)}(t,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, $n\in\{0,1,\ldots\}$.

If $n = 0$, then we obtain, taking into account estimate (14),

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(1)}(t,\,\cdot\,)-u^{(0)}(t,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(1)}(t,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$
$$+\,2\mathbf{E}\|\phi(0,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} < \infty.\text{—}$$

If $n \in \{1, 2, \ldots\}$, then we obtain, taking into account estimates from **1.1**,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(n+1)}(t,\,\cdot\,)-u^{(n)}(t,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\right)$$

$$\times\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(n-1)}(t,\,\cdot\,)-u^{(n)}(t,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 2L^2T_1\int\limits_0^{T_1}\mathbf{E}\|u^{(n-1)}(s,\,\cdot\,)-u^{(n)}(s,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}ds$$

$$\leqslant\left(2\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx + 2L^2T_1^2\right)\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(n-1)}(t,\,\cdot\,)-u^{(n)}(t,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \ldots$$

$$\leqslant\left(2\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx + 2L^2T_1^2\right)^n\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(0)}(t,\,\cdot\,)-u^{(1)}(t,\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Due to assumption (3) and choose of small T_1, $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx + L^2T_1^2 < \frac{1}{2}$, therefore $\left(2\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx+2L^2T_1^2\right)^n<1$ and we conclude

$$\lim_{m,n\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\sqrt{\mathbf{E}\|u^{(n)}(t,\cdot)-u^{(m)}(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}}=$$
$$=\lim_{m,n\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\sqrt{\mathbf{E}\left\|\sum_{i=m-1}^{n-1}\big(u^{(i+1)}(t,\cdot)-u^{(i)}(t,\cdot)\big)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}}\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=m-1}^{n-1}\sqrt{\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(i+1)}(t,\cdot)-u^{(i)}(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(1)}(t,\cdot)-u^{(0)}(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}}\times$$
$$\times\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=m-1}^{n-1}\sqrt{\left(2\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx+2L^2T_1^2\right)^i}=0.$$

Thus, $\big(u^{(n)}(t,\cdot),n\in\{1,2,\dots\}\big)$, $0<t\leqslant T_1$, is a Cauchy sequence. Consequently, there is a limiting function $u(t,\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$, $0<t\leqslant T_1$, such that

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(n)}(t,\cdot)-u(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=0. \tag{15}$$

From (14), it follows from Fatou's Lemma that

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant c(T_1).$$

The function u is $\mathcal{F}_t$-measurable as a limit of $\mathcal{F}_t$-measurable functions.

1.3. Next we show that $u(t,\cdot)$, $0<t\leqslant T_1$, solves the equation (6). To this end, we need to pass to the limit in the identity (8). Taking into account (15), we have

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\big(b(t,\cdot,u^{(n-1)}(\alpha(t),\xi),\xi)-b(t,\cdot,u(\alpha(t),\xi),\xi)\big)d\xi\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} l^2(t,x,\xi)d\xi dx\right)\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(n-1)}(t,\cdot)-u(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\left\|\int\limits_0^t\big(f(s,u^{(n-1)}(\alpha(s),\cdot),\cdot)-f(s,u(\alpha(s),\cdot),\cdot)\big)ds\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant$$
$$\leqslant L^2T_1\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-r}^{\alpha(T_1)}\mathbf{E}\|u^{(n-1)}(s,\cdot)-u(s,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}ds\leqslant$$
$$\leqslant L^2T_1^2\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T_1}\mathbf{E}\|u^{(n-1)}(t,\cdot)-u(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=0.$$

Therefore, passing to the limit in (8), we have

$$u(t,\cdot) = \phi(0,\,\cdot\,) + \int\limits_{\mathbb{R}^d} b(0,\,\cdot\,,\phi(-r,\xi),\xi)d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}^d} b(t,\,\cdot\,,u(\alpha(t),\xi),\xi)d\xi$$

$$+ \int\limits_0^t f(s,u(\alpha(s),\,\cdot\,),\,\cdot\,)ds + \int\limits_0^t \sigma(s,\cdot)d\beta(s),\ 0 < t \leqslant T_1,$$

— the solution to (6) on $[0, T_1]$. This procedure can be repeated in order to extend the solution to the entire interval $[0, T]$ in finitely many steps, thereby completing the proof.

2. Proof of the theorem 2. Let prove the desired result under the hypothesis *M1*. From now on x is supposed to be fixed.

2.1. Let u_2 solve the problem

$$d\Bigg(u_2(t,\,\cdot\,) + \int\limits_{\mathbb{R}^d} b_2(t,\,\cdot\,,u_2(\alpha(t),\xi),\xi)d\xi\Bigg) = f_2(t,u_2(\alpha(t),\,\cdot\,),\,\cdot\,)dt + \sigma(t,\,\cdot\,)d\beta(t),\ 0 < t \leqslant T,$$

$$u_2(t,\,\cdot\,) = \phi_2(t,\,\cdot\,),\ -r \leqslant t \leqslant 0,$$

i.e. satisfy the following identities

$$\Bigg(u_2(t,\,\cdot\,) + \int\limits_{\mathbb{R}^d} b_2(t,\,\cdot\,,u_2(\alpha(t),\xi),\xi)d\xi\Bigg) - \Bigg(u_2(0,\,\cdot\,) + \int\limits_{\mathbb{R}^d} b_2(0,\,\cdot\,,u_2(\alpha(0),\xi),\xi)d\xi\Bigg)$$

$$= \int\limits_0^t f_2(s,u_2(\alpha(s),\,\cdot\,),\,\cdot\,)ds + \int\limits_0^t \sigma(s,\,\cdot\,)d\beta(s),\ 0 < t \leqslant T, \tag{16}$$

$$u_2(t,\,\cdot\,) = \phi_2(t,\,\cdot\,),\ -r \leqslant t \leqslant 0. \tag{15*}$$

Let u_3 solve the problem

$$d\Bigg(u_3(t,\,\cdot\,) + \int\limits_{\mathbb{R}^d} b_1(t,\,\cdot\,,u_2(\alpha(t),\xi),\xi)d\xi\Bigg) = f_1(t,u_2(\alpha(t),\,\cdot\,),\,\cdot\,)dt + \sigma(t,\,\cdot\,)d\beta(t),\ 0 < t \leqslant T,$$

$$u_3(t,\,\cdot\,) = \phi_1(t,\,\cdot\,),\ -r \leqslant t \leqslant 0,$$

i.e. satisfy the following identities

$$\Bigg(u_3(t,\,\cdot\,) + \int\limits_{\mathbb{R}^d} b_1(t,\,\cdot\,,u_2(\alpha(t),\xi),\xi)d\xi\Bigg) - \Bigg(u_3(0,\,\cdot\,) + \int\limits_{\mathbb{R}^d} b_1(0,\,\cdot\,,u_2(\alpha(0),\xi),\xi)d\xi\Bigg)$$

$$= \int\limits_0^t f_1(s,u_2(\alpha(s),\,\cdot\,),\,\cdot\,)ds + \int\limits_0^t \sigma(s,\,\cdot\,)d\beta(s),\ 0 < t \leqslant T, \tag{17}$$

$$u_3(t,\,\cdot\,) = \phi_1(t,\,\cdot\,),\ \ -r \leqslant t \leqslant 0. \tag{16*}$$

Subtracting (17) – (16*) from (16) – (15*), we obtain

$$\begin{aligned}
&\big(u_2(t,\,\cdot\,) - u_3(t,\,\cdot\,)\big) + \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^d} \big(b_2(t,\,\cdot\,, u_2(\alpha(t),\xi),\xi)d\xi - b_1(t,\,\cdot\,, u_2(\alpha(t),\xi),\xi)\big)d\xi}_{\geqslant 0} \\
&+ \underbrace{\big(u_3(0,\,\cdot\,) - u_2(0,\,\cdot\,)\big)}_{\geqslant 0} + \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^d} \big(b_1(0,\,\cdot\,, u_2(\alpha(0),\xi),\xi)d\xi - b_2(0,\,\cdot\,, u_2(\alpha(0),\xi),\xi)\big)d\xi}_{=0} \\
&= \underbrace{\int\limits_0^t \big(f_2(s, u_2(\alpha(s),\,\cdot\,),\,\cdot\,) - f_1(s, u_2(\alpha(s),\,\cdot\,),\,\cdot\,)\big)ds}_{\leqslant 0},\ 0 < t \leqslant T,
\end{aligned}$$

$$u_2(t,\,\cdot\,) - u_3(t,\,\cdot\,) = \underbrace{\phi_2(t,\,\cdot\,) - \phi_1(t,\,\cdot\,)}_{\leqslant 0},\ \ -r \leqslant t \leqslant 0,$$

therefore $u_2 \leqslant u_3$ with probability one.

Now let consider u_4 — a solution to

$$d\Bigg(u_4(t,\,\cdot\,) + \int\limits_{\mathbb{R}^d} b_1(t,\,\cdot\,, u_3(\alpha(t),\xi),\xi)d\xi\Bigg) = f_1(t, u_3(\alpha(t),\,\cdot\,),\,\cdot\,)dt + \sigma(t,\,\cdot\,)d\beta(t),\ 0 < t \leqslant T,$$

$$u_3(t,\,\cdot\,) = \phi_1(t,\,\cdot\,),\ \ -r \leqslant t \leqslant 0,$$

i.e. is defined from

$$\begin{aligned}
&\Bigg(u_4(t,\,\cdot\,) + \int\limits_{\mathbb{R}^d} b_1(t,\,\cdot\,, u_3(\alpha(t),\xi),\xi)d\xi\Bigg) - \Bigg(u_4(0,\,\cdot\,) + \int\limits_{\mathbb{R}^d} b_1(0,\,\cdot\,, u_3(\alpha(0),\xi),\xi)d\xi\Bigg) \\
&\qquad = \int\limits_0^t f_1(s, u_3(\alpha(s),\,\cdot\,),\,\cdot\,)ds + \int\limits_0^t \sigma(s,\,\cdot\,)d\beta(s),\ 0 < t \leqslant T,
\end{aligned} \tag{18}$$

$$u_4(t,\,\cdot\,) = \phi_1(t,\,\cdot\,),\ \ -r \leqslant t \leqslant 0. \tag{17*}$$

Subtracting (18) – (17*) from (17) – (16*), we conclude

$$\big(u_3(t,\cdot)-u_4(t,\cdot)\big)+\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^d}\big(b_1(t,\cdot,u_2(\alpha(t),\xi),\xi)d\xi-b_1(t,\cdot,u_3(\alpha(t),\xi),\xi)\big)d\xi}_{\geqslant 0}$$

$$+\underbrace{\big(u_4(0,\cdot)-u_3(0,\cdot)\big)}_{=0}+\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^d}\big(b_1(0,\cdot,u_3(\alpha(0),\xi),\xi)d\xi-b_1(0,\cdot,u_2(\alpha(0),\xi),\xi)\big)d\xi}_{=0}$$

$$=\underbrace{\int\limits_0^t\big(f_1(s,u_2(\alpha(s),\cdot),\cdot)-f_1(s,u_3(\alpha(s),\cdot),\cdot)\big)ds}_{\leqslant 0},\ 0<t\leqslant T,$$

$$u_3(t,\cdot)-u_4(t,\cdot)=\phi_1(t,\cdot)-\phi_1(t,\cdot)=0,\ -r\leqslant t\leqslant 0,$$

therefore $u_3\leqslant u_4$ with probability one.

Continuing in a similar way, one obtain a sequence $\big(u_n,n\in\{2,3,\ldots\}\big)$, fulfilling

$$u_2\leqslant u_3\leqslant u_4\leqslant\ldots\leqslant u_n\leqslant\ldots,$$

where u_n, $n\in\{5,6,\ldots\}$, is defined as

$$\left(u_n(t,\cdot)+\int\limits_{\mathbb{R}^d}b_1(t,\cdot,u_{n-1}(\alpha(t),\xi),\xi)d\xi\right)-\left(u_n(0,\cdot)+\int\limits_{\mathbb{R}^d}b_1(0,\cdot,u_{n-1}(\alpha(0),\xi),\xi)d\xi\right)$$

$$=\int\limits_0^t f_1(s,u_{n-1}(\alpha(s),\cdot),\cdot)ds+\int\limits_0^t\sigma(s,\cdot)d\beta(s),\ 0<t\leqslant T,\tag{19}$$

$$u_n(t,\cdot)=\phi_1(t,\cdot),\ -r\leqslant t\leqslant 0.\tag{18*}$$

2.1 Hereafter we argue in a similar way as in the proof of theorem 1. We establish that $\big(u_n,n\in\{2,3,\ldots\}\big)$ is convergent. In order to do it, we prove that

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathbf{E}\|u_n(t,\cdot)-u_1(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=0,$$

where u_1 is defined from

$$\left(u_1(t,\cdot)+\int\limits_{\mathbb{R}^d}b_1(t,\cdot,u_1(\alpha(t),\xi),\xi)d\xi\right)-\left(u_1(0,\cdot)+\int\limits_{\mathbb{R}^d}b_1(0,\cdot,u_1(\alpha(0),\xi),\xi)d\xi\right)$$

$$=\int\limits_0^t f_1(s,u_1(\alpha(s),\cdot),\cdot)ds+\int\limits_0^t\sigma(s,\cdot)d\beta(s),\ 0<t\leqslant T,\tag{20}$$

$$u_1(t,\cdot)=\phi_1(t,\cdot),\ -r\leqslant t\leqslant 0.\tag{19*}$$

It follows from the proof of theorem 1 that there exists a constant $c(T) > 0$ such that $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathbf{E}\|u_2(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c(T)$ and $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \mathbf{E}\|u_n(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c(T)$ for $n \in \{3, 4, \ldots\}$. The rest of the proof is similar to the case of theorem 1.

Conclusion. In the present paper we discussed a comparison result for solutions to the Cauchy problems for two stochastic differential equations with delay. On this subject number of authors have obtained their comparison results. We dealed with the Cauchy problems for two neutral stochastic integro-differential equations. Except transient- (or drift-) and diffusion-coefficients, our equations include also one integro-differential term. Basic difference of our case from the case of all earlier investigated problems is presence of this term. We intoduced a concept of solutions to our problems and proved the comparison theorem for them. According to our result, under certain assumptions on coefficients of equations under consideration, their solutions depend on the transient-coefficients in a monotone way.

References

1. Gal'cuk, L. I., Davis M. H. A. (1982). A note on a comparison theorem for equations with different diffusions. *Stochastics*, V. 6, P. 147 – 149.
2. Huang, Z. Y. (1984). A comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications. *Proc. A.M.S.*, V. 91, №4, P. 611 – 617.
3. Kotelenz, P. (1992). Comparison methods for a class of function valued stochastic partial differential equations. *Probab. Theory Relat. Fields*, V. 93, P. 1 – 19.
4. O'Brien, G. L. (1980). A new comparison theorem for solutions of stochastic differential equations. *Stochastics*, V. 3, P. 245 – 249.
5. Ouknine, Y. (1990). Comparison et non-confluence des solutions d'equations differentielles stochasuq'ues unidimensionnelles. *Probab. Math. Statist.*, V. 11, №1, P. 37 – 46.
6. Yamada, T. (1973). On a comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications. *Jour. Math. Kyoto Univ.*, V. 13, №3, P. 497 – 512.
7. Yamada, T. (1981). On the strong comparison theorems for solutions of stochastic differential equations. *Z. Vahrsch. Verw. Gebiete*, V. 56, P. 3 – 19.
8. Watanabe, S., Ikeda, N. (1986). *Stokhasticheskie differencial'nye uravneniya i diffusionnye processy [Stochastic differential equations and diffusional processes]* . Moscow: Nauka, 445 p.
9. Skorokhod, A. V. (1961). *Issledovaniya po teorii sluchainyh processov [Research on the theory of random processes]* . Kiev: Kiev University, 216 p.
10. Skorokhod, A. V., Gikhman I. I. (1968). *Stokhasticheskie differencial'nye uravneniya [Stochastic differential equations]* . Kiev: Naukova dumka, 356 p.

Цуканова А. О.

Теорема порівняння для стохастичних інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу в гільбертовому просторі

Резюме

У даній статті розглядається задача порівняння розв'язків задач Коші для двох стохастичних диференціальних рівнянь із запізненням. У цій галузі безліч авторів отримали

свої результати, які стосуються порівняння розв'язків подібних задач. У роботі розглядаються задачі Коші для двох стохастичних інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу. Окрім коефіцієнта зносу (переносу) і коефіцієнта дифузії, ці рівняння містять також один інтегро-диференціальний член. Наявність цього інтегрального члена є основною відмінністю досліджуваної задачі від усіх раніше досліджуваних задач. Для цих задач вводяться поняття розв'язків, для яких доведено теорему порівняння. Згідно з отриманим результатом, за деяких припущень на коефіцієнти досліджуваних рівнянь, їх розв'язки монотонно залежать від коефіцієнтів переносу.
Ключові слова: стохастичне диференціальне рівняння, теорема порівняння, гільбертів простір.

Цуканова А. О.
Теорема сравнения для стохатических интегро-дифференциальных уравнений нейтрального типа в гильбертовом пространстве

Резюме

В данной статье рассматривается задача сравнения решений задач Коши для двух стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием. В этой области множество авторов получили свои результаты, касающиеся сравнения решений подобных задач. В данной работе рассматриваются задачи Коши для двух стохастических интегро-дифференциальных уравнений нейтрального типа. Помимо коэффициента сноса (переноса) и коэффициента диффузии, рассматриваемые уравнения содержат также один интегро-дифференциальный член. Наличие этого интегрального члена является основным отличием этой задачи ото всех ранее исследованных задач. Для наших задач вводятся понятия решений, для которых доказана теорема сравнения. Согласно полученному результату, при некоторых предположениях на коэффициенты рассматриваемых уравнений, их решения монотонно зависят от коэффициентов переноса.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение, теорема сравнения, гильбертово пространство .

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ
(скорочений варіант)

Журнал «Дослідження в математиці і механіці» має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень, огляди з актуальних проблем за тематикою видання, а також повідомлення про ювілеї, знаменні дати та події.

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Електронну версію рукопису слід надсилати на e-mail журналу

rmm-journal@onu.edu.ua

або завантажувати через сайт журналу

http://rmm-journal.onu.edu.ua

Вона повинна складатися з

1) вихідного файлу TEX-файлу,
2) PDF-файлу,
3) всіх допоміжних файлів (графіки, рисунки, ілюстрації тощо),
4) документа з анкетними даними авторів (прізвище, ім'я, по батькові, місце роботи, e-mail, адреса для листування та телефон).

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LATEX відповідно до вимог та з використанням шаблону, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті. Також вимоги можна отримати в редакційній колегії журналу.

Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 25 сторінок.

Структура статті:

— УДК;
— список авторів;
— місце роботи авторів;
— назва статті;
— резюме мовою оригіналу обсягом не менш як 100 слів;
— Mathematical Subject Classification (2010);
— список ключових слів мовою оригіналу;
— основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України «Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України» від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано

розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується подана стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером у квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформлюється відповідно до державного стандарту України ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 «Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання» та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008);

— анотації двома іншими мовами, які повинні містити назву, список авторів, резюме обсягом не менш як 100 слів та список ключових слів;

— додатково, якщо стаття написана українською або російською мовами, після анотацій подається список літератури у транслітерації, оформлений у відповідності до міжнародного стандарту *Harvard* (зразок та правила оформлення можна знайти в шаблоні статті на сайті).

Усі надіслані статті проходять анонімне рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу «Дослідження в математиці і механіці».

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, зокрема і у співавторстві.

Редакційна колегія журналу
«Дослідження в математиці і механіці»
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2
м. Одеса, 65082

Українською, російською та англійською мовами

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: серія КВ, № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

Затверджено до друку вченою радою
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.
Протокол № 2 від 30 жовтня 2018 р.

Відповідальний за випуск *О. П. Огуленко*
Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*
Технічний редактор *М. М. Бушин*

Тираж 100 прим. Зам. № 732 (128).

Адреса редколегії:
65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-14-25, 37-07-17, (048) 7-855-855
astro_print@ukr.net
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 2(32). – С. 1–145.