ISSN 2519–206X

ДОСЛІДЖЕННЯ в МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Том 23. Випуск 1(31).

Volume 23. Issue 1(31).

2018

ISSN 2519—206X

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ДОСЛІДЖЕННЯ в МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

Науковий журнал

Виходить 2 рази на рік

Журнал заснований у січні 1997 р.

Том 23. Випуск 1(31). 2018

Одеса
«Астропринт»
2018

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації серія КВ № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

Журнал внесений до переліку наукових фахових видань наказом Міністерства освіти і науки України № 693 від 10.05.2017

ISSN 2519—206X

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Scientific journal

Published twice a year

Journal founded in January, 1997

Volume 23. Issue 1(31). 2018

Odesa
«Astroprint»
2018

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

The certificate of mass media state registration under the number № 21400—11200ПР issued on June 17, 2015.

The journal was included in the list of scientific specialized publications by the order № 693 of Ministry of education and science of Ukraine issued on May 10, 2017.

ЗМІСТ

Х Р О Н І К А

М А Т Е М А Т И К А

CONTENTS

C H R O N I C L E

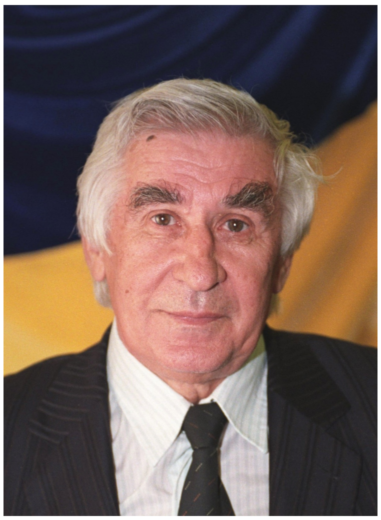
M A T H E M A T I C S

Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 1(31). – С. 7–9

Х Р О Н І К А

ФОРМУЛА ЖИТТЯ*

До 80-річчя академіка НАН України А. М. Самойленка



2 січня виповнилося 80 років видатному вченому-математику в галузі звичайних диференціальних рівнянь і теорії нелінійних коливань, засновнику знаної у світі наукової школи з теорії багаточастотних коливань і теорії імпульсних систем, доктору фізико-математичних наук, професору, заслуженому діячу науки і техніки України, лауреату Державних премій України, кількох іменних премій НАН України, академіку-секретарю Відділення математики НАН України, директору Інституту математики НАН України, академіку НАН України Анатолію Михайловичу Самойленку.

У 1960 р. А. М. Самойленко з відзнакою закінчує Київський державний університет імені Т. Г. Шевченка і на запрошення академіка Юрія Олексійовича Митропольського вступає до аспірантури Інституту математики АН УРСР. Вибір теми його кандидатської дисертації «Застосування асимптотичних методів для дослідження нелінійних диференціальних рівнянь із «нерегулярною» правою частиною» був цілком закономірним, оскільки саме в той час бурхливо розвивалася, набираючи світової популярності, київська школа нелінійної механіки, заснована академіками Миколою Митрофановичем Криловим і Миколою Миколайовичем Боголюбовим. Закінчивши аспірантуру і успішно захистившись, А. М. Самойленко протягом наступних 11 років працює в Інституті математики АН УРСР.

У 1967 р. він захистив докторську дисертацію на тему «Деякі питання теорії періодичних і квазіперіодичних систем», ставши наймолодшим в Україні доктором наук. А у 1978 р. Анатолія Михайловича обирають членом-кореспондентом АН УРСР.

З 1987 р. А. М. Самойленко стає директором Інституту математики АН УРСР і ось уже впродовж 30 років очолює цей відомий математичний центр. За цей час Анатолій Михайлович зарекомендував себе не тільки як видатний учений, а й як умілий організатор науки. За його ініціативи та за безпосередньої участі

*За матеріалами публікації *Перестюк М.О. Формула життя. До 80-річчя академіка НАН України А.М. Самойленка / М. О. Перестюк // Вісн. НАН України. — 2018. — № 1. — С. 95–98.*

Надійшла 07.02.2018

як голови оргкомітету було проведено велику кількість авторитетних міжнародних конференцій. А. М. Самойленко є головним редактором цілої низки журналів, зокрема «Український математичний журнал» (англомовний переклад у видавництві Springer — «Ukrainian Mathematical Journal»), «Нелінійні коливання», «Український математичний вісник» і ін., членом редколегії журналів «Доповіді НАН України», «Вісник НАН України» і ще багатьох вітчизняних і закордонних журналів.

Математичний талант і неабиякі організаторські здібності Анатолія Михайловича здобули йому заслужений авторитет і повагу наукової спільноти. Його обрано академіком НАН України (1995), дійсним членом Європейської академії наук (2002), членом-кореспондентом Accademia Peloritana dei Pericolanti (Мессіна, Сицилія, 2006), іноземним членом АН Республіки Таджикистан (2011). З 2006 р. і до сьогодні Анатолій Михайлович обіймає відповідальну посаду академіка-секретаря Відділення математики НАН України.

Наукові досягнення Анатолія Михайловича широко відомі спеціалістам у галузі диференціальних рівнянь, математичної фізики, теорії нелінійних коливань. Він по праву вважається основоположником цілого ряду важливих напрямів досліджень у цих галузях.

Так, у 1965 р. він запропонував і обґрунтував новий ефективний метод відшукання періодичних розв'язків суттєво нелінійних диференціальних рівнянь, який і досі відомий як «чисельно-аналітичний метод Самойленка». Надалі цей метод одержав всесвітній розвиток і застосування при розв'язанні нелінійних крайових задач у багатьох роботах як самого автора, так і його учнів, а відповідні результати були втілені в численних монографіях.

У середині 1960-х рр. А. М. Самойленко під впливом робіт А. М. Колмогорова, В. І. Арнольда, М. М. Боголюбова, Ю. Мозера проводить інтенсивні дослідження актуальних задач теорії багаточастотних нелінійних коливань. Важливе місце в наукових пошуках А. М. Самойленка посідають питання теорії інваріантних тороїдальних многовидів нелінійних динамічних систем. Підсумком циклу робіт стала монографія «Элементы математической теории многочастотных колебаний» (М.: Наука, 1987), перевидана англійською під назвою «Elements of the mathematical theory of multifrequency oscillations» (Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1991).

Ще один загальновизнаний цикл робіт Анатолія Михайловича пов'язаний з теорією систем з імпульсною дією. Особливо активне формування зазначеної теорії за участю А. М. Самойленка та його учнів відбулося в 1970–1980 рр. Монографія «Диференціальні рівняння з імпульсною дією» — перша у світовій літературі книга, в якій було викладено широкий спектр результатів, покладених в основу теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Пізніше, в 1995 р., цю монографію було доповнено новими результатами та перекладено англійською у видавництві World Scientific.

Разом з учнями було розроблено теорію знакозмінних функцій Ляпунова для вивчення дихотомії, глобально обмежених розв'язків та інваріантних многовидів лінійних розширень динамічних систем на торі, розвинуто теорію нетерових крайових задач для систем із запізненням, рівнянь з імпульсною дією, сингулярно збурених систем.

Ще один напрям досліджень А. М. Самойленка стосується вивчення резонансних явищ у багаточастотних системах, включаючи системи з повільно змінними параметрами. Виведені ним витончені оцінки осцилюючих інтегралів, які виникають при вивченні процесу проходження траєкторією резонансних підмножин фазового простору, стали основою для одержання нових глибоких результатів з обґрунтування методу усереднення в коливних системах із числом частот більшим від двох.

Загальна кількість наукових публікацій ювіляра становить понад 600, у тому числі три десятки монографій, понад два десятки підручників і навчальних посібників. Його учні захистили 35 докторських та 87 кандидатських дисертацій.

На особливу увагу заслуговує педагогічна діяльність професора А. М. Самойленка в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Національному технічному університеті України «КПІ імені Ігоря Сікорського» та інших вищих навчальних закладах.

Яскравий лекторський талант Анатолія Михайловича, його вміння чітко, ясно та емоційно викладати матеріал на основі розроблених ним оригінальних лекційних курсів завжди справляє незабутнє враження на слухачів.

Багаторічну наукову, педагогічну і громадську діяльність А. М. Самойленка відзначено низкою високих нагород і звань, зокрема орденами Дружби народів, «За заслуги» III ступеня, князя Ярослава Мудрого V та IV ступенів. Він є лауреатом Державних премій України в галузі науки і техніки (1985, 1996), Державної премії України в галузі освіти (2012), Республіканської премії ім. М. О. Островського (1968), премій НАН України: імені М. М. Крилова (1981), М. М. Боголюбова (1998), М. О. Лаврентьєва (2000), М. В. Остроградського (2004) та Ю. О. Митропольського (2010); удостоєний звань «Заслужений діяч науки і техніки України» (1998), «Соросівський професор» (1996); є почесним доктором Київського національного університету імені Тараса Шевченка та багатьох інших вищих навчальних закладів України.

Сьогодні Анатолій Михайлович сповнений творчих задумів і оригінальних ідей. Щиро бажаємо йому їх успішної реалізації, міцного духовного і фізичного здоров'я, нових успіхів, яскравої та плідної діяльності на славу математики й України.

DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134612

Перестюк М. О.

К 80-ЛЕТИЮ АКАДЕМИКА Ф. Л. ЧЕРНОУСЬКО

Академику Феликсу Леонидовичу Черноусько, выдающемуся ученому в области механики, теории управления, прикладной математики и робототехники, 16 мая 2018 года исполняется восемьдесят лет.

Область его научных интересов и сфера научной деятельности очень широки. В области механики: динамика систем, спутников, тел, содержащих жидкость и подвижные элементы.

В области теории управления: приближенные методы оптимального управления, проблемы управления в условиях неполной информации, методы управления нелинейными динамическими системами и колебательными процессами.

В области прикладной математики: разработка вычислительных методов оптимального управления и вариационного исчисления. На основе этих методов решены важные задачи оптимизации движений летательных аппаратов, машин, технологических процессов и вариационные задачи механики сплошных сред.

В области робототехники: динамика управления движением и оптимизация характеристик манипуляционных и мобильных роботов.

Ф. Л. Черноусько успешно сочетает исследовательскую работу с педагогической. Более 50 лет он преподает в Московском физико-техническом институте, руководит научной работой аспирантов и студентов, заведует кафедрой механики и процессов управления. Им создана одна из ведущих научных школ в России и Европе в области механики и теории управления. Среди его учеников — три члена–корреспондента РАН, девятнадцать докторов наук и более тридцати кандидатов наук из России, Армении, Украины, США, Вьетнама, Молдовы и других стран.

Список его трудов насчитывает свыше 450 научных работ, 6 изобретений и 15 монографий по теории управления, механике, прикладной математике и робототехнике.

Феликс Леонидович ведет большую научно-организационную работу. Тридцать девять лет он возглавлял, а сейчас работает главным научным сотрудником лаборатории механики управляемых систем Института проблем механики Российской академии наук (ИПМех РАН). С 2004 по 2015 год был директором ИПМех РАН.

Ф. Л. Черноусько — член Бюро Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН, заместитель председателя Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, член Национального комитета по автоматическому управлению, главный редактор журнала

Получена 14.03.2018

«Прикладная математика и механика», заместитель главного редактора журнала «Известия РАН. Теория и системы управления», член редколлегий более 10 российских и международных журналов.

Выдающиеся научные достижения академика Ф. Л. Черноусько получили признание в России и за рубежом. Он лауреат Государственной премии СССР и Государственной премии РФ в области науки и техники, лауреат премии Ленинского комсомола. Награжден Золотой медалью С. А. Чаплыгина РАН, Золотой медалью на Международной выставке по технологическим инновациям (Брюссель), лауреат премии Кербера за европейскую науку и премии А. фон Гумбольдта (Германия).

Ф. Л. Черноусько — академик Международной академии астронавтики, Европейской академии наук, Сербской академии наук и искусств, Академии инженерных наук Сербии и Черногории, почетный член Международного общества «Физика и управление». Коллеги и ученики Феликса Леонидовича сердечно поздравляют его с юбилеем и желают здоровья, творческих успехов, долгих лет жизни и счастья.

DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134611 *Лещенко Д. Д.*

К 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ВИКТОРА АЛЕКСАНДРОВИЧА ПЛОТНИКОВА

5 января 1938 г. — 4 сентября 2006 г.

Виктор Александрович Плотников родился 5 января 1938 г. в Ленинграде (ныне Санкт-Петербург). Во время Великой отечественной войны был жителем блокадного Ленинграда, затем семья переехала в Одессу.

В 1960 г. Виктор Александрович окончил Одесский государственный университет имени И. И. Мечникова, в котором в последствии работал в должностях ассистента, доцента, заведующего кафедрой и декана.

В 1969 г. Виктор Александрович Плотников защитил в Одесском университете кандидатскую диссертацию «Исследование одного класса задач оптимального управления системами с двумя степенями свободы», а в 1980 г. защитил в Ленинградском университете докторскую диссертацию на тему «Асимптотические методы в задачах оптимального управления».

Научные работы Виктора Александровича Плотникова охватывают широкий круг сложных и актуальных задач теории дифференциальных уравнений и оптимального управления, которые относятся к разработке нового направления этой теории — дифференциальным уравнениям с многозначной и разрывной правой частью, квазидифференциальным уравнениям в метрических пространствах. Он разработал алгоритмы асимптотического решения для достаточно широкого класса дифференциальных включений, обобщил теоремы Н. Н. Боголюбова и А. Н. Тихонова на случай дифференциальных уравнений с многозначной и разрывной правой частью и квазидифференциальных уравнений, разработал алгоритмы численно–асимптотического решения задач управления, доказал теоремы существования и единственности решений квазидифференциальных уравнений в локально компактных и полных метрических пространствах. Разработка теории этих уравнений имеет значение не только как обобщение теории дифференциальных уравнений, но и благодаря их многочисленным приложениям к исследованию задач оптимального управления, теории игр, экономики. Результаты в этом направлении положили начало математическим исследованиям асимптотических методов в теории дифференциальных включений в России, Беларуси, Болгарии, Польше, Франции, США и других странах.

Виктор Александрович Плотников опубликовал более 250 научных работ, в том числе 5 монографий. Под его руководством защищено 22 кандидатских диссертации, в том числе аспирантами из Алжира, Болгарии, Вьетнама, Иордании.

Получена 14.04.2018

С 1986 г. был председателем специализированного ученого совета по защите кандидатских диссертаций по математике при Одесском университете.

Виктор Александрович был членом редакционных коллегий в журналах «Вестник Одесского государственного университета», «Нелинейные колебания», рецензировал статьи во многих журналах, реферировал статьи для Mathematical Reviews и Zentralblatt MATH, был членом Американского математического общества.

4 сентября 2006 г. Виктора Александровича не стало. Всю свою жизнь он посвятил математике, он ежедневно и до последнего вздоха занимался научной работой.

В нашей памяти Виктор Александрович останется талантливым ученым и замечательным учителем, который любил жизнь во всех ее проявлениях.

DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134613

От редколлегии

Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 1(31). – С. 14–22

УДК 514.75

Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

QA-ДЕФОРМАЦІЯ ПОВЕРХНІ ВІД'ЄМНОЇ ГАУССОВОЇ КРИВИНИ

Для поверхні тривимірного евклідового простору в статті розглянули нескінченно малу деформацію, при якій елемент площі поверхні змінюється за заздалегідь заданим законом. Така деформація в статті названа нескінченно малою квазіареальною деформацією або коротко QA-деформацією. Задача про відшукування QA-деформації, при якій зберігається орт нормалі до поверхні, зводиться до дослідження одного неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку відносно однієї невідомої функції. Для поверхонь від'ємної гауссової кривини означені початкові умови, при яких існує одна і лише одна QA-деформація зі стаціонарним ортом нормалі. При цьому для зазначеного рівняння були застосовані теорії задач Коші і Гурса. Початкові умови цих задач виражені через вектор зміщення.
MSC: 53A05, 53A45.
Ключові слова: нескінченно мала деформація, поле зміщення, варіація, орт нормалі .
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134614.

Вступ. Нескінченно малі (н. м.) деформації поверхонь за тих чи інших обмежень досліджувалися в численних роботах (див., напр., [1]– [4]). В даній статті вивчаються нескінченно малі деформації першого порядку поверхні від'ємної гауссової кривини, при якій елемент площі цієї поверхні змінюється за заданим законом, і при цьому зберігається орт нормалі. Ця задача зводиться до дослідження одного неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку відносно однієї невідомої функції.

Основні результати

1. Вираз математичної моделі QA-деформації через компоненти поля зміщення. Нехай $\overline{r} = \overline{r}(x^1, x^2)$ – рівняння поверхні $S \in C^3$, заданої у тривимірному евклідовому просторі, а

$$S^* : \overline{r}^*(x^1, x^2, t) = \overline{r}(x^1, x^2) + t\overline{U}(x^1, x^2) \tag{1}$$

її деяка інфінітезимальна деформація першого порядку, де $\overline{U}(x^1, x^2)$ – поле зміщення, а параметр деформації $t \to 0$.

Під дією нескінченно малої деформації будь-яка геометрична величина $R(x^1, x^2)$ поверхні S в загальному випадку зміниться і залежатиме від параметра деформації t: $R^*(x^1, x^2, t)$. Припустимо, що приріст $\Delta R = R^*(x^1, x^2, t) - R(x^1, x^2)$ функції $R(x^1, x^2)$ при деформації розкладено в ряд за степенями t, тоді

$$R^*(x^1, x^2, t) = R(x^1, x^2) + t\delta R(x^1, x^2) + o(t^2),$$

де через $o(t^2)$ позначено величини порядку 2 і вище відносно t, якими будемо нехтувати. При цьому коефіцієнт δR називається *варіацією* величини R. Функція варіації δR очевидно характеризує специфіку (закон) змінювання величини

Надійшла 21.11.2017

R при деформації поверхні. У цьому полягає її *геометричний зміст.* Якщо задано варіацію деякої величини R, то надалі будемо говорити, що задано *закон змінювання* цієї величини при н. м. деформації.

Кажуть, що геометрична характеристика поверхні *стаціонарна* (*зберігається*) при н. м. деформації, якщо її приріст є величиною не менш ніж другого порядку відносно t. Таким чином, стаціонарна величина характеризується тим, що її варіація тотожно дорівнює нулеві.

В подальшому всі індекси набуватимуть значень 1, 2, а коваріантна похідна на базі метричного тензора g_{ij} поверхні S позначатиметься комою. Геометричні величини здеформованої поверхні S^*, на відміну від відповідних величин поверхні S, відзначатимемо позначкою *.

Лема 1. *При загальній нескінченно малій деформації справджується тотожність:*

$$\varepsilon_{ij} g^{ij} = \overline{r}^i \overline{U}_i, \tag{2}$$

де $2\varepsilon_{ij} \equiv \delta g_{ij}$ *— варіація метричного тензора* g_{ij}*;* g^{ij} *— компоненти тензора, оберненого до метричного,* $\overline{r}^i = \overline{r}_\alpha g^{\alpha i}, \overline{r}_\alpha = \frac{\partial \overline{r}}{\partial x^\alpha}$.

Доведення. Визначимо метричний тензор поверхні S^* :

$$g^*_{ij} = g_{ij} + t2\varepsilon_{ij} + o(t^2),$$

$$g^*_{ij} = \overline{r}^*_i \overline{r}^*_j = \left(\overline{r}_i + t\overline{U}_i\right)\left(\overline{r}_j + t\overline{U}_j\right) = g_{ij} + t\left(\overline{r}_i \overline{U}_j + \overline{r}_j \overline{U}_i\right) + o(t^2), \tag{3}$$

де

$$2\varepsilon_{ij} = \overline{r}_i \overline{U}_j + \overline{r}_j \overline{U}_i. \tag{4}$$

Якщо помножимо рівність (4) на тензор g^{ij} і згорнемо по індексах i, j, то отримаємо формулу (2):

$$2\varepsilon_{ij} g^{ij} = \overline{r}^j \overline{U}_j + \overline{r}^i \overline{U}_i = 2\overline{r}^i \overline{U}_i.$$

Лему доведено.

Квазіареальною н. м. деформацією поверхні S називається така н. м. деформація вигляду (1), при якій заздалегідь задано закон змінювання $\delta d\sigma$ її елемента площі [5]. Надалі її називатимемо QA-деформацією.

Елемент площі поверхні S^* можна виразити у вигляді [4]

$$d\sigma^* = \sqrt{g^*} dx^1 dx^2 = d\sigma + t\delta d\sigma + o(t^2) =$$

$$= d\sigma + t\sqrt{g} g^{ij} \varepsilon_{ij} dx^1 dx^2 + o(t^2) = d\sigma + t\varepsilon_{ij} g^{ij} d\sigma + o(t^2), \tag{5}$$

де $g = g_{11} g_{22} - g^2_{12}$, а варіація елемента площі

$$\delta d\sigma = \varepsilon_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} d\sigma. \tag{6}$$

Згідно з (6) величина $\varepsilon_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = \frac{\delta d\sigma}{d\sigma}$ виражає нормовану варіацію елемента площі. За допомогою рівностей

$$\frac{\delta d\sigma}{d\sigma} = \varepsilon_{ij} g^{ij} = -2\mu \tag{6a}$$

означимо функцію $\mu(x^1, x^2)$. Очевидно, задання варіації елемента площі $\delta d\sigma$ рівносильно заданню функції μ. Звідси випливає, що функція μ виражає закон змінювання елемента площі при деформації поверхні. В цьому полягає її геометричний зміст.

Н. м. деформація вигляду (1) називається *ареальною* (А-деформацією), якщо при цій деформації зберігається елемент площі поверхні S [4]. У відповідності з означенням, н. м. деформація буде ареальною тоді і лише тоді, коли варіація елемента площі тотожно дорівнює нулеві або, інакше, $d\sigma^* = d\sigma + o(t^2)$. Очевидно, QA-деформація узагальнює ареальну, яка включається до квазіареальної за умови $\mu = 0$.

Лема 2. *Для того щоб н. м. деформація поверхні класу C^2 з полем зміщення $\overline{U}$ була QA-деформацією, необхідно і достатньо, щоб поле зміщення задовольняло рівняння:*

$$\overline{r}^i \overline{U}_i = -2\mu, \tag{7}$$

де μ — задана неперервна функція.

Доведення. З попереднього випливає, що н. м. деформація поверхні є QA-деформацією тоді і лише тоді, коли виконується рівність (6а), де μ - заздалегідь задана неперервна функція. Взявши до уваги лему 1 і рівність (6а), одержимо лему 2. Лему доведено.

Нехай

$$\overline{U} = U^\alpha \overline{r}_\alpha + U^\circ \overline{n}, \tag{8}$$

де $\overline{r}_\alpha, \overline{n}$ — рухомий базис, пов'язаний з поверхнею S; U^α — деяке поле контраваріантного вектора, а U° — поле інваріанта на S. Має місце

Теорема 1. *Для існування QA-деформації поверхні в класі C^2 необхідно і достатньо, щоб для заданої неперервної функції $\mu, \mu \neq 0$, рівняння*

$$U^\alpha_{,\alpha} - 2HU^\circ = -2\mu \tag{9}$$

мало ненульовий розв'язок U^α, U°. Тут H — середня кривина поверхні.

Доведення. Припустимо, що задана деяка QA-деформація поверхні і функція μ описує заздалегідь заданий закон змінювання елемента площі при цій деформації. Тоді існує ненульовий вектор зміщення $\overline{U}$ QA-деформації, компоненти якого U^α, U° теж одночасно не дорівнюють нулеві. Продиференціюємо коваріантно по x^i рівність (8) і скористаємось деривацiйними рівняннями теорії поверхонь: $\overline{r}_{i,j} = b_{ij}\overline{n}, \overline{n}_i = -b^\alpha_i \overline{r}_\alpha$, де b_{ij} — коефіцієнти другої квадратичної форми, $b^\alpha_i = b_{ij} g^{j\alpha}; g^{j\alpha} g_{j\beta} = \delta^\alpha_\beta$ — символи Кронекера, остаточно

$$\overline{U}_i = \left(U^\alpha_{,i} - U^\circ b^\alpha_i\right)\overline{r}_\alpha + \left(U^\alpha b_{\alpha i} + U^\circ_i\right)\overline{n}. \tag{10}$$

Приймаючи до уваги рівність (10), замість (7) одержимо рівняння (9).

Навпаки, при заданій функції $\mu \neq 0$ будь-який ненульовий розв'язок $\left(U^1, U^2, U^\circ\right)$ рівняння (9) визначатиме поле зміщення квазіареальної н. м. деформації поверхні $\overline{U} = U^\alpha \overline{r}_\alpha + U^\circ \overline{n}$. Теорему доведено.

Рівняння (9) являє собою рівняння QA-деформації, виражене через компоненти поля зміщення.

2. QA-деформація, що зберігає орт нормалі до поверхні. Рівняння (9) при заданій функції μ є неоднорідним диференціальним рівнянням з частинними похідними першого порядку відносно компонент вектора зміщення. Оскільки у загальному випадку QA-деформація являє собою надзвичайно широкий клас деформацій, то надалі обмежимо цю деформацію додатковою вимогою того, щоб при ній залишався стаціонарним орт нормалі в будь-якій точці поверхні. Легко бачити, що при цій деформації зберігатимуться прямі — нормалі до поверхні, а також дотичні площини.

Лема 3. *При QA-деформації орт нормалі зберігається тоді і лише тоді, коли компоненти поля зміщення задовольняють умову*

$$U^{\alpha} b_{\alpha\beta} + U^{\circ}_{\beta} = 0. \tag{11}$$

Доведення. При квазіареальній деформації варіація орта нормалі має вигляд [5]

$$\delta\overline{n} = c^{ij}\overline{r}_i \times \overline{U}_j + 2\mu\overline{n}, \tag{12}$$

де c^{ij} — дискримінантний тензор поверхні типу $\binom{2}{0}$.

Виразимо $\delta\overline{n}$ через U^{α}, U°. Для цього підставимо в (12) замість ковектора $\overline{U}_j$ його вираз (10) і скористаємося формулами [6] $\overline{r}_i \times \overline{r}_j = c_{ij}\overline{n}$, $\overline{n} \times \overline{r}_i = c_{i\alpha}\overline{r}^{\alpha}$, де $c_{ij} = c^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}, c_{11} = c_{22} = 0, c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g}$. Остаточно дістанемо

$$\delta\overline{n} = -\left(U^{\alpha} b_{\alpha\beta} + U^{\circ}_{\beta}\right)\overline{r}^{\beta}.$$

Очевидно, вимога стаціонарності орта нормалі при QA-деформації рівносильна рівності (11). Лему доведено.

Отже, система трьох диференціальних рівнянь відносно трьох невідомих функцій U^1, U^2, U°

$$\begin{cases} U^{\alpha}_{,\alpha} - 2HU^{\circ} = -2\mu, \\ U^{\alpha} b_{\alpha\beta} + U^{\circ}_{\beta} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

описує аналітичну модель поставленої на початку пункту задачі. Мають місце

Теорема 2. *Для існування QA-деформації поверхні в класі C^2 зі стаціонарним ортом нормалі необхідно і достатньо, щоб для заданої неперервної функції $\mu, \mu \neq 0$ система рівнянь (13) мала ненульовий розв'язок.*

Теорема 3. *Якщо поверхня класу C^3, гауссова кривина K якої відмінна від нуля, допускає н. м. деформацію з заданим законом змінювання елемента площі $\mu \in C, \mu \neq 0$, при якій зберігається орт нормалі, то на цій поверхні існує таке поле контраваріантного вектора $U^{\alpha} \in C^1$, що*

$$U^{\alpha} = -U^{\circ}_{\beta} d^{\beta\alpha}, \; U^{\circ}_{\beta} = \frac{\partial U^{\circ}}{\partial x^{\beta}}, \tag{14}$$

де $d^{\alpha\beta}$ – тензор, обернений до тензора $b_{\alpha\beta}$, а функція $U^{\circ} \in C^2$ є розв'язком рівняння

$$U^{\circ}_{\alpha,\beta} d^{\alpha\beta} - \frac{K_{\alpha}}{K} d^{\alpha\beta} U^{\circ}_{\beta} + 2HU^{\circ} = 2\mu. \tag{15}$$

Доведення. Нехай задана поверхня ($K \neq 0$) допускає QA-деформацію, при якій зберігається орт нормалі. На підставі теореми 2 система рівнянь (13) при заданій відмінній від нуля функції μ має ненульовий розв'язок ($U^\alpha,\ U^\circ$). Покажемо, що на поверхні поле контраваріантного вектора U^α виражається за формулою (14), а функція U° є розв'язком рівняння (15).

Справді, (13_2) являє собою неоднорідну систему двох алгебраїчних рівнянь крамеровського типу відносно функції U°. Її детермінант $det(b_{ij}) = Kg \neq 0$. Тензор, обернений до b_{ij}, як відомо [6], має вигляд $d^{ij} = \dfrac{1}{K} c^{i\alpha} c^{j\beta} b_{\alpha\beta}, d^{i\alpha} b_{j\alpha} = \delta^i_j$. Якщо тепер домножимо тензорне рівняння (13_2) на $d^{\beta\gamma}$ та згорнемо по індексу β, то одержимо співвідношення (14).

Підставимо тепер в перше рівняння системи (13) U^α з (14), дістанемо:

$$U^\circ_{\alpha,\beta} d^{\alpha\beta} + U^\circ_\beta d^{\beta\alpha}_{,\alpha} + 2HU^\circ = 2\mu. \tag{16}$$

Здійснимо перетворення цього рівняння. Відомо, що для всякої C^3- поверхні ненульової гауссової кривини справджується тотожність [4]: $\left(Kd^{\alpha\beta}\right)_{,\alpha} = 0$. Застосувавши її до рівняння (16), отримаємо (15).

Таким чином, ми довели, що при QA-деформації з зазначеним обмеженням на поверхні існує поле зміщення $\overline{U} = U^\alpha \overline{r}_\alpha + U^\circ \overline{n}$, компоненти якого пов'язані співвідношеннями (14), (15). Теорему доведено.

Має місце і обернена

Теорема 4. *Нехай на поверхні S класу C^3 ($K \neq 0$) існує поле контраваріантного вектора $U^\alpha \in C^1$, яке виражено у вигляді (14) через інваріант $U^\circ \in C^2$, що задовольняє рівняння (15), де $\mu \in C, \mu \neq 0$, — задана функція. Тоді така поверхня допускає QA-деформацію зі стаціонарним ортом нормалі. При цьому поле зміщення через функцію U° виражається однозначно*

$$\overline{U} = -d^{\beta\alpha} U^\circ_\beta \overline{r}_\alpha + U^\circ \overline{n}. \tag{17}$$

Доведення. Нехай U° є ненульовим розв'язком рівняння (15) при $\mu \neq 0$ і поле контраваріантного вектора U^α виражено через U° у вигляді (14). Покажемо, що в цьому випадку поверхня ($K \neq 0$) допускає QA-деформацію зі стаціонарним ортом нормалі. Для цього передусім переконаємося, що за умови теореми система рівнянь (13) задовольняється.

Дійсно, внесемо вираз для U^α з (14) в перше рівняння системи (13), тоді одержимо (16). Якщо тепер врахуємо тотожність $\left(Kd^{\alpha\beta}\right)_{,\alpha} = 0$, то рівнянню (16) надамо вигляду (15). Друге рівняння системи (13) теж виконується.

Таким чином, дана поверхня допускає QA-деформацію зі стаціонарним ортом нормалі. При цьому поле зміщення при заданій функції μ має вигляд $\overline{U} = U^\alpha \overline{r}_\alpha + U^\circ \overline{n} = -d^{\beta\alpha} U^\circ_\beta \overline{r}_\alpha + U^\circ \overline{n}$ і через нормальну компоненту визначається однозначно. Теорему доведено.

Задача про квазіареальну QA-деформацію поверхні зі стаціонарним ортом нормалі звелась до відшукування розв'язків рівняння (15). До речі, це рівняння узагальнює відоме однорідне характеристичне рівняння Вейнгартена для н. м. згинань [6].

3. Деякі умови існування та єдиності QA-деформації поверхні від'ємної гауссової кривини. В рівнянні (15) коваріантну похідну виразимо через частинні похідні, тоді одержимо неоднорідне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку відносно функції U° :

$$\frac{\partial^2 U^\circ}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} d^{\alpha\beta} - \left(\Gamma^\beta_{\alpha s} d^{\alpha s} + \frac{K_\alpha}{K} d^{\alpha\beta}\right) U^\circ_\beta + 2HU^\circ = 2\mu, \tag{18}$$

де $\Gamma^\beta_{\alpha s}$ — символи Христофеля другого роду. Дискримінант рівняння $\Delta = d^{11}d^{22} - (d^{12})^2 = \frac{b_{11}}{K}\frac{b_{22}}{K} - \frac{b_{12}^2}{K^2} = \frac{b}{K^2} = \frac{g}{K}$, очевидно, його знак залежить від знаку гауссової кривини.

Припустимо, що однозв'язна поверхня S гомеоморфна області G площини Ox^1x^2 і в цій області належить до класу C^3, а її гауссова кривина від'ємна ($K < 0$). Тоді дискримінант диференціального рівняння (18) теж всюди буде від'ємним $\Delta = \frac{g}{K} < 0$, а рівняння (18) гіперболічного типу. На поверхні від'ємної гауссової кривини існує дійсна регулярна сітка асимптотичних ліній. Приймемо цю сітку за координатну, тоді $b_{11} = b_{22} = 0, b_{12} = \sqrt{-Kg}$. Рівняння (18) у вибраній системі координат в області G набуває канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 U^\circ}{\partial x^1 \partial x^2} + a(x^1, x^2)\frac{\partial U^\circ}{\partial x^1} + b(x^1, x^2)\frac{\partial U^\circ}{\partial x^2} + c(x^1, x^2)U^\circ = b_{12}\mu, \tag{19}$$

де

$$a = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} g^{11} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} g^{12} + \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial x^2}\right),$$

$$b = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} g^{12} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} g^{22} + \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial x^1}\right), c = Hb_{12}.$$

Тут коефіцієнти a, b, c — відомі неперервні функції точки поверхні, а $\mu \in C$ — заздалегідь задана функція.

3.1. Задача Коші. В області площини G задамо дугу кривої l, яка перетинається не більше ніж в одній точці з прямими, що паралельні осям координат. Її рівняння запишемо у вигляді $x^2 = g(x^1)$, при цьому будемо вважати, що існує похідна $g'(x^1)$, відмінна від нуля.

Уздовж дуги кривої l задамо значення U° та $\frac{\partial U^\circ}{\partial x^2}$:

$$U^\circ|_{x^2=g(x^1)} = \varphi_0(x^1), \frac{\partial U^\circ}{\partial x^2}|_{x^2=g(x^1)} = \varphi_1(x^1), \tag{20}$$

де $\varphi_0(x^1), \varphi_1(x^1)$ — задані функції класу C^1.

Оскільки коефіцієнти рівняння (19) є неперевними функціями, то в деякому околі кривої l задача Коші (19), (20) має розв'язок і до того ж єдиний [7].

Взявши до уваги рівності (8) і $U^\circ = \overline{U}\overline{n}$, початкові умови (20) виразимо через вектор зміщення $\overline{U}$:

$$\overline{U}\overline{n}|_{x^2=g(x^1)} = \varphi_0(x^1), \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\overline{U}\overline{n}\right)|_{x^2=g(x^1)} = \varphi_1(x^1). \tag{21}$$

З попереднього випливає, що при заданих функціях $\mu(x^1, x^2), \varphi_0(x^1), \varphi_1(x^1)$ рівняння (19) за умов (21) завжди має розв'язок, крім того, єдиний. При цьому тангенціальна компонента U^α вектора зміщення через його нормальну компоненту U° виражається за формулою (14).

Отже, вище доведена

Теорема 5. *За початкових умов (21), де $\varphi_0(x^1), \varphi_1(x^1)$ – задані функції класу C^1, однозв'язна поверхня $S \in C^3$ від'ємної гауссової кривини при заданій неперервній функції μ допускає, причому єдину, QA-деформацію, яка зберігає її орт нормалі.*

При $\mu = 0$ ця деформація є ареальною.

За умови $\mu = 0$, коли QA-деформація поверхні зводиться до ареальної, для однорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 U^\circ}{\partial x^1 \partial x^2} + a(x^1, x^2)\frac{\partial U^\circ}{\partial x^1} + b(x^1, x^2)\frac{\partial U^\circ}{\partial x^2} + c(x^1, x^2)U^\circ = 0, \tag{22}$$

розглянемо задачу Коші з однорідними початковими умовами

$$\overline{U}\overline{n}|_{x^2=g(x^1)} = 0, \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\overline{U}\overline{n}\right)|_{x^2=g(x^1)} = 0. \tag{23}$$

Очевидно, задача Коші (22), (23) має лише нульовий розв'язок. Звідси випливає

Теорема 6. *За початкових умов (23), однозв'язна поверхня $S \in C^3$ від'ємної гауссової кривини є жорсткою відносно ареальної н. м. деформації, яка зберігає її орт нормалі.*

3.2. Задача Гурса. Асимптотичні лінії $x^1 = const, x^2 = const$ поверхні S є характеристиками рівняння (19). Задамо функцію U° на характеристиках $x^1 = x^1_0$ та $x^2 = x^2_0$:

$$\begin{aligned} U^\circ|_{x^1=x^1_0} &= \psi_1(x^2), x^2_0 \leqslant x^2 \leqslant b, \\ U^\circ|_{x^2=x^2_0} &= \psi_2(x^1), x^1_0 \leqslant x^1 \leqslant a. \end{aligned} \tag{24}$$

При цьому вважаємо, що задані функції $\psi_1(x^2)$ та $\psi_2(x^1)$ мають неперервні похідні першого порядку і $\psi_1(x^2_0) = \psi_2(x^1_0)$. Оскільки коефіцієнти рівняння (19) є неперервними функціями, то в заданій області задача Гурса (19), (24) має розв'язок і до того ж єдиний [7]. Звідси випливають наступні теореми:

Теорема 7. *За початкових умов*

$$\begin{aligned} \overline{U}\overline{n}|_{x^1=x^1_0} &= \psi_1(x^2),\ x^2_0 \leqslant x^2 \leqslant b, \\ \overline{U}\overline{n}|_{x^2=x^2_0} &= \psi_2(x^1),\ x^1_0 \leqslant x^1 \leqslant a, \end{aligned} \tag{25}$$

де $\psi_1(x^2), \psi_2(x^1) \in C^1$ і $\psi_1(x^2_0) = \psi_2(x^1_0)$, однозв'язна поверхня $S \in C^3$ від'ємної гауссової кривини при заданій неперервній функції μ допускає, причому єдину, QA-деформацію зі стаціонарним ортом нормалі.

При $\mu = 0$ ця деформація є ареальною.

Теорема 8. *За початкових умов*

$$\begin{aligned} \overline{U}\overline{n}|_{x^1=x^1_0} &= 0,\ x^2_0 \leqslant x^2 \leqslant b, \\ \overline{U}\overline{n}|_{x^2=x^2_0} &= 0,\ x^1_0 \leqslant x^1 \leqslant a \end{aligned} \tag{26}$$

однозв'язна поверхня $S \in C^3$ від'ємної гауссової кривини є жорсткою відносно ареальної н. м. деформації зі стаціонарним ортом нормалі.

Висновки. В даній роботі досліджується QA-деформація поверхні від'ємної гауссової кривини зі стаціонарним ортом її нормалі (у просторі E_3). Ця задача звелась до дослідження одного неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку відносно однієї невідомої функції. Основні результати роботи сформульовані в теоремах 3, 4, 5, 7.

1. **Mikes J.** Differential geometry of special mappings / J. Mikes, E. Stepanova, A. Vanzurova. –Palacky University, Olomouc, 2015. – 570 p.
2. **Velimirovic L. S.** Analysis of Gaudi surfaces at small deformations /L. S. Velimirovic, M. D. Cvetkovic, M. S. Ciric, N. Velimirovic // Applied Mathematics and Computation. – 2012. – V. 218, № 13. – P. 6999–7004.
3. **Robah S.** On stable constant mean curvature surfaces in $S^2 \times R$ and $H^2 \times R$ /S. Robah // Trans. Amer. Math. Soc. – 2010. – V. 362, № 6. – P. 2845–2857.
4. **Безкоровайна Л. Л.** Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки / Л. Л. Безкоровайна. – Одеса: Астропринт, 1999. – 168 с.
5. **Безкоровайна Л. Л.** Квазіареальна нескінченно мала деформація поверхні в E_3 / Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич // Proc. Intern. Geom. Center. – 2014. – Т. 7, № 2.– С. 6–19.
6. **Векуа И. Н.** Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
7. **Кошляков Н. С.** Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.

Безкоровайная Л. Л., Хомич Ю. С.
QA-ДЕФОРМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

Резюме

Для поверхности трехмерного евклидова пространства в статье рассмотрели бесконечно малую деформацию, при которой элемент площади поверхности изменяется по заранее заданному закону. Такая деформация в статье названа бесконечно малой квазиареальной деформацией или кратко QA-деформацией. Задача об отыскании QA-деформации, при которой сохраняется орт нормали к поверхности, сводится к исследованию одного неоднородного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка относительно одной неизвестной функции. Для поверхностей отрицательной гауссовой кривизны указаны начальные условия, при которых существует одна и только одна QA-деформация со стационарным ортом нормали. При этом для упомянутого уравнения были применены теории задач Коши и Гурса. Начальные условия этих задач выражены через вектор смещения.
Ключевые слова: бесконечно малая деформация, поле смещения, вариация, орт нормали .

Bezkorovaina L. L., Khomych Yu. S.
QA-DEFORMATION OF SURFACE OF NEGATIVE GAUSSIAN CURVATURE

Summary

An infinitesimal deformation with the given law of changing the element of area of a surface in Euclidean three-space was considered in this article. Such deformation in the article

was called the quasiareal infinitesimal deformation or, briefly, the QA-deformation. The problem of finding the QA-deformation, under which the unit normal vector to the surface is preserved, was reduced to the study of one nonhomogeneous partial differential equation of the second order with respect to one unknown function. The initial conditions, under which the only one QA-deformation with the stationary unit normal vector exists, were defined for the surfaces of a negative Gaussian curvature. In this case, for the above equation, the Cauchy and Goursat problems were applied. The initial conditions of these tasks were expressed through the deforming vector.
Key words: infinitesimal deformation, displacement field, variation, unit normal vector.

References

1. Mikes J., Stepanova E., Vanzurova A. (2015). *Differential geometry of special mappings.* Palacky University, Olomouc, 570 p.
2. Velimirovic L. S., Cvetkovic M. D., Ciric M. S., Velimirovic N. (2012). Analysis of Gaudi surfaces at small deformations. *Applied Mathematics and Computation.*, Vol. 218, №13, P. 6999–7004.
3. Robah S. (2010) On stable constant mean curvature surfaces in $S^2 \times R$ and $H^2 \times R$ /S. Robah *Trans. Amer. Math. Soc.*Vol. 362, № 6, P. 2845–2857.
4. Bezkorovaina L. L. (1999). *Arealni neskinchenno mali deformatsiyi i vrivnovazheni stany pruzhnoyi obolonky [Areal infinitesimal deformations and stability states of elastic shell].* Odessa: Astroprint, 168 p.
5. Bezkorovaina L. L., Khomych Yu. S. (2014). Kvaziarealna neskinchenno mala deformatsiya poverkhni v E_3 [Quaziareal infinitesimal deformation of the surface in E_3]. *Proc. Intern. Geom. Center*, Vol. 7, №2. – P. 6–19.
6. Vekua I. N. (1988). *Obobshchennyye analiticheskiye funktsii [Generalized analytic functions].* M.: Nauka, 512 p.
7. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. (1970). *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki [Equations in partial derivatives of mathematical physics].* M.: Vysshaya shkola, 710 p.

Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 1(31). – С. 23–32

УДК 539.3

П. П. Вагін, І. Я. Козій, Р. Б. Малець, Г. А. Шинкаренко
Львівський національний університет імені Івана Франка

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ ДО ЗСУВІВ ТА СТИСНЕННЯ

Сформульовано лінійну початково-крайову задачу для тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення (шестимодальний варіант). Записано ключові рівняння для визначення нестаціонарного термопружного стану розглядуваних оболонок. Особливість використаної моделі полягає в тому, що за основу взята кінематична гіпотеза оболонок типу Тимошенка—Міндліна (п'ятимодальний варіант), згідно з якою нормальний елемент недеформованої оболонки після її навантаження залишається прямолінійним, але може змінювати свою довжину і не бути ортогональним до деформованої серединної поверхні. Чисельно розв'язано задачу визначення термонапружень пластини, що перебуває в умовах нерівномірного нагріву. Розглянуто випадок, коли пластина нагрівається шляхом теплообміну згідно з законом Ньютона з середовищем, температура якого описується нормально–круговим законом. Здійснено порівняльний аналіз отриманих чисельних розв'язків з розв'язками, наведеними в літературі.
MSC: 74R10.
Ключові слова: оболонка, термопружність, метод скінченних елементів .
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134615.

Вступ. Дослідження пружно-деформівного стану оболонок, які перебувають під дією термосилових навантажень, має важливе значення для прикладних застосувань, так як багато конструкцій сучасного машинобудування містять оболонки в якості складових елементів.

В працях [2, 3, 9] побудовано початково-крайові та відповідні варіаційні задачі динаміки та статики оболонок під дією силових навантажень. Основна особливість використаного в цих працях підходу полягає в напівдискретизації вектора зміщень пружного тіла за змінною товщини на основі кінематичних гіпотез Тимошенка—Міндліна зі збереженням повного вектора поворотів нормалі серединної поверхні. Результуючі співвідношення моделі містять як невідомі компоненти вектора узагальнених переміщень, а саме: зміщення серединної поверхні оболонки та повороти її нормалі. Сукупність результатів праць [2,3,9] служить ґрунтовною основою для продовження дослідження цього класу моделей оболонок. В даній статті здійснюється спроба врахувати ефекти впливу нерівномірного змінного в часі температурного поля в згаданій моделі оболонок.

Основні результати

1. Геометрія та основні співвідношення теорії тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення. Розглянемо оболонку як тривимірне тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими мала у порівнянні з іншими розмірами тіла. Серединну поверхню оболонки Ω віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ і введемо ортогональну до неї змінну α_3 так, що $|\alpha_3| \leqslant \frac{h}{2}$, де h — товщина оболонки. Вважаємо, що

Надійшла 07.03.2018

координатні лінії α_1, α_2 збігаються з лініями головних кривин. Позначимо через Γ межу серединної поверхні Ω . Тоді точки оболонки визначатимуться множиною

$$V = \Omega \times]-h/2, h/2[,$$

межа S якої складається з лицьових поверхонь

$$\Omega_{\pm} = \Omega \times \{-h/2, h/2\}$$

та бічної поверхні

$$\Sigma = \Gamma \times]-h/2, h/2[.$$

Нехай компоненти зовнішнього навантаження, що діє на оболонку, залежать як від координат $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$, так і від часу t , тоді викликані ними переміщення $U = \{U_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)\}_{i=1}^{3}$, деформації та напруження теж є функціями часу. З огляду на малу у порівнянні з іншими характерними розмірами оболонки товщину h, розгорнемо вектор зміщень точок оболонки за формулою Маклорена в околі серединної поверхні зі збереженням лінійних членів. Тоді

$$U_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) = u_i(\alpha, t) + \alpha_3 \gamma_i(\alpha, t) + O(h^2), i = 1, 2, 3.$$

Тут $u_i(\alpha, t) = U_i(\alpha_1, \alpha_2, 0, t)$ описують зміщення точок серединної поверхні Ω в часі, а $\gamma_i(\alpha, t) = \partial_3 U_i(\alpha_1, \alpha_2, 0, t)$ визначають кут повороту нормалі незалежно від u_i . Тут і надалі прийнято позначення $\partial_i = \partial / \partial \alpha_i$. Таким чином, для нестаціонарного аналізу термопружного стану оболонок, податливих до зсувів та стиснення, потрібно записати систему з шести рівнянь динамічної рівноваги для визначення вектора узагальнених переміщень серединної поверхні $u\,(t) = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ та доповнити її відповідними крайовими умовами на межі серединної поверхні.

Деформаційні співвідношення, що пов'язують компоненти тензора лінійної деформації з переміщеннями, подамо для зручності у матричному вигляді

$$e = C_l u,$$

де через $e = (e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}, \kappa_{13}, \kappa_{23})^T$ позначено вектор компонент тензора лінійної деформації, який складається з тангенціальних $e_{ij}\,(u)$ та згинних $\kappa_{ij}\,(u)$ складових; C_l — матриця диференціальних операторів наведена в [2].

Припустимо, що оболонка піддається дії об'ємної сили $\{F_i\}_{i=1}^{3}$ в області V, поверхневих навантажень $\left\{\sigma_i^{\pm h/2}\right\}_{i=1}^{3}$, прикладених до поверхонь $\Omega_{\pm}$, і поверхневих напружень $\left\{\sigma_t^{\Sigma}, \sigma_s^{\Sigma}, \sigma_n^{\Sigma}\right\}$ ($\vec{t}$, $\vec{s}$, $\vec{n}$ — орти правої трійки криволінійних координат) на частині Σ_σ поверхні Σ, причому $\Sigma_\sigma = \Gamma_\sigma \times]-h/2, h/2[$. На решті бічної поверхні $\Sigma_u = \Sigma \backslash \Sigma_\sigma$ задані переміщення $u|_{\Sigma_u} = \{u_i^g\}_{i=1}^{6}$.

На відміну від математичних моделей оболонок Тимошенка—Міндліна (п'ятимодальний варіант) [7], постулювання ненульової компоненти γ_3 дозволяє моделювати пружно-деформівний стан оболонки з врахуванням апроксимації σ_{33}.

Введемо інтегральні характеристики напружень σ_{ij}

$$[N_{ij}, M_{ij}] = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \left(1 + \alpha_3 k_{3-i}\right) [1, \alpha_3]\, d\alpha_3, \quad N_{33} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33} \left(1 + \alpha_3 k_1\right) \left(1 + \alpha_3 k_2\right) d\alpha_3,$$

$$[N_{i3}, M_{i3}] = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{i3} \left(1 + \alpha_3 k_{3-i}\right) [1, \alpha_3]\, d\alpha_3, \quad i, j = 1, 2.$$

Надалі будемо використовувати умову рівності з точністю до $O\left(h^2\right)$ крутних моментів

$$H = M_{12} = M_{21}$$

та симетричне зусилля Новожилова [6,7]

$$S = N_{12} - k_2 M_{21} = N_{21} - k_1 M_{12}.$$

Тоді вектор внутрішніх зусиль і моментів оболонки, що породжені вектором узагальнених переміщень, можна записати:

$$\sigma = \left(N_{11}, N_{22}, N_{33}, S, N_{13}, N_{23}, M_{11}, M_{22}, H, M_{13}, M_{23}\right)^T.$$

Рівняння руху тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення в термінах зусиль і моментів мають вигляд [1,2]

$$-A_1 A_2 \rho h \ddot{u}_1 + \partial_1 \left(N_{11} A_2\right) - N_{22} \partial_1 A_2 + S \partial_2 A_1 + \frac{1}{2} \left(\partial_2 \left(H k_1 A_1\right) + H k_2 \partial_2 A_1\right) +$$
$$+ k_1 A_1 A_2 N_{13} + A_1 \partial_2 S = -P_1 A_1 A_2,$$
$$-A_1 A_2 \rho h \ddot{u}_2 + \partial_2 \left(N_{22} A_1\right) - N_{11} \partial_2 A_1 + S \partial_1 A_2 + \frac{1}{2} \left(\partial_1 \left(H k_2 A_2\right) + H k_1 \partial_1 A_2\right) +$$
$$+ k_2 A_1 A_2 N_{23} + A_2 \partial_1 S = -P_2 A_1 A_2,$$
$$-A_1 A_2 \rho h \ddot{u}_3 + \partial_1 \left(N_{13} A_2\right) + \partial_2 \left(N_{23} A_1\right) - A_1 A_2 \left(N_{11} k_1 + N_{22} k_2\right) = -P_3 A_1 A_2,$$
$$-A_1 A_2 \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\gamma}_1 + \partial_1 \left(M_{11} A_2\right) - M_{22} \partial_1 A_2 + H \partial_2 A_1 - A_1 A_2 N_{13} + A_1 \partial_2 H = -A_1 A_2 m_1,$$
$$-A_1 A_2 \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\gamma}_2 + \partial_2 \left(M_{22} A_1\right) - M_{11} \partial_2 A_1 + H \partial_1 A_2 - A_1 A_2 N_{23} + A_2 \partial_1 H = -A_1 A_2 m_2,$$
$$-A_1 A_2 \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\gamma}_3 + \partial_1 \left(A_2 M_{13}\right) + \partial_2 \left(A_1 M_{23}\right) - A_1 A_2 \left(N_{33} + k_1 M_{11} + k_2 M_{22}\right) = -A_1 A_2 m_3,$$

де $A_i = A_i\left(\alpha_1, \alpha_2\right)$ і $k_i = k_i\left(\alpha_1, \alpha_2\right)$ — коефіцієнти першої квадратичної форми та головні кривини поверхні Ω відповідно; ρ — густина матеріалу.

Крайові умови на напруження на частині контуру серединної поверхні Γ_σ $\left(\Gamma_\sigma \in \Gamma\right)$ записуються наступним чином:

$$N_t = N_{11} \cos^2\left(n, \alpha_1\right) + N_{22} \sin^2\left(n, \alpha_1\right) + S \sin 2\left(n, \alpha_1\right) + \tfrac{1}{2} H \left(k_1 + k_2\right) \sin 2\left(n, \alpha_1\right),$$

$$N_s = \tfrac{1}{2}\left(N_{22} - N_{11}\right)\sin 2\left(n,\alpha_1\right) + S\cos 2\left(n,\alpha_1\right) + H\left(k_2\cos^2\left(n,\alpha_1\right) - k_1\sin^2\left(n,\alpha_1\right)\right),$$

$$N_n = N_{13}\cos\left(n,\alpha_1\right) + N_{23}\sin\left(n,\alpha_1\right),$$

$$M_t = M_{11}\cos^2\left(n,\alpha_1\right) + M_{22}\sin^2\left(n,\alpha_1\right) + H\sin 2\left(n,\alpha_1\right),$$

$$M_s = \tfrac{1}{2}\left(M_{22} - M_{11}\right)\sin 2\left(n,\alpha_1\right) + H\cos 2\left(n,\alpha_1\right),$$

$$M_n = M_{13}\cos\left(n,\alpha_1\right) + M_{23}\sin\left(n,\alpha_1\right).$$

Через (n,α_1) позначено кут між нормаллю до Γ та напрямком α_1, а також вище використано наступні позначення усереднених характеристик навантаження:

$$P_i = \left(1 + \tfrac{h}{2}k_1\right)\left(1 + \tfrac{h}{2}k_2\right)\sigma_i^{+h/2} - \left(1 - \tfrac{h}{2}k_1\right)\left(1 - \tfrac{h}{2}k_2\right)\sigma_i^{-h/2} +$$

$$+ \int\limits_{-h/2}^{h/2} F_i\left(1 + \alpha_3 k_1\right)\left(1 + \alpha_3 k_2\right)d\alpha_3,$$

$$m_i = \tfrac{h}{2}\left(\left(1 + \tfrac{h}{2}k_1\right)\left(1 + \tfrac{h}{2}k_2\right)\sigma_i^{+h/2} - \left(1 - \tfrac{h}{2}k_1\right)\left(1 - \tfrac{h}{2}k_2\right)\sigma_i^{-h/2}\right) +$$

$$+ \int\limits_{-h/2}^{h/2} F_i\left(1 + \alpha_3 k_1\right)\left(1 + \alpha_3 k_2\right)\alpha_3 d\alpha_3,$$

$$[N_t, M_t] = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_t^{\Sigma}\left(1 + \alpha_3 k_t\right)[1,\alpha_3]d\alpha_3, \quad [N_s, M_s] = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_s^{\Sigma}\left(1 + \alpha_3 k_s\right)[1,\alpha_3]d\alpha_3,$$

$$[N_n, M_n] = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_n^{\Sigma}\left[1,\alpha_3\right]d\alpha_3, \qquad i = 1,2,3.$$

Під k_t треба розуміти кривину бічної поверхні оболонки в напрямку нормалі до кривої Γ_σ (контуру серединної поверхні), а під k_s — кривину бічної поверхні в напрямку дотичної до Γ_σ.

Для встановлення кінематичної визначеності розглядуваної моделі оболонок необхідно додати крайові умови в зміщеннях на частині контуру серединної поверхні $\Gamma_u = \Gamma \backslash \Gamma_\sigma$:

$$u_t^g = u_1\cos\left(n,\alpha_1\right) + u_2\sin\left(n,\alpha_1\right),$$

$$u_s^g = -u_1\sin\left(n,\alpha_1\right) + u_2\cos\left(n,\alpha_1\right),$$

$$u_n^g = -u_3,$$

$$\gamma_t^g = \gamma_1\cos\left(n,\alpha_1\right) + \gamma_2\sin\left(n,\alpha_1\right),$$

$$\gamma_s^g = -\gamma_1\sin\left(n,\alpha_1\right) + \gamma_2\cos\left(n,\alpha_1\right),$$

$$\gamma_n^g = \gamma_3.$$

Введені усереднені характеристики навантаження об'єднаємо у вектори:

$P = \left(P_1, P_2, P_3, m_1, m_2, m_3\right)^T$ — вектор зовнішнього навантаження;

$\sigma_g = (N_t, N_s, N_n, M_t, M_s, M_n)^T$ — вектор крайових зусиль-моментів;

$u_g = (u_t^g, u_s^g, u_n^g, \gamma_t^g, \gamma_s^g, \gamma_n^g)^T$ — вектор крайових зміщень.

Тоді, для подальшого використання чисельних методів, систему рівнянь руху оболонок, податливих до зсувів та стиснення, статичні та кінематичні крайові умови запишемо для зручності у матричному вигляді [2,3]:

$$C_\sigma \sigma + P - m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad \forall t \in (0, T],$$

$$G_\sigma \sigma|_{\Gamma_\sigma} = \sigma_g, \quad G_u u|_{\Gamma_u} = u_g, \quad \forall t \in [0, T],$$

де $m = diag\left(\rho h, \rho h, \rho h, \rho\frac{h^3}{12}, \rho\frac{h^3}{12}, \rho\frac{h^3}{12}\right)$.

Для однозначного інтегрування системи рівнянь, крім статичних та геометричних крайових умов необхідно задати ще початкові умови

$$u(\alpha, 0) = u^0(\alpha), \qquad \dot{u}(\alpha, 0) = u^1(\alpha).$$

Вважаємо також, що оболонка є лінійно пружною і знаходиться в нерівномірному температурному полі $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Тоді, згідно гіпотези Дюгамеля-Неймана, для ізотропного матеріалу оболонки компоненти внутрішніх зусиль і моментів та деформацій будуть пов'язані між собою наступними залежностями [4, 8]:

$$N_{11} = D_N\left((1-\nu)e_{11} + \nu(e_{22} + e_{33}) - (1+\nu)\alpha_T T_1\right),$$

$$N_{22} = D_N\left((1-\nu)e_{22} + \nu(e_{11} + e_{33}) - (1+\nu)\alpha_T T_1\right),$$

$$N_{33} = D_N\left((1-\nu)e_{33} + \nu(e_{11} + e_{22}) - (1+\nu)\alpha_T T_1\right),$$

$$S = D_N(1-2\nu)e_{12}, \ \ N_{13} = D_N(1-2\nu)e_{13}, \ \ N_{23} = D_N(1-2\nu)e_{23},$$

$$M_{11} = D_M\left((1-\nu)\kappa_{11} + \nu\kappa_{22} - (1+\nu)\alpha_T T_2\right),$$

$$M_{22} = D_M\left((1-\nu)\kappa_{22} + \nu\kappa_{11} - (1+\nu)\alpha_T T_2\right),$$

$$H = D_M(1-2\nu)\kappa_{12}, \ \ M_{13} = D_M(1-2\nu)\kappa_{13}, \ \ M_{23} = D_M(1-2\nu)\kappa_{23},$$

де $D_N = \frac{Eh}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $D_M = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)(1-2\nu)}$ — тангенціальна та згинна жорсткість; $T_1 = \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}(T - T_0)\,d\alpha_3$, $T_2 = \frac{12}{h^3}\int\limits_{-h/2}^{h/2}(T - T_0)\,\alpha_3 d\alpha_3$ — усереднені температурні характеристики, E — модуль Юнга, ν — коефіцієнт Пуассона; α_T — коефіцієнт лінійного температурного розширення, T_0 — початкове значення температури.

Якщо ввести вектор $\Phi = \left(hT_1, hT_1, hT_1, 0, 0, 0, \frac{h^3}{12}T_2, \frac{h^3}{12}T_2, 0, 0, 0\right)^T$, то вище наведений зв'язок у матричному записі, буде мати вигляд [9]:

$$\sigma = B - \frac{\alpha_T E}{1-2\nu}\Phi.$$

Тут B — матриця пружних постійних [2].

2. Варіаційна задача. Розв'язування задачі про нестаціонарне термопружне деформування тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення, пропонується методом скінченних елементів [1]. Тому сформулюємо варіаційну постановку початково-крайової задачі лінійної теорії розглядуваних оболонок.

Не зменшуючи загальності, допускатимемо, що частина Γ_u бічної поверхні оболонки жорстко защемлена, тобто

$$G_u u|_{\Gamma_u} = 0.$$

Введемо функціональні простори $G = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \left[L^2(\Omega)\right]^6 \right\}$ та $V = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \left[W_2^1(\Omega)\right]^6 \ : \ v|_{\Gamma_u} = 0 \right\}$ з нормою

$$\|v\|_V^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\|v_i\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|\xi_i\|^2_{W_2^1(\Omega)} \right)$$

та позначимо через V' простір, спряжений до простору V .

Тут $W_2^1(\Omega)$ — простір Соболєва функцій, квадрати яких разом зі своїми першими похідними інтегровані за Лебегом в області Ω .

Вважаємо, що дані задачі задовольняють включення: $\theta = (T_1, T_2)^T \in \left[L^2(\Omega)\right]^2$, $\sigma_g \in \left[L^2(\Omega)\right]^6$, $P \in \left[L^2(\Omega)\right]^6$, $u^0 \in V$, $u^1 \in G$. Фіксуючи момент часу $t \in (0, T]$, $0 < T < +\infty$, помножимо скалярно рівняння руху на довільний вектор $v \in V$ і проінтегруємо результат по області Ω. Отримаємо наступне варіаційне рівняння:

$$\mu(\ddot{u}(t), \nu) + a(u(t), \nu) = \langle L(t), \nu \rangle, \qquad \forall t \in (0, T].$$

Тут білінійні форми $a(u, \nu)$, $\mu(u, \nu)$ та лінійний функціонал $\langle L, \nu \rangle$ мають наступний вигляд:

$$a(u, v) = \iint\limits_{\Omega} (C_l v)^T E_0 B C_l u d\Omega,$$

$$\mu(u, v) = \iint\limits_{\Omega} \rho \left(\sum_{i=1}^{3} \left(u_i v_i + \frac{h^2}{12} \gamma_i \xi_i \right) \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$\langle L, v \rangle = \langle l, v \rangle + \langle b, v \rangle,$$

$$\langle l, \nu \rangle = \sum_{i=1}^{3} \iint\limits_{\Omega} (P_i \nu_i + m_i \xi_i) \, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_\sigma} (N_t \nu_t + N_s \nu_s + N_n \nu_n + M_t \xi_t + M_s \xi_s + M_n \xi_n) \, d\Gamma,$$

$$\langle b, \nu \rangle = \iint\limits_{\Omega} (C_l \nu)^T \frac{\alpha_T E}{1 - 2\nu} \Phi(\theta) \, d\Omega.$$

Сформулюємо варіаційну постановку початково-крайової задачі лінійної теорії тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення.

Задано $l \in L^2(0, T; V')$, $u^0 \in V$, $u^1 \in G$, $\theta \in \left[L^2(\Omega)\right]^2$.

Знайти вектор узагальнених переміщень $u \in L^2(0, T; V)$ такий, що

$$\mu(\ddot{u}(t), \nu) + a(u(t), \nu) = \langle L(t), \nu \rangle, \qquad \forall t \in (0, T],$$

$$\mu\left(\dot{u}\left(0\right)-u^1,\nu\right)=0,\quad a\left(u\left(0\right)-u^0,\nu\right)=0,\quad \forall\nu\in V.$$

Для інтегрування в часі отриманої задачі Коші можливе застосування різних методів. В даній праці розв'язування задачі здійснюється методом прямого інтегрування, який базується на схемі Ньюмарка [1].

3. Числовий приклад. Досліджували задачу визначення термонапружень пластини, що перебуває в умовах нерівномірного нагріву. Розглядався випадок, коли пластина нагрівається шляхом теплообміну згідно з законом Ньютона з середовищем, температура якого описується нормально-круговим законом $T=T_m e^{-kr^2}$, де T_m — максимальна температура, k — коефіцієнт, який характеризує зосередженість нагріву.

Для безмежної пластини в припущенні, що температура разом зі своїми похідними на нескінченності зникає та в початковий момент часу дорівнює нулю, співвідношення для визначення температурного поля в полярній системі координат (r,φ) мають вигляд

$$\left(\Delta-m^2-\frac{\partial}{\partial t}\right)T=-m^2T_m e^{-kr^2},$$

де $m^2=\frac{4Bi}{h^2}$, Bi — критерій Біо. Температура і пружні напруження для такої задачі визначені в [5]:

$$T\left(r,t\right)=m^2T_m\int\limits_0^t\frac{1}{1+4k\eta}e^{-m^2\eta-\frac{kr^2}{1+4k\eta}}d\eta,$$

$$\sigma_r=-\frac{\alpha_T E m^2 T_m}{2kr^2}\int\limits_0^t e^{-m^2\eta}\left(1-e^{-kr^2/1+4k\eta}\right)d\eta,$$

$$\sigma_\varphi=-\sigma_r-\alpha_T ET,\qquad \tau_{r\varphi}=0.$$

Напруження в декартовій системі координат будуть

$$\sigma_{11}=\sigma_r\cos^2\varphi+\sigma_\varphi\sin^2\varphi-\tau_{r\varphi}\cos 2\varphi,$$

$$\sigma_{22}=\sigma_r\sin^2\varphi+\sigma_\varphi\cos^2\varphi-\tau_{r\varphi}\sin 2\varphi,$$

$$\sigma_{12}=(\sigma_r-\sigma_\varphi)\cos\varphi\sin\varphi.$$

У таблиці 1 наведено порівняння результатів розрахунку напружень для цієї задачі, розглянутих у праці [5] в межах теорії пружності для усталеного теплового режиму (при $t\to\infty$), із результатами реалізованої методом скінченних елементів моделі зсувних оболонок, описаної у даній роботі. Розрахунок проведений у випадку, коли $-0,075\leqslant\alpha_1,\alpha_2\leqslant 0,075$, модуль Юнга матеріалу пластини $E=2,1\cdot10^5$МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,33$, товщина $h=0,01$ м, коефіцієнт лінійного температурного розширення $\alpha_T=12\cdot10^{-6}$.

З огляду на симетричність задачі, розглядалася чверть пластини $-0,075\leqslant\alpha_1,\alpha_2\leqslant 0$. На межах $\alpha_1,\alpha_2=0$ задавалися умови симетрії, а на $\alpha_1,\alpha_2=-0,075$ напруження обчислені за формулами, наведеними у [5].

Таблиця 1

Термонапруження пластини в умовах нерівномірного нагріву

			Аналітичний розв'язок		МСЕ	
α_1	α_2	T	$\sigma_{11}\times$ 10^{-9}Па	$\sigma_{22}\times$ 10^{-9}Па	$\sigma_{11}\times$ 10^{-9}Па	$\sigma_{22}\times$ 10^{-9}Па
0	0	500.53	-0.631	-0.631	-0.624	-0.624
0	-0.0125	469.45	-0.572	-0.611	-0.599	-0.693
0	-0.025	387.49	-0.420	-0.556	-0.400	-0.575
0	-0.0375	281.90	-0.231	-0.480	-0.185	-0.495
0	-0.05	181.20	-0.040	-0.395	0.003	-0.427
0	-0.0625	103.27	0.056	-0.316	0.161	-0.297
0	-0.075	52.43	0.116	-0.248	0.230	-0.266
-0.0125	0	469.45	-0.611	-0.572	-0.693	-0.599
-0.025	0	387.49	-0.556	-0.420	-0.575	-0.400
-0.0375	0	281.90	-0.480	-0.231	-0.495	-0.185
-0.05	0	181.20	-0.395	-0.040	-0.427	0.003
-0.0625	0	103.27	-0.316	0.056	-0.297	0.161
-0.075	0	52.43	-0.248	0.116	-0.266	0.230

Висновки. У статті сформульовано початково-крайову задачу нестаціонарної термопружності. Математична модель заснована на лінійній теорії оболонок, податливих до зсувів та стиснення. Фізичні співвідношення відображають гіпотезу Дюгамеля—Неймана. Також сформульована відповідна варіаційна задача. Невідомими варіаційної задачі нестаціонарної термопружності оболонок, податливих до зсувів та стиснення, виступають вектор пружного зміщення точок серединної поверхні і вектор кутів повороту нормалі серединної поверхні.

З аналізу наведених результатів обчислень випливає, що пружні напруження, знайдені за уточненою теорією оболонок, податливих до зсувів та стиснення, практично повністю збігаються з аналітичними розв'язками, знайденими іншими авторами, в межах теорії пружності.

1. **Бате К.** Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
2. **Вагін П. П.** Про вільні коливання оболонок, податливих на зсув та стиснення / П. П. Вагін, І. Я. Шот // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2012. – Вип. 10. – С. 177–184.
3. **Вагін П. П.** Про одну математичну модель динамічного деформування гнучких оболонок / П. П. Вагін, Н. В. Іванова, Г. А. Шинкаренко // Доп. НАН України. – 1999. – № 6. – С. 54–59.

4. **Григоренко Я. М.** Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ / Я. М. Григоренко, А. П. Мукоед. – Киев: Вища школа, 1983. – 286 с.
5. **Коляно Ю. М.** Температурные напряжения в пластинке при двусторонней лазерной обработке / Ю. М. Коляно, И. И. Бернар // Проблемы прочности. – 1983. – № 5. – С. 36–38.
6. **Новожилов В. В.** Основы нелинейной теории упругости / В. В. Новожилов. – Москва;Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1948. – 212 с.
7. **Пелех Б. Л.** Обобщенная теория оболочек / Б. Л. Пелех. – Львов: Вищ. шк., 1978. – 160 с.
8. **Подстригач Я. С.** Термоупругость тонких оболочек / Я. С. Подстригач, Р. П. Швец. – Киев: Наукова думка, 1978. – 344 с.
9. **Vahin P. P.** Variational formulation of the problem of nonstationary thermoelasticity for thin shells compliant to shears and compression / P. P. Vahin, R. B. Malets', H. A. Shynkarenko // J. Math. Sci. – 2016. – 217, No. 3. – P. 345–364.

Вагин П. П., Козий И. Я., Малец Р. Б., Шинкаренко Г. А.
Исследование нестационарного термоупругого состояния оболочек, податливых к сдвигам и сжатию

Резюме

Сформулирована линейная начально-краевая задача для тонких оболочек, податливых к сдвигам и сжатию (шестимодальный вариант). Записаны ключевые уравнения для определения нестационарного термоупругого состояния рассматриваемых оболочек. Особенность использованной модели заключается в том, что за основу взята кинематическая гипотеза оболочек типа Тимошенко—Миндлина (пятимодальный вариант), согласно которой нормальный элемент недеформированной оболочки после ее нагружения остается прямолинейным, но может изменять свою длину и не быть ортогональным к деформированной срединной поверхности. Численно решена задача определения термонапряжений пластины, которая находится в условиях неравномерного нагрева. Рассмотрен случай, когда пластина нагревается путем теплообмена по закону Ньютона со средой, температура которой описывается нормально–круговым законом. Осуществлен сравнительный анализ полученных решений с решениями, приведенными в литературе.
Ключевые слова: оболочка, термоупругость, метод конечных элементов .

Vahin P. P., Koziy I. Y., Malets' R. B., Shynkarenko H. A.
Investigation of the non-stationary thermoelastic state of shells compliant to shears and compression

Summary

A linear boundary-value problem for thin shells compliant to shears and compression (a six-modal variant) is formulated. The key equations for determining the non-stationary thermoelastic state of the considered shells are recorded. The peculiarity of the used model is that the kinematic hypothesis of the shells of the Tymoshenko-Mindlin type (a five-modal variant) is taken as a basis, according to which the normal element of the deformed shell after its loading remains straightforward, but may change its length and not be orthogonal to the deformed median surface. Numerically solved the problem of determining the thermal stresses of a plate that is in uneven heating conditions. The case when the plate is heated by heat exchange in accordance with Newton's law with an environment whose temperature is described by a normal-circular law is considered. A comparative analysis of the obtained

numerical solutions with the solutions given in the literature is carried out.
Key words: shell, thermoelasticity, finite element method.

References

1. Bathe K.-J., Wilson E.L. (1976) *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
2. Vahin P.P., Shot I.Ya. (2012) On free vibrations of shells amenable to shear and compression // *Prykl. problemy mekh. i mat.*, No. 10, P. 177–184.
3. Vahin P.P., Ivanova N.V., Shynkarenko G.A. (1999) On a mathematical model of dynamic deformation of flexible shells // *Dopov. Nac. Akad. Nauk Ukr.*, № 6. – P. 54–59.
4. Grigorenko Ya.M., Mukoyed A.P. (1983) *Solving nonlinear problems in the theory of shells on computers* [in Russian], Vyshcha Shkola, Kiev.
5. Kolyano Yu.M., Bernar I.I. (1983) Temperature Stresses in a Plate under Bilateral Laser Treatment. // *Strength of Materials*, No. 5. – P. 36–38.
6. Novozhilov V.V. (1999) *Foundations of Nonlinear Elasticity Theory*, Dover, New York.
7. Pelekh B.L. (1978) *Generalized Theory of Shells* [in Russian], Vyshcha Shkola, Lviv.
8. Podstrigach Ya.S., Shvets R.N. (1978) *Thermoelasticity of thin shells* [in Russian], Naukova dumka, Kiev.
9. Vahin P.P., Malets' R.B., Shynkarenko H.A. (2016) Variational formulation of the problem of nonstationary thermoelasticity for thin shells compliant to shears and compression // *J. Math. Sci.*, 217, No. 3. – P. 345–364.

УДК 519.624.2

В. В. Вербицкий, И. Н. Иванищева
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
Одесский национальный политехнический университет

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

Предложен итерационный алгоритм вычисления i-го собственного значения (с. з.) и соответствующей собственной функции (с. ф.) задачи Штурма—Лиувилля на конечном интервале. Алгоритм использует известные асимптотические формулы для с. з. и с. ф. задачи Штурма—Лиувилля. Каждая итерация алгоритма требует решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка. Левая часть этого уравнения является дифференциальным оператором левой части уравнения Штурма—Лиувилля с некоторым сдвигом, а правая — приближением к искомой с. ф. Приведен пример, в котором упомянутая краевая задача решалась методом конечных элементов с тригонометрическими функциями-крышками, определенными на равномерной сетке. В этом примере предложенный алгоритм фактически сводится к итерационному алгоритму определения i-го с. з. конечно-элементной аппроксимации задачи Штурма—Лиувилля, являющейся обобщенной матричной задачей на с. з., только i-е с. з. которой приближает с. з. исходной задачи.

MSC: 65L10, 65L15.
Ключевые слова: задача Штурма—Лиувилля, собственное значение, асимптотические формулы для собственных значений, метод конечных элементов .
DOI: 10.18524/2519-206x.2018.1.134616.

Введение. Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля, которую без ограничения общности можно записать следующим образом,

$$\begin{gathered} -u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in (0,\pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $q(x) \geqslant 0$ — заданная вещественная функция. Ищутся такие значения числового вещественного параметра λ, что краевая задача (1) имеет нетривиальное (не равное тождественно нулю) решение. Соответствующие значения λ называются собственными значениями (с. з.), а соответствующие решения $u(x)$ — собственными функциями (с. ф.). Задача (1) обладает следующими свойствами (см., например, [2,5]). Существует бесконечное счетное множество вещественных собственных значений:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots .$$

Каждому с. з. λ_i соответствует единственная, с точностью до постоянного множителя, с. ф. $u_i(x)$. Собственные функции $u_i(x)$ образуют ортонормированный базис в $L_2(0,\pi)$. Задача (1) широко используется в математическом моделировании физических процессов, являясь, в частности, одним из основных инструментов квантовой механики (см., например, [5]). В настоящее время существует

Получена 12.02.2018

большое количество методов численного решения задачи (1) (см., например, [9]). Все они имеют свои преимущества и недостатки. Так, методы конечных разностей и конечных элементов позволяют вычислять с высокой точностью лишь с. з. и с. ф. с младшими порядковыми номерами, ибо погрешности с. з. и с. ф. растут с ростом номера с. з.[6–8,10]. С другой стороны, методы, основанные на аппроксимации потенциала $q(x)$ (обычно кусочно-постоянными или кусочно-линейными функциями), позволяют приближать с. з. с точностью, которая не зависит от номера с. з. Однако с. з. находятся как нули некоторой осциллирующей функции, определение корней которой является сложной задачей. Кроме того, для найденного приближенного с. з. надо определить его номер в спектре [3.4].

Вместе с тем, в литературе известны асимптотические формулы для с. з. и с. ф. задачи Штурма—Лиувилля, точность которых возрастает с увеличением порядкового номера с. з. и соответствующей с. ф. (см., например, [1, 2, 5]). Так, если $q(x)$ имеет ограниченную производную, то для с. з. и с. ф. задачи (1) имеют место асимптотические формулы [2, с. 21]:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad c = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi q(\tau)d\tau, \tag{2}$$

$$u_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx) + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3}$$

В статье рассматривается построение численного алгоритма нахождения с. з. и с. ф. задачи (1) на основании асимптотических формул (2), (3).

Основные результаты

1. Построение итерационного алгоритма. Задаче (1) соответствует следующая вариационная задача. Найти такую пару $\{\lambda, u\}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $u \in H_0^1(0,\pi)$, что

$$a(u,v) = \lambda(u,v) \qquad \forall v \in H_0^1(0,\pi), \tag{4}$$

где

$$a(u,v) = \int\limits_0^\pi u'v' + q(x)uvdx, \quad (u,v) = \int\limits_0^\pi uvdx.$$

Определим линейный непрерывный самосопряженный оператор $T : L_2(0,\pi) \to H_0^1(0,\pi)$, поставив в соответствие произвольной функции $f \in L_2(0,\pi)$ единственное решение $u \in H_0^1(0,\pi)$ вариационной задачи

$$a(u,v) = (f,v) \qquad \forall v \in H_0^1(0,\pi).$$

Поскольку по теореме вложения Соболева пространство $H_0^1(0,\pi)$ компактно вложено в $L_2(0,\pi)$, то оператор T является компактным оператором в пространстве $H_0^1(0,\pi)$. Если λ — с. з., а u — соответствующая с. ф. задачи (4), то

$$Tu = \frac{1}{\lambda}u.$$

Таким образом, вариационная задача на собственные значения (4) эквивалентна задаче на собственные значения для компактного в пространстве $H_0^1(0,\pi)$ оператора T. Наибольшее с. з. $\mu_1 = 1/\lambda_1$ и соответствующую с. ф. оператора T можно найти с помощью следующего итерационного процесса, являющегося обобщением степенного метода нахождения наибольшего по модулю с. з. матрицы (конечномерного оператора) на случай компактного оператора:

$$\begin{aligned}
&v^{(k+1)} = Tu^k,\\
&\mu^{(k)} = (v^{(k+1)}, u^{(k)}),\\
&u^{(k+1)} = v^{(k+1)}/||v^{(k+1)}||, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $(\cdot,\cdot)$, $||\cdot||$ — скалярное произведение и норма в $L_2(0,\pi)$, $u^{(0)}$ — произвольное начальное приближение.

Пусть $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис $L_2(0,\pi)$ из собственных функций задачи (4) и

$$u^{(0)} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i, \quad ||u^{(0)}||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2.$$

Теорема. *Если начальное приближение $u^{(0)}$ выбрано так, что $\alpha_1 \neq 0$, то итерационный процесс (5) сходится:*

$$\mu^{(k)} = \mu_1 + O\left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{2k}\right), \tag{6}$$

$$u^{(k)} = u_1 + O\left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{k}\right). \tag{7}$$

Доказательство. Легко проверить, что

$$u^{(k)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mu_i^k u_i}{\left|\left|\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mu_i^k u_i\right|\right|}, \quad \mu^{k+1} = (Tu^{(k)}, u^{(k)}) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \mu_i^{2k+1}}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \mu_i^{2k}}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\alpha_1^2 \mu_1^{2k}} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \mu_i^{2k+1} = \mu_1 + \frac{1}{\alpha_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i+1}^2 \mu_{i+1} \left(\frac{\mu_{i+1}}{\mu_1}\right)^{2k} \leqslant \mu_1 + \frac{\mu_2}{\alpha_1^2} ||u^{(0)}||^2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{2k},$$

$$\frac{1}{\alpha_1^2 \mu_1^{2k}} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \mu_i^{2k} = 1 + \frac{1}{\alpha_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i+1}^2 \left(\frac{\mu_{i+1}}{\mu_1}\right)^{2k} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha_1^2} ||u^{(0)}||^2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{2k}.$$

Значит,

$$\mu^{(k+1)} = \frac{\mu_1 + O\left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{2k}\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{2k}\right)} = \mu_1 + O\left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{2k}\right).$$

Аналогично доказывается утверждение (7).

Пусть $\sigma > 0$ — некоторое вещественное число. Рассмотрим задачу на собственные значения со сдвигом σ. Найти такую пару $\{\nu, u\}$, $\nu \in \mathbf{R}$, $u \in H_0^1(0,\pi)$, что

$$a(u,v) - \sigma(u,v) = \nu(u,v) \qquad \forall v \in H_0^1(0,\pi). \tag{8}$$

Определим линейный непрерывный самосопряженный оператор $T_\sigma : L_2(0,\pi) \to H_0^1(0,\pi)$, ставя в соответствие произвольной функции $f \in L_2(0,\pi)$ единственное решение $u \in H_0^1(0,\pi)$ вариационной задачи

$$a(u,v) - \sigma(u,v) = (f,v) \qquad \forall v \in H_0^1(0,\pi).$$

Задача (8) равносильна задаче на собственные значения для оператора T_σ (компактного в $H_0^1(0,\pi)$): найти такую пару $\{\nu, u\}$, $\nu \in \mathbf{R}$, $u \in H_0^1(0,\pi)$, что

$$T_\sigma u = \frac{1}{\nu} u.$$

Поскольку с. з. λ задачи (4) и с. з. ν задачи (8) связаны соотношением $\nu = \lambda - \sigma$, то ближайшее к σ с. з. λ_i, соответствующее минимальному по модулю с. з. $\nu_i = \lambda_i - \sigma$, можно найти, определяя максимальное по модулю с. з. $\frac{1}{\nu_i}$ оператора T_σ с помощью итерационного процесса (5) для оператора T_σ:

$$\begin{aligned} &v^{(k+1)} = T_\sigma u^k, \\ &\mu^{(k)} = (v^{(k+1)}, u^{(k)}), \\ &u^{(k+1)} = v^{(k+1)}/||v^{(k+1)}||, \qquad k = 0,1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{9}$$

где $u^{(0)}$ — начальное приближение, выбранное так, что $(u^{(0)}, u_i) \neq 0$. Согласно (6) и (7),

$$\mu^{(k)} = \frac{1}{\lambda_i - \sigma} + O\left(\left(\frac{\lambda_i - \sigma}{\lambda_{i+1} - \sigma}\right)^{2k}\right), \tag{10}$$

$$u^{(k)} = u_i + O\left(\left(\frac{\lambda_i - \sigma}{\lambda_{i+1} - \sigma}\right)^{k}\right). \tag{11}$$

Таким образом, для вычисления с. з. λ_i и соответствующей с. ф. u_i задачи Штурма—Лиувилля (1) надо выбрать сдвиг σ так, чтобы с. з. λ_i было к нему ближайшим. Для выбора сдвига σ и начального приближения $u^{(0)}$ воспользуемся асимптотическими формулами (2), (3) для с. з. и с. ф. задачи Штурма—Лиувилля (1). С другой стороны, из (10) и (11) следует, что скорость сходимости итерационного процесса (9) тем выше, чем ближе сдвиг σ к с. з. λ_i. Поэтому на каждом шаге итерационного алгоритма целесообразно выбирать в качестве сдвига $\sigma^{(k)}$ текущее приближение к с. з. λ_i.

Суммируя вышесказанное, получаем следующий итерационный алгоритм вычисления i-го с. з. и соответствующей с. ф. задачи Штурма—Лиувилля (1):

$$\begin{aligned}
&1. \quad \sigma^{(0)} = \left(i + \tfrac{c}{i}\right)^2, \text{ где } c = \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi q(\tau)d\tau,\\
&2. \quad u^{(0)} = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sin(ix),\\
&3. \quad v^{(k+1)} = T_{\sigma^{(k)}} u^k,\\
&4. \quad \mu^{(k)} = (v^{(k+1)}, u^{(k)}),\\
&5. \quad \sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)} + \tfrac{1}{\mu^{(k)}},\\
&6. \quad u^{(k+1)} = v^{(k+1)}/||v^{(k+1)}||, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.
\end{aligned} \tag{12}$$

2. Вычислительный эксперимент. В работе [10] для задачи Штурма—Лиувилля (1) построена конечно-элементная аппроксимация с использованием тригонометрических функций-крышек

$$\varphi_i^g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(p(x-x_{i-1}))}{sin(\theta)}, & x_i - h < x < x_i,\\ -\frac{\sin(p(x-x_{i+1}))}{sin(\theta)}, & x_i < x < x_i + h,\\ 0, & |x - x_i| \geqslant h,\end{cases}$$

где $\theta = ph$, p — некоторый параметр, $h = \frac{\pi}{N}$ — шаг равномерной сетки промежутка $(0, \pi)$. Эта аппроксимация представляет собой обобщенную матричную задачу на с. з.

$$A_\theta u_\theta + F_\theta u_\theta = \Lambda^{(n)} B_\theta u_\theta, \tag{13}$$

где $n = N - 1$, A_θ, F_θ и B_θ — $n \times n$-матрицы с элементами

$$(A_\theta)_{i,i} = -2p^2(\cos\theta\sin\theta + \theta), \quad (A_\theta)_{i,i+1} = p^2(\sin\theta + \theta\cos\theta),$$

$$(B_\theta)_{i,i} = -2(-\cos\theta\sin\theta + \theta), \quad (B_\theta)_{i,i+1} = -\sin\theta + \theta\cos\theta,$$

$$(F_\theta)_{i,j} = -2p\sin^2(\theta)\int\limits_0^\pi q(x)\varphi_i^g(x)\varphi_j^g(x)dx.$$

Если $p = i$, то i-е с. з. $\Lambda_i^{(n)}$ обобщенной матричной задачи на с. з. (13) приближает с. з. λ_i, а соответственный собственный вектор (с.в.) u_θ — с. ф. u_i (j-я компонента с.в. u_θ приближает значение с. ф. $u_i(x)$ в узле $x_j = jh$). Отметим, что для нахождения $\Lambda_i^{(n)}$ надо найти все, или хотя бы i, с. з. матричной задачи (13). Проведенные в работе [10] вычислительные эксперименты показали, что ошибка с. з. $\Lambda_i^{(n)}$ имеет тот же порядок, что и ошибка с. з. $\widetilde{\Lambda}_i^{(n)}$, которое получено с помощью метода конечных элементов с линейными функциями-крышками на равномерной сетке с тем же шагом h, а затем уточнено методом простой асимптотической коррекции [7]:

$$\widetilde{\Lambda}_i^{(n)} - \lambda_i = O\left(\frac{i^2h^3}{\sin(ih)}\right).$$

Итерационный алгоритм (13) будет определен полностью, если определить метод нахождения функции $v^{(k+1)}$ по заданным $u^{(k)}$ и $\sigma^{(k)}$ из уравнения

Таблица 1

Погрешности различных с. з. для $q(x) = e^x$

i	λ_i	$\widetilde{\Lambda}_i^{(39)} - \lambda_i$	$\Lambda_i^{(39)} - \lambda_i$	$\lambda_{2,i}^{(39)} - \lambda_i$	$\lambda_{3,i}^{(39)} - \lambda_i$
1	4.896669	0.00236	0.00149	0.00438	0.00149
2	10.045190	0.00899	0.00536	0.00531	0.00531
3	16.019267	0.01281	0.01095	0.01055	0.01055
4	23.266271	0.01186	0.01655	0.01516	0.01516
6	43.220020	0.00925	0.02304	0.01831	0.01831
8	71.152998	0.00825	0.02743	0.01875	0.01875
10	107.11668	0.00747	0.03140	0.01890	0.01890
12	151.09604	0.00665	0.03452	0.01908	0.01908
14	203.08337	0.00572	0.03610	0.01931	0.01931
16	263.07507	0.00468	0.03559	0.01959	0.01959
18	331.06934	0.00348	0.03258	0.01995	0.01995
20	407.06524	0.00209	0.02689	0.02037	0.02037
25	632.05890	-0.00316	0.00308	0.02187	0.02187
30	907.05548	-0.01693	-0.02234	0.02414	0.02414
35	1232.05334	-0.09047	-0.03941	0.02693	0.02693
39	1528.05225	-1.00577	0.87170	-0.03658	-0.03658

$$v^{(k+1)} = T_{\sigma^{(k)}} u^k.$$

Функция $v^{(k+1)}$ находилась приближенно методом конечных элементов с тригонометрическими функциями-крышками на равномерной сетке. Для определения приближения $v_\theta^{(k+1)}$ к функции $v^{(k+1)}$ решалась следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$(A_\theta + F_\theta - \sigma^{(k)} B_\theta) v_\theta^{(k+1)} = B_\theta u_\theta^{(k)},$$

где $\theta = ih$.

Для того чтобы облегчить сравнение полученных результатов с результатами работ [7; 10], функция $q(x)$ в (1) выбиралась следующим образом: $q(x) = e^x$, $q(x) = (1+x)^{-2}$. Для $q(x) = e^x$ ($q(x) = (1+x)^{-2}$) и $n = 39$ в таблице 1 (таблице 2) приведены точные с. з. λ_i [9, с. 278] задачи Штурма—Лиувилля (1), абсолютные погрешности с. з. $\widetilde{\Lambda}_i^{(39)}$[7] и $\Lambda_i^{(39)}$ [10], а также абсолютные погрешности с. з. $\lambda_{2,i}^{(39)}$ и $\lambda_{3,i}^{(39)}$, которые получены, соответственно, за два и за три шага алгоритма (12).

В таблице 3 для $q(x) = (1 + x)^{-2}$ представлены точные с. з. λ_i задачи (1) и абсолютные погрешности с. з. $\lambda_{3,i}^{(n)}$ ($n = 39, 79, 159$), которые получены за три шага итерационного алгоритма (12).

Таблица 2

Погрешности различных с. з. для $q(x) = (x + 0.1)^{-2}$

i	λ_i	$\widetilde{\Lambda}_i^{(39)} - \lambda_i$	$\Lambda_i^{(39)} - \lambda_i$	$\lambda_{2,i}^{(39)} - \lambda_i$	$\lambda_{3,i}^{(39)} - \lambda_i$
1	1.519866	0.00029	0.00214	0.00020	0.00020
2	4.943310	0.00150	0.00100	0.00088	0.00088
3	10.284663	0.00361	0.00244	0.00208	0.00208
4	17.559958	0.00631	0.00447	0.00366	0.00366
6	37.964426	0.01223	0.00988	0.00742	0.00742
8	66.236448	0.01756	0.01653	0.01124	0.01124
10	102.42499	0.02161	0.02409	0.01458	0.01458
12	146.55961	0.02408	0.03254	0.01720	0.01720
14	198.65837	0.02469	0.04212	0.01901	0.01901
16	258.73262	0.02285	0.05319	0.01990	0.01990
18	326.78963	0.01750	0.06626	0.01983	0.01983
20	402.83424	0.00690	0.08218	0.01868	0.01868
25	627.91064	-0.06453	0.14263	0.00969	0.00969
30	902.95734	-0.29019	0.26871	-0.01323	-0.01323
35	1227.98778	-0.93816	0.63645	-0.05495	-0.05495
39	1524.00503	-2.34012	5.70790	0.63155	0.63155

В рассмотренном примере итерационный алгоритм (12) фактически сводится к степенному методу вычисления i-го с. з. и соответствующего с. в. конечномерной задачи на с. з. (13). Однако в отличие от [10] для приближенного вычисления λ_i не надо вычислять все или часть с. з. конечномерной задачи (13).

Отметим, что в [7] и [10] для вычисления элементов матрицы F_θ использовалась квадратурная формула Симпсона, а в проведенном вычислительном эксперименте — квадратурная формула Гаусса с двумя узлами.

Заключение. Рассмотрена задача Штурма—Лиувилля на конечном интервале, эквивалентная задаче на собственные значения для компактного самосопряженного положительного оператора в гильбертовом пространстве. Предложен итерационный алгоритм вычисления i-го с. з. и соответствующей с. ф. задачи Штурма—Лиувилля, обобщающий степенной метод нахождения наибольшего по модулю с. з. матрицы (конечномерного оператора) на случай компактного оператора. В проведенном вычислительном эксперименте предложенный алгоритм фактически сводится к итерационному алгоритму определения i-го с. з. конечноэлементной аппроксимации задачи Штурма—Лиувилля, представляющей собой обобщенную матричную задачу на собственные значения, только i-е с. з. которой является хорошим приближением с. з. исходной задачи.

Таблица 3

Погрешности различных с. з. для $q(x) = (x + 0.1)^{-2}$

при различных сетках

i	λ_i	$\lambda_{3,i}^{(39)} - \lambda_i$	$\lambda_{3,i}^{(79)} - \lambda_i$	$\lambda_{3,i}^{(159)} - \lambda_i$
1	1.519866	0.00020	0.00005	0.00001
2	4.943310	0.00088	0.00023	0.00006
3	10.284663	0.00208	0.00054	0.00014
4	17.559958	0.00366	0.00095	0.00024
6	37.964426	0.00742	0.00196	0.00050
8	66.236448	0.01124	0.00302	0.00078
10	102.42499	0.01458	0.00399	0.00104
12	146.55961	0.01720	0.00484	0.00127
14	198.65837	0.01901	0.00554	0.00148
16	258.73262	0.01990	0.00609	0.00165
18	326.78963	0.01983	0.00651	0.00179
20	402.83424	0.01868	0.00680	0.00191
25	627.91064	0.00969	0.00705	0.00213
30	902.95734	-0.01323	0.00663	0.00225
35	1227.98778	-0.05495	0.00552	0.00230
39	1524.00503	0.63155	0.00402	0.00232

1. **Винокуров В. А.** Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма—Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом / В. А. Винокуров, В. А. Садовничий // Изв. РАН. Сер. матем. – 2000. – Т. 64, вып. 4. – С. 47–108.
2. **Левитан Б. М.** Операторы Штурма—Лиувилля и Дирака / Б. М. Левитан, И. С. Сарксян. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 432 с.
3. **Макаров В. Л.** О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма—Лиувилля с кусочно-гладкими коэффициентами / В. Л. Макаров // ДАН СССР, Сер. матем. – 1991. – Т. 320, № 1. – С. 34–39.
4. **Макаров В. Л.** Нові властивості FD-методу при його застосуваннях до задач Штурма—Ліувілля / В. Л. Макаров, Н. М. Романюк // Доп. НАН України. – 2014. – № 2. – С. 26–31.
5. **Марченко В. А.** Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. – Киев: Наук. думка, 1977. – 331 с.
6. **Приказчиков В. Г.** Однородные разностные схемы высокого порядка точности для задачи Штурма—Лиувилля / В. Г. Приказчиков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1969. – Т. 9, № 2. – С. 315—336.

7. **Paine J. W.** On the correction of finite difference eigenvalue approximations for Sturm–Liouville problems / J. W. Paine, F. R. de Hoog, R. S. Anderssen // Computing. – 1981. – Vol. 26, i. 2. – P. 123–139.
8. **Prikazchikov V. G.** High-accuracy finite-element method for the Sturm–Liouville problem / V. G. Prikazchikov, M. V. Loseva // Cybernetics and Systems Analysis. – Vol. 40, No. 1. – 2004. – P. 1–6.
9. **Pryce John D.** Numerical Solution of Sturm–Liouville Problems / John D. Pryce. – Oxford University Press. – 1993. – 322 p.
10. **Vanden Berghe G.** A finite-element estimate with trigonometric hat functions for Sturm–Liouville eigenvalues / G. Vanden Berghe, H. De Meyer // J. of Comput. and Applied Mathematics. – 1994. – Vol. 53. – P. 389–396.

Вербіцький В. В., Іваніщева І. М.

Ітераційний алгоритм обчислення власних значень і власних функцій задачі Штурма–Ліувілля

Резюме

Запропоновано ітераційний алгоритм обчислення i-го власного значення (в. з.) і відповідної власної функції (в. ф.) задачі Штурма—Ліувілля на скінченному інтервалі. Алгоритм використовує відомі асимптотичні формули для в. з. і в. ф. задачі Штурма—Ліувілля. Кожна ітерація алгоритму вимагає розв'язання крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку. Ліва частина цього рівняння є диференціальним оператором лівої частини рівняння Штурма—Ліувілля з деяким зсувом, а права — наближенням до шуканої в. ф. Наведено приклад, в якому згадана крайова задача вирішувалася методом скінченних елементів з тригонометричними функціями-кришками, визначеними на рівномірній сітці. У цьому прикладі запропонований алгоритм фактично зводиться до ітераційного алгоритму визначення i-го в. з. скінченно-елементної апроксимації задачі Штурма—Ліувілля, що є узагальненою матричною задачею на в. з., тільки i-е в. з. якої наближає в. з. вихідної задачі.
Ключові слова: задача Штурма—Ліувілля, власне значення, асимптотичні формули для власних значень, метод скінченних елементів .

Verbitskyi V. V., Ivanischeva I. N.

An iterative algorithm for calculation of eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem

Summary

An iterative algorithm for computing the i-th eigenvalue (e. v.) and the corresponding eigenfunction (e. f.) of the Sturm–Liouville problem on a finite interval is proposed. The algorithm uses the well-known asymptotic formulas for e. v and e. f. of the Sturm–Liouville problem. Each iteration of the algorithm requires the solution of the boundary value problem for a second-order differential equation. The left-hand side of this equation is the differential operator of the left-hand side of the Sturm–Liouville equation with some shift, and the right-hand side is an approximation to the desired e. f. An example is given in which the boundary value problem was solved by the finite elements method with trigonometric hat functions, defined on a uniform mesh. In this example, the proposed algorithm actually reduces to an iterative algorithm for determining the i-th e. v. of a finite-element approximation of the Sturm–Liouville problem, which is a generalized matrix problem on an eigenvalue, only the i-th e. v. of which approximates e. v. of the original problem.

Key words: Sturm–Liouville problem, eigenvalue, asymptotic formulas for eigenvalues, finite element method.

References

1. Vinokurov, V. A., Sadovnichy, V. A. (2000). Asimptotika lyubogo poryadka sobstvennykh znacheniy i sobstvennykh funktsiy krayevoy zadachi Shturma – Liuvillya na otrezke s summiruyemym potentsialom [Asymptotics of any order of proper values and eigenfunctions of the Sturm – Liouville boundary value problem on the interval with summable potential]. *Izv. RAN. Ser. matem.*, Vol. 64, № 4, P. 47–108.
2. Levitan, B. M., Sarkisian, I. S. (1988). *Operatory Shturma – Liuvillya i Diraka [Operators of Sturm – Liouville and Dirac].* Moscow, Nauka. 432 p.
3. Makarov, V. L. (1991). O funktsional'no-raznostnom metode proizvol'nogo poryadka tochnosti resheniya zadachi Shturma – Liuvillya s kusochno-gladkimi koeffitsiyentami [On a functional-difference method of an arbitrary order of accuracy for the solution of the Sturm – Liouville problem with piecewise smooth coefficients]. *DAN SSSR, Ser. matem.,* Vol. 320, № 1, P. 34–39.
4. Makarov, V. L., Romanyuk, N. M. (2014). Novi vlastyvosti FD-metodu pry yoho zastosuvannyakh do zadach Shturma – Liuvillya [New properties of FD-method in its applications to Sturm – Liouville tasks]. *Rep. of the National Academy of Sciences of Ukraine,* № 2, P. 26–31.
5. Marchenko, V. A. (1977). *Operatory Shturma – Liuvillya i ikh prilozheniya [Operators of Sturm – Liouville and their applications].* Kyev: Nauk. dumka, 331 p.
6. Prikazchikov, V. G. (1969). Odnorodnyye raznostnyye skhemy vysokogo poryadka tochnosti dlya zadachi Shturma – Liuvillya [Homogeneous difference schemes of high order of accuracy for the Sturm – Liouville problem]. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* Vol. 9, № 2, P. 315—336.
7. Paine, J. W., de Hoog, F. R. and Anderssen, R. S. (1981). On the correction of finite difference eigenvalue approximations for Sturm – Liouville problems. *Computing,* Vol. 26, i. 2, P. 123–139.
8. Prikazchikov, V. G., Loseva, M. V. (2004). High-accuracy finite-element method for the Sturm – Liouville problem. *Cybernetics and Systems Analysis.* Vol. 40, №. 1, P. 1–6.
9. Pryce, John D. (1993). *Numerical Solution of Sturm – Liouville Problems.* Oxford University Press, 322 p.
10. Vanden, Berghe G., De Meyer, H. (1994). A finite-element estimate with trigonometric hat functions for Sturm – Liouville eigenvalues. *J. of Comput. and Applied Mathematics,* Vol. 53, P. 389-396.

Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 1(31). – С. 43–51

УДК 517.5

С. Р. Воронкова
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ПРО ЗБІЖНІСТЬ УЗАГАЛЬНЕНОГО ГАРМОНІЧНОГО РЯДУ ПРИ ЗМІНІ ЗНАКІВ ЙОГО ДОДАНКІВ

Автор висловлює щиру подяку Р. В. Шаніну за плідні обговорення результатів.

У даній роботі вивчається питання про збіжність узагальненого гармонічного ряду, у якого змінені знаки доданків. Для цього розглядається послідовність номерів, на яких відбувається перемикання знаку. Головним результатом є критерій збіжності узагальненого гармонічного ряду зі зміненими знаками в термінах номерів перемикання знаку. Цей критерій дозволяє зводити питання про збіжність до дослідження більш простого, а саме, знакозмінного ряду. Наведено кілька прикладів застосування отриманого критерію. Найбільш цікавим виявився приклад степеневого росту номерів перемикання знаків, що обумовлено переходом до цілих частин у випадку, коли показник степеня не є натуральним. В роботі отримані необхідна та достатня умови збіжності, але питання не вирішене в повному обсязі, оскільки ці умови не збігаються.

MSC: 40A05.
Ключові слова: збіжність, узагальнений гармонічний ряд, номери перемикання знаку
.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134617.

Вступ. Добре відомо, що узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \leqslant 1$. Але необхідна умова збіжності цього ряду виконується при $\alpha > 0$, причому у цьому випадку доданки прямують до нуля монотонно. Таким чином, якщо змінювати знаки доданків через один, то при $0 < \alpha \leqslant 1$ відповідний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-\alpha}$, за ознакою Лейбниця [3, с. 302], стане умовно збіжним. Відома теорема Рімана [3, с. 317] стверджує, що переставляючи доданки умовно збіжного ряду, можна отримати новий ряд, який збігається до будь-якої наперед заданої суми або ж розбігається. Незначна модифікація доведення теореми Рімана надає можливість розташувати знаки доданків (не переставляючи їх) заданого розбіжного ряду з невід'ємними доданками, що прямують до нуля, так, щоб отримати новий ряд, який збігається до наперед заданої суми або розбігається (див. [2, с. 75]). У даній роботі розглядається обернена, у визначеному сенсі, задача. А саме, які умови розташування знаків доданків узагальненого гармонічного ряду без порушення порядку гарантують збіжність чи розбіжність отриманого ряду. Звичайно, мова йде лише про випадок $0 < \alpha \leqslant 1$ і умовну збіжність, оскільки при будь-якому розташуванні знаків при $\alpha > 1$ отримаємо абсолютно збіжний ряд, а при $\alpha \leqslant 0$ не виконується необхідна умова збіжності.

Основні результати. Отже, розглядається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^{\alpha}}, \tag{1}$$

Надійшла 30.04.2018

де $\varepsilon_n = \pm 1,\ 0 < \alpha \leqslant 1$. Покладемо $n_0 = 1$, а для $k \geqslant 1$ визначимо послідовність n_k номерів перемикання знаку доданків ряду (1), тобто вважаємо, що $\varepsilon_n = (-1)^{k-1}$ при $n_{k-1} \leqslant n < n_k$. Наступна теорема складає основний результат даної роботи. Вона встановлює критерій збіжності ряду (1) в термінах номерів n_k перемикання знаків.

Теорема 1 (Критерій збіжності)**.** *При $\alpha = 1$ збіжність ряду (1) рівносильна збіжності ряду*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\ln\frac{n_k}{n_{k-1}}, \tag{2}$$

а при $0 < \alpha < 1$ ряд (1) збігається або розбігається одночасно з рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(n_k^{1-\alpha} - n_{k-1}^{1-\alpha}\right). \tag{3}$$

Спочатку наведемо дві допоміжні леми, які будемо використовувати для доведення теореми 1.

Лема 1. *При $0 < \alpha \leqslant 1$ збіжність ряду (1) рівносильна існуванню границі послідовності*

$$B_n^{(\alpha)} = \sum_{m=0}^{s-1}\left(\int\limits_{n_{2m}}^{n_{2m+1}}\frac{dx}{x^\alpha} - \int\limits_{n_{2m+1}}^{n_{2m+2}}\frac{dx}{x^\alpha}\right) + b_n^{(\alpha)}, \tag{4}$$

де $n_{2s} - 1 \leqslant n < n_{2s+2}$ і

$$b_n^{(\alpha)} = \begin{cases} 0, \quad n = n_{2s} - 1, \\ \int\limits_{n_{2s}}^{n+1}\frac{dx}{x^\alpha}, \quad n_{2s} \leqslant n < n_{2s+1}, \\ \int\limits_{n_{2s}}^{n_{2s+1}}\frac{dx}{x^\alpha} - \int\limits_{n_{2s+1}}^{n+1}\frac{dx}{x^\alpha}, \quad n_{2s+1} \leqslant n < n_{2s+2}. \end{cases}$$

Доведення. Для $j \in \mathbb{N}$ позначимо

$$\gamma_j = \frac{1}{j^\alpha} - \int\limits_j^{j+1}\frac{dx}{x^\alpha}.$$

Тоді маємо

$$0 \leqslant \gamma_j = \frac{1}{j^\alpha} - \int\limits_j^{j+1}\frac{dx}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{j(j+1)^\alpha}. \tag{5}$$

Представимо часткові суми ряду (1) у наступному вигляді:

$$A_n \equiv \sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon_j}{j^\alpha} = \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\int\limits_j^{j+1}\frac{dx}{x^\alpha} + \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\gamma_j.$$

Із (5) випливає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \gamma_n$ збігається абсолютно, тобто послідовність $\sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_j \gamma_j$ збіжна. Тому існування $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ рівносильно існуванню границі послідовності

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \int\limits_{j}^{j+1} \frac{dx}{x^\alpha} = \sum_{m=0}^{s-1} \left(\sum_{j=n_{2m}}^{n_{2m+1}-1} \int\limits_{j}^{j+1} \frac{dx}{x^\alpha} - \sum_{j=n_{2m+1}}^{n_{2m+2}-1} \int\limits_{j}^{j+1} \frac{dx}{x^\alpha} \right) + b_n^{(\alpha)} = B_n^{(\alpha)}.$$

Лема 2. *Нехай числа $c_k \geqslant 0$ і*

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0. \tag{6}$$

Тоді ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} c_k \tag{7}$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k-1} - c_{2k}) \tag{8}$$

збігаються або розбігаються одночасно.

Доведення. З очевидної рівності

$$S_{2n} \equiv c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + c_{2n-1} - c_{2n} = D_n,$$

де S_k і D_k — часткові суми рядів (8) та (8) відповідно, випливає, що ряд (8) збігається тоді і лише тоді, коли існує

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} \equiv S. \tag{9}$$

Але оскільки

$$S_{2n+1} = S_{2n} + c_{2n+1},$$

то, за умовою (7), існування границі (9) рівносильно тому, що і $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$. Це означає, що існує

$$\lim_{k\to\infty} S_k = S,$$

тобто збігається ряд (8).

Доведення. [теорема 1] Скористаємось лемою 1. При $\alpha = 1$ отримуємо

$$B_n^{(1)} = \sum_{m=0}^{s-1} \left(\ln \frac{n_{2m+1}}{n_{2m}} - \ln \frac{n_{2m+2}}{n_{2m+1}} \right) + b_n^{(1)}, \tag{10}$$

де

$$b_n^{(1)} = \begin{cases} 0, \quad n = n_{2s} - 1, \\ \ln \frac{n+1}{n_{2s}}, \quad n_{2s} \leqslant n < n_{2s+1}, \\ \ln \frac{n_{2s+1}}{n_{2s}} - \ln \frac{n+1}{n_{2s+1}}, \quad n_{2s+1} \leqslant n < n_{2s+2}, \end{cases}$$

а при $0 < \alpha < 1$

$$B_n^{(\alpha)} = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{m=0}^{s-1} \left[\left(n_{2m+1}^{1-\alpha} - n_{2m}^{1-\alpha} \right) - \left(n_{2m+2}^{1-\alpha} - n_{2m+1}^{1-\alpha} \right) \right] + b_n^{(\alpha)}, \tag{11}$$

де

$$b_n^{(\alpha)} = \begin{cases} 0, \quad n = n_{2s} - 1, \\ \frac{1}{1-\alpha} \left((n+1)^{1-\alpha} - n_{2s}^{1-\alpha} \right), \quad n_{2s} \leqslant n < n_{2s+1}, \\ \frac{1}{1-\alpha} \left[\left(n_{2s+1}^{1-\alpha} - n_{2s}^{1-\alpha} \right) - \left((n+1)^{1-\alpha} - n_{2s+1}^{1-\alpha} \right) \right], \quad n_{2s+1} \leqslant n < n_{2s+2}. \end{cases}$$

Покладемо

$$c_k^{(\alpha)} = \begin{cases} \ln \frac{n_k}{n_{k-1}}, \quad \alpha = 1, \\ n_k^{1-\alpha} - n_{k-1}^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

За позначень $c_k = c_k^{(\alpha)}$ при $\alpha = 1$ ряд (8) набуває вигляду (2), а при $0 < \alpha < 1$ – вигляду (3). При цьому для $n_{2s} - 1 \leqslant n < n_{2s+2}$

$$B_n^{(\alpha)} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{s-1} (c_{2m+1}^{(1)} - c_{2m+2}^{(1)}) + b_n^{(1)}, \quad \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha} \sum\limits_{m=0}^{s-1} (c_{2m+1}^{(\alpha)} - c_{2m+2}^{(\alpha)}) + b_n^{(\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

і

$$|b_n^{(1)}| \leqslant c_{2s+1}^{(1)} + c_{2s+2}^{(1)}, \quad |(1-\alpha) b_n^{(\alpha)}| \leqslant c_{2s+1}^{(\alpha)} + c_{2s+2}^{(\alpha)}. \tag{12}$$

Нехай $\alpha = 1$ та збігається ряд (2) або $0 < \alpha < 1$ та збігається ряд (3). Тоді при будь-якому $0 < \alpha \leqslant 1$, за необхідною умовою збіжності ряду,

$$\lim_{k \to \infty} c_k^{(\alpha)} = 0, \tag{13}$$

і при цьому збігається ряд (8).

Із (11) та (13) випливає, що при будь-якому $0 < \alpha \leqslant 1$

$$\lim_{n \to \infty} b_n^{(\alpha)} = 0. \tag{14}$$

Таким чином, в силу (14) збіжність послідовності $B_n^{(\alpha)}$ рівносильна збіжності ряду (8). Але оскільки ряд (8) збігається, то, за лемою 2, збігається також і ряд (8), тобто послідовність $B_n^{(\alpha)}$ збіжна. Згідно з лемою 1, це означає, що ряд (1) є збіжним.

Нехай тепер розбігається ряд (2) (тобто $\alpha = 1$) або ряд (3) (тобто $0 < \alpha < 1$). Це означає, що розбігається ряд (8) при $c_k = c_k^{(\alpha)}$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$. Можливий один і лише один з двох наступних випадків:

A) $\lim\limits_{k \to \infty} c_k^{(\alpha)} = 0$,

B) $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} c_k^{(\alpha)} > 0$.

У випадку A), міркуючи як і вище, отримаємо (14), і отже, за лемою 2, ряд (8) також розбіжний. Це означає, що послідовність $B_n^{(\alpha)}$ розбіжна, а за лемою 1, ряд (1) розбігається.

Якщо ж має місце B), то виконується принаймні одна з двох наступних умов:

$$\varlimsup_{s\to\infty} c_{2s+1}^{(\alpha)} > 0 \tag{15}$$

або

$$\varlimsup_{s\to\infty} c_{2s+2}^{(\alpha)} > 0. \tag{16}$$

Скористаємось наступними очевидними рівностями

$$B_{n_{2s+1}-1}^{(\alpha)} = B_{n_{2s}-1}^{(\alpha)} + c_{2s+1}^{(\alpha)}, \tag{17}$$

$$B_{n_{2s+2}-1}^{(\alpha)} = B_{n_{2s}-1}^{(\alpha)} + c_{2s+1}^{(\alpha)} - c_{2s+2}^{(\alpha)}. \tag{18}$$

За умови (15), з рівності (17) випливає, що послідовності $B_{n_{2s+1}-1}^{(\alpha)}$ та $B_{n_{2s}-1}^{(\alpha)}$ не можуть збігатися до однієї і тієї ж границі і тому послідовність $B_n^{(\alpha)}$ розбіжна. Якщо ж (15) не має місця (тобто $\lim\limits_{s\to\infty} c_{2s+1}^{(\alpha)} = 0$), то з (16) і (18) маємо, що послідовності $B_{n_{2s+2}-1}^{(\alpha)}$ і $B_{n_{2s}-1}^{(\alpha)}$ не можуть збігатися до однієї і тієї ж границі, тобто і в цьому останньому випадку послідовність $B_n^{(\alpha)}$ розбіжна. Згідно з лемою 1, це означає, що ряд (1) є розбіжним. Отже, доведення завершено.

Зауваження 1. *Нехай $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant 1$. Представимо ряд (1) при $\alpha = \alpha_2$ у вигляді*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^{\alpha_2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^{\alpha_1}} \cdot n^{\alpha_1-\alpha_2}.$$

Оскільки $\alpha_1 - \alpha_2 < 0$, то $n^{\alpha_1-\alpha_2}$ монотонно спадає до нуля. За ознакою Діріхле [3, с. 307], звідси випливає, що збіжність ряду (1) при $\alpha = \alpha_1$ тягне збіжність ряду (1) при $\alpha = \alpha_2$. Згідно з теоремою 1, це означає, що із збіжності ряду (3) при $\alpha = \alpha_1$ випливає збіжність ряду (2) та ряду (3) при $1 > \alpha_2 > \alpha_1$.

Наведемо декілька прикладів застосування теореми 1.

Приклад 1. *Для фіксованого $r \in \mathbb{N}$ покладемо $n_k = k \cdot r + 1$, $k = 0, 1, \ldots$. Тоді послідовність*

$$\ln \frac{n_k}{n_{k-1}} = \ln \left(1 + \frac{r}{(k-1)r+1}\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

монотонно спадає до нуля при $k \to \infty$. Тому ряд (2) збігається за ознакою Лейбниця. Якщо ж $0 < \alpha < 1$, то розглянемо функцію $\varphi(x) = (x \cdot r + 1)^{1-\alpha}$ $(x \geqslant 1)$. Її похідна $\varphi'(x) = r(1-\alpha)(x \cdot r + 1)^{-\alpha}$ монотонно спадає до нуля при $x \to +\infty$. За теоремою Лагранжа [3, с. 226],

$$n_k^{1-\alpha} - n_{k-1}^{1-\alpha} = \varphi(k) - \varphi(k-1) = \varphi'(\xi_k),$$

де $\xi_k \in [k-1, k]$. Звідси випливає, що модулі доданків ряду (3) монотонно спадають до нуля і отже, ряд (3) збігається за ознакою Лейбниця.

За теоремою 1 отримуємо, що при $n_k = k \cdot r + 1$ ряд (1) збігається при будь-якому $0 < \alpha \leqslant 1$.

Зауваження 2. *При $r = 1$ ($n_k = k + 1$) ряд (1) збігається за ознакою Лейбниця, а при $r \geqslant 2$ приклад 1 є простим узагальненням ознаки Лейбниця. Більше того, стандартне доведення ознаки Лейбниця легко може бути поширеним на випадок довільного ряду, у якого модулі доданків монотонно спадають до нуля, а знаки доданків повторюються через довільне фіксоване $r \in \mathbb{N}$. Це означає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n$ при $u_n \downarrow 0$ збігається, якщо $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_r = 1$, $\varepsilon_{n+r} = -\varepsilon_n$ ($n = 1, 2, \ldots$).*

Зауваження 3. *Із очевидної рівності*

$$n_{k+1}^{1-\alpha} - n_k^{1-\alpha} = n_k^{1-\alpha}\left(\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)^{1-\alpha} - 1\right)$$

випливає, що умова прямування до нуля (спадання модулів) доданків ряду (3) тягне прямування до нуля (спадання модулів) доданків ряду (2).

Приклад 2. *Зафіксуємо $a > 1$ і покладемо $n_k = \left[a^k\right]$, де символом $[\cdot]$ позначається функція цілої частини числа. Тоді отримаємо*

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \frac{a^{k+1} - 1}{a^k} \to a > 1 \quad (k \to \infty).$$

Це означає, що для ряду (2) не виконується необхідна умова збіжності. В силу зауваження 3 доданки ряду (3) також не прямують до нуля. Таким чином, згідно з теоремою 1, ряд (1) розбігається при кожному $0 < \alpha \leqslant 1$.

Приклад 3. *Для натурального $\beta \geqslant 2$ покладемо $n_k = k^\beta$. Позначимо $\mu = \beta(1-\alpha)$. Тоді $n_{k+1}^{1-\alpha} - n_k^{1-\alpha} = (k+1)^\mu - k^\mu$. Якщо $\mu < 1$ (тобто $\alpha > 1 - \frac{1}{\beta}$), то з опуклості догори послідовності k^μ (тобто з нерівності $k^\mu \geqslant \frac{(k-1)^\mu + (k+1)^\mu}{2}$) отримуємо, що модулі доданків ряду (3) монотонно спадають (очевидно, до нуля) і отже, ряд (3) збігається за ознакою Лейбниця. Згідно із зауваженням 3, ряд (2) також збігається за ознакою Лейбниця. Якщо ж $\mu \geqslant 1$ (тобто $0 < \alpha \leqslant 1 - \frac{1}{\beta}$), то ряд (3) розбігається, оскільки його доданки не прямують до нуля. Отже, за теоремою 1, ряд (1) збігається при $1 - \frac{1}{\beta} < \alpha \leqslant 1$ і розбігається при $0 < \alpha \leqslant 1 - \frac{1}{\beta}$.*

У прикладі 3 число $\beta \geqslant 2$ натуральне (випадок $\beta = 2$ див. в [3, с. 315] та в [4, с. 240, приклад № 2687]). Це гарантує, що і $n_k = k^\beta$ також натуральне. У випадку коли β не є натуральним, природньо, як і в прикладі 2, розглядати послідовність номерів $n_k = \left[k^\beta\right]$. Покажемо, що умова розбіжності ряду (1), яка отримана у прикладі 3, залишається справедливою при довільному $\beta > 1$ (випадок $\beta = 1$ охоплює приклад 1).

Теорема 2. *Нехай $\beta > 1$, $n_k = \left[k^\beta\right]$ ($k = 1, 2 \ldots$). Тоді ряд (1) розбігається при $0 < \alpha \leqslant 1 - \frac{1}{\beta}$.*

Доведення. Позначимо $y_k = k^\beta$ і покажемо, що за умовами теореми не виконується умова Коші збіжності ряду (1). Спочатку відзначимо, що при $n_k \leqslant$

$n \leqslant n_{k+1}-1$ всі знаки доданків ряду (1) однакові і тому при достатньо великих k маємо

$$\left|\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}-1}\frac{\varepsilon_n}{n^\alpha}\right| = \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}-1}\frac{1}{n^\alpha} \geqslant \int\limits_{y_k+1}^{y_{k+1}-1}\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left\{(y_{k+1}-1)^{1-\alpha}-(y_k+1)^{1-\alpha}\right\}.$$

Для оцінки правої частини застосуємо теорему Лагранжа до функції $\varphi(y)=y^{1-\alpha}$. В результаті знайдемо таке $\xi_k \in [y_k+1, y_{k+1}-1]$, що

$$(y_{k+1}-1)^{1-\alpha}-(y_k+1)^{1-\alpha} = (1-\alpha)\xi_k^{-\alpha}\left(y_{k+1}-1-y_k-1\right) \geqslant$$
$$\geqslant (1-\alpha)\left(y_{k+1}-1\right)^{-\alpha}\left\{y_{k+1}-y_k-2\right\} \geqslant (1-\alpha)(k+1)^{-\alpha\beta}\left\{(k+1)^\beta-k^\beta-2\right\}.$$

Застосувавши знову теорему Лагранжа до функції $\psi(x)=x^\beta$, отримаємо таке $\eta\in[k,k+1]$, що $(k+1)^\beta-k^\beta=\beta\eta^{\beta-1}\geqslant\beta k^{\beta-1}\geqslant\frac{\beta}{2}k^{\beta-1}+2$ при достатньо великих k. Таким чином, маємо

$$\left|\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}-1}\frac{\varepsilon_n}{n^\alpha}\right| \geqslant (k+1)^{-\alpha\beta}\frac{\beta}{2}k^{\beta-1} \geqslant 2^{-\alpha\beta-1}k^{\beta(1-\alpha)-1}.$$

Оскільки, за умовами теореми, $\beta(1-\alpha)-1\geqslant 0$, то права частина останньої нерівності не прямує до нуля при $k\to\infty$ і отже, ряд (1) не задовольняє умову Коші. За критерієм Коші [5, с. 10], цей ряд розбігається, і тим самим завершується доведення теореми.

Теорема 2 надає достатню умову розбіжності ряду (1). Достатню умову збіжності цього ряду містить наступна

Теорема 3. *Нехай* $\beta>1$, $n_k=[k^\beta]$ $(k=1,2,\cdots)$. *Якщо* $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$ *і* $\frac{1}{\alpha}<\beta<\frac{1}{1-\alpha}$, *то ряд* (1) *збігається.*

Доведення. Повторюючи міркування з прикладу 3, отримуємо, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left((k+1)^{\beta(1-\alpha)}-k^{\beta(1-\alpha)}\right)$ збігається при $1<\beta<\frac{1}{1-\alpha}$ та $0<\alpha<1$. Розглянемо наступну рівність для часткових сум

$$\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\left((k+1)^{\beta(1-\alpha)}-k^{\beta(1-\alpha)}\right) = \sum_{k=1}^{N}(-1)^k\left((k+1)^{\beta(1-\alpha)}-\left[(k+1)^\beta\right]^{1-\alpha}\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\left(k^{\beta(1-\alpha)}-\left[k^\beta\right]^{1-\alpha}\right)+\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\left(\left[(k+1)^\beta\right]^{1-\alpha}-\left[k^\beta\right]^{1-\alpha}\right).$$

Звідси видно, що за умови збіжності ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(k^{\beta(1-\alpha)}-\left[k^\beta\right]^{1-\alpha}\right) \tag{19}$$

ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left((k+1)^{\beta(1-\alpha)}-k^{\beta(1-\alpha)}\right)$ та $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\left[(k+1)^{\beta}\right]^{1-\alpha}-\left[k^{\beta}\right]^{1-\alpha}\right)$ збігаються або розбігаються одночасно. Модулі доданків ряду (19) оцінимо за допомогою формули Тейлора [3, с. 364]

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant k^{\beta(1-\alpha)} - \left[k^{\beta}\right]^{1-\alpha} \leqslant k^{\beta(1-\alpha)} - \left(k^{\beta}-1\right)^{1-\alpha} = \\
= k^{\beta(1-\alpha)}\left\{1-\left(1-\frac{1}{k^{\beta}}\right)^{1-\alpha}\right\} = k^{\beta(1-\alpha)}\left\{\frac{1-\alpha}{k^{\beta}}+\overline{o}\left(\frac{1}{k^{\beta}}\right)\right\} = \\
= (1-\alpha)k^{-\alpha\beta}+\overline{o}\left(k^{-\alpha\beta}\right).
\end{aligned}
$$

Ряд із доданками в правій частині цієї нерівності збігається за умови $\alpha\beta > 1$, і, таким чином, теорема доведена для $0 < \alpha < 1$. Беручи до уваги зауваження 3, приходимо до твердження теореми у повному обсязі.

Зауваження 4. *Нам невідомо, збігається чи розбігається ряд* (1) *при* $n_k = \left[k^{\beta}\right]$ *у випадку* $1 < \beta < 2,\ 1 - \frac{1}{\beta} < \alpha \leqslant \frac{1}{\beta}$. *Можливо, питання про збіжність ряду* (19) *є цікавим незалежно від його застосувань, розглянутих в даній роботі.*

Висновки. Теорема 1 зводить питання про збіжність ряду (1) до дослідження збіжності більш простого, а саме, знакозмінного ряду, доданки якого виражені через номери перемикання знаків n_k.

1. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. Т. II. – М.: Физматлит, 2001. – 810 с.
2. **Гелбаум Б.** Контрпримеры в анализе / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. – М.: Мир, 1967. – 252 с.
3. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. Т. I. – М.: Физматлит, 1962. – 600 с.
4. **Демидович Б. П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М.: Наука, 1966. – 544 с.
5. **Ильин В. А.** Математический анализ / В. А. Ильин. – М.: МГУ, 1987. – 358 с.

Воронкова С. Р.

О сходимости обобщенного гармонического ряда при изменении знаков его слагаемых

Резюме

В данной работе изучается вопрос о сходимости обобщенного гармонического ряда, у которого изменены знаки слагаемых. Для этого рассматривается последовательность номеров, по которым происходит переключение знака. Главным результатом является критерий сходимости обобщенного гармонического ряда с измененными знаками в терминах номеров переключения знака. Этот критерий позволяет сводить вопрос о сходимости к исследованию более простого, а именно, знакочередующегося ряда. Приведено

несколько примеров применения полученного критерия. Наиболее интересным оказался пример степенного роста номеров переключения знаков, что обусловлено переходом к целым частям в случае, когда показатель степени не является натуральным. В работе получены необходимое и достаточное условия сходимости, но вопрос не решен в полном объеме, поскольку эти условия не совпадают.
Ключевые слова: сходимость, обобщенный гармонический ряд, номера переключения знака .

Voronkova S. R.
ABOUT CONVERGENCE OF THE GENERALIZED HARMONIC SERIES WHEN THE SIGNS OF ITS SUMMANDS ARE CHANGED

Summary

In this paper we study the question about convergence of the generalized harmonic series when the signs of its summands are changed. For this we consider the sequence of numbers where the sign is switched. The main result is the convergence criterion of a generalized harmonic series with changed signs in terms of the sign switching numbers. This criterion allows us to reduce the question of convergence to the study of a simpler, namely, sign alternating series. There are given several examples of the application of the obtained criterion. The most interesting was the example of a power growth of the sign switching numbers, because there is a transition to integer parts in the case when the exponent is not natural. Necessary and sufficient conditions for convergence are obtained, but the question is not solved in full, because these conditions do not coincide.
Key words: convergence, generalized harmonic series, numbers of sign switching.

REFERENCES

1. Fikhtengolz, G. M. (2001). *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [A Course of Differential and Integral Calculus], Vol. II.* Moscow: Fizmatlit, 810 p.
2. Gelbaum, B. (1967). *Contrprimeri v analize [Counterexamples in the analysis]* Moscow: The World, 252 p.
3. Fikhtengolz, G. M. (1962). *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [A Course of Differential and Integral Calculus], Vol. I.* Moscow: Fizmatlit, 600 p.
4. Demidovich, B. P. (1966). *Sbornik zadach i yprajneniji po matematicheskomy analizy [Collection of tasks and exercises on mathematical analysis]* Moscow: Science, 544 p.
5. Ilin, V. A. (1987). *Matematicheskij analiz [Mathematical analysis]* Moscow: MSU, 358 p.

Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 1(31). – С. 52–67

УДК 517.97

О. Д. Кічмаренко, А. А. Плотніков
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ КЕРОВАНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННОЮ РОЗМІРНІСТЮ

Стаття присвячена дослідженню лінійної керованої системи змінної розмірності. Розглядається задача оптимального керування декількома об'єктами з послідовним у часі режимом їх роботи. Початковий стан кожного наступного об'єкта залежить від кінцевого стану попереднього, що об'єднує їх в єдину систему змінної розмірності. Передбачається, що кожен об'єкт описується системою звичайних диференціальних рівнянь на інтервалі його дії. При цьому довжини інтервалів задані або невідомі. Системи рівнянь можуть мати неоднакову розмірність, можуть змінюватися також розмірність функції керування і обмеження на її значення. Така система зводиться до імпульсної лінійної системи, яка містить керування і завдяки цьому з'ясовуються властивості розв'язків системи та знаходяться самі розв'язки. Також в роботі розглянуто задачу Майєра і отримано необхідні і достатні умови оптимальності. Отримані результати ілюструються модельними прикладами.
MSC: 49N05, 49N25.
Ключові слова: лінійна система, оптимальне керування, змінна розмірність, задача Майєра, диференціальне рівняння, імпульсна система .
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134618.

Вступ. Розглянемо задачу оптимального керування декількома об'єктами з послідовним у часі режимом їх роботи. Початковий стан кожного наступного об'єкта залежить від кінцевого стану попереднього, що об'єднує їх в єдину систему змінної розмірності. Передбачається, що кожен об'єкт описується системою звичайних диференціальних рівнянь на інтервалі його дії. При цьому довжини інтервалів задані або невідомі. Системи рівнянь можуть мати неоднакову розмірність, можуть змінюватися також розмірність функції керування і обмеження на її значення. Такі системи розглядаються в математичній теорії оптимального керування і мають різні назви: задача оптимізації зі зміною фазового простору — В. Г. Болтянський [17], І. С. Максимова, В. М. Розова [2], ступеневі системи — В. О. Мєдвєдев, В. М. Розова [3], В. М. Розова [4], Г. К. Захаров [5], Ш. Ф. Магеррамов, К. Б. Мансімов [6], системи зі змінною структурою — М. С. Нікольський [7, 8], Т. А. Тадумадзе, Н. М. Авалішвілі [9], Г. Л. Харатішвілі [10], з поетапно змінною динамікою — В. Р. Барсегян [7], Є. Л. Єрьомін [12], складені системи — В. В. Веліченко, Л. Т. Ащепков [6], системи змінної розмірності — О. Д. Кічмаренко, А. А. Плотніков [15–20]. [20], О. М. Кирилова [21], Є. Л. Єрьоміна [12], розглянуто застосування даних систем в економіці, екології, робототехніці, авіабудуванні, електроенергетиці, технічних і хімічних системах тощо. Також до таких систем зводяться керовані процеси виникнення і розвитку об'єктів, диференційованих по моменту створення — О. В. Романенко, О. В. Федосеєв [22], керовані гібридні системи — P. I. Barton, Ch. K. Lee [23], W. M. Haddad, V. S. Chellaboina, S. G. Nersesov [24].

Надійшла 15.01.2018

У цій статті на відміну від вище названих лінійна керована система змінної розмірності зводиться до імпульсної лінійної системи, яка містить керування і завдяки цьому з'ясовуються властивості розв'язків системи та знаходяться самі розв'язки. Також в роботі розглянуто задачу Майєра і отримано необхідні і достатні умови оптимальності. Отримані результати ілюструються модельними прикладами.

Основні результати

1. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі змінною розмірністю. Нехай $\theta > 0$ є довільне дійсне число. Позначимо через Σ_θ множину функцій $n(\cdot) : R_+ \to N$, які відповідають наступним умовам:

1) $n(\cdot)$ – кусочно-постійні і кусочно-неперервні справа;

2) якщо $n(t-0) - n(t) \neq 0$, то $n(\tau) - n(t) = 0$ для всіх $\tau \in [t,\ t+\theta]$.

Візьмемо довільну функцію $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$.

Означення 1. *Вектор-функцію $x(\cdot)$ назвемо вектор-функцією зі змінною розмірністю, якщо $x(t) \in R^{n(t)}$ для всіх $t \geqslant 0$.*

Тобто в кожен момент часу $t \in R_+$ значення вектор-функції $x(t)$ належить евклідовому простору $R^{n(t)}$. Очевидно, що піввісь R_+ можна розбити не більше ніж на злічену кількість проміжків $I_i = [t_i, t_{i+1}),\ i = 0, 1, ...,$ таких, що $R_+ = \bigcup_i I_i$ та $I_i \bigcap I_j = \emptyset$, якщо $i \neq j$, де $n(t) - n(t_i) = 0$ для всіх $t \in I_i$. Отже, на кожному проміжку I_i вектор-функція $x(\cdot)$ матиме значення однакової розмірності, тобто $x : I_i \to R^{n(t_i)}$.

Позначимо через Φ_n множину матрично-значних функцій $M(n(t)) = (m_{ij})_{i=1,j=1}^{n(t),n(t-0)}$, яка відповідає функції $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ та належить деякій множині матриць $M = \{(m_{ij})_{i=1,j=1}^{k,l}\}_{k=1,l=1}^{\infty,\infty}$.

Візьмемо довільну матрично-значну функцію $M(\cdot) \in \Phi_n$.

Тобто в кожній точці $t_i \in R_+$, такій, що $n(t_i) - n(t_i - 0) \neq 0$, відбувається зміна розмірності простору. Тому будемо вважати, що в цих точках значення вектор-функції $x(t_i)$ задовольняють умову:

$$x(t_i) = M(n(t_i))x(t_i - 0),$$

де матриця $M(n(t_i)) = (m_{kj}(t))_{k=1,j=1}^{n(t_i),n(t_i-0)}$ пов'язує вектори різних розмірностей.

Розглянемо на сегменті $I = [0, T]$ наступну систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + f_i(t),\ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),\ x_0(0) = \overline{x}_0,\ i = 0, 1, 2, ..., m, \tag{1}$$

$$x_i(\tau_i) = M(n(\tau_i))x_{i-1}(\tau_i - 0),\ \ i = 1, 2, ..., m, \tag{2}$$

де функція $n(\cdot)$ визначає розмір системи в кожен момент часу $t \in [0, T]$, $x_i(t) \in R^{n(\tau_i)}$, $\tau_i \in (0, T)$ – фіксовані моменти часу ($\tau_i < \tau_{i+1}$), такі, що $n(\tau_i - 0) \neq n(\tau_i)$, $A_i(t)$:$[\tau_i, \tau_{i+1}) \to R^{n(\tau_i)\times n(\tau_i)}$ – матрично-значна функція, $f_i : [\tau_i, \tau_{i+1}) \to R^{n(\tau_i)}$ вектор-функція, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, $\tau_0 = 0$, $\tau_{m+1} = T < \infty$.

Зауваження 1. *Система* (1), (2) *має вигляд, як система диференціальних рівнянь з імпульсами у фіксовані моменти часу, але при кожному «імпульсі» розмірність системи* (1), (2) *змінюється. Тобто:*

при $i = 0$ *на проміжку* $[\tau_0, \tau_1)$ *система буде мати розмірність* $n(\tau_0)$ *і відповідний розв'язок* $x_0(\cdot)$, *який є абсолютно неперервною вектор-функцією, що задовольняє рівняння* $\dot{x}_0 = A_0(t)x_0 + f_0(t)$ *майже для всіх* $t \in [\tau_0, \tau_1)$ *та* $x_0(0) = \bar{x}_0$*;*

при $t = \tau_1$ *система змінить розмірність на* $n(\tau_1)$ *і* $x_1(\tau_1) = M(n(\tau_1))x_0(\tau_1 - 0) \in R^{n(\tau_1)}$*;*

при $i = 1$ *на проміжку* $[\tau_1, \tau_2)$ *система буде мати розмірність* $n(\tau_1)$ *і відповідний розв'язок* $x_1(\cdot)$, *який є абсолютно неперервною вектор-функцією, що задовольняє рівняння* $\dot{x}_1 = A_1(t)x_1 + f_1(t)$ *майже для всіх* $t \in [\tau_0, \tau_1)$ *з початковим станом* $x_1(\tau_1)$*;*

і так далі до останнього сегмента $[\tau_m, \tau_{m+1}]$.

Тобто на кожному проміжку $[\tau_i, \tau_{i+1})$ *розв'язок* $x_i(\cdot)$ *буде мати відповідну розмірність. Таким чином, на всьому сегменті* I *будемо мати розв'язок* $x : I \to R^{n(t)}$ *системи* (1), (2) *як вектор-функцію зі змінною розмірністю.*

Означення 2. *Вектор-функцію зі змінною розмірністю* $x : I \to R^{n(t)}$ *будемо називати розв'язком системи* (1), (2) *на сегменті* $I = [0, T]$, *якщо вона абсолютно неперервна і задовольняє систему* (1) *майже всюди на інтервалах, які не містять точок* τ_i, *та задовольняє умову* (2) *для всіх* $t = \tau_i,\ i = 1, 2, ..., m$.

Приклад 1. *Розглянемо наступну систему лінійних диференціальних рівнянь:*

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + f_i(t),\ \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),\ \ x_0(0) = 1,\ \ i = \overline{0,2}, \tag{3}$$

$$x_i(\tau_i) = M(n(\tau_i))x_{i-1}(\tau_i - 0),\ \ i = 1, 2, \tag{4}$$

де $n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ 2, & t \in [\pi, 2\pi) \\ 1 & t \in [2\pi, 3\pi] \end{cases}$, $t \in [0, 3\pi]$, $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = \pi$, $\tau_2 = 2\pi$, $\tau_3 = 3\pi$,

$$A_0(t) = -\cos(t),\ \ A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \ A_2(t) = 1,$$

$$f_0(t) = 0,\ \ f_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},\ \ f_2(t) = -\sin(t),$$

$$M(n(\tau_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T,\ \ M(n(\tau_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо на кожному проміжку послідовно відповідну систему диференціальних рівнянь. Очевидно, що на кожному проміжку вектор-функція, яка є розв'язком відповідної системи, буде мати відповідну розмірність. Тобто

1. *Для* $t \in [0, \pi)$ *отримаємо диференціальне рівняння:*

$$\dot{x}_0(t) = -\cos(t)x_0(t),\ \ \ x_0(0) = 1$$

і розв'язок $x_0(t) = e^{-\sin(t)}$ *розмірності 1.*

2. *Для* $t \in [\pi, 2\pi)$. *Так як* $x_0(\pi - 0) = 1$, *то* $x_1(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_0(\pi - 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *та отримаємо систему диференціальних рівнянь:*

$$\begin{matrix} \dot{x}(t) = y(t) + \cos(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t) + \sin(t) \end{matrix}, x_1(\pi) = \begin{pmatrix} x(\pi) \\ y(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

і розв'язок $x_1(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) + \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ *розмірності 2.*

3. *Для* $t \in [2\pi, 3\pi]$. *Так як* $x_1(2\pi - 0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *то* $x_2(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x_1(2\pi - 0) = -1$ *та отримаємо диференціальне рівняння:*

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t) - \sin(t), x_2(2\pi) = -1$$

і розв'язок $x_2(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{3}{2e^{2\pi}}e^t$ *розмірності 1.*

Тому під розв'язком всієї системи на проміжку $[0, 3\pi]$ *будемо вважати вектор-функцію зі змінною розмірністю* $x : [0, 3\pi] \to R^{n(t)}$, *яка на кожному відповідному проміжку збігається з відповідним розв'язком системи диференціальних рівнянь* (3),(4).

Очевидно, що якщо розглянути об'єднану траєкторію отриманої вектор-функції зі змінною розмірністю $x : [0, 3\pi] \to R^{n(t)}$ *у просторі* $tOxy$ *і вважати, що на проміжках* $[0, \pi)$ *і* $[2\pi, 3\pi]$ *друга координата y дорівнює 0, то ми отримаємо неперервну траєкторію (дивись рис. 1.).*

Але якщо змінити матриці $M(n(\tau_1))$ *та* $M(n(\tau_2))$, *то траєкторія може мати розриви при* $\tau_i = i\pi,\ i = 1, 2$. *Наприклад, якщо* $M(n(\pi)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$ *і* $M(n(\pi)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, *то отримаємо розв'язок*

$$x_0(t) = e^{-\sin(t)},\ t \in [0, \pi);$$

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix},\ t \in [\pi, 2\pi);$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2e^{2\pi}}e^t,\ \ t \in [2\pi, 3\pi],$$

графік якого у просторі $tOxy$ *зображено на рис. 2.*

На прикладі системи (3), (4) розглянемо два способи переходу від системи зі змінною розмірністю до системи постійної розмірності.

Спосіб 1. Легко бачити, що систему (3),(4) можна переписати у вигляді

$$\dot{x} = N(n(t))A(t)x + N(n(t))f(t), \quad t \neq \tau_i, \tag{5}$$

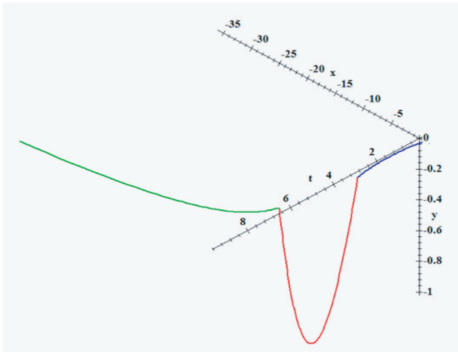


Рис. 1. Неперервна траєкторія розв'язку системи (3), (4)

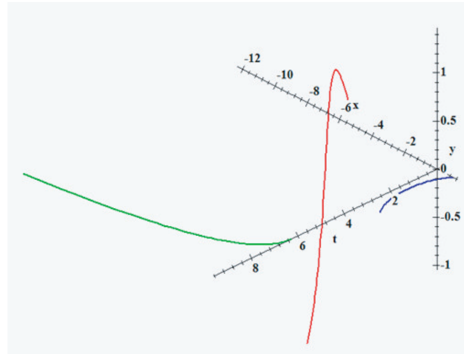


Рис. 2. Розривна траєкторія розв'язку системи (3), (4)

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x(\tau_i) = M(n(\tau_i))x(\tau_i - 0),\ i = 1, 2, \tag{6}$$

де $x \in R^2$,

$$N(n(t)) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & t \in [0, \pi) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & t \in [\pi, 2\pi) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & t \in [2\pi, 3\pi] \end{cases} \qquad A(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\cos(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & t \in [0, \pi) \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & t \in [\pi, 2\pi) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & t \in [2\pi, 3\pi] \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & t \in [0, \pi) \\ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, & t \in [\pi, 2\pi) \\ \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, & t \in [2\pi, 3\pi] \end{cases} \qquad M(n(t)) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & t = \pi \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & t = 2\pi \end{cases}$$

Очевидно, що система (5), (6) є імпульсною системою постійної розмірності ($n = 2$).

Якщо ми знайдемо розв'язок цієї системи $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$, то $x_1(t)$ буде розв'язком системи (3), (4) на проміжку $[0, \pi)$, $(x_1(t), x_2(t))^T$ буде розв'язком системи (3), (4) на проміжку $[\pi, 2\pi)$, $x_1(t)$ буде розв'язком системи (3), (4) на проміжку $[2\pi, 3\pi]$.

Спосіб 2. Також систему (3), (4) можна в інший спосіб представити у вигляді системи диференціальних рівнянь постійної розмірності:

$$\dot{x} = N(n(t))A(t)x + N(n(t))f(t), \quad t \neq \tau_i, \tag{7}$$

$$x(0) = (1,0,0,0,0)^T, \ x(\tau_i) = M(n(\tau_i))x(\tau_i - 0), \ i = 1,2, \tag{8}$$

де $x \in R^4$, $N(n(t)) : [0,3\pi] \to R^{4\times 4}$, $A(t) : [0,3\pi] \to R^{4\times 4}$, $M(n(t)) : [0,3\pi] \to R^{4\times 4}$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ \sin(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix},$$

$$M(n(t)) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t = \pi \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, t = 2\pi \end{cases} \qquad N(n(t)) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, t \in [0,\pi) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, t \in [\pi, 2\pi) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in [2\pi, 3\pi] \end{cases}$$

Система (7), (8) буде мати постійну розмірність, яка дорівнює сумі розмірностей на всіх проміжках, тобто $n = 1 + 2 + 1 = 4$.

Якщо ми знайдемо розв'язок цієї системи $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_4(t))^T$, то $x_1(t)$ буде розв'язком системи (3), (4) на проміжку $[0,\pi)$, $(x_2(t), x_3(t))^T$ буде розв'язком системи (3), (4) на проміжку $[\pi, 2\pi)$, $x_4(t)$ буде розв'язком системи (3), (4) на проміжку $[2\pi, 3\pi]$.

Зрозуміло, що другий спосіб переходу від системи зі змінною розмірністю до системи постійної розмірності є менш привабливим, оскільки при великій кількості переключень система (7), (8) буде мати величезну розмірність $n = \sum_{i=0}^{m} n(\tau_i)$. Тому в подальшому при дослідженні систем зі змінною розмірністю будемо використовувати перший спосіб переходу до імпульсної системи постійної розмірності.

2. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі змінною розмірністю, які містять керування. Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь, які містять керування

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + B_i(t)u, \ \ t \neq \tau_i, \ \ x_0(0) = \overline{x}_0, \ \ i = \overline{0,m}, \tag{9}$$

$$x_i(\tau_i) = M(n(\tau_i))x_{i-1}(\tau_i - 0), \ \ i = \overline{1,m}, \tag{10}$$

де $x(t) \in R^{n(t)}$, $t \in I$, u — керування, $u \in U \in conv(R^k)$, $\tau_i \in I$, $\ \ i = \overline{1,m}$ — фіксовані моменти часу ($\tau_i < \tau_{i+1}$) такі, що $n(\tau_i - 0) \neq n(\tau_i)$, $A_i(t)$ — матрично-значна функція, яка має розмірність $(n(t) \times n(t))$, $B_i(t)$ матрично-значна функція, яка має розмірність $(n(t) \times k)$, $M(n(\tau_i))$ — матриці $(n(\tau_i) \times n(\tau_i - 0))$.

Означення 3. *Під допустимим керуванням розуміється будь-яка вимірна функція $u : I \to R^k$, яка задовольняє включенню $u(t) \in U$ для всіх $t \in I$. Позначимо множину всіх допустимих керувань системи (9),(10) через $\mathcal{U}(I)$ (або $\mathcal{U}$).*

Зауваження 2. *Очевидно, що систему лінійних диференціальних рівнянь, які містять керування (9),(10), можливо привести до системи лінійних диференціальних включень*

$$\dot{x}_i \in A_i(t)x_i + F_i(t), \ \ t \neq \tau_i, \ \ x_0(0) = \overline{x}_0, \ \ i = \overline{0,m}, \tag{11}$$

$$x_i(\tau_i) = M(n(\tau_i))x_{i-1}(\tau_i - 0), \ \ i = \overline{1,m}, \tag{12}$$

де $F_i(t) \equiv B_i(t)U$.

Тоді з [17, 19] випливає наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються наступні вимоги для $i = \overline{0,m}$:*
1)$A_i(\cdot)$ — матрично-значні функції з компонентами, які вимірні на $[\tau_i, \tau_{i+1})$;
2) $B_i(\cdot)$ — матрично-значні функції з компонентами, які вимірні на $[\tau_i, \tau_{i+1})$;
3) існують сталі $\kappa_1 > 0$ і $\kappa_2 > 0$ такі що для всіх $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\|A_i(t)\|_{n(\tau_i)} \leqslant \kappa_1, \quad \|B_i(t)\|_{n(\tau_i)} \leqslant \kappa_2 \ .$$

Тоді

1) система (9),(10) має розв'язок на проміжку I для будь-якого допустимого керування $u(\cdot) \in \mathcal{U}(I)$ та на кожному проміжку $[\tau_i, \tau_{i+1})$ має вигляд

$$x_i(t,u) = \Phi_i(t)x_i(\tau_i,u) + \Phi_i(t)\int_{\tau_i}^{t} \Phi_i^{-1}(s)B_i(s)u(s)ds, \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \ i = \overline{0,m},$$

де $x_0(\tau_0,u) = \bar{x}_0$, $x_i(\tau_i,u) = M(n(\tau_i))x_{i-1}(\tau_i - 0,u)$, $i = \overline{1,m}$, $\Phi_i(t)$ — відповідні матриціанти;

2) перетин множини розв'язків системи (9),(10) (множина досяжності) на кожному проміжку $[\tau_i, \tau_{i+1})$ має вигляд

$$X_i(t) = \Phi_i(t)X_i(\tau_i) + \Phi_i(t)\int_{\tau_i}^{t} \Phi_i^{-1}(s)B_i(s)Uds, \ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \ i = \overline{0,m},$$

де $X_0(\tau_0) = \bar{x}_0$, $X_i(\tau_i) = M(n(\tau_i))X_{i-1}(\tau_i - 0)$, $i = \overline{1,m}$;

3) перетин множини розв'язків системи (9),(10) $X_i(t) \in conv(R^{n(t)})$ для всіх $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\ i = \overline{0,m}$.

Також пов'яжемо з системою (9), (10) наступну систему

$$\dot{x} = N(n(t))A(t)x + N(n(t))B(t)u, \ \ t \neq \tau_i, \ \ x(0) = x_0, \tag{13}$$

$$x(\tau_i) = M(n(\tau_i))x(\tau_i - 0), \tag{14}$$

де $t \in I$, $N(n(t))$ — матрично-значна функція, яка має розмірність $(\overline{n} \times \overline{n})$ та така, що $N(n(t)) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, E — одинична матриця, яка має розмірність $(n(t) \times n(t))$, $A(t)$ — матрично-значна функція, яка має розмірність $(\overline{n} \times \overline{n})$ та така, що $N(n(t))A(t) \equiv P^T(n(t))A_i(t)P(n(t))$ для $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\ i = \overline{0, m}$, $B(t)$ — матрично-значна функція, яка має розмірність $(\overline{n} \times k)$ та така, що $N(n(t))B(t)u \equiv P^T(n(t))B_i(t)u$ для $u \in U$ та $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\ i = \overline{0, m}$, $P(t)$ — матрично-значна функція, яка має розмірність $(n(t) \times \overline{n})$ та така, що $P(n(t)) = (E \ \ 0)$, $M(n(t))$ — матрично-значна функція, яка має розмірність $(\overline{n} \times \overline{n})$ та така, що $M(n(t)) = M(n(\tau_i)) = \begin{pmatrix} M_i & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ для всіх $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\ i = \overline{0, m-1}$, $M_0 = E, N(n(0))x_0 \equiv P^T(n(0))\overline{x}_0$.

Означення 4. *Відображення $x_u : I \to R^{\overline{n}}$ будемо називати розв'язком системи (13),(14), яке відповідає допустимому керуванню $u(\cdot)$, якщо воно неперервне та задовольняє інтегральному рівнянню*

$$x_u(t) = x_u(\tau_i + 0) + \int_{\tau_i}^{t} [N(n(s))A(s)x_u(s) + N(n(s))B(s)u(s)]ds \tag{15}$$

для всіх $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, m-1}$ та $x_u(\tau_i) = M(n(\tau_i))x_u(\tau_i - 0)$, $i = \overline{1, m}$.

Зауваження 3. *Очевидно що $P^T(n(t))x_u(t) = x_i(t, u)$ для всіх $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, m}$, де $x_u(\cdot)$ — розв'язок системи (13),(14), а $x_i(\cdot, u)$ — розв'язок системи (9),(10) на проміжку $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, m}$, які відповідають допустимому керуванню $u(\cdot)$. Тобто перші $n(t)$ елементів вектора $x_u(t)$ збігаються з усіма елементами вектора $x_i(t, u)$ для всіх $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\ i = \overline{0, m}$.*

3. Задача оптимального керування з термінальним критерієм якості. Нехай якість керування системи лінійних диференціальних рівнянь (9),(10) оцінюється термінальним критерієм $I(u) = \Phi(x_m(T))$.

Задача Майєра. Необхідно знайти програмне керування $u_*(\cdot)$ і відповідну траєкторію $x_*(\cdot)$ системи (9),(10), при яких термінальний критерій якості приймає мінімальне значення.

Припущення 1. Нехай функція $\Phi : R^{n(T)} \to R^1$ є неперервною.

Теорема 2. *Нехай виконуються вимоги теореми 1 і припущення 1. Тоді розв'язок задачі Майєра існує.*

Твердження теореми 2 випливає з компактності множини досяжності системи (9),(10) в будь-який момент часу $t \in I$ і неперервності функції $\Phi(\cdot)$.

Далі отримаємо необхідні і достатні умови оптимальності керування для задачі Майєра. Перепишемо систему (9),(10) у вигляді системи (13),(14) та перепишемо функціонал критерія якості у наступному вигляді: $I(u) = \bar{\Phi}(x(T)) \equiv \Phi(x_1(T), ..., x_{n(T)}(T)) + 0 \cdot x_{n(T)+1} + ... + 0 \cdot x_{\bar{n}}(T)$. Отже, отримаємо задачу оптимального керування постійної розмірності з імпульсами та з [3] наступну теорему.

Теорема 3. *Нехай виконуються вимоги теореми 1 і функція $\Phi(\cdot)$ має частинні похідні. Тоді для того, щоб керування $u_*(\cdot)$ і відповідна траєкторія $x_*(\cdot)$ були розв'яком задачі Майєра* (13),(14)*, необхідно і достатньо, щоб існував ненульовий розв'язок $\psi_*(t)$ спряженої системи*

$$\dot{\psi} = -N(n(t))A^T(t)\psi, \psi(\tau_i) = M^T(n(\tau_i))\psi(\tau_i - 0), i = \overline{1, m}$$

такий, що виконуються наступні умови:

1) для майже всіх $t \in [0, T]$ виконується умова максимуму:

$$(B(t)u_*(t), \psi_*(t)) = \max_{u \in U}(B(t)u, \psi_*(t));$$

2) $\psi_i(T) = -\frac{\partial \bar{\Phi}(x(T))}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, \bar{n}}$.

Зауваження 4. *Згідно із зауваженням 3 після отримання оптимальної траєкторії $x_*(\cdot)$ для системи* (13),(14) *легко можна отримати оптимальні траєкторії $x_{i*}(\cdot)$, $i = \overline{0, m}$ для системи* (9),(10).

Проілюстуємо отримані результати на модельному прикладі.

Приклад 2. *Нехай* $I = [0, 3]$, $n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1) \\ 2, & t \in [1, 2) \\ 1, & t \in [2, 3] \end{cases}$ *, а лінійна керована система із змінною розмірністтю має наступний вигляд*

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + B_i(t)u, \ t \neq \tau_i, \ \ x_0(0) = 1, \ i = \overline{0, 2}, \tag{16}$$

$$x_i(\tau_i) = M(n(\tau_i))x_{i-1}(\tau_i - 0), \ \ i = 1, 2, \tag{17}$$

де $x_0(t) : [0, 1) \to R^1$, $x_1(t) : [1, 2) \to R^2$, $x_2(t) : [2, 3] \to R^1$, $A_0(t) = -1$, $A_1(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2(t) = 1$, $B_0(t) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$, $B_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2(t) = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$, $u_i(t) \in [-1, 1]$, $i = 1, 2$, $M(n(1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $M(n(2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Треба знайти допустиму програмну стратегію $u_*(\cdot)$, яка доставляє мінімум функціоналу $I(u) = 2x_2(3)$.

Отже, пов'яжемо з системою (16), (17) наступну задачу оптимального керування

$$\dot{y} = N(n(t))A(t)y + N(n(t))B(t)u, \ t \neq \tau_i, \ \ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$y(\tau_i) = M(n(\tau_i))y(\tau_i - 0),\ I(u) = 2y_1(3), \qquad (19)$$

де $y \in R^2$, $\tau_0 = 0,\ \tau_1 = 1,\ \ \tau_2 = 2,\ \ \tau_3 = 3,\ u_i(t) \in [-1, 1],\ i = 1, 2,$

$$A(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & t \in [0, 1) \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, & t \in [1, 2) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & t \in [2, 3] \end{cases} \quad B(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & t \in [0, 1) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & t \in [1, 2) \\ \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & t \in [2, 3] \end{cases}$$

$$\bar{M}(n(1)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \bar{M}(n(2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

За теоремою 1 області досяжності систем (16),(17) та (18),(19) є компактами в будь-який момент часу $t \in [0, 3]$. *Тобто розв'язок задач існує.*

Запишемо спряжену систему диференціальних рівнянь

$$\dot{\psi} = -A^T(t)\psi,\ \psi(3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \psi(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\psi(1-0),\ \psi(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\psi(2-0).$$

Нижче на малюнках наводяться графіки зміни кожної з компонент вектора $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))^T$ *на кожному проміжку (рис. 3–8).*

Тоді з умови максимуму теореми 3 маємо:

- *якщо* $t \in [0, 1)$, *то* $(0,5u_1(t) + 0,5u_2(t))\psi_1(t) \to \max$. *На рис. 7 бачимо, що* $\psi_1(t) < 0$, *тобто* $u_{i*}(t) = -1, \quad i = 1, 2$;
- *якщо* $t \in [1, 2)$ $u_1(t)\psi_1(t) + u_2(t)\psi_2(t) \to \max$. *На рис. 5 та рис. 6 бачимо, що* $\psi_1(t) < 0$ *і* $\psi_2(t) < 0$, *тобто* $u_{i*}(t) = -1, \quad i = 1, 2$;
- *якщо* $t \in [2, 3]$ $(0,75u_1(t) + 0,25u_2(t))\psi_1(t) \to \max$. *На рис. 3 бачимо, що* $\psi_1(t) < 0$, *тобто* $u_{i*}(t) = -1, \quad i = 1, 2$.

Отже, $u_{i*}(t) = -1,\ \ t \in [0, 3],\ \ i = 1, 2$. *Тепер знайдемо відповідну оптимальну траєкторію* $y_*(\cdot)$:

$$y_*(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\frac{e^t - 2}{e^t} \\ 0 \end{pmatrix}, & t \in [0, 1) \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{e}(e^{-2t+2} + 1) - t + 1 \\ \frac{1}{e}(e^{-2t+2} - 1) - t + 1 \end{pmatrix}, & t \in [1, 2) \\ \begin{pmatrix} 1 - 0,442\,e^t \\ -1,114 \end{pmatrix}, & t \in [2, 3] \end{cases}$$

та $y_1(3) = -4.84$. *Тобто* $I(u) = -9,68$.

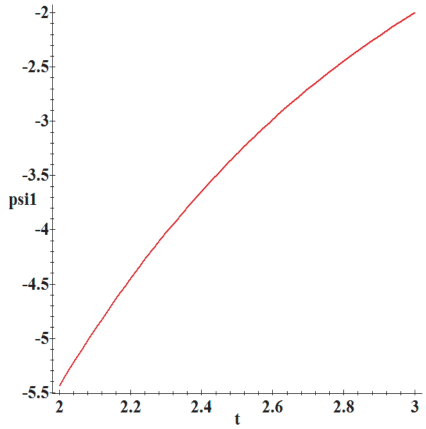


Рис. 3. $\psi_1(t)$, $t \in [2,3]$

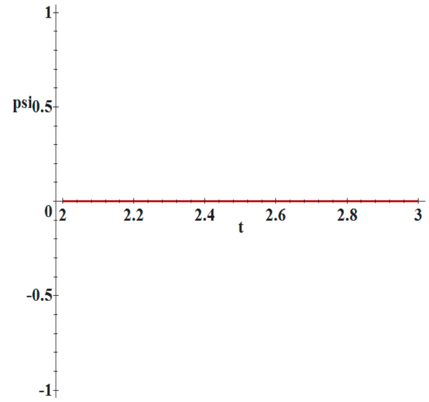


Рис. 4. $\psi_2(t)$, $t \in [2,3]$

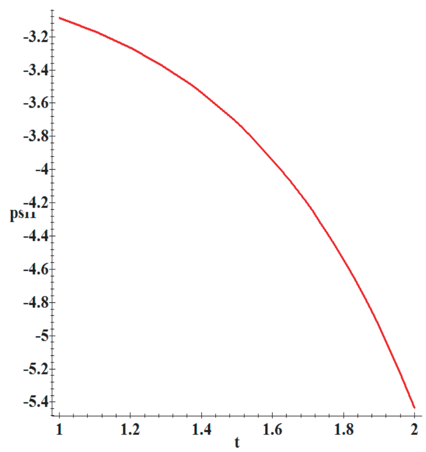


Рис. 5. $\psi_1(t)$, $t \in [1,2)$

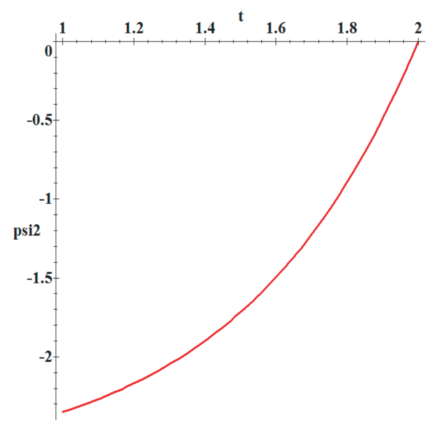


Рис. 6. $\psi_2(t)$, $t \in [1,2)$

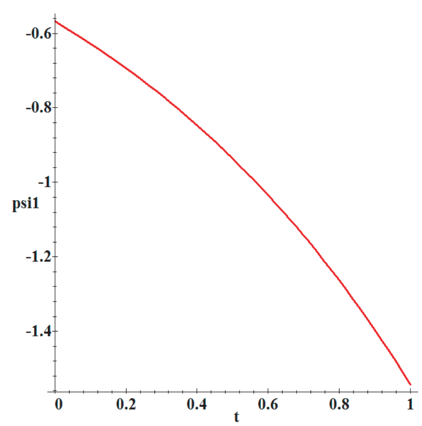


Рис. 7. $\psi_1(t)$, $t \in [0,1)$

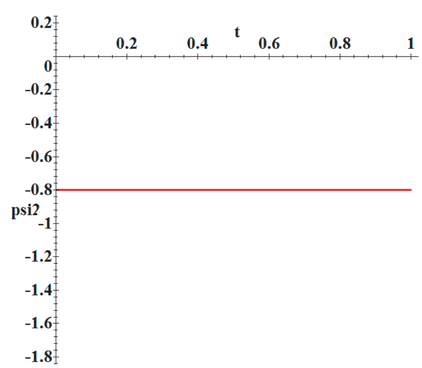


Рис. 8. $\psi_2(t)$, $t \in [0,1)$

Тоді, згідно із зауваженням 4, отримаємо оптимальну траєкторію для відповідної задачі Майєра (16),(17):

$$x_0^*(t) = -1 + 2e^{-t}, t \in [0, 1),$$

$$x_1^*(t) = \begin{pmatrix} -e^{-1}(e^{-2t+2} + 1) - t + 1 \\ e^{-1}(e^{-2t+2} - 1) - t + 1 \end{pmatrix}, t \in [1, 2),$$

$$x_2^*(t) = 1 - 0,442\, e^t, t \in [2, 3].$$

Висновки. У даній роботі для системи лінійних керованих диференціальних рівнянь, які змінюють розмірність у фіксовані моменти часу, завдяки зведенню її до імпульсного керованого лінійного диференціального рівняння було отримано необхідні і достатні умови оптимальності керування для задачі Майєра. Аналогічно можна розглянути системи лінійних керованих диференціальних рівнянь, які змінюють розмірність в нефіксовані моменти часу.

1. **Болтянский В. Г.** Задача оптимизации со сменой фазового пространства / В. Г. Болтянский // Дифференц. уравн. – 1983. – Т. 19, №3. – С. 519–521.
2. **Максимова И. С.** Условия управляемости в задаче со сменой фазового пространства / И. С. Максимова, В. Н. Розова // Вестник ТГУ. – 2011. – Т. 16, вып. 4. – С. 1118–1119.
3. **Медведев В. А.** Оптимальное управление ступенчатыми системами / В. А. Медведев, В. Н. Розова // Автоматика и телемеханика. – 1972. – Т.3. – С. 15і–23.
4. **Розова В. Н.** Оптимальное управление ступенчатыми системами / В. Н. Розова // Вестник Российского университета Дружбы народов. Серия: Физико–математические науки. – 2006. – №1. – С. 27–32.
5. **Захаров Г. К.** Оптимизация ступенчатых систем управления / Г. К. Захаров // Автоматика и телемеханика – 1981. – № 8. – С. 5–9.
6. **Магеррамов Ш. Ф.** Оптимизация одного класса дискретных ступенчатых систем управления / Ш. Ф. Магеррамов, К. Б. Мансимов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2001. – Т. 41, № 3. – С. 360–366.
7. **Никольский М. С.** Линейные дифференциальные игры с переменной структурой / М. С. Никольский // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 276, № 4. – С. 791–794.
8. **Никольский М. С.** Об одной вариационной задаче с переменной структурой / М. С. Никольский // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. – 1987. – № 1. – С. 36–41.
9. **Тадумадзе Т. А.** Регулярные возмущения в оптимальных задачах с переменной структурой / Т. А. Тадумадзе, Н. М. Авалишвили // Оптимальные задачи в системах с переменной структурой. – Тбилиси, 1985. – С. 100–154.
10. **Харатишвили Г. Л.** Полиатомические оптимальные системы / Г. Л. Харатишвили // Оптимальные задачи в системах с переменной структурой. – Тбилиси, 1985. – С. 3–47.

11. **Барсегян В. Р.** О задаче оптимального управления поэтапно меняющимися линейными системами с фазовыми ограничениями в промежуточные моменты времени / В. Р. Барсегян // Ученые записки ЕГУ. – 2002. – №1. – С.118–119.
12. **Еремин Е. Л.** Адаптивное управление динамическим объектом на множестве состояний функционирования / Е. Л. Еремин // Адаптивное и робастное управление. – 2012. – №4(34). – С. 107–118.
13. **Ащепков Л. Т.** Оптимальное управление. Курс лекций / Л. Т. Ащепков, В. В. Величенко // Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та. – 1989. – 116 с.
14. **Кичмаренко О. Д.** Нелинейные дифференциальные включения с переменной размерностью / О. Д. Кичмаренко, А. А. Плотников // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2013. – Т.18, вип. 2(18). – С. 29–34
15. **Кичмаренко О. Д.** Пошаговое усреднение линейных дифференциальных включений переменной размерности / О. Д. Кичмаренко, А. А. Плотников // Дослідження в математиці і механіці. – 2017. – Т. 22. – №1(29) – С. 7–17.
16. **Плотников А. А.** Пошаговое усреднение дифференциальных включений переменной размерности на конечном интервале / А. А. Плотников // Математичні студії. – 2016. – Т.46, №1. – С. 81–88.
17. **Плотников А. А.** Пошаговое усреднение линейных дифференциальных включений переменной размерности на конечном интервале / А. А. Плотников // Нелінійні коливання. – 2017. – Т. 20, №2. – С. 211–227.
18. **Kichmarenko O. D.** The Averaging of Control Linear Differential Equations with Variable Dimension on Finite Interval / O. D. Kichmarenko, A. A. Plotnikov // International Journal of Sensing, Computing and Control. – 2015. – Vol. 5, №1. – P. 25–35.
19. **Kichmarenko O. D.** The Averaging of Linear Differential Inclusions with Variable Dimension on Finite Interval / O.D. Kichmarenko, A.A. Plotnikov // International Journal of Nonlinear Science. – 2015. – Vol. 20, №2. – P. 67–78.
20. **Гребенников В. Г.** Оптимальный выбор траектории развития и принцип непрерывности планирования / В. Г. Гребенников // Методологические проблемы анализа долгосрочных социально-экономических процессов. Труды ВНИИСИ. – 1979. – Вып. 9. – С. 3–15.
21. **Кириллов А. Н.** Метод динамической декомпозиции в моделировании систем управления со структурными изменениями / А. Н. Кириллов // Моделирование систем и процессов. – 2009. – № 1. – С. 20–24.
22. **Романенко А. В.** Оптимальное управление экономическими системами с возрастной структурой / А. В. Романенко, А. В. Федосеев // Журнал вычислит. мат. и матем. физики. – 1993. – Т.33, №8. – С. 1155–1165.
23. **Barton P. I.** Modeling, simulation, sensitivity analysis, and optimization of hybrid systems / P. I. Barton, Ch. K. Lee // ACM Trans. on Model. and Comput. Simul. – 2002. – Vol. 12, №4. – P. 256–289.
24. **Haddad W. M.** Impulsive and hybrid dynamical systems / W. M. Haddad, V. S. Chellaboina, S. G. Nersesov // Princeton: Princeton University Press. – 2008.
25. **Асланян А. А.** Условия оптимальности в задачах управления системами с импульсным воздействием / А.А. Асланян // Доклады АН УССР, серия А. Физико-математические и технические науки. – 1982. – №11. – С. 3–6.

Кичмаренко О. Д., Плотников А. А.
Системы линейных управляемых дифференциальных уравнений с переменной размерностью

Резюме

Статья посвящена исследованию линейной управляемой системы переменной размерности. Рассматривается задача оптимального управления несколькими объектами с последовательным во времени режимом их работы. Исходное состояние каждого следующего объекта зависит от конечного состояния предыдущего, что объединяет их в единую систему переменной размерности. Предполагается, что каждый объект описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений на интервале его действия. При этом длины интервалов заданы или неизвестны. Системы уравнений могут иметь неодинаковую размерность, могут меняться также размерность управляющей функции и ограничения на ее значення. Такая система сводится к импульсной линейной системе, содержащей управления, и благодаря этому выясняются свойства решений системы и находятся сами решения. Также в работе рассмотрена задача Майєра и получены необходимые и достаточные условия оптимальности. Полученные результаты иллюстрируются примерами.
Ключевые слова: линейная система, оптимальное управление, переменная размерность, задача Майєра, дифференциальное уравнение, импульсная система .

Kichmarenko O. D., Plotnikov A. A.
Systems of linear controlled differential equations with variable dimension

Summary

The article investigates the linear control system of variable dimension. The optimal control problem for several objects with a consistent in time mode of their operation is considered. The initial state of each object depends on the final state of the previous one and this unites them into a single system of variable dimension. It is assumed that each object is described by a system of ordinary differential equations in the interval of its operation. In this case, the lengths of the intervals are either given or unknown. The system of equations may have unequal dimensions, while the dimension of the control function and the restriction on its value can also vary. This system reduces to an impulse linear system containing controls and, therefore, the properties of the system solutions are repelled and the solutions themselves are found. Besides that, we consider the Mayer problem and obtain necessary and sufficient conditions for optimality. The obtained results are illustrated by examples.
Key words: linear system, optimal control, variable dimension, Mayer problem, differential equation, impulse system.

References

1. Boltyanskii, V. G. (1983). Zadacha optimizacii so smenoi fazovogo prostranstva [The problem of optimization with change of phase space]. *Differentsial'nye Uravneniya*, Vol. 19 , №3. – P. 518–521.
2. Maksimova, I. S., Rozova, V. N. (2011). Uslobiya upravlyaemosti v zadache so smenoi fazovogo prostranstva [Controllability conditions in the problem with the change of phase space]. *Vestnik TGU*, Vol. 16, №4. – P. 1118–1119.
3. Medvedev, V. A., Rozova, V. N. (1972). Optimal'noe upravlenie stypenchatimi sistemami [Optimal control step system]. *Avtomatika i telemehanika*, Vol. 3. – P. 15–23.

4. Rozova, V. N. (1972). Optimal'noe upravlenie stypenchatimi sistemami [Optimal control step system]. Vestnik Rossiiskogo Universiteta Druzhbi Narodov. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki, №1. – P. 27–32.
5. Zakharov, G. K. (1981). Optimizaciya stupenchatih sistem upravleniya [Optimization of step control systems]. *Avtomatika i telemehanika*, Vol. 8. – P. 5–9.
6. Magerramov, Sh. F., Mansimov, K. B. (2001). Optimization of a class of discrete step control systems. *Comput. Math. Math. Phys.*, Vol. 41 , №3. – P. 334–339.
7. Nikol'skii, M. S. (1984). Lineinie differencial'nie igri s peremenoi strukturoi [Linear differential games with variable structure]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 276, №4. – P. 791–794.
8. Nikol'skii, M. S. (1987). Ob odnoi variacionnoi zadache s peremennoi strukturoi [A variational problem with a variable structure]. *Vestnik Moskov. Univ.*, Ser. XV Vychisl. Mat. Kibernet., №1. – P. 36–41.
9. Tadumadze, T. A., Avalishvili, N. M. (1985). Regulyarnie vozmuscheniya v optimal'nih zadachah s peremennoi strukturoi [Regular perturbations in optimal problems with variable structure]. *Optimal control in systems with variable structure.* – P. 100–154.
10. Haratishvili, G. L. (1985). Poliatomicheskie optimal'nie sistemi [Polyatomic optimal systems]. *Optimal control in systems with variable structure.* – P. 3–47.
11. Barsegyan, V. R. (2002). O zadache optimal'nogo upravleniya poetapno menyayuschimisya lineinimi sistemami s fazovimi ogranicheniyami v promezhutochnie momenti vremeni [On the problem of optimal control of gradually varying linear systems with phase constraints at intermediate instants of time]. *Uchenie zapiski EGU*, №1. – P. 118–119.
12. Eremin, E. L. (2012). Adaptivnoe upravlenie dinamicheskim ob'ektom na mnozhestve sostoyanii funkcionirovaniya [Adaptive control of a dynamic object in the set operation states]. *Adaptive and robust control*, №4(34). – P. 107–118.
13. Aschepkov, L. T., Velichenko, V. V. (1989). *Optimal'noe upravlenie. Kurs lekcii [Optimal control. Lecture course].* Vladivostok: Izdat. Dal'nevostochnogo universiteta, 116 p.
14. Kichmarenko, O. D., Plotnikov, A. A. (2013). Nelineinie differencial'nie vklucheniya s peremennoi razmernost'yu [Nonlinear differential inclusions with variable dimension], *Visnik Od. nac. un-tu. Mat. i mekh.*, Vol. 18, №2(18). – P. 29–34.
15. Kichmarenko, O. D., Plotnikov, A. A. (2017). Poshagovoe usrednenie lineinikh differencial'nih vkluchenii peremennoi razmernosti [Stepwise averaging of linear differential inclusions of variable dimension]. *Research in mathematics and mechanics*, Vol. 22, №1(29). – P. 7–17.
16. Plotnikov, A. A. (2016). Poshagovoe usrednenie differencial'nih vkluchenii peremennoi razmernosti [Stepwise averaging of differential inclusions of variable dimension]. *Matematychni Studii*, Vol. 46, №1. – C. 81–88.
17. Plotnikov, A. A. (2017). Poshagovoe usrednenie lineinikh differencial'nih vkluchenii peremennoi razmernosti na konechnom intervale [Step averaging linear differential inclusions with variable dimension on a finite interval]. *Nonlinear oscilation*, Vol. 20, №2. – C. 211–227.
18. Kichmarenko, O. D., Plotnikov, A. A. (2015). The Averaging of Control Linear Differential Equations with Variable Dimension on Finite Interval. *International Journal of Sensing, Computing and Control*, Vol. 5, №1. – P. 25–35.
19. Kichmarenko, O. D., Plotnikov, A. A. (2015). The Averaging of Linear Differential Inclusions with Variable Dimension on Finite Interval *International Journal of Nonlinear Science*, Vol. 20, №2. – P. 67–78.

20. Grebennikov, V. G. (1979). Optimal'nii vibor traektorii razvitiya i princip neprerivnosti planirovaniya [Optimal choice of the development trajectory and the principle of continuity of planning]. *In: Methodological problems of analysis of long-term socio-economic processes. Proceedings of VNIISI*, №9. – P. 3–15.

21. Kirilov, A. N. (2009). Metod dinamicheskoi dekompozicii v modelirovanii sistem upravleniya so strukturnimi szmeneniyami [The method of dynamic decomposition in the modeling of control systems with structural changes]. *Modeling of systems and processes*, № 1. – P. 20–24.

22. Romanenko, A. V., Fedoseev, A. V. (1993). Optimal'noe upravlenie ekonomicheskimi sistemami [Optimum management of economic systems with age structure]. *Zhurnal computes. mat. i math. physics*, Vol.33, №8. – P. 1155–1165.

23. Barton, P. I., Lee, Ch.K. (2002). Modeling, simulation, sensitivity analysis, and optimization of hybrid systems. *ACM Trans. on Model. and Comput. Simul.*, Vol. 12, №4. – P. 256–289.

24. Haddad, W. M., Nersesov, S.G. (2008). *Impulsive and hybrid dynamical systems.* Princeton: Princeton University Press.

25. Aslanyan, A. A. (1982). Usloviya optimal'nosti v zadachah upravleniya sistemami s impul'snim vozdeistviem [Conditions for optimality in problems of the control of systems with impulse action]. *Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A*, №11. – P. 3–6.

Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 1(31). – С. 68–80

УДК 517.925

Л. И. Кусик
Одесский национальный морской университет

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для дифференциального уравнения второго порядка общего вида $y'' = f(t, y, y')$, где $f : [a, \omega[\times\Delta_{Y_0}\times\Delta_{Y_1} \longrightarrow \mathbf{R}$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, Δ_{Y_i} — односторонняя окрестность Y_i, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$ $(i \in \{0, 1\})$, изучается вопрос о наличии решений, для которых $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i$ $(i \in \{0, 1\})$. Среди множества таких решений выделяется достаточно широкий класс т. н. $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решений. Такого типа решения ранее вводились при изучении двучленного уравнения $y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')$, где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$–непрерывная функция, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = 0, 1)$ – непрерывные правильно меняющиеся при $z \to Y_i$ $(i = 0, 1)$ функции порядков σ_i $(i = 0, 1)$, причем $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$. Случай, когда $\sigma_0 + \sigma_1 = 1$, не рассмотрен даже на указанном двучленном дифференциальном уравнении. В данной работе установлено условие, при котором правая часть изучаемого уравнения в некотором смысле близка при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ и $t \uparrow \omega$, $y^{(i)} \to Y_i$ $(i = 0, 1)$ к произведению $\alpha_0 p(t)|y|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1}$, где порядки σ_i $(i = 0, 1)$ нелинейностей таковы, что $\sigma_0 + \sigma_1 = 1$ (к т.н. полулинейному дифференциальному уравнению). При выполнении этого условия найдены необходимые, а также достаточные условия существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений, установлены асимптотические представления таких решений и их производных первого порядка, указано количество параметрических семейств таких решений. Результат исследования продемонстрирован на одном классе уравнений, правая часть которого представляет отношение сумм слагаемых специального вида.

MSC: 34E99.
Ключевые слова: двучленное дифференциальное уравнение, $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решение, асимптотические представления, условие (AL), одно-, двухпараметрическое семейство решений'.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134619.

Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = f(t, y, y'), \tag{1}$$

где $f : [a, \omega[\times\Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \longrightarrow \mathbf{R}$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$[1], Δ_{Y_i} $(i \in \{0, 1\})$ — односторонняя окрестность Y_i, Y_i $(i \in \{0, 1\})$ равно либо 0, либо $\pm\infty$.

В работах [1]– [3] рассматривались нелинейные двучленные дифференциальные уравнения, близкие к линейным (т. н. полулинейные дифференциальные уравнения, обладающие рядом свойств как линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений). Так, в работе [1] уравнение (1) изучено в случае, когда $f(t, y, y') = p(t)|y|^{1-\lambda}|y'|^{\lambda}\mathrm{sgn}\; y$ при некоторых ограничениях на функцию

[*] Считаем, что $a > 1$ в случае $\omega = +\infty$, и $a > \omega - 1$- в случае $\omega < +\infty$.

Получена 24.04.2018

p. В частности, если функция $p : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ сохраняет знак, локально абсолютно непрерывна и

$$\int\limits_a^\omega p^{\frac{1}{2-\lambda}}(t)\,dt = +\infty, \qquad \lim_{t\to\omega} p'(t)p^{\frac{\lambda-3}{2-\lambda}}(t) = l_0 \qquad (|l_0| \leqslant +\infty),$$

в [1] найдены асимптотические представления при $t \to \omega$ всех типов правильных решений уравнения (1).

Здесь для уравнения общего вида (1) изучается вопрос существования и асимптотики (при $t \uparrow \omega$) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решений.

Определение 1. *Решение y уравнения (1), заданное на промежутке $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$, называется $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решением, где $-\infty \leqslant \lambda_0 \leqslant +\infty$, если для него соблюдаются условия*

$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \qquad \text{при } t \in [t_0,\omega[\ , \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0,1), \tag{2}$$

$$y''(t) \neq 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0. \tag{3}$$

$P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решения в зависимости от значений λ_0 обладают разными асимптотическими свойствами. При этом возникают неособые случаи, когда $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, и особые — когда $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_0 = \pm\infty$. Доказано (см., например, [4]), что при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ для $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решений имеют место асимптотические представления

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}, \tag{4}$$

где

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

В работе [5] для каждого из возможных значений λ_0 рассматривался случай, когда на $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решениях

$$f(t, y(t), y'(t)) = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ — непрерывная функция, функции $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0,+\infty[$ $(i = 0,1)$ — непрерывные правильно меняющиеся при $z \to Y_i$ $(i = 0,1)$ функции порядков σ_i $(i = 0,1)$, в предположении, что $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$, т.е. в случае, когда уравнение (1) в некотором смысле близко к уравнению с правильно меняющимися нелинейностями.

Целью настоящей статьи является исследование существования и поведения $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решений уравнения (1) при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ и когда уравнение (1) становится близким в некотором смысле к полулинейному двучленному.

Определение 2. *Будем говорить, что функция f удовлетворяет условию (AL), если существуют число $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, непрерывная функция $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$, такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций $z_i : [a, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}$ $(i = 0, 1)$, удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_i(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \tag{5}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \left(\frac{z_1(t)}{z_0(t)}\right)'}{\frac{z_1(t)}{z_0(t)}} = -1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z_0'(t) \ln |\pi_\omega(t)|}{z_0(t) \ln |z_0(t)|} = 1 \tag{6}$$

имеет место представление

$$f(t, z_0(t), z_1(t)) = \alpha_0 p(t) |z_0(t)|^{\sigma_0} |z_1(t)|^{\sigma_1} [1 + o(1)] \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{7}$$

где

$$\sigma_0 + \sigma_1 = 1.$$

Основные результаты. Для формулировки основного результата в предположении, что $\lambda_0 \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$ и функция f удовлетворяет условию (AL), положим

$$I(t) = \int_a^t p(t) |\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0} \, d\tau.$$

Также введем числа

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_i = +\infty \quad \text{либо} \\ & \quad Y_i = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_{Y_i} - \text{правая окрестность } 0, \\ -1, & \text{если } Y_i = -\infty \quad \text{либо} \\ & \quad Y_i = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_{Y_i} - \text{левая окрестность } 0 \end{cases} \qquad (i = 0, 1),$$

такие что,

$$\mu_0 \mu_1 > 0 \quad \text{при} \quad Y_0 = \pm\infty \quad \text{и} \quad \mu_0 \mu_1 < 0 \quad \text{при} \quad Y_0 = 0. \tag{8}$$

Ясно, что μ_0 определяет знак любого $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решения уравнения (1), μ_1 - его производной в некоторой левой окрестности ω. При этом следует отметить, что условия (8) являются необходимыми для существования у уравнения (1) решений, заданных на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяющих условиям (2). Кроме того, при выполнении условия (AL) знак второй производной любого $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решения уравнения (1) в некоторой левой окрестности ω совпадает со значением α_0. Тогда с учетом (8), имеем

$$\alpha_0 \mu_1 > 0 \quad \text{при} \quad Y_1 = \pm\infty \quad \text{и} \quad \alpha_0 \mu_1 < 0 \quad \text{при} \quad Y_1 = 0. \tag{9}$$

Теорема. *Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ и функция f удовлетворяет условию (AL). Тогда для существования у дифференциального уравнения (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решений необходимо, а если $\lambda_0 + \sigma_0 \neq 0$, то и достаточно, чтобы наряду с неравенствами (8), (9) соблюдались условия*

$$\alpha_0\mu_1(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0 \qquad \text{при} \quad t \in [a, \omega[, \tag{10}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} p(t)|\pi_\omega(t)|^{1+\sigma_0} = \frac{|\lambda_0|^{\sigma_0}}{|\lambda_0 - 1|^{1+\sigma_0}}. \tag{11}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$\ln|y(t)| = \mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1-\sigma_0}|\lambda_0 - 1|^{\sigma_0} I(t)[1 + o(1)], \tag{12}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0(1 + o(1))}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{13}$$

причем таких решений существует при $\alpha_0\mu_1(\sigma_0 + \lambda_0) > 0$ двухпараметрическое семейство, при $\alpha_0\mu_1(\sigma_0 + \lambda_0) < 0$ — однопараметрическое семейство.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ и $y : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_0}$ - произвольное $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)-$ решение уравнения (1). Тогда существует число $t_1 \in [t_0, \omega[$ такое, что $y^{(k)}(t) \neq 0$ $(k = 0, 1, 2)$, $\operatorname{sign} y^{(k)}(t) = \mu_k$ $(k = 0, 1)$ при $t \in [t_1, \omega[$. Кроме того, из определения $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$–решения для $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ непосредственно вытекает выполнение предельных равенств (5). Откуда, в частности, следует, что имеет место асимптотическое представление (13) и знаковое условие (10).

Так как y удовлетворяет условиям (5), то

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)'}{\frac{y'(t)}{y(t)}} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\left(\frac{y''(t)}{y(t)} - \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2\right)}{\frac{y'(t)}{y(t)}} =$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} - \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1} - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} = -1,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)\, ln|\pi_\omega(t)|}{y(t)\, ln|y(t)|} = 1,$$

следовательно, для $y(t)$, $y'(t)$ выполнены условия (5), (6) определения 2. Так как функция f удовлетворяет условию (AL) из уравнения (1) имеем,

$$y''(t) = \alpha_0 p(t)|y(t)|^{\sigma_0}|y'(t)|^{\sigma_1}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда с учетом условий (5) вытекает соотношение

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha_0\mu_0(\lambda_0 - 1)\left|\frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}\right|^{1-\sigma_0} p(t)\pi_\omega(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{14}$$

Интегрируя (14) на промежутке от a до t, получим

$$ln|y(t)| = const + \mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1-\sigma_0}|\lambda_0 - 1|^{\sigma_0} \int_a^t p(t)|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0}[1 + o(1)]\, d\tau.$$

В силу определения $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решения левая часть последнего равенства стремится к $\pm\infty$, откуда $I(t) \to +\infty$ при $t \uparrow \omega$ и имеет место представление (12). Также, домножая обе части (14) на $\pi_\omega(t)$ и учитывая (13), получим соотношение (11). Также из представлений (12), (13) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{I(t)}{\ln|\pi_\omega(t)|} = \frac{\beta|\lambda_0|^{\sigma_0}}{|\lambda_0-1|^{\sigma_0+1}}, \quad \beta = sign\,\pi_\omega(t). \tag{15}$$

Достаточность. Пусть $\lambda_0 + \sigma_0 \neq 0$ и соблюдаются условия (8) – (11). Покажем, что в этом случае дифференциальное уравнение (1) имеет $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$–решения, допускающие представления (12), (13), и выясним вопрос о количестве таких решений.

Применяя к дифференциальному уравнению (1) преобразование

$$\begin{gathered} \ln|y(t)| = \mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1-\sigma_0}|\lambda_0-1|^{\sigma_0} I(t)[1+v_1(\tau)], \\ \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0[1+v_2(\tau)]}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}, \quad \tau = \beta\ln|\pi_\omega(t)|, \quad \beta = sign\,\pi_\omega(t), \end{gathered} \tag{16}$$

получим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} v_1' = \ \beta q(\tau)\left(-1 + \dfrac{1}{h(\tau)} - v_1 + \dfrac{v_2}{h(\tau)}\right), \\ v_2' = \ \beta\left(G(\tau, v_1, v_2) g(\tau)|1+v_2|^{\sigma_1} + \dfrac{1+v_2+\lambda_0 v_2+\lambda_0 v_2^2}{\lambda_0-1}\right), \end{cases} \tag{17}$$

где

$$q(\tau) = q(\tau(t)) = \frac{I'(t)\pi_\omega(t)}{I(t)}, \quad h(\tau) = h(\tau(t)) = \beta|\lambda_0|^{-\sigma_0}|\lambda_0-1|^{1+\sigma_0} I'(t)\pi_\omega(t),$$

$$g(\tau) = \alpha_0\mu_1\beta\left|\frac{\lambda_0-1}{\lambda_0}\right|^{\sigma_0} p(t)|\pi_\omega(t)|^{1+\sigma_0},$$

$$G(\tau, v_1, v_2) = \frac{f\left(\tau, Y(\tau, v_1), Y^{[1]}(\tau, v_1, v_2)\right)}{\alpha_0 p(t)\,|Y(\tau, v_1)|^{\sigma_0}\left|Y^{[1]}(\tau, v_1, v_2)\right|^{\sigma_1}}$$

$$Y(\tau, v_1) = \mu_0 e^{\mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1-\sigma_0}|\lambda_0-1|^{\sigma_0} I(t)[1+v_1(\tau)]},$$

$$Y^{[1]}(\tau, v_1, v_2) = \frac{\lambda_0 Y(\tau, v_1)[1+v_2(\tau)]}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}.$$

Выберем произвольным образом $a_0 \in]a, \omega[$ и рассмотрим систему (17) на множестве $[\tau_0, +\infty[\times\mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}}$, где $\tau_0 = \beta\ln|\pi_\omega(a_0)|$, $\mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}} = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : |v_i| \leqslant 1/2, i = 1, 2\}$. На этом множестве правые части системы непрерывны и имеют непрерывные частные производные по v_1, v_2.

Так как функция $\tau(t) = \beta\ln|\pi_\omega(t)|$ такая, что

$$\tau : [a_0, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[, \quad \tau'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [a_0, \omega[, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\tau(t) = +\infty,$$

то в силу (11)

$$\lim_{\tau\to+\infty} h(\tau) = \lim_{t\to\omega} h(\tau(t)) = 1, \quad \lim_{\tau\to+\infty} g(\tau) = \lim_{t\to\omega} g(\tau(t)) = \frac{1}{\lambda_0 - 1}. \tag{18}$$

Заметим, что функция $q(\tau)$ сохраняет знак на $[\tau_0, +\infty)$, а именно $sign\ q(\tau) = \beta$ и

$$\int\limits_{\tau_0}^{+\infty} \beta q(\tau)\, d\tau = \int\limits_{a_0}^{\omega} \frac{I'(t)}{I(t)}\, dt = \ln(I(t))\,\Big|_{a_0}^{\omega} = +\infty.$$

Также из вида функций $Y(\tau, v_1)$, $Y^{[1]}(\tau, v_1, v_2)$ следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y(\tau(t), v_1) = Y_0 \quad \text{равномерно по} \quad v_1 : |v_1| \leqslant 1/2, \tag{19}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y^{[1]}(\tau, v_1, v_2) = Y_1 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

Так как

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) \left(\frac{Y^{[1]}(\tau(t), v_1, v_2)}{Y(\tau(t), v_1)}\right)'_t}{\frac{Y^{[1]}(\tau(t), v_1, v_2)}{Y(\tau(t), v_1)}} = -1 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}}$$

и с учетом (15)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\, (Y(\tau(t), v_1))'_t\, \ln|\pi_\omega(t)|}{Y(\tau(t), v_1)\, \ln|Y(\tau(t), v_1)|} = 1 \quad \text{равномерно по} \quad v_1 : |v_1| \leqslant 1/2,$$

то в силу определения 2 функция $G(\tau, v_1, v_2)$ может быть представлена в виде

$$G(\tau, v_1, v_2) = 1 + r(\tau, v_1, v_2), \tag{21}$$

где

$$\lim_{\tau\to+\infty} r(\tau, v_1, v_2) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая соотношения (18)–(21), систему (17) можем записать следующим образом

$$\begin{cases} v_1' = & f_1(\tau) + p_{11}(\tau) v_1 + p_{12}(\tau) v_2, \\ \\ v_2' = & f_2(\tau) + p_{22}(\tau) v_2 + V_1(\tau, v_1, v_2) + V_2(\tau, v_2), \end{cases} \tag{22}$$

где

$$f_1(\tau) = \beta q(\tau) \left(-1 + \frac{1}{h(\tau)}\right), \quad p_{11}(\tau) = -\beta q(\tau), \quad p_{12}(\tau) = \frac{\beta q(\tau)}{h(\tau)},$$
$$f_2(\tau) = \beta \left(g(\tau) - \frac{1}{\lambda_0 - 1}\right), \quad p_{22}(\tau) = \beta \left(\sigma_1 g(\tau) - \frac{1 + \lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right),$$
$$V_1(\tau, v_1, v_2) = \beta g(\tau) r(\tau, v_1, v_2)\, (1 + v_2)^{\sigma_1},$$
$$V_2(\tau, v_2) = \beta \left(g(\tau)((1 + v_2)^{\sigma_1} - 1 - \sigma_1 v_2) - \frac{\lambda_0 v_2^2}{(\lambda_0) - 1}\right).$$

В силу (18)–(21) справедливы соотношения

$$\lim_{\tau\to+\infty} V_1(\tau, v_1, v_2) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}},$$

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{\partial V_2(\tau, v_2)}{\partial v_j} = 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad \text{равномерно по} \quad \tau \in [\tau_0, +\infty).$$

Кроме того, при $\lambda_0 + \sigma_0 \neq 0$

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{f_i(\tau)}{p_{ii}(\tau)} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad \lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{p_{22}(\tau)} = \frac{1-\lambda_0}{\sigma_0+\lambda_0}, \quad \lim_{\tau\to+\infty} \frac{p_{12}(\tau)}{p_{11}(\tau)} = -1,$$
$$\int\limits_{\tau_0}^{+\infty} |p_{ii}(\tau)|\, d\tau = +\infty \quad (i = 1, 2).$$

Таким образом, для системы (22) выполнены условия леммы 2.2 из работы [6]. Поэтому у этой системы дифференциальных уравнений существует хотя бы одно решение $(v_1, v_2) : [\tau_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2_{\frac{1}{2}}$ $(\tau_1 \geqslant a_0)$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$. Каждому такому решению в силу преобразования (16) соответствует решение y дифференциального уравнения (1), допускающее асимптотические представления (12), (13). Покажем, что указанное решение является $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решением. Так как функция f удовлетворяет условию (AL), то с учетом равенства (11), представления (13) из уравнения (1) получим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0.$$

Количество решений системы (22) при $\lambda_0 + \sigma_0 \neq 0$ легко найти на основании леммы 2.2 работы [6] по числу отрицательных среди функций $-\beta q(\tau)$, $\beta\left(\sigma_1 g(\tau) - \dfrac{1+\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right)$. Так как

$$sign\,(-\beta q(t)) = -1, \quad \lim_{\tau\to+\infty} g(t) = \frac{1}{\lambda_0 - 1}, \quad sign\,(\beta(\lambda_0 - 1)) = \alpha_0\mu_1,$$

то при $\beta(\lambda_0 - 1)(-\sigma_0 - \lambda_0) < 0$ существует двухпараметрическое семейство решений системы (22), стремящихся к нулю при $\tau \to +\infty$. Если же $\beta(\lambda_0 - 1)(-\sigma_0 - \lambda_0) > 0$, система (22) имеет однопараметрическое семейство решений, исчезающих в бесконечности.

Теорема полностью доказана.

Пример. *Результаты исследования охватывают не только полулинейные, но и некоторые уравнения, содержащие медленно меняющиеся функции относительно неизвестной функции и ее производной. Например, рассмотрим дифференциальное уравнение*

$$y'' = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)|y|^{\sigma_{k0}}|y'|^{\sigma_{k1}}|\ln|y||^{\nu_{k0}}|\ln|y'||^{\nu_{k1}}}{\sum\limits_{k=m+1}^{m+n} \alpha_k p_k(t)|y|^{\sigma_{k0}}|y'|^{\sigma_{k1}}|\ln|y||^{\nu_{k0}}|\ln|y'||^{\nu_{k1}}}, \tag{23}$$

где $\alpha_k \in \{-1, 1\}$ $(k = \overline{1, m+n})$, $p_k : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(k = \overline{1, m+n})$ *— непрерывные функции и, как известно,* $|\ln|z||^k$ *— медленно меняющиеся при* $z \to Y_i$, $z \in \Delta_{Y_i} (i = 0, 1)$ *— непрерывные функции.*

Допустим, что $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ *и для некоторых* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *и* $j \in \{m+1, \ldots, m+n\}$ *соблюдаются неравенства*

$$\begin{gathered}\limsup_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\ln p_k(t)-\ln p_i(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||}\right] < \frac{\beta}{\lambda_0-1}\left[\lambda_0(\sigma_{i0}-\sigma_{k0})+\sigma_{i1}-\sigma_{k1}\right] \\ \text{при}\quad k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{i\}, \\ \limsup_{t\uparrow\omega}\left[\frac{\ln p_k(t)-\ln p_j(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||}\right] < \frac{\beta}{\lambda_0-1}\left[\lambda_0(\sigma_{j0}-\sigma_{k0})+\sigma_{j1}-\sigma_{k1}\right] \\ \text{при}\quad k\in\{m+1,\ldots,m+n\}\setminus\{j\},\end{gathered} \tag{24}$$

где

$$\operatorname{sign}\pi_\omega(t) = \beta.$$

Покажем, что в этом случае для любых непрерывно дифференцируемых функций $z_s : [a, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_s}$ $(s = 0, 1)$, *удовлетворяющих условиям (5) и*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_0'(t)}{z_0(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)z_1'(t)}{z_1(t)} = \frac{1}{\lambda_0-1}, \tag{25}$$

справедливы предельные равенства

$$\begin{gathered}\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_k(t)|z_0(t)|^{\sigma_{k0}}|z_1(t)|^{\sigma_{k1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{k0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{k1}}}{p_i(t)|z_0(t)|^{\sigma_{i0}}|z_1(t)|^{\sigma_{i1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{i0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{i1}}} = 0 \\ \text{при}\quad k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{i\}\end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered}\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_k(t)|z_0(t)|^{\sigma_{k0}}|z_1(t)|^{\sigma_{k1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{k0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{k1}}}{p_j(t)|z_0(t)|^{\sigma_{j0}}|z_1(t)|^{\sigma_{j1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{j0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{j1}}} = 0 \\ \text{при}\quad k\in\{m+1,\ldots,m+n\}\setminus\{j\}.\end{gathered} \tag{27}$$

Полагая при $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$R_k(t) = \frac{p_k(t)|z_0(t)|^{\sigma_{k0}}|z_1(t)|^{\sigma_{k1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{k0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{k1}}}{p_i(t)|z_0(t)|^{\sigma_{i0}}|z_1(t)|^{\sigma_{i1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{i0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{i1}}} \quad k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{i\},$$

докажем, что $\lim\limits_{t\uparrow\omega} R_k(t) = 0$. *Учитывая (5), (25) при* $t \uparrow \omega$ *имеем*

$$|z_0(t)| = |\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+o(1)}, \quad |z_1(t)| = |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}+o(1)},$$

поэтому в силу правила Лопиталя справедливо равенство

$$\ln\left(|z_s(t)|^{\sigma_{ks}}|\ln|z_s(t)||^{\nu_{ks}}\right) = \ln|z_s(t)|\left(\sigma_{ks}+\frac{\ln|\ln|z_s(t)||^{\nu_{ks}}}{\ln|z_s(t)|}\right) = \ln|z_s(t)|\left(\sigma_{ks}+o(1)\right) =$$

$$= \begin{cases}\ln|\pi_\omega(t)|\left(\frac{\sigma_{k0}\lambda_0}{\lambda_0-1}+o(1)\right), & \text{если}\quad s=0,\\ \ln|\pi_\omega(t)|\left(\frac{\sigma_{k1}}{\lambda_0-1}+o(1)\right), & \text{если}\quad s=1\end{cases} \quad \text{при}\quad t\uparrow\omega.$$

Следовательно,

$$\ln R_k(t) = \ln \frac{p_k(t)}{p_i(t)} + \frac{\ln|\pi_\omega(t)|}{\lambda_0 - 1}\left((\sigma_{k0} - \sigma_{i0})\lambda_0 + \sigma_{k1} - \sigma_{i1} + o(1)\right) =$$

$$= \beta \ln|\pi_\omega(t)| \left[\frac{\ln p_k(t) - \ln p_i(t)}{|\ln|\pi_\omega(t)||} + \frac{\beta}{\lambda_0 - 1}\left((\sigma_{k0} - \sigma_{i0})\,\lambda_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sigma_{k1} - \sigma_{i1}\right) + o(1)\right].$$

Теперь, зная, что $\operatorname{sign}\pi_\omega(t) = \beta$ *и выполняются первые из неравенств (24), приходим к выводу, что выражение в квадратных скобках отрицательно, т.е.* $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \ln R_k(t) = -\infty$, *откуда вытекает* $\lim\limits_{t\uparrow\omega} R_k(t) = 0$. *Это означает, что соблюдается предельное соотношение (26).*

Используя второе из соотношений (24), аналогичным образом устанавливается справедливость предельного соотношения (27).

В силу установленных предельных соотношений (26) и (27) в случае $\sigma_{i0} - \sigma_{j0} + \sigma_{i1} - \sigma_{j1} = 1$ *функция*

$$f(t, z_0(t), z_1(t)) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)|z_0(t)|^{\sigma_{k0}}|z_1(t)|^{\sigma_{k1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{k0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{k1}}}{\sum\limits_{k=m+1}^{m+n} \alpha_k p_k(t)|z_0(t)|^{\sigma_{k0}}|z_1(t)|^{\sigma_{k1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{k0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{k1}}}$$

удовлетворяет условию (AL), *поскольку для любых непрерывно дифференцируемых функций* $z_s : [a,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_s}$ $(s = 0, 1)$, *удовлетворяющих условиям (5) и (25), следует справедливость условий (6) и соотношения*

$$f(t, z_0(t), z_1(t)) = \frac{\alpha_i p_i(t)|z_0(t)|^{\sigma_{i0}}|z_1(t)|^{\sigma_{i1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{i0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{i1}}}{\alpha_j p_j(t)|z_0(t)|^{\sigma_{j0}}|z_1(t)|^{\sigma_{j1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{j0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{j1}}} \times$$

$$\times \frac{1 + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m} \dfrac{\alpha_k p_k(t)|z_0(t)|^{\sigma_{k0}}|z_1(t)|^{\sigma_{k1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{k0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{k1}}}{\alpha_i p_i(t)|z_0(t)|^{\sigma_{i0}}|z_1(t)|^{\sigma_{i1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{i0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{i1}}}}{1 + \sum\limits_{\substack{k=m+1\\k\neq j}}^{m} \dfrac{\alpha_k p_k(t)|z_0(t)|^{\sigma_{k0}}|z_1(t)|^{\sigma_{k1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{k0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{k1}}}{\alpha_j p_j(t)|z_0(t)|^{\sigma_{j0}}|z_1(t)|^{\sigma_{j1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{j0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{j1}}}} =$$

$$= \frac{\alpha_i p_i(t)|z_0(t)|^{\sigma_{i0}}|z_1(t)|^{\sigma_{i1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{i0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{i1}}}{\alpha_j p_j(t)|z_0(t)|^{\sigma_{j0}}|z_1(t)|^{\sigma_{j1}}|\ln|z_0(t)||^{\nu_{j0}}|\ln|z_1(t)||^{\nu_{j1}}}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Таким образом, имеет место представление

$$f(t, z_0(t), z_1(t)) = \alpha_0 p(t)|z_0(t)|^{\sigma_{i0}-\sigma_{j0}}|z_1(t)|^{\sigma_{i1}-\sigma_{j1}}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

где

$$\alpha_0 = \alpha_i\alpha_j, \quad p(t) = \frac{|\lambda_0|^{\nu_{i0}-\nu_{j0}}}{|\lambda_0 - 1|^{\nu_{i0}+\nu_{i1}-\nu_{j0}-\nu_{j1}}}\frac{p_i(t)}{p_j(t)}|\ln|\pi_\omega(t)||^{\nu_{i0}+\nu_{i1}-\nu_{j0}-\nu_{j1}}.$$

Поэтому при $\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\sigma_{i1}-\sigma_{j1}=1$ к уравнению (23) применима доказанная выше теорема, где вместо I будем понимать

$$I_{ij}(t)=\frac{|\lambda_0|^{\nu_{i0}-\nu_{j0}}}{|\lambda_0-1|^{\nu_{i0}+\nu_{i1}-\nu_{j0}-\nu_{j1}}}\int\limits_a^t \frac{p_i(\tau)}{p_j(\tau)}|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_{i0}-\sigma_{j0}}|\ln|\pi_\omega(\tau)||^{\nu_{i0}+\nu_{i1}-\nu_{j0}-\nu_{j1}}\,d\tau.$$

Следствие. *Пусть $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, для некоторых $i\in\{1,\dots,m\}$ и $j\in\{m+1,\dots,m+n\}$ выполнено равенство $\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\sigma_{i1}-\sigma_{j1}=1$ и условия (24). Тогда для существования у дифференциального уравнения (23) $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$- решений необходимо, а если $\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\lambda_0\neq 0$, то и достаточно, чтобы наряду с неравенствами (8), (9) соблюдались условия*

$$\alpha_0\mu_1\beta(\lambda_0-1)>0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)}{p_j(t)}|\ln|\pi_\omega(t)||^{\nu_{i0}+\nu_{i1}-\nu_{j0}-\nu_{j1}}|\pi_\omega(t)|^{1+\sigma_{i0}-\sigma_{i1}}= \\ =\frac{|\lambda_0|^{\sigma_{i0}-\sigma_{j0}-\nu_{i0}+\nu_{j0}}}{|\lambda_0-1|^{1+\sigma_{i0}-\sigma_{j0}-\nu_{i0}-\nu_{i1}+\nu_{j0}+\nu_{j1}}}.$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$\ln|y(t)|=\mu_0\mu_1|\lambda_0|^{1-\sigma_{i0}+\sigma_{j0}}|\lambda_0-1|^{\sigma_{i0}-\sigma_{j0}}I_{ij}(t)[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{\lambda_0(1+o(1))}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}\quad \text{при}\quad t\uparrow\omega,$$

причем таких решений существует при $\alpha_0\mu_1(\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\lambda_0)>0$ двухпараметрическое семейство, а при $\alpha_0\mu_1(\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\lambda_0)<0$ – однопараметрическое семейство.

Замечание. *Асимптотическое поведение $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$- решений уравнения (23) в случае $\sigma_{i0}-\sigma_{j0}+\sigma_{i1}-\sigma_{j1}\neq 1$ можно получить из следствия 2.3 работы [5].*

Заключение. Для дифференциального уравнения второго порядка общего вида $y''=f(t,y,y')$, где $f:[a,\omega[\times\Delta_{Y_0}\times\Delta_{Y_1}\longrightarrow\mathbf{R}$ – непрерывная функция, $-\infty<a<\omega\leqslant+\infty$, Δ_{Y_i} — односторонняя окрестность Y_i, $Y_i\in\{0,\pm\infty\}$ ($i\in\{0,1\}$) изучен вопрос о наличии решений, для которых $\lim\limits_{t\uparrow\omega}y^{(i)}(t)=Y_i$ ($i\in\{0,1\}$). Среди множества таких решений выделяется достаточно широкий класс т. н. $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$- решений. Такого типа решения ранее вводились при изучении двучленного уравнения $y''=\alpha_0p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')$, где $\alpha_0\in\{-1,1\}$, $p:[a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$– непрерывная функция, $\varphi_i:\Delta_{Y_i}\longrightarrow]0,+\infty[$ ($i=0,1$) – непрерывные правильно меняющиеся при $z\to Y_i$ ($i=0,1$) функции порядков σ_i ($i=0,1$), причем $\sigma_0+\sigma_1\neq 1$. Случай, когда $\sigma_0+\sigma_1=1$, не рассмотрен даже на указанном двучленном дифференциальном уравнении. В данной работе установлено условие, при котором правая часть изучаемого уравнения в некотором смысле близка при

$\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ и $t \uparrow \omega$, $y^{(i)} \to Y_i$ $(i=0,1)$ к произведению $\alpha_0 p(t)|y|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1}$, где порядки σ_i $(i=0,1)$ нелинейностей таковы, что $\sigma_0+\sigma_1=1$ (к т.н. полулинейному дифференциальному уравнению). При выполнении этого условия найдены необходимые, а также достаточные условия существования $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решений, установлены асимптотические представления таких решений и их производных первого порядка, указано количество параметрических семейств таких решений. Результат исследования продемонстрирован на одном классе уравнений, правая часть которого представляет отношение сумм слагаемых специального вида.

1. **Евтухов В.М.** Асимптотика решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка / В. М. Евтухов // Дифференц. уравнения – 1990. – Т. 26., № 5. – С. 776–787.
2. **Евтухов В.М.** Асимптотика решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, асимптотически близких к линейным / В. М. Евтухов // УМЖ. – 2012. – Т. 64, № 10.– С. 1346–1364.
3. **Муса Джабер Абу эль-шаур.** Асимптотика решений неавтономных обыкновенных дифференциальных второго порядка, близких к линейным / Муса Джабер Абу эль-шаур // Нелинейные колебания. – 2008. – 11, № 2. С. 230 – 241.
4. **Евтухов В.М.** Асимптотическое поведение решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка типа Эмдена—Фаулера: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Евтухов Вячеслав Михайлович. – Одесса, 1980. – 154 с.
5. **Кусик Л.И.** Асимптотические представления решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка: дис. ... кан. физ.- мат. наук: 01.01.02 / Кусик Людмила Игоревна. – Одесса, 2016. – 145 с.
6. **Евтухов В.М.** Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / В. М. Евтухов, Л. И. Кусик // Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2009. – 14, вип. 20. – С. 57–74.

Кусік Л. І.

Про асимптотичну поведінку розв'язків одного класу диференціальних рівнянь другого порядку

Резюме

Для диференціального рівняння другого порядку загального виду $y''=f(t,y,y')$, де $f:[a,\omega[\times\Delta_{Y_0}\times\Delta_{Y_1}\longrightarrow \mathbf{R}$ — неперервна функція, $-\infty<a<\omega\leqslant+\infty$, Δ_{Y_i} — односторонній окіл Y_i, $Y_i\in\{0,\pm\infty\}$ $(i\in\{0,1\})$, розглянуто питання існування розв'язків, для яких $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t)=Y_i$ $(i\in\{0,1\})$. Серед множини таких розв'язків відокремлюємо достатньо широкий клас т. з. $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$- розв'язків. Такого типу розв'язки раніше було уведено при вивченні двочленного рівняння $y''=\alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')$, де $\alpha_0\in\{-1,1\}$, $p:[a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ —неперервна функція, $\varphi_i:\Delta_{Y_i}\longrightarrow]0,+\infty[$ $(i=0,1)$ — неперервні правильно змінні при $z\to Y_i$ $(i=0,1)$ функції порядків σ_i $(i=0,1)$, причому $\sigma_0+\sigma_1\neq1$. Випадок, коли $\sigma_0+\sigma_1=1$ не є розглянутим навіть на вказанному двочленному диференціальному рівнянні. У даній роботі встановлено умову, за якою права частина вивчаємого рівняння в деякому сенсі є близькою при $\lambda_0\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ та $t\uparrow\omega$, $y^{(i)}\to Y_i$ $(i=0,1)$ до добутку $\alpha_0 p(t)|y|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1}$, де порядки σ_i $(i=0,1)$ нелінійностей такі, що $\sigma_0+\sigma_1=1$ (до т.з. полулінейного диференціального рівняня). При виконанні цієї

умови знайдено необхідні, а також достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків, встановлено асимптотичні зображення таких розв'язків та їх похідних першого порядку, вказано кількість параметричних сімей таких розв'язків. Результат дослідження продемонстровано на одному класі рівнянь, права частина якого є відношенням сум доданків спеціального вигляду.
Ключові слова: двочленне диференціальне рівняння, $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язок, асимптотичні зображення, умова (AL), одно-, двопараметрична сім'я розв'язків .

Kusick L. I.
On asymptotic behavior of a one differential equations class' solutions

Summary

For the second-order differential equation of general form $y'' = f(t, y, y')$, where $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \longrightarrow \mathbf{R}$ is continuous function, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, Δ_{Y_i} is a one-neighborhood of Y_i, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$ $(i \in \{0, 1\})$ we study the question of the existence solutions, for witch $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i$ $(i \in \{0, 1\})$. Among the set of such solutions we separate a sufficiently wide class of so-called $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-solutions. Such a solution was previously introduced in the study of the two-term equation $y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')$, where $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ is continuous function, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = 0, 1)$ are continuous functions of orders σ_i $(i = 0, 1)$ regular varying as $z \to Y_i$ $(i = 0, 1)$ such that $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$. The case $\sigma_0 + \sigma_1 = 1$ is not considered even on the indicate two-term equation. In this paper a condition under which the right-hand side of the equation as $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ and $t \uparrow \omega$, $y^{(i)} \to Y_i$ $(i = 0, 1)$ in some sense close to the multiplication $\alpha_0 p(t)|y|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1}$, where orders σ_i $(i = 0, 1)$ of nonlinearities so that $\sigma_0 + \sigma_1 = 1$ (to so called semilinear differential equation) is established. We give necessary and sufficient conditions of existence of $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-solutions, asymptotic representations of these solutions and their first-order derivative and number of parametric family of these solutions. The result of the study is demonstrated on a class of equations whose right-hand side is the ratio of sums of a special type.
Key words: two-term equation, $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-solutions, asymptotic representations of solutions, the (AL)-condition, one-, two-parameter family of solutions.

References

1. Evtukhov V. M.(1990) *Asimptotika resheniy odnogo polylineynogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka [The asymptotics of the solutions of one semilinear second-order differential equation]. Differentsial'nye Uravneniya*, – 1990. – Vol. 26., № 5. – P. 776–787.

2. Evtukhov V. M. (2012). *Asimptotika resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka, asimptoticheski blizkikh k lineynym [Asymptotics of solutions of second-order non-autonomous ordinary differential equations asymptotically close to linear]. UMG*, Vol. 64, No. 10, P. 1346–1364.

3. Mousa Jaber Abu Elshour. *Asimptotika resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka, blizkikh k lineynym [Asymptotics of solutions of second-order non-autonomous ordinary differential equations close to linear]. Nelineynyye kolebaniya, Nonlinear oscillations*, – 2008. – 11, № 2. P. 230–241.

4. Evtukhov V. M.(1980). *Asimptoticheskoye povedeniye resheniy odnogo nelineynogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka tipa Emdena - Faulera [The asymptotic behavior of the solutions of one nonlinear second-order differential equation of the Emden–Fowler type]. dis.... cand. fiz.-mat. nauk: 01.01.02 / Evtukhov Vyacheslav Mikhailovich*. Odessa, 154 p.

5. Kusick L.I.(2016). *Asimptoticheskiye predstavleniya resheniy nelineynykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka [Asymptotic representations of solutions of second-order nonlinear differential equations] dis.... cand. fiz.-mat. nauk: 01.01.02/ Kusick Lyudmila Igorevna*. Odessa, 145 p.

6. Evtukhov V. M. & Kusick L. I.(2009). *Asimptoticheskiye predstavleniya resheniy odnogo klassa nelineynykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka [Asymptotic representations of solutions a class of non-linear differential equations of the second order]. Visn. Odes'k. nats. un-tu. Matem. i mekh*, 14, vyp. 20, P. 57–74.

УДК 517.977.1:517.929.4

В. В. Пічкур[1], В. В. Собчук[2], М. С. Таірова[3], О. М. Башняков[1]
[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка
[2]Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки
[3]Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

КРИТЕРІЇ КЕРОВАНОСТІ З МНОЖИНИ ПОЧАТКОВИХ СТАНІВ НА ТЕРМІНАЛЬНУ МНОЖИНУ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Розглядаються умови керованості для лінійних нестаціонарних дискретних систем з множини початкових станів на термінальну множину. Введено означення трьох видів керованості: з множини в множину; зі всієї множини початкових умов на термінальну множину; з множини початкових умов на всю термінальну множину. Для кожного з них побудовано функції керованості, обгрунтовано необхідні і достатні умови керованості, а також наведено відповідні приклади.

MSC: 93B05.
Ключові слова: дискретні системи, керованість, керування, функція керованості .
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134620.

Вступ. Проблема керованості є однією з центральних в теорії керування. Для лінійних дискретних систем керування відомі критерії керованості для стаціонарних і нестаціонарних систем [1, 2]. Втім, якщо задані геометричні обмеження на функцію керування, а також множину початкових і кінцевих станів системи, то такі критерії не можуть бути застосовані. Для лінійних систем керування, що описуються у формі звичайних диференціальних рівнянь, критерій керованості для такого випадку одержано в [3]. Для цього вводиться функція керованості, яка залежить від опорних функцій множини обмежень на керування, а також множин початкових і кінцевих станів. Основний результат полягає в тому, що аналізується невід'ємність знаку такої функції на одиничній сфері.

У статті обґрунтовуються умови керованості для лінійних нестаціонарних дискретних систем з множини початкових станів на термінальну множину. Вказані множини вибираються в класі опуклих компактів. У постановках задач фіксованим є інтервал, на якому розглядається система, а також значення вектора керування належать відомим компактним множинам. Розвиваючи підхід роботи [3], ми даємо означення трьох видів керованості: з множини в множину; зі всієї множини початкових умов на термінальну множину; з множини початкових умов на всю термінальну множину.

Основні результати

Будемо використовувати такі позначення: $\mathbb{R}^n$ — n-вімірний евклідовий простір; $\|\cdot\|$ — евклідова норма в $\mathbb{R}^n$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$; $conv(\mathbb{R}^n)$ — сукупність непорожніх опуклих компактів в $\mathbb{R}^n$; $c(A,\psi)$ — опорна функція множини $A\subset\mathbb{R}^n$, $\psi\in\mathbb{R}^n$; $S=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|=1\}$ — одинична сфера; $K_r(x)\subset\mathbb{R}^n$ — замкнена куля радіуса $r>0$ з центром а точці $x\in\mathbb{R}^n$; $\lambda_{min}(\cdot)$, $\lambda_{max}(\cdot)$ — відповідно мінімальне та максимальне власні числа матриці.

Надійшла 14.03.2018

1. Керованість з множини в множину. Розглянемо лінійну дискретну систему керування

$$x(k+1) = A(k)x(k) + C(k)u(k), k = 0, 1, 2, ..., N. \tag{1}$$

Тут $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — вектор стану, $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ — вектор керування, $A(k)$ — $n \times n$-матриці; $C(k)$ — $n \times m$-матриці, $k = 0, 1, 2, ..., N$. Керування $u(k) \in U(k)$, де $U(k) \in conv(\mathbb{R}^m)$, $k = 0, 1, 2, ..., N-1$. Множина M_0 початкових станів і множина кінцевих станів M_N системи (1) є опуклими компактами в $\mathbb{R}^n$. Множина досяжності системи (1) записується так:

$$X\left(k, _0\right) = \Theta(k)M_0 + \sum_{s=0}^{k-1} \Theta(k, s+1)C(s)U(s), \tag{2}$$

де $\Theta(k) = \Theta(k, 0), \Theta(k, s) = A(k-1)A(k-2)....A(s),\ 0 \leqslant s \leqslant k$. Виходячи з формули (2), опорна функція множини досяжності $X\left(k, M_0\right)$ має вигляд

$$c(X\left(k, M_0\right), \psi) = c(M_0, \Theta^*(k)\psi) + \sum_{s=0}^{k-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(k, s+1)\psi), \tag{3}$$

де $\psi \in \mathbb{R}^n$. Введемо таке означення.

Означення 1. *Система (1) називається керованою на інтервалі $0 \leqslant k \leqslant N$ з множини M_0 в множину M_N, якщо знайдуться точки $x_0 \in M_0$, $x_N \in M_N$ і допустиме керування $u(k) \in U(k), k = 0, 1, 2, ..., N-1$ такі, що*

$$x(N, x_0, u(0)) = x_N.$$

Тут $x(N, x_0, u(0)) = x_N$ позначає розв'язок системи (1) за умови $x(0) = x_0$ в силу допустимого керування $u(\cdot)$, визначеного в точках $k = \overline{0, N-1}$.

Функція

$$\Phi(\psi) = c(M_0, \Theta^*(N)\psi) + c(M_N, -\psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi), \psi \in \mathbb{R}^n$$

називається функцією керованості системи (1) з множини M_0 в множину M_N на інтервалі $0 \leqslant k \leqslant N$. Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Для того щоб система (1) була керованою на інтервалі $0 \leqslant k \leqslant N$ з множини M_0 в множину M_N, необхідно і достатньо, щоб функція керованості $\Phi(\psi) \geqslant 0$ для всіх $\psi \in S$.*

Доведення. Необхідність. Нехай система (1) є керованою на інтервалі $0 \leqslant k \leqslant N$ з множини M_0 в множину M_N. Це означає, що

$$X(N, M_0) \cap M_N \neq \varnothing.$$

Останнє співвідношення можна записати в еквівалентній формі

$$0 \in X(N, M_0) + (-1)M_N.$$

Використовуючи властивості опорної функції [4], одержуємо

$$c(X\left(N,M_0\right),\psi)+c(M_N,-\psi)\geqslant 0$$

для всіх $\psi\in S$. Підставемо (3) в останню нерівність

$$c(M_0,\Theta^*(N)\psi)+\sum_{s=0}^{N-1}c(U(s),C^*(s)\Theta^*(N,s+1)\psi)+c(M_N,-\psi)\geqslant 0,\psi\in S.$$

Отже, $\Phi(\psi)\geqslant 0,\psi\in S$. Достатність обґрунтовується аналогічно до необхідності, але в зворотному порядку. Теорему доведено.

Приклад 1. *Розглянемо умови теореми 1 у випадку, якщо* $M_0=K_{p_0}(a)$, $M_N=K_{p_N}(b)$, $U(k)=K_{q(k)}(0),k=0,1,2,...,N-1$. *Тут* $a,b\in\mathbb{R}^n$, $p_0>0$, $p_N>0$, $q(k)>0,k=0,1,2,...,N-1$. *Тоді функція керованості має вигляд*

$$\begin{gathered}\Phi(\psi)=p_0||\Theta^*(N)\psi||+<a,\Theta^*(N)\psi>+p_N||\psi||-<b,\psi>+\\+\sum_{s=0}^{N-1}q(s)||C^*(s)\Theta^*(N,s+1)\psi||,\psi\in\mathbb{R}^n.\end{gathered}$$

Умову $\Phi(\psi)\geqslant 0,\psi\in S$ *можна записати так*

$$p_0||\Theta^*(N)\psi||+p_N+\sum_{s=0}^{N-1}q(s)||C^*(s)\Theta^*(N,s+1)\psi||\geqslant<b-\Theta(N)a,\psi>. \tag{4}$$

Оскільки

$$\begin{gathered}||\Theta^*(N)\psi||\geq\sqrt{\lambda_{min}\left(\Theta(N)\Theta^*(N)\right)},\\||C^*(s)\Theta^*(N,s+1)\psi||\geq\sqrt{\lambda_{min}\left(\Theta(N)C(s)C^*(s)\Theta^*(N)\right)},\\\max_{\psi\in S}<b-\Theta(N)a,\psi>=||b-\Theta(N)a||,\end{gathered}$$

то нерівність (4) буде виконуватися для всіх $\psi\in S$, *якщо*

$$\begin{gathered}p_0\sqrt{\lambda_{min}\left(\Theta(N)\Theta^*(N)\right)}+p_N+\\+\sum_{s=0}^{N-1}q(s)\sqrt{\lambda_{min}\left(\Theta(N)C(s)C^*(s)\Theta^*(N)\right)}\geqslant||b-\Theta(N)a||.\end{gathered} \tag{5}$$

Отже, якщо параметри $a,b,p_0,p_N,q(s)$ *задовольняють (5), то система (1) буде керованою з* M_0 *в* M_N *на* $0\leqslant k\leqslant N$.

2. Керованість зі всієї множини початкових станів. Розглянемо таке означення.

Означення 2. *Система (1) називається керованою на інтервалі* $0\leqslant k\leqslant N$ *зі всієї множини* M_0 *в множину* M_N, *якщо для будь-якої точки* $x_0\in M_0$ *знайдеться стан* $x_N\in M_N$ *та допустиме керування* $u(k)\in U(k),k=0,1,2,...,N-1$ *таке, що* $x(N,x_0,u(0))=x_N$.

Функція

$$W(\psi) = c(M_N, -\psi) - c(M_0, -\Theta^*(N)\psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi)$$

називається функцією керованості в системи (1) зі всієї множини M_0 в множину M_N на інтервалі $0 \leqslant k \leqslant N$, де $\psi \in \mathbb{R}^n$. Має місце такий критерій.

Теорема 2. *Для того щоб система (1) була керованою на інтервалі* $0 \leqslant k \leqslant N$ *зі всієї множини* M_0 *в множину* M_N*, необхідно і достатньо, щоб* $W(\psi) \geqslant 0$ *для всіх* $\psi \in S$.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що система (1) є керованою зі всієї множини M_0 в множину M_N при $0 \leqslant k \leqslant N$. Це означає, що для довільної точки $x_0 \in M_0$ виконується співвідношення

$$X(N, x_0) \cap M_N \neq \varnothing$$

або еквівалентне до нього включення

$$0 \in X(N, x_0) + (-1)M_N.$$

Використовуючи (2) і (3), одержимо, що для всіх $x_0 \in M_0$

$$< x_0, \Theta^*(N)\psi > + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi) + c(M_N, -\psi) \geqslant 0, \psi \in S.$$

З останньої нерівності випливає

$$\begin{gathered} \min\nolimits_{x_0 \in M_0} < x_0, \Theta^*(N)\psi > + c(M_N, -\psi) + \\ + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi) \geqslant 0, \psi \in S. \end{gathered} \tag{6}$$

Оскільки

$$\min_{x_0 \in M_0} < x_0, \Theta^*(N)\psi >= - \max_{x_0 \in M_0} < x_0, -\Theta^*(N)\psi >= -c(M_0, -\Theta^*(N)\psi),$$

то з (6) одержуємо

$$c(M_N, -\psi) - c(M_0, -\Theta^*(N)\psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi) \geqslant 0, \psi \in S.$$

Отже, $W(\psi) \geqslant 0, \psi \in S$.

Достатність теореми обґрунтовується тим, що при доведенні необхідності використовувались твердження, які є необхідними і достатніми. Теорему доведено.

Приклад 2. *Розглянемо умови керованості зі всієї множини M_0 в множину M_N при $0 \leqslant k \leqslant N$, в умовах прикладу 1. У цьому випадку*

$$W(\psi) = p_N||\psi|| + < b, -\psi > -p_0||\Theta^*(N)\psi|| + < a, \Theta^*(N)\psi > +$$
$$+ \sum_{s=0}^{N-1} q(s)||C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi||, \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Умову $W(\psi) \geqslant 0, \psi \in S$ можна записати так

$$p_N + \sum_{s=0}^{N-1} q(s)||C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi|| \geqslant$$
$$\geqslant p_0||\Theta^*(N)\psi|| + < b - \Theta(N)a, \psi >, \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Використовуючи оцінки прикладу 1 і $||\Theta^*(N)\psi|| \leqslant \sqrt{\lambda_{max}\left(\Theta(N)\Theta^*(N)\right)}$, одержуємо

$$p_N + \sum_{s=0}^{N-1} q(s)\sqrt{\lambda_{min}\left(\Theta(N)C(s)C^*(s)\Theta^*(N)\right)} \geqslant$$
$$\geqslant p_0\sqrt{\lambda_{max}\left(\Theta(N)\Theta^*(N)\right)} + ||b - \Theta(N)a||.$$

Отже, якщо параметри задачі задовільняють одержаній оцінці, то дискретна система (1) буде керованою зі всієї множини M_0 на множину M_N при $0 \leqslant k \leqslant N$.

3. Керованість з множини на всю множину. Результати даного пункту статті будуються на такому означенні.

Означення 3. *Система (1) називається керованою на інтервалі $0 \leqslant k \leqslant N$ множини M_0 на всю множину M_N, якщо для будь-якого стану $x_N \in M_N$ існує точка $x_0 \in M_0$ і допустиме керування $u(k) \in U(k), k = 0, 1, 2, ..., N-1$ такі, що $x(N, x_0, u(0)) = x_N$.*

Функція

$$Z(\psi) = c(M_0, \Theta^*(N)\psi) - c(M_N, \psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi)$$

називається функцією керованості в системи (1) з множини M_0 на всю множину M_N на інтервалі $0 \leqslant k \leqslant N$, де $\psi \in \mathbb{R}^n$. Має місце така теорема.

Теорема 3. *Для того, щоб система (1) була керованою на інтервалі $0 \leqslant k \leqslant N$ з множини M_0 на всю множину M_N необхідно і достатньо, щоб $Z(\psi) \geqslant 0$ для всіх $\psi \in S$.*

Доведення. Необхідність. Припустимо, що система (1) є керованою з множини M_0 на всю множину M_N. Тоді з означення 3 випливає, що

$$X(N, x_0) \supset M_N.$$

Використовуючи властивості опорних функцій [4], одержуємо

$$c(X(N, M_0), \psi) - c(M_N, \psi) \geqslant 0, \forall \psi \in S.$$

Підставемо в останню нерівність формулу (3)

$$c(M_0, \Theta^*(N)\psi) - c(M_N, \psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi) \geqslant 0, \psi \in S.$$

Це означає, що $Z(\psi) \geqslant 0$ для всіх $\psi \in S$.

Достатність обґрунтовується аналогічно до необхідності з використанням властивостей опорної функції в зворотному порядку. Теорему доведено.

Приклад 3. *Знайдемо функцію керованості в умовах прикладу 1. Тоді*

$$Z(\psi) = p_0||\Theta^*(N)\psi|| + < a, \Theta^*(N)\psi > -p_N||\psi|| - < b, \psi > + \\ + \sum_{s=0}^{N-1} q(s)||C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi||, \psi \in \mathbb{R}^n.$$

З того, що $Z(\psi) \geqslant 0, \psi \in S$, *випливає, що*

$$p_0||\Theta^*(N)\psi|| + \sum_{s=0}^{N-1} q(s)||C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi|| \geqslant \\ \geqslant p_N + < b - \Theta(N)a, \psi >, \psi \in S.$$

Ця нерівність виконується, якщо

$$p_0\sqrt{\lambda_{min}\left(\Theta(N)\Theta^*(N)\right)} + \sum_{s=0}^{N-1} q(s)\sqrt{\lambda_{min}\left(\Theta(N)C(s)C^*(s)\Theta^*(N)\right)} \\ \geqslant p_N + ||b - \Theta(N)a||.$$

Отже, якщо параметри задачі задовільняють наведеній оцінці, то система (1) буде керованою з множини M_0 *на всю множину* M_N *при* $0 \leqslant k \leqslant N$.

Висновки. В роботі обґрунтовано необхідні і достатні умови керованості для лінійних нестаціонарних дискретних систем у трьох випадках: з множини початкових станів на термінальну множину; зі всієї множини початкових умов на термінальну множину; з множини початкових умов на всю термінальну множину. Для кожного з них побудовано функції керованості та наведено приклади їх застосування.

1. **Katsuhiko Ogata.** Discrete-Time Control Systems / Katsuhiko Ogata – University of Minnesota, 1995. – 760 p.
2. **Krabs W.** Dynamical Systems: Stability, Controllability and Chaotic Behavior/ Krabs W., Pickl S.// Springer, 2010. - 249 p.

3. **Благодатских В. И.** Задача управляемости для линейных систем / В. И. Благодатских // Труды МИАН. – 1977. – Т. 143. – С. 57–67.
4. **Благодатских В. И.** Введение в оптимальное управление / В. И. Благодатских. – М.: Высшая школа, 2001. – 239 с.

Пичкур В. В., Собчук В. В., Таирова М. С., Башняков А. Н.
Критерии управляемости из множества начальных состояний на терминальное множество для линейных дискретных систем

Резюме

В статье рассматриваются условия управляемости для линейных нестационарных дискретных систем из множества начальных состояний на терминальное множество. Введено определение трех видов управляемости: из множества в множество; со всего множества начальных условий на терминальное множество; из множества начальных условий на все терминальное множество. Для каждого из них построены функции управляемости, обоснованы необходимые и достаточные условия управляемости, а также приведены соответствующие примеры.
Ключевые слова: дискретные системы, управляемость, управление, функция управляемости .

Pichkur V. V., Sobchuk V. V., Tairova M. S., Bashnyakov O. M.
Linear discrete systems controllability from a set of initial states to a terminal set

Summary

In the article we consider controllability conditions from an initial set to a terminal set for a linear non-homogenous discrete system. We introduce three types of controllability: from an initial set to a terminal set; from a whole set of initial conditions to a terminal set; from a set of initial conditions to an entire terminal set. Necessary and sufficient conditions of controllability are proved using controllability function.
Key words: discrete systems, controllability, control, controllability function.

References

1. Katsuhiko Ogata (1995). *Discrete-Time Control Systems.* University of Minnesota, 760 p.
2. Krabs W. & Pickl S. (2010). *Dynamical Systems: Stability, Controllability and Chaotic Behavior*. Springer, 249 p.
3. Blagodatskikh V. I. (1977). Zadacha upravlyaemosti dlya lineynykh sistem [Controlability problem for linear systems]. *Trudy MIAN*, vol. 143, pp. 57–67.
4. Blagodatskikh V. I. (2001). *Vvedenie v optimalnoe upravlenie [Introoduction to Optimal Control].* Moscow, «Vysshaya shkola», 239 p.

Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 1(31). – С. 88–94

УДК 539.3

О. В. Реут
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ДИФРАКЦІЯ ХВИЛЬ НА КОНІЧНОМУ ДЕФЕКТІ, РОЗТАШОВАНОМУ В АКУСТИЧНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

У статті побудовано розривний розв'язок хвильового рівняння для конічного дефекту, розташованого в акустичному середовищі, на яке діє квазістатичне динамічне навантаження. Під дефектом вважається частина поверхні, при переході через яку терплять розриви неперервності першого роду із заданими стрибками хвильовий потенціал та його нормальна до поверхні дефекту похідна. Розривний розв'язок хвильового рівняння — це такий розв'язок, що задовільняє рівняння у всій області визначення невідомоі функції за винятком точок поверхні дефекту, де шукана функція та її похідна мають задані стрибки. Для побудови такого розв'язку застосовано метод інтегральних перетворень за класичною схемою та за узагальненою схемою відносно змінної, за якою функція є розривною. Отримано граничні значення хвильового потенціалу. За відомою схемою методу розривних розв'язків на основі отриманих співвідношень для хвильового потенціалу та його нормальної похідної можливо вивести подання розривних розв'язків динамічних рівнянь руху для конічного дефекту у випадку квазістатичних коливань.
MSC: 35L05, 74J20.
Ключові слова: конічний дефект, акустичне середовище, дифракція хвиль .
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134621.

Вступ. Актуальність проблеми дифракції хвиль пояснюється необхідністю враховувати значну кількість неоднорідностей під час розробки нових композитних матеріалів, геофізичних та сейсмологічних досліджень, де явища протікають під динамічними навантаженнями. Для полегшення процесів проектування потрібні попередні розрахунки на основі відповідних математичних моделей, що надають можливість проаналізувати вплив таких концентраторів динамічних напружень, як включення, порожнина, виріз, тріщина та інше [1]– [3].

З іншого боку, задачі дифракції акустичних та пружних хвиль є одними з класичних задач механіки деформівних тіл. Побудова їх аналітичних розв'язків, аналіз хвильових полів в околі дефектів складають широкий клас задач, розв'язання яких потребують залучення складного математичного апарату.

Розвиток цього математичного апарату проведено багатьма вченими ([4]-[14]). Одним з потужних методів розв'язання задач дифракції хвиль на дефектах різної форми є метод розривних розв'язків. Цей метод було створено Г. Я. Поповим [15] — їм було дано означення розривного розв'язку диференціального рівняння, а саме: розривним розв'язком певного диференціального рівняння є такий його розв'язок, що задовольняє це рівняння у всій області визначення невідомої функції, за винятком поверхні дефекту, під час переходу якої невідома функція терпить розриви неперервності із заданими стрибками самої невідомої функції та її нормальної похідної. Ці стрибки функції та її похідної або задано умовами вихідної задачі, або встановлено за певних умов на розв'язок. Під дефектом вважається частина поверхні (математичний розріз по поверхні), при переході через

Надійшла 27.04.2018

яку функція та її нормальна похідна терплять розриви 1-го роду. Г. Я. Поповим був запропонований метод побудови таких розв'язків для дефектів та тіл, що описуються в ортогональних криволінійних системах координат. Суть його полягає в побудові розривного розв'язку хвильового рівняння (або рівняння Лапласа для статичної постановки задачі) та подальшій побудові розривних розв'язків рівнянь Ламе. Це реалізовано завдяки формулам взаємозв'язку хвильових потенціалів та переміщень і напружень. У [15] їм було запропоновано метод побудови розривних розв'язків статичних задач теорії пружності для лінійних, кругових, сферичних та циліндричних дефектів.

Цей метод було поширено на задачі дифракції хвиль наприклад, у роботах [16]– [18]. У роботі [19] метод розривних розв'язків поширено на дефекти довільної форми.

У даній роботі пропонується побудова розривного розв'язку рівняння Гельмгольца для випадку дефекту конічної форми.

Основні результати. Нехай в акустичному середовищі міститься конічний дефект, поверхня якого описується у сферичній системі координат співвідношеннями:

$$0 < r < \infty, 0 < \theta < \omega, -\pi < \varphi < \pi. \tag{1}$$

Середовище знаходиться під впливом усталених коливань, що описуються рівнянням Гельмгольца

$$\left(r^2\tilde{\Phi}'(r,\theta,\varphi)\right)' - \nabla\tilde{\Phi}(r,\theta,\varphi) - (rq)^2\tilde{\Phi}(r,\theta,\varphi) = 0, \tag{2}$$

тут $\Phi(r,\theta,\varphi,t) = \tilde{\Phi}(r,\theta,\varphi)e^{i\omega t}$, c — швидкість хвиль в акустичному середовищі. Тут і далі введемо наступні позначення: $\nabla\Phi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sin^2\theta}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} - (\sin\theta\Phi^{\cdot}(r,\theta,\varphi))^{\cdot}\right]$, $q^2 = \left(\frac{i\omega}{c}\right)^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}$, ω — частота падаючої хвилі; тут штрих позначає похідну за змінною r, точка над літерою — похідну за другою змінною θ.

Застосуємо до рівняння (2) інтегральне перетворення Фур'є за змінною φ:

$$\Phi_n(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi}\Phi(r,\theta,\varphi)d\varphi. \tag{3}$$

У просторі трансформант (3) рівняння (2) набуває вигляду:

$$\left(r^2\Phi_n'(r,\theta)\right)' - \nabla_n\Phi_n(r,\theta) - r^2q^2\Phi_n(r,\theta) = 0, \tag{4}$$

де $\nabla_n f_n(r,\theta) = \frac{n^2}{\sin^2\theta} - \frac{\left[\sin\theta f_n'(r,\theta)\right]^{\cdot}}{\sin^2\theta}$.

Зробимо у рівнянні (4) заміну змінних $r = \frac{x}{q}$, у нових змінних рівняння (4) запишеться у формі

$$\left(x^2\Phi_n'\left(\frac{x}{q},\theta\right)\right)' - \nabla_n\Phi_n\left(\frac{x}{q},\theta\right) - x^2\Phi_n\left(\frac{x}{q},\theta\right) = 0. \tag{5}$$

Застосуємо до (5) інтегральне перетворення Канторовича—Лебєдєва за змінною x:

$$\Phi_{n\tau}(\theta) = \int_0^{\infty} \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}}\Phi_n\left(\frac{x}{q},\theta\right)dx. \tag{6}$$

У просторі трансформант (6) маємо

$$\tau^2\Phi_{n\tau}(\theta) + \left(\frac{1}{4} + \nabla_n\right)\Phi_{n\tau}(\theta) = 0. \tag{7}$$

Застосувати інтегральне перетворення Лежандра до рівняння (7) за загальною схемою неможливо, оскільки при $\theta = \omega$ мають місце розриви функції $\Phi_{n\tau}(\theta)$ та її похідної зі стрибками:

$$\begin{gathered}\left\langle \Phi\left(\tfrac{x}{q}, \omega, \varphi\right)\right\rangle = \Phi\left(\tfrac{x}{q}, \omega - 0, \varphi\right) - \Phi\left(\tfrac{x}{q}, \omega + 0, \varphi\right),\\ \left\langle \Phi'\left(\tfrac{x}{q}, \omega, \varphi\right)\right\rangle = \tfrac{\partial\Phi\left(\frac{x}{q},\theta,\varphi\right)}{\partial\theta}|_{\theta=\omega-0} - \tfrac{\partial\Phi\left(\frac{x}{q},\theta,\varphi\right)}{\partial\theta}|_{\theta=\omega+0}.\end{gathered} \tag{8}$$

Застосуємо до рівняння (7) інтегральне перетворення Лежандра за узагальненою схемою [15]:

$$\Phi_{n\tau k} = \int_0^\pi \Phi_{n\tau}(\theta)P_k^{|n|}(\cos\theta)\sin\theta d\theta. \tag{9}$$

Це приведе до лінійного алгебраїчного рівняння у просторі трансформант (3, 6, 9):

$$\Phi_{n\tau k}\left(\tau^2 + (k+1/2)^2\right) = \sin\omega\left(\langle\Phi^{\cdot}_{n\tau}(\theta)\rangle\, P_k^{|n|}(\cos\omega) - \langle\Phi_{n\tau}(\theta)\rangle\, P_k^{|n|\cdot}(\cos\theta)\Big|_{\theta=\omega}\right).$$

Далі будемо записувати $\frac{dP_k^{|n|}(\cos\theta)}{d\theta}\Big|_{\theta=\omega} = \frac{dP_k^{|n|}(\cos\omega)}{d\omega}$. Тут

$$\begin{pmatrix} \langle\Phi_{n\tau}(\omega)\rangle \\ \langle\Phi^{\cdot}_{n\tau}(\omega)\rangle \end{pmatrix} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^\infty \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}}e^{in\varphi}\begin{pmatrix} \left\langle\Phi(\frac{x}{q}, \omega, \varphi)\right\rangle \\ \left\langle\Phi^{\cdot}(\frac{x}{q}, \omega, \varphi)\right\rangle \end{pmatrix} d\varphi dx.$$

Остаточно отримаємо вираз трансформанти шуканої функції $\Phi_{n\tau k}$ через трансформанту її стрибка та стрибка її нормальної похідної:

$$\Phi_{n\tau k} = \frac{\sin\omega\left(\langle\Phi^{\cdot}_{n\tau}(\theta)\rangle\, P_k^{|n|}(\cos\omega) - \langle\Phi_{n\tau}(\theta)\rangle\, \frac{dP_k^{|n|}(\cos\omega)}{d\omega}\right)}{\tau^2 + (k+1/2)^2}. \tag{10}$$

Застосуємо до виразу (10) обернене перетворення Лежандра

$$\Phi_{n\tau}(\theta) = \sum_{k=|n|}^{\infty}\sigma_{kn}P_k^{|n|}(\cos\theta)\Phi_{n\tau k}, \tag{11}$$

де $\sigma_{kn} = \frac{(k+1/2)(k-n)!}{(k+|n|)!}$. До отриманого виразу (11) застосуємо обернене перетворення Канторовича—Лебєдєва:

$$\Phi_n\left(\frac{x}{q}, \theta\right) = \int_0^\infty \tau\sinh\pi\tau\frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}}\Phi_{n\tau}(\theta)d\tau.$$

Візьмемо до уваги, що вирази для трансформант стрибків хвильового потенціала та його нормальної похідної мають подання

$$\begin{bmatrix} \langle \Phi_{n\tau}(\omega) \rangle \\ \langle \Phi^{\cdot}_{n\tau}(\omega) \rangle \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} \left\langle \Phi_n\left(\frac{\xi}{q},\omega\right)\right\rangle \\ \left\langle \Phi^{\cdot}_n\left(\frac{\xi}{q},\omega\right)\right\rangle \end{bmatrix} \frac{K_{i\tau}(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi.$$

У просторі трансформант Фур'є вираз для хвильового потенціалу набуває вигляду

$$\begin{gathered}\Phi_n\left(\tfrac{x}{q},\theta\right) = \sin\omega \textstyle\sum_{k=|n|}^\infty \sigma_{kn} P_k^{|n|}(\cos\theta) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\tau\sinh\pi\tau}{[\tau^2+(k+1/2)^2]} \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} \frac{K_{i\tau}(\xi)}{\sqrt{\xi}} \\ \left[P_k^{|n|}(\cos\omega)\left\langle \Phi^{\cdot}_{n\tau}\left(\tfrac{\xi}{q},\omega\right)\right\rangle - P_k^{|n|\cdot}(\cos\omega)\left\langle \Phi_{n\tau}\left(\tfrac{\xi}{q},\omega\right)\right\rangle\right] d\tau d\xi\end{gathered} \tag{12}$$

Інтеграл, що входить до виразу (12), дорівнює [2.16.52(11), [20]]:

$$\begin{aligned} I_k(x,\xi) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\tau K_{i\tau}(x) K_{i\tau}(\xi)}{(\sinh\pi\tau)^{-1}(\tau^2+(k+1/2)^2)} d\tau = \\ &= \frac{\pi i}{2\sqrt{x\xi}} \begin{cases} J_\nu(\xi q) H_\nu^{(1)}(xq), \xi < x \\ J_\nu(xq) H_\nu^{(1)}(\xi q), \xi > x \end{cases}, \nu = k+1/2. \end{aligned}$$

де $J_\nu(x), H_\nu^{(1)}(x)$ — функції Бесселя та Ханкеля першого роду відповідно.

Отже, отримано подання розривного розв'язку рівняння Гельмгольца для дефекта (1)

$$\Phi_n\left(\tfrac{x}{q},\theta\right) = \sin\omega \int_0^\infty \left[\left\langle \Phi^{\cdot}_n\left(\tfrac{\xi}{q},\omega\right)\right\rangle G_n(x,\xi;\theta,\omega) - \left\langle \Phi_n\left(\tfrac{\xi}{q},\omega\right)\right\rangle \tfrac{\partial}{\partial\omega} G_n(x,\xi;\theta,\omega)\right] d\xi,$$

$$x = rq, \xi = \rho q,$$

$$G_n(x,\xi;\theta,\omega) = \textstyle\sum_{k=|n|}^\infty \sigma_{kn} P_k^{|n|}(\cos\theta) P_k^{|n|}(\cos\omega) I_k(x,\xi).$$

Як це встановлено раніше, граничні значення хвильового функціонала при підході до берегів дефекту $\omega = \theta \pm 0$ мають вигляд

$$\begin{gathered}\Phi_n\left(\tfrac{x}{q},\omega\mp 0\right) = \pm\tfrac{1}{2}\left\langle \Phi_n\left(\tfrac{x}{q},\omega\right)\right\rangle - \sin\omega \int_0^\infty \left(\left\langle \Phi_n\left(\tfrac{\xi}{q},\omega\right)\right\rangle \tfrac{\partial}{\partial\omega} G_n(x,\xi;\theta,\omega)\big|_{\theta=\omega\mp 0} - \right. \\ \left.\left\langle \Phi^{\cdot}_n\left(\tfrac{\xi}{q},\omega\right)\right\rangle G_n(x,\xi;\theta,\omega)|_{\theta=\omega\mp 0}\right) d\xi, \\ x = rq, \xi = \rho q.\end{gathered}$$

Ці формули отримано за рахунок використання відомих фактов теорії потенціалу (розривність потенціалу подвійного шару та нормальної похідної простого шару). Застосування оберненого інтегрального перетворення Фур'є завершує побудову розривного розв'язку рівнянь Гельмгольца.

Висновки. В роботі нами отримані наступні результати.

1. Побудовано розривний розв'язок рівняння Гельмгольца для конічного дефекту.
2. Отриманий розривний розв'язок рівняння Гельмгольца дозволяє побудувати розривні розв'язки рівнянь Ламе для випадку усталених коливань для конічного дефекту.

1. **Di Cocco V.** Ductile cast irons: Microstructure influence on the damaging micromechanisms in overloaded fatigue cracks / V. Di Cocco, F. Iacoviello // Engineering Failure Analysis. – 2017.
2. **Toribio J.** Crack tip field in circumferentially-cracked round bar (CCRB) in tension affected by loss of axial symmetry / J. Toribio, B. Gonzales, J.C. Matos // Frattura ed Integrita Strutturale. – 2017. – Vol. 41. – P. 139–142. DOI: 10.3221/IGF-ESIS, 42.21
3. **Peron M.** Notch stress intensity factors under mixed mode loadings; an overview of recent advanced methods for rapid calculation / M. Peron, S.M.J. Razavi, F. Berto, J. Torgersen // Frattura ed Integrita Strutturale. – 2017. – Vol. 42. – P. 196–204. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.42.21
4. **Grinchenko V.T.** Harmonical oscillations and waves in elastic bodies (in Russian) / V.T. Grinchenko, V.V. Meleshko. – Kyiv: Naukova dumka, 1981.
5. **Guz A.N.** Difraction of elastic waves (in Russian) / A.N. Guz, V.D. Kubenko, M.A. Cherevko. – Kyiv: Naukova dumka, 1978.
6. **Babeshko V.A.** On the method of block element / V.A. Babeshko, O.M. Babeshko, O.V. Evdokimova // Mechanics of Solids. – 2010. – Vol. 45. – P. 437–444. 10.3103/SOO25654410030143
7. **Mykhas'kiv V.** 3-D dynamic interaction between a penny-shaped crack and a thin interlayer joining two elastic half-spaces / V. Mykhas'kiv, V. Stankevych, I. Zhbadynskyi, Ch. Zhang // International Journal of Fracture. – 2009. – Vol. 159, No. 2. – P. 137–149.
8. **Slepyan I.I.** Mechanics of cracks / I.I. Slepyan. – Leningrad: Sudostroenie, 1990.
9. **Mnev E.N.** Hydroelasticity of shells (in Russian) / E.N. Mnev, A.K. Perzev. – Leningrad: Sudostroenie, 1970.
10. **Vilde M.V.** Boundary and interfacial resonance effects in elasticity bodies (in Russian) / M.V. Vilde, Yu.D. Kaplunov, I.Yu. Kossovich. – Moscow: Fizmatgiz, 2010.
11. **Kit G.S.** Method of potentials in three-dimensional problems for thermoelasticity bodies with cracks (in Russian) / G.S. Kit, M.V. Khay. – Kyiv: Naukova dumka, 1989.
12. **Sladek V.** Transient elastodynamic three- dimensional problems in cracked bodies / V. Sladek, J. Sladek // Applied Mathematical Modelling. – 1984. – Vol. 8, No. 1. – P. 2–10.
13. **Guz A.N.** Stress-intensity factors for materials with interface cracks under harmonic loading / A.N. Guz, I.A. Guz, A.V. Men'shikov, V.A. Men'shikov // Int. Appl. Mech. – 2011. – Vol. 46. – P. 1093. https://doi.org/ 10.1007/ s10778 -011-0401-1
14. **Savruk M.P.** Numerical analysis in plane problems of the crack's theory (in Russian) / M.P. Savruk, P.N. Osiv, I.V. Prokopchuk. – Kyiv: Naukova dumka, 1989.
15. **Popov G.Ya.** The elastic stress' concentration around dies, cuts, thin inclusions and reinforcements (in Russian) / G.Ya. Popov. – Moscow: Nauka, 1982.
16. **Popov V.G.** Interaction of a plane harmonic Rayleigh wave with a thin rigid edge inclusion coupled with an elastic medium / V.G. Popov // Applied Mathematics and Mechanics. – 1997. – Vol. 61, No. 2. – P. 245–252.
17. **Vaysfel'd N.D.** Time-dependent problems of the concentration of elastic stress neat a conical defect / N.D. Vaysfel'd // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2005. – Vol. 69, No. 3. – P. 427–437.

18. **Vaysfel'd N.D.** The stress concentration around a semi-infinite cylindrical crack during the shock loading of an elastic medium by a centre of rotation / N.D. Vaysfel'd, G.Ya. Popov // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2001. – Vol. 65, No. 3. – P. 509–518.
19. **Reut V.V.** Orthogonal polynomials method and its generalization at some new problems of fracture mechanics / V.V. Reut, H.O. Fesenko, N.D. Vaysfel'd, Z. Zhuravlova // Conference 14-th Intern. Conference on Fracture (ICF 14), Rhodes, Greece, 2017.
20. **Prudnikov A.P.** Integrals and series: Special functions (in Russian) / A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.M. Marichev. – Moscow: Nauka, 1983.

Реут Е. В.
Дифракция волн на коническом дефекте, расположенном в акустической среде

Резюме

В статье построено разрывное решение волнового уравнения для конического дефекта, расположенного в акустической среде, на которую действует квазистатическая динамическая нагрузка. Под дефектом понимается часть поверхности, при переходе через которую терпят разрывы непрерывности первого рода с заданными скачками волновой потенциал и его нормальная к поверхности дефекта производная. Разрывное решение волнового уравнения — это такое решение, которое удовлетворяет уравнению во всей области определения неизвестной функции за исключением точек поверхности дефекта, где искомая функция и её производная имеют заданные скачки. Для построения такого решения применён метод интегральных преобразований по классической схеме и по обобщённой схеме относительно переменной, по которой функция является разрывной. Получены граничные значения волнового потенциала. По известной схеме метода разрывных решений на основе полученных соотношений для волнового потенциала и его нормальной производной можно вывести представление разрывных решений динамических уравнений движения для конического дефекта в случае квазистатических колебаний.
Ключевые слова: конический дефект, акустическая среда, дифракция волн .

Reut O. V.
Diffraction of wave on the conical defect in the acoustic environment

Summary

The discontinuous solution of the wave equation for a conical defect in acoustic environment under the quasistatic dynamic load is constructed in the article. The defect is the part of the surface when passing through it the wave potential and its normal to the defect's surface derivative are discontinuous with the given jumps. The integral transformation method by the classic scheme and generalized scheme relatively to the variable on which the function is discontinuous was applied for the construction of the solution. The boundary values of the wave potential are obtained. The representations for the discontinuous solutions of the dynamic movement equations for the conical defect in the case of quasistatic fluctuations could be derived by the known scheme of the discontinuous solutions's method based on the obtained relations for the wave potential and its normal derivative.
Key words: conical defect, acoustic environment, diffraction of waves.

References

1. Di Cocco V., Iacoviello F. (2017) Ductile cast irons: Microstructure influence on the damaging micromechanisms in overloaded fatigue cracks *Engineering Failure Analysis.*

2. Toribio J., Gonzales B., Matos J.C. (2017) Crack tip field in circumferentially-cracked round bar (CCRB) in tension affected by loss of axial symmetry *Frattura ed Integrita Strutturale*, Vol. 41, P. 139–142. DOI: 10.3221/IGF-ESIS, 42.21
3. Peron M., Razavi S.M.J., Berto F., Torgersen J. (2017) Notch stress intensity factors under mixed mode loadings; an overview of recent advanced methods for rapid calculation *Frattura ed Integrita Strutturale*, Vol. 42, P. 196–204. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.42.21
4. Grinchenko V.T., Meleshko V.V. (1981). *Harmonical oscillations and waves in elastic bodies (in Russian)*. Kyiv: Naukova dumka.
5. Guz A.N., Kubenko V.D., Cherevko M.A. (1978). *Difraction of elastic waves (in Russian)*. Kyiv: Naukova dumka.
6. Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V. (2010). On the method of block element *Mechanics of Solids*, Vol. 45, P. 437–444. 10.3103/SOO25654410030143
7. Mykhas'kiv V., Stankevych V., Zhbadynskyi I., Zhang Ch. (2009). 3-D dynamic interaction between a penny-shaped crack and a thin interlayer joining two elastic half-spaces *International Journal of Fracture*, Vol. 159, No. 2, P. 137–149.
8. Slepyan I.I. (1990). *Mechanics of cracks (in Russian)*. Leningrad: Sudostroenie.
9. Mnev E.N., Perzev A.K. (1970). *Hydroelasticity of shells*. Leningrad: Sudostroenie.
10. Vilde M.V., Kaplunov Yu.D., Kossovich I.Yu. (2010). *Boundary and interfacial resonance effects in elasticity bodies (in Russian)*. Moscow: Fizmatgiz.
11. Kit G.S., Khay M.V. (1989). *Method of potentials in three-dimensional problems for thermoelasticity bodies with cracks (in Russian)*. Kyiv: Naukova dumka.
12. Sladek V., Sladek J. (1984). Transient elastodynamic three- dimensional problems in cracked bodies *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 8, No. 1, P. 2–10.
13. Guz A.N., Guz I.A., Men'shikov A.V., Men'shikov V.A. (2011) Stress-intensity factors for materials with interface cracks under harmonic loading *Int. Appl. Mech.*, Vol. 46, P. 1093. https://doi.org/ 10.1007/ s10778 -011-0401-1
14. Savruk M.P., Osiv P.N., Prokopchuk I.V. (1989). *Numerical analysis in plane problems of the crack's theory (in Russian)*. Kyiv: Naukova dumka.
15. Popov G.Ya. (1982). *The elastic stress' concentration around dies, cuts, thin inclusions and reinforcements (in Russian)*. Moscow: Nauka.
16. Popov V.G. (1997) Interaction of a plane harmonic Rayleigh wave with a thin rigid edge inclusion coupled with an elastic medium *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 61, No. 2, P. 245–252.
17. Vaysfel'd N.D. (2005) Time-dependent problems of the concentration of elastic stress neat a conical defect *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 69, No. 3, P. 427–437.
18. Vaysfel'd N.D., Popov G.Ya. (2001) The stress concentration around a semi-infinite cylindrical crack during the shock loading of an elastic medium by a centre of rotation *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 65, No. 3, P. 509–518.
19. Reut V.V., Fesenko H.O., Vaysfel'd N.D., Zhuravlova Z. (2017) Orthogonal polynomials method and its generalization at some new problems of fracture mechanics *Conference 14-th Intern. Conference on Fracture (ICF 14)*, Rhodes, Greece.
20. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.M. (1983). *Integrals and series: Special functions (in Russian)*. Moscow: Nauka.

Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 1(31). – С. 95–110

УДК 512.772:512.624

Р. В. Скуратовський
Міжрегіональна академія управління персоналом
Інститут комп'ютерно-інформаційних технологій

СУПЕРСИНГУЛЯРНІСТЬ ЕЛІПТИЧНИХ КРИВИХ І КРИВИХ ЕДВАРДСА НАД F_{P^N}

Ми розглядаємо алгебраїчні криві у формі Едвардса і еліптичні криві Монтгомері над скінченним полем F_{p^n}, які на даний час є одним з найбільш швидких і перспективних носіїв груп, що на даний час мають багато застосувань. В роботі знайдено умови суперсингулярності кривих Едвардса і великого класу скручених кривих Едвардса над полем F_{p^n} характеристики $p \equiv 3 \mod 4$. Показано, що проективна крива Едвардса не є еліптичною. Досліджено деякі цікаві властивості групи точок цих кривих. Побудовано криві заданого порядку з мінімальним кофактором. Підраховано род скрученої кривої Едвардса. Знайдено умови мінімальності кофактора скрученої кривої Едвардса та її род.
MSC: 11G20, 11G07.
Ключові слова: суперсингулярні криві, скінченне поле, еліптична криптографія, крива Едвардса, еліптичні криві з малим степенем занурення в поле .
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134622.

Вступ. Крива Едвардса E_d вперше була представлена Едвардсом в роботі [6] і потім детальніше досліджена в роботі Бернштейна і Ланге [7]. Відомо, що суперсингулярні криві, на відміну від несуперсингулярних, над алгебраїчно замкненим полем, зокрема над $\mathbb{C}$, мають не комутативне кільце ендоморфізмів $End\,(\mathbb{C})$. Внаслідок чого суперсингулярні криві, окрім n-мультиплікативного множення, наділені ще і комплексним множенням. Ще більш складні властивості суперсингулярні криві мають над скінченними полями. Ці властивості ще далеко не повністю вивчено, а класи суперсинулярних кривих над $\mathbb{F}_{p^n}$ ще не знайдено. Ці властивості викликають інтерес як з точки зору теорії кілець едоморфізмів, так і з точки зору алгебраїчної геометрії. Їх дослідження є одною з цілей даної роботи.

Перевагою E_d є простота групової операції, універсальність закона додавання, симетричність точок і представлення нейтрального елемента групи точкою в афінних координатах. Ці властивості помічені і обґрунтовані вже в першій роботі [10] відомих фахівців з алгебраїчної геометрії.

З точки зору алгебраїчної геометрії, крива Едвардса не є еліптичною, бо є сингулярною. Криві Едвардса, також як і скручені криві Едвардса, мають афінне представлення, ізоморфне деякій афінній частині еліптичної кривої, що має в порядку групи кривої множник 4. Актуаліність даного питання полягає в тому, що в еліптичній криптографії дуже важливо знати ті криві, які є суперсингулярними, бо вони є крипографічно слабкими. Суперсингулярність кривих Едвардса раніше досліджувалася лише в [18] і лише для простих полів $\mathbb{F}_p$, при цьому автори обмежилися доведенням суперсингулярності лише для кривої з коефіцієнтами $d = 2,\ d = 2^{-1}$, де пізніше при підрахунках у полі характеристики $p = 8k + 7$ у

Надійшла 29.11.2017

них виявлена неточність, тому задача дослідження її над скінченим алгебраїчним розширенням, тобто $\mathbb{F}_{p^n}$, є новою.

Одною з головних задач даного дослідження є узагальнення результата про суперсингулярність кривої отриманого в [18] для коефіцієнтів $d = 2,\ \ d = 2^{-1}$ над $\mathbb{F}_p$ на випадок довільного не простого поля $\mathbb{F}_{p^n}$ та виправлення неточності у кількості точок афінної кривої Едвардса над полем характеристики $p \equiv 7(mod 8)$, яка була в теоремі 3 з [18]. Окрім цього метою нашого дослідження є пошук всієї множини параметрів, при яких крива E_d стає суперсингулярною. Не менш важливою метою цієї роботи є проведення аналогічного дослідження для еліптичних кривих у формах Монтгомері і Веєрштрасса.

Дуже часто виникає задача про знаходження кривих, які мають нульовий $j(E)$-інваріант над полем характеристики $p = 2$, тобто є суперсингулярними, бо вони допускають побудову гомоморфізму у мультиплікативну групу скінченного поля з невеликим степенем розширення.

Метою работи є не тільки аналіз умов суперсингулярності кривої Едвардса і кривої Монтгомері, а ще й знаходження умов мінімальності кофактора скрученої кривої Едвардса [21].

Цікавою є можливість побудови скрученої кривої Едвардса порядку $N_E = 4p, p \in \mathbf{P}$, тобто такої, яка має мінімальний кофактор 4 [10, 15]. Зараз в алгоритмах доведення без розголошення активно використовуються криві з малим степенем занурення k [30] їх групи в поле F_{p^k}, а суперсингулярні криві володіють цією властивістю завдяки спарюванню Тейта. Тому ми досліджуємо їх серед кривих Едвардса. Частково викладені результати представлено в тезах [23,27,28].

Основні результати

1. Обґрунтування основних результатів

1.1. Аналіз особливостей скрученої кривої Едвардса. Скручена крива Едвадрса [7] $E_{\mathrm{a,d}}$ має вигляд:

$$ax^2 + y^2 = 1 + dx^2y^2, a, d \in {F_p}^*, ad(a\text{-}d) \neq 0,\ \ d \neq 1,\ \ p \neq 2. \tag{1}$$

При $a = d$ перетворимо криву $ax^2+y^2 = 1+ax^2y^2$ до вигляду $ax^2-ax^2y^2-1+y^2 = 0$ або $ax^2(1 - y^2) - (1 - y^2) = 0$, отже, крива розкладається у добуток двох пар прямих $(ax^2-1)(y^2-1) = 0$. З умови гладкості знаходимо особливі точки афінної кривої

$$\begin{cases} \frac{F(x,y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{F(x,y)}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} (0,0), \\ \left(\pm\sqrt{\frac{1}{d}}, \pm\sqrt{\frac{a}{d}}\right). \end{array} \right.$$

Але точка $(0, 0)$ кривій $E_{\mathrm{a,d}}$ не належить не залежно від поля і від d. При $a \neq d$ точка $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{d}}, \pm\sqrt{\frac{a}{d}}\right)$ не належить кривій (1), при $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$ її не існує. Тому в афінному представленні особливих точок не має, залишилося перевірити їх існування в проективному представленні.

Як відомо, [11] проективна крива дала можливість отримати більш швидкі операції над точками кривої. Тому дослідимо цю криву у проективній формі.

Проаналізуємо особливі точки в проективному замиканні кривої (1). Для цього зробимо проективізацію кривої (1). Нехай $x = \frac{X}{Z},\ y = \frac{X}{Z}$, тоді $a\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} =$

$1+d\frac{x^2y^2}{z^4}$, звідси $F(x,y,z)=ax^2z^2+y^2z^2-z^4-dx^2y^2$. Перевіримо умови гладкості (для алгебраїчних кривих поняття гладкості і нормальності збігаються [9]):

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}=2axz^2-2dxy^2=0,\\ \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}=2yz^2+2dx^2y=0,\\ \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}=2azx^2+2zy^2-4z^3=0. \end{cases}$$

Тут розв'язком очевидно є $(0,0,0)$, але ця точка не належить $\mathbb{P}^2$. А при $z=0$ розв'язками є точки $(x_0,0,0)=(1,0,0)$ і $(0,y_0,0)=(0,1,0)$. Тобто маємо 2 особливі точки $p=(1,0,0)$ і $p'=(0,1,0)$. Це прості особливості. Отже, розв'язками є лише особливі точки (нескінченно віддалені точки) $(1,0,0)$ і $(0,1,0)$, тому маємо особливості на нескінченності у відповідних афінних компонентах $A^1:\ az^2+y^2z^2=z^4+dy^2$ і $A^2:\ ax^2z^2+z^2=z^4+dx^2$.

Проаналізуємо будову локального кільця $\mathcal{O}_p$ в точках p і p'. Позначимо $\delta_p=\dim {}^{\widetilde{\mathcal{O}}_p}/_{\mathcal{O}_p}$ розмірність фактора як векторного простору або кратність особливої точки. Оскільки базис розширення – $\widetilde{\mathcal{O}}_p$ над локальним кільцем точки $\mathcal{O}_p$ складається з одного елемента, то $\delta_p=1$. Тут $\widetilde{\mathcal{O}}_p$ – цілозамкнене кільце. Оскільки додали два нові елементи, кожен з яких відповідає своєму локальному кільцю особливої точки, яких теж дві, тому $\delta_p=1$ і $\delta_{p'}=1$. Підрахуємо геометричний род (взагалі род кривої — це кількість ЛНЗ регулярних диференціалів) кривої $F(x,y,z)=ax^2z^2+y^2z^2-z^4-dx^2y^2$. При $a\neq d$ ми маємо нерозкладну проективну криву степеня 4, тоді згідно з [9, 12], геометричний род алгебраїчної незвідної проективної кривої:

$$\rho^*(C)=\rho_\alpha(C)-\sum_{p\in E}\delta_p=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\sum_{p\in E}\delta_p=3-2=1,$$

де $\rho_\alpha(C)$ — арифметичний род кривої C, параметр $n=degC=4$. Оскільки вона роду 1, то вона ізоморфна плоскій кубічній кривій але не є еліптичною, бо має особливості в проективній частині. Крива Едварса, як і скручена крива Едаварса, ізоморфна деякій афінній частині еліптичної кривої. Нормалізація кривої Едвардса — еліптична крива $E_M: Bu^2=v^3+Av^2+v$, що запропонована Монтгомері [7]. З наявності особливих точок p і p' одразу слідує наступна властивість.

Проективні криві $E_{\mathrm{a,d}}$ і E_M не є ізоморфними як алгебраїчні множини [13].

2. Суперсингулярність кривої Едвардса, криві з малим кофактором

2.1. Класи суперсингулярності кривих Едвардса і їх порядки. Нагадаємо, що саме Кобліц [15] запропонував суперсингулярні криві зі скінченою кількістю $|\#E(GF(q))|=q+1$ точок на кривій над скінченним полем F_q. Саме криві з таким порядком ми і виявляємо в сімействі кривих Едвардса. Суперсингулярні криві, запропоновані Кобліцем, у силу наявності на них комплексного множення допускали побудову гомоморфізму в скінченне поле [16].

Виявлення суперсингулярних кривих рівносильне пошуку параметрів, при яких крива і відповідна їй крива зі скрутом мають однакові кількості розв'язків. Як показано в [7], крива $E_{1,d}$ є кривою кручення для $E_{1,d^{-1}}$. Також в більш загальному випадку для кривої $E_{a,d}$ перехід до кривої кручення задається відображенням $(\bar{x},\bar{y})\mapsto(x,y)=\left(\bar{x},\frac{1}{\bar{y}}\right)$ [7]. Тому скористаємося цим відображенням для пошуку суперсингулярних кривих. Ми виявили неточність в роботі [18], в умові суперсингулярності для кривої Едвардса E_d. Більш точно, якщо $p \equiv -3(\mathrm{mod} 8)$, то не маємо виродженої (суперсингулярної) пари кривих, незважаючи на те, що це стверджується в теоремі 3 з [18]. Крім того, якщо $p \equiv 7(\mathrm{mod} 8)$, то порядки пари скручених кривих є наступними $N_{E_2} = N_{E_{2^{-1}}} = p - 3$, що не збігається з $p + 1$, як це стверджується в теоремі 3 з [18]. Наприклад, якщо $p = 31$, то $N_{E_2} = N_{E_{2^{-1}}} = 28 = 31 - 3$, що не дорівнює $p + 1$. Також для випадку $p \equiv 7(\mathrm{mod} 8)$ при $p = 7, d = 2^{-1} \equiv 4(\mathrm{mod}\, 7)$ крива має наступні 4 точки: $(0, 1); (0, 6); (1, 0); (6, 0)$, якщо $p = 7, d = 2(\mathrm{mod}\, 7)$, то крива теж має 4 точки: $(0, 1); (0, 6); (1, 0); (6, 0)$. Отже, ці порядки відповідають числу $p - 3$, а не числу $p + 1$, як це стверджується у вище згаданій теоремі з [18]. Обчислимо порядки пари кривих для $p \equiv -3(\mathrm{mod} 8)$ і коефіцієнтів $d = 2$, $d = 2^{-1} \equiv 7(\mathrm{mod} 8)$, згідно з теоремою 3 з [18] це вироджена пара кривих, але обчислення свідчать, що порядок кривої для $p = 13$, $d = 2$ це $N_{E_{(2)}} = 8$ і для $p = 13$, $d = 7$ це $N_{E_{(7)}} = 20$, отже насправді не маємо виродженої пари кривих. Множина точок над полем F_{13} при $d = 2$ є наступною $(0, 1); (0, 12); (1, 0); (4, 4); (4, 9); (9, 4); (9, 9); (12, 0)$, а для $d = 7$ це $\{(0, 1); (0, 12); (1, 0); (2, 4); (2, 9); (4, 2); (4, 11); (5, 6); (5, 7); (6, 5); (6, 8); (7, 5); (7, 8); (8, 6); (8, 7); (9, 2); (9, 11); (11, 4); (11, 9); (12, 0)\}$.

Аналогічно для $p = 29 \equiv -3(\mathrm{mod}\, 8)$ і $d = 2$ маємо $N_{E_{(15)}} = 20$ але $p = 29 \equiv -3(\mathrm{mod}\, 8)$ і $d = 15$ маємо $N_{E_{(15)}} = 20$, що знову підтверджує наші зауваження до теореми 3 з [18]. Наведемо обчислення для випадку $p = 23 \equiv 7(\mathrm{mod}\, 8)$ $d = 12$ на кривій будуть точки $\{(0, 1); (0, 22); (1, 0); (5, 10); (5, 13); (6, 11); (6, 12); (10, 5); (10, 18); (11, 6); (11, 17); (12, 6); (12, 17); (13, 5); (13, 18); (17, 11); (17, 12); (18, 10); (18, 13); (22, 0)\}$ тому $N_{E_{(12)}} = 20$. Також $N_{E_{(2)}} = 20$ це точки $\{(0, 1); (0, 22); (1, 0); (2, 7); (2, 16); (4, 9); (4, 14); (7, 2); (7, 21); (9, 4); (9, 19); (14, 4); (14, 19); (16, 2); (16, 21); (19, 9); (19, 14); (21, 7); (21, 16); (22, 0)\}$.

Сформулюємо теорему про умови суперсингулярності кривої Едвардса, попередньо навівши допоміжні твердження.

Зауваження 1. *Має місце симетрія квадратів лишків:*
$\left(\frac{p-1}{2} - k\right)^2 \equiv \left(\frac{p-1}{2} + 1 + k\right)^2 (\underline{m}odp), 0 \leqslant k \leqslant \frac{p-1}{2}$.

Справді, виконується конгруенція $(\frac{p-1}{2}) - k = p - ((\frac{p-1}{2}) + 1 + k) \equiv -((\frac{p-1}{2}) + 1 + k)(\mathrm{mod} p)$. Отже, $\left(\frac{p-1}{2} - 2\right)^2 \equiv \left(\frac{p-1}{2} + 3\right)^2, \ \ldots\ , \left(\frac{p-1}{2} - k\right)^2 \equiv \left(\frac{p-1}{2} + k + 1\right)^2 (\mathrm{mod}\ p)$. Без квадратів маємо антисиметричну конгруенцію $(\frac{p-1}{2} - k) \equiv -(\frac{p-1}{2} + 1 + k)(modp)$.

Нагадаємо лему про суму степенів [19].

Лема 1. *Якщо $p \in \mathbb{P}$ і $n \in \mathbb{N}_0$, то*

$$\sum_{k=1}^{p-1} k^n \equiv \begin{cases} 0\ (modp), & (p-1) \nmid n, \\ -1\ (modp), & (p-1) \mid n. \end{cases}$$

Теорема 1. *Якщо $p \equiv 3\ (mod\ 4)$ і p — просте, то для $d = 2$ і $d = 2^{-1}$ кількості точок кривої $x^2 + y^2 = 1 + dx^2y^2$ та кривої $x^2 + y^2 = 1 + d^{-1}x^2y^2$ над F_p збігаються і дорівнюють $N_E = p + 1$, якщо $p \equiv 3(\mathrm{mod} 8)$ та $N_E = p - 3$, якщо $p \equiv 7(\mathrm{mod} 8)$.*

Над полем F_{p^n}, де $n \equiv 1(mod2)$, порядки вищевказаних кривих $N_E = p^n + 1$, якщо $p \equiv 3(\mathrm{mod} 8)$ і $N_E = p^n - 3$, якщо $p \equiv 7(\mathrm{mod} 8)$.

Доведення. Розглянемо криву

$$x^2 + y^2 = 1 + 2x^2y^2. \tag{2}$$

Перетворимо рівняння (2) на $y^2 = \frac{x^2-1}{2x^2-1}$. Множина розв'язків цього рівняння збігається з множиною розв'язків рівняння (2), бо значення $x_0 = (\sqrt{2})^{-1}$, яке перетворює на 0 вираз $2x^2-1$, не є коренем (2), оскільки чисельник x^2-1 не набуває при цьому значення 0. У випадку $p \equiv 3(\mathrm{\ mod\ } 8)$ вираз $2x^2-1$ зі знаменника $\frac{x^2-1}{2x^2-1}$, який отримано біраціональним перетворенням з еквівалентного рівняння до рівняння початкової кривої $y^2(2x^2-1) = x^2-1$, не може бути нулем, бо $(\frac{2}{p}) \equiv -1$. Тому за умови $p \equiv 3(\mathrm{\ mod\ } 8)$ крива $y^2 = (x^2-1)(2x^2-1)$ має стільки ж точок N_2, що і крива (2), тобто $N_2 = N_E$, бо для кожного x з F_p символ Лежандра елементів $(x^2-1)/(2x^2-1)$ та $(x^2-1)(2x^2-1)$ є однаковим, але множини цих розв'язків можуть не збігатися. У випадку $p \equiv 7(\mathrm{mod}\, 8)$ крива $y^2 = (x^2-1)(2x^2-1)$ буде мати на 2 точки більше, ніж (2), оскільки з'являться точки $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ і $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, бо $(\frac{2}{p}) \equiv 1$. Отже, потрібно показати, що число N_2, рівне кількості точок на кривій

$$y^2 = (x^2-1)(2x^2-1), \tag{3}$$

задовільняє умову $N_2 \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ для $p \equiv 3(\mathrm{mod}\, 8)$ і $N_2 \equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$ для $p \equiv 7(\mathrm{mod}\, 8)$. Тоді матимемо $N_2 = p+1$ для $p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\, 8)$ та $N_2 = p-1$ для $p \equiv 7(\mathrm{mod}\, 8)$. (Випадки $N_2 = 1$ або $N_2 = 2p-1$ неможливі, бо $N_2 \geqslant 2$ і $N_2 \leqslant 2p-2$). Звідси випливає твердження про кількість точок на початковій кривій (2).

Покажемо, що кількість розв'язків рівняння $y^2 = (x^2-1)(2x^2-1)$, тобто N_2, порівняна з $(-a_{2p-2} - a_{p-1})(\mathrm{mod}\, p)$, де a_{2p-2}, a_{p-1} — коефіцієнти многочлена $(x^2-1)^{\frac{p-1}{2}}(2x^2-1)^{\frac{p-1}{2}} = a_0 + a_1x + ... + a_{2p-2}x^{2p-2}$ після розкриття дужок і застосування леми 1 про суму степенів [19] зі зведенням за модулем p.

Для фіксованого значення x кількість розв'язків рівняння (3) дорівнює $1 + \left(\frac{(x^2-1)(2x^2-1)}{p}\right)$, де $\left(\frac{a}{p}\right)$ — символ Лежандра. Як відомо, $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}}(\mathrm{mod}\, p)$, тому для фіксованого x кількість розв'язків рівняння (3) порівнянна за модулем p з $1 + ((x^2-1)(2x^2-1))^{\frac{p-1}{2}}$. Отже, підсумовуючи за всіма x, маємо $N_2 \equiv \sum_{x=0}^{p-1} 1 + ((x^2-1)(2x^2-1))^{\frac{p-1}{2}} \equiv p + \sum_{x=0}^{p-1} (x^2-1)^{\frac{p-1}{2}}(2x^2-1)^{\frac{p-1}{2}} (\mathrm{mod}\, p)$. Розкривши дужки в $(x^2-1)^{\frac{p-1}{2}}(2x^2-1)^{\frac{p-1}{2}}$, отримуємо, що $a_{2p-2} = 1^{\frac{p-1}{2}} \cdot 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (\frac{2}{p})(\mathrm{mod}\ p)$. Отже, використавши лему 1, маємо

$$N_2 \equiv -(\frac{2}{p}) - a_{p-1}(\mathrm{mod}\, p). \tag{4}$$

Нам потрібно було довести, що $N_2 \equiv 1(\mathrm{\ mod\ } p)$ при $p \equiv 3(\mathrm{mod}\, 8)$ і $N_2 \equiv -1(\mathrm{\ mod\ } p)$ при $p \equiv 7(\mathrm{\ mod\ } 8)$. Тобто треба було показати, що $N_2 \equiv -(\frac{2}{p}) - a_{p-1}(\mathrm{\ mod\ } p)$ для $p \equiv 3\,(\mathrm{\ mod\ } 4)$. Це випливатиме з (3), якщо ми покажемо, що $a_{p-1} \equiv 0(\mathrm{\ mod\ } p)$. Визначимо згідно з формулою бінома Ньютона коефіцієнт a_{p-1} при x^{p-1}

многочлена утвореного з добутку $(x^2-1)^{\frac{p-1}{2}}(2x^2-1)^{\frac{p-1}{2}}$. Він дорівнює $a_{p-1} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\sum\limits_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} 2^j (C^j_{\frac{p-1}{2}})^2$. Справді,

$$\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} 2^j (C^{\frac{p-1}{2}-j}_{\frac{p-1}{2}})(-1)^{\frac{p-1}{2}-(\frac{p-1}{2}-j)} \cdot 2^j (C^j_{\frac{p-1}{2}})^2 (-1)^{\frac{p-1}{2}-j} =$$

$$= (-1)^{\frac{p-1}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} 2^j C^{\frac{p-1}{2}-j}_{\frac{p-1}{2}} \cdot C^j_{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} 2^j (C^j_{\frac{p-1}{2}})^2.$$

Покажемо, що за умови $p \equiv 3(\mathrm{mod} 4)$ виконуватиметься

$$\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} 2^j (C^j_{\frac{p-1}{2}})^2 \equiv 0 \, (\mathrm{mod}\, p).$$

Домножимо кожен біноміальний коефіцієнт у попередній сумі на $(\frac{p-1}{2})!$. Отримуємо

$$(\frac{p-1}{2})! C^j_{\frac{p-1}{2}} = \frac{(\frac{p-1}{2})(\frac{p-1}{2}-1)...(\frac{p-1}{2}-j+1)(\frac{p-1}{2})!}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot j} =$$

$$= (\frac{p-1}{2})(\frac{p-1}{2}-1)...(\frac{p-1}{2}-j+1)[(\frac{p-1}{2})(\frac{p-1}{2}-1)...(j+1)].$$

Застосовуємо рівності з зауваження 1 : $(\frac{p-1}{2}-k)^2 \equiv (\frac{p-1}{2}+1+k)^2 (mod p), 0 \leqslant k \leqslant \frac{p-1}{2}$ до множників у квадратних дужках $[(\frac{p-1}{2})(\frac{p-1}{2}-1)...(j+1)]$, отримаємо: $(\frac{p-1}{2})(\frac{p-1}{2}-1)...(\frac{p-1}{2}-j+1)[(\frac{p-1}{2}+1)...(\frac{p-1}{2}+\frac{p-1}{2}-j)](-1)^{\frac{p-1}{2}-j}$.

Переставивши множники бачимо, що з зауваження 1 випливає: $(\frac{p-1}{2})! C^j_{\frac{p-1}{2}} = (\frac{p-1}{2}-j+1)(\frac{p-1}{2}-j+2)...(\frac{p-1}{2})(\frac{p-1}{2}+1)...(p-j-1)(-1)^{\frac{p-1}{2}-j}$.

Піднісши дві частини до квадрату, отримаємо:

$$\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)! C^j_{\frac{p-1}{2}}\right)^2 \equiv \left(\frac{p-1}{2}-j+1\right)^2 \left(\frac{p-1}{2}-j+2\right)^2 \dots (p-j-1)^2 (\mathrm{mod} p). \tag{5}$$

Покажемо, як обчислити $N_2(\bmod p)$. Помітимо, що для заданого x кількість розв'язків рівняння $y^2 = (x^2-1)(2x^2-1)(\bmod\ p)$ конгруентна значенню суми виразів $1 + ((x^2-1)(2x^2-1))^{\frac{p-1}{2}} (\mathrm{mod}\, p)$ по x від 0 до $p-1$. Отже,

$$N_2 \equiv \sum\nolimits_{x=0}^{p-1} 1 + (x^2-1)^{\frac{p-1}{2}} (2x^2-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv p + \sum\nolimits_{x=0}^{p-1} (x^2-1)^{\frac{p-1}{2}} (2x^2-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

$$\equiv \sum\nolimits_{x=0}^{p-1} (x^2-1)^{\frac{p-1}{2}} (2x^2-1)^{\frac{p-1}{2}} (\mathrm{mod} p).$$

Вираз $(x^2-1)^{\frac{p-1}{2}}(2x^2-1)^{\frac{p-1}{2}}$ — це деякий многочлен $a_{2p-2}x^{p-1} + a_{2p-3}x^{p-2} + ... + a_1 x + a_0$. Для всіх $i = 0, 1..., 2p-2$, окрім $i = 2p-2$ і $i = p-1$, сума $\sum\limits_{x=0}^{p-1} x^i$ рівна 0 за модулем p.

Для $i = 2p-2$ і $i = p-1$ ця сума порівняна з -1, що слідує з леми про суму степенів. Тому $\sum_{x=0}^{p-1}(x^2-1)^{\frac{p-1}{2}}(2x^2-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -a_{2p-2} - a_{p-1} (\mathrm{mod} p)$.

Має місце конгруенція суми коефіцієнтів з індексами, кратними $p-1$,

$$-a_{2p-2} - a_{p-1} (\mathrm{mod} p) \equiv \begin{cases} 1, & p \equiv 3(\mathrm{mod} 8) \\ -1, & p \equiv 7(\mathrm{mod} 8). \end{cases}$$

Для доведення цього залишилося обчислити a_{2p-2} і a_{p-1}. Очевидно, a_{2p-2} рівний $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (\frac{2}{p})(\mathrm{mod} p)$. А коефіцієнт a_{p-1} виражається як

$$a_{p-1} = \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} (C^j_{\frac{p-1}{2}})^2 2^j (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

тому що це коофіцієнт у многочлені

$$\left(\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} C^j_{\frac{p-1}{2}} (x^2)^j (-1)^{\frac{p-1}{2}-j}\right) \left(\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} C^j_{\frac{p-1}{2}} 2^j (x^2)^j (-1)^{\frac{p-1}{2}-j}\right)$$

при x^{p-1}. Оскільки $p \equiv 3(\mod 4)$, то $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1$ і $a_{p-1} = -\sum\limits_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} (C^j_{\frac{p-1}{2}})^2 2^j$. Тому

$$N_2 \equiv -a_{2p-2} - a_{p-1} \equiv -(\frac{2}{p}) + \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} (C^j_{\frac{p-1}{2}})^2 2^j (\mathrm{mod} p).$$

Нагадуємо, що

$$\left(\frac{2}{p}\right) \equiv \begin{cases} -1, & p \equiv 3(\mathrm{mod}\, 8) \\ 1, & p \equiv 7(\mathrm{mod}\, 8). \end{cases}$$

Отже, в обох випадках треба довести співвідношення $P(2) = \sum\limits_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} (C^j_{\frac{p-1}{2}})^2 2^j \equiv 0(\mathrm{mod} p)$, з якого слідувало б $N_2 \equiv -1(\mathrm{mod} p)$ при $p \equiv 7(\mathrm{mod} 8)$ і $N_2 \equiv 1(\mathrm{mod} p)$ при $p \equiv 3(\mathrm{mod} 8)$.

Залишилося довести, що

$$\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} (C^j_{\frac{p-1}{2}})^2 2^j \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$$

при $p \equiv 3(\mod 4)$. Взагалі, для випадку довільного $d \in F_p^*$, міркуючи аналогічно, отримали б, що при $p \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$ E_d є суперсингулярною, якщо і тільки якщо виконано співвідношення

$$\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} (C^j_{\frac{p-1}{2}})^2 d^j \equiv 0(\mathrm{mod}\, p). \tag{6}$$

Розглянемо допоміжний поліном $P(t)=(\frac{p-1}{2}!)^2\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}(C^j_{\frac{p-1}{2}})^2t^j$. Використовуючи (5), можна показати

$$a_{p-1}=P(t)=(\frac{p-1}{2}!)^2\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}(C^j_{\frac{p-1}{2}})^2t^j=\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}(k+1)^2(k+2)^2\dots(\frac{p-1}{2}+k)^2t^k$$

над F_p. Тут у суму (6), яка визначає a_{p-1}, замість d підставили t для дослідження узагальненої задачі.

Помітимо, що $P(t)=\partial^{\frac{p-1}{2}}(\partial^{\frac{p-1}{2}}(Q(t)t^{\frac{p-1}{2}})t^{\frac{p-1}{2}})$ над F_p, де $Q(t)=t^{p-1}+\dots+t+1$, а $\partial^{\frac{p-1}{2}}$ позначають $\frac{p-1}{2}$-шу похідну по змінній, t — це нова змінна, а не координата кривої. Помітимо, що $Q(t)=\frac{t^p-1}{t-1}\equiv\frac{(t-1)^p}{t-1}=(t-1)^{p-1}(modp)$, тому в F_p виконується $P(t)=(((t-1)^{p-1}t^{(\frac{p-1}{2})})t^{\frac{p-1}{2}})^{(\frac{p-1}{2})}$. Нехай $\theta=t-1$. Позначимо $R(\theta)=P(t)$. Для випадку $t+1=2$ отримаємо $\theta=1$, бо $\theta=t-1$. Ця заміна зводить многочлен $P(t)$ від 2 до многочлена $R(t-1)$ від 1, тобто $P(t+1)=R(t)$, що зручно зокрема і для дифернціювання, можна вважати, що $R(t)$ — це многочлен $P(\theta-1)$ від нової змінної θ, $\theta=t-1$. Зауважимо, що в силу лінійності заміни, диференціювання за θ і за t збігаються. Диференціювання потрібне для перетворення многочлена $R(\theta)$ до такого вигляду, де явно видно потрібний коефіцієнт a_{p-1}. Тоді $R(\theta)=P(t)=((\theta^{p-1}(\theta+1)^{\frac{p-1}{2}})^{(\frac{p-1}{2})}(\theta+1)^{\frac{p-1}{2}})^{(\frac{p-1}{2})}$. Для доведення співвідношення $a_{p-1}\equiv 0(modp)$ достатньо показати, що $R(\theta)=0$ при $\theta=1$ над F_p. Помітимо, що $(\theta^{p-1}(\theta+1)^{\frac{p-1}{2}})^{(\frac{p-1}{2})}=$
$=(\theta^{p-1}+C^1_{\frac{p-1}{2}}\theta^p+C^2_{\frac{p-1}{2}}\theta^{p+1}+...+C^{\frac{p-1}{2}}_{\frac{p-1}{2}}\theta^{p-1+\frac{p-1}{2}})^{(\frac{p-1}{2})}=(\theta^{p-2})^{(\frac{p-1}{2})}=(p-1)(p-2)...(\frac{p-1}{2}+1)\theta^{\frac{p-1}{2}}$. Всі доданки, окрім першого, стали рівними 0. Тому

$$R(\theta)=\frac{(p-1)!}{(\frac{p-1}{2})!}(\theta^{\frac{p-1}{2}}(\theta+1)^{\frac{p-1}{2}})^{(\frac{p-1}{2})}=\frac{(p-1)!}{(\frac{p-1}{2})!}\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}(j+1)...(j+\frac{p-1}{2})\theta^jC^j_{\frac{p-1}{2}}.$$

Потрібно показати, що $P(1+1)=R(1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$ а тому і $a_{p-1}\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$. Маємо

$$R(1)=\frac{(p-1)!}{(\frac{p-1}{2})!}\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}C^j_{\frac{p-1}{2}}(j+1)...(j+\frac{p-1}{2}).\qquad(7)$$

Помічаємо, що $(\frac{p-1}{2}-j+2)...(\frac{p-1}{2}-j+\frac{p-1}{2})=(-1)^{\frac{p-1}{2}}(j+1)...(j+\frac{p-1}{2})=-1(j+1)...(j+\frac{p-1}{2})$, Через те симетричні доданки в (7) скорочуються. Тут ми використовуємо те, що $(-1)^{\frac{p-1}{2}}=-1$, так як $p=Mk+3$ і $\frac{p-1}{2}=2k+1$. Значить, $P(2)=R(1)=0$, тобто $a_{p-1}\equiv 0(\mathrm{mod}p)$, що і потрібно було довести. Отже, $\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}(C^j_{\frac{p-1}{2}})^2\equiv 0(\mathrm{mod}p)$, що завершує доведення основної частини теореми.

Аналогічний результат матиме місце для кривої $x^2+y^2=1+2^{-1}x^2y^2$. Дійсно, для доведення аналогічного твердження щодо кривої $x^2+y^2=1+2^{-1}x^2y^2$ потрібно показати, що $\sum\limits_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}(C^j_{\frac{p-1}{2}})^2 2^{-j}\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$. Для отримання останньої формули враховуємо, що $(\frac{2}{p}) = (\frac{2^{-1}}{p})$ слідує з вже доведеного $\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} \left(C^j_{\frac{p-1}{2}}\right)^2 2^j \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$ якщо домножити останнє на $2^{-\frac{p-1}{2}}$. Тобто $\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} \left(C^j_{\frac{p-1}{2}}\right)^2 2^{-j} \equiv 0$ так як

$$2^{\frac{p-1}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} \left(C^j_{\frac{p-1}{2}}\right)^2 2^{-j} = \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} \left(C^j_{\frac{p-1}{2}}\right)^2 2^{\frac{p-1}{2}-j} = \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} \left(C^j_{\frac{p-1}{2}}\right)^2 2^j.$$

наприкладі, для параметрів $p = 8k + 7 = 23$ і $d = 12 = 2^{-1}$ маємо $N_E(12) = 20 = p - 3$, а для $d = 2$ маємо $N_E(2) = 20 = p - 3$, отже, обидва рази 20 пар точок, що підтверджує нашу теорему.

Розглянемо розширення базового поля до $\mathbb{F}_{p^n}$, тоді отримуємо кількість точок вищевказаної кривої $x^2 + y^2 = 1 + dx^2y^2$ з врахуванням того, що кількість розв'язків рівняння $y^2 = P(x)$, де $P(x)$ – многочлен степеня $m > 2$ з коефіцієнтами з $\mathbb{F}_p$, над $\mathbb{F}_{p^n}$. Цей многочлен має вигляд $p^n + \omega_1^n + ... + \omega_{m-1}^n$, де $\omega_1, ..., \omega_{m-1} \in \mathbb{C}$ залежать лише від x (і не залежать від n) [20]. Оскільки суперсингулярність кривої $x^2 + y^2 = 1 + dx^2y^2$ рівносильна, тому що еліптична крива $v^2 = (d-1)u^3 + 2(d+1)u^2 + (d-1)u$ має рівно p звичайних (не нескінченно віддалених) точок, ми можемо застосувати даний результат для $m = 3$. Згідно з цим кількість розв'язків рівняння $v^2 = (d-1)u^3 + 2(d+1)u^2 + (d-1)u$ над $\mathbb{F}_{p^n}$ задається виразом $p^n + \omega_1^n + \omega_2^n$. Оскільки для $n = 1$ виходить рівно p розв'язків, то маємо $\omega_1 + \omega_2 = 0$, тому $p^n + \omega_1^n + \omega_2^n = p^n$, при $n \equiv 1(mod 2)$.

Нагадаємо, що еліптична крива у формі Монтгомері $E_M : v^2 = u^3 + 6u^2 + u$ є біраціонально еквівалентною до кривої $x^2 + y^2 = 1 + 2x^2y^2$ над F_{p^k}.

Покажемо, що для непарних степенів k розширень поля F_p до F_{p^k} порядок групи кривої Монтгомері E_M є наступним: $N_M = p^k$.

Позначимо кількість точок на кривій Монтгомері над $\mathbb{F}_{p^k}$ як $N_{M,k}$, а на кривій Едвардса як $N_{E,k}$. Порядок $N_{M,k}$ групи кривої Монтгомері $v^2 = u^3 + 6u^2 + u$ над F_{p^k}, яка є біраціонально еквівалентною до кривої $x^2+y^2 = 1+2x^2y^2$, обчислюється за допомогою теорем Степанова [20] і Деліня [15]: $N_M = p^k + \omega_1^k + \omega_2^k$, де $\omega_i^k \in \mathbb{C}$ і $\omega_1^k = -\omega_2^k$, $|\omega_i| = \sqrt{p}$, $i \in 1, 2$. Згідно з теоремою Деліня: $|\omega_i| = \sqrt{p}$. А для еліптичної кривої виконується $\omega_1 = \bar{\omega}_2$ [15], тому, враховуючи, що виведене вище $\omega_1 + \omega_2 = 0$, яке слідувало з $N_{M,1} = p$, маємо $\omega_1 = i\sqrt{p}$, $\omega_2 = -i\sqrt{p}$. Звідси для парних k маємо, що $N_{M,k} = p^k + 2(-p)^{\frac{k}{2}}$. Для непарних k маємо $\omega_1^k + \omega_2^k = 0$, тому $N_{M,k} = p^k$.

В силу того, що при $k \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ кількість афінних точок $N_{M,1} = p$ рівна p^k маємо, що кількість афінних точок у образі при відображенні з E_M на (3) рівна $N_{E,k} = p^k - 2$ для $p \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$ і $k \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)$. Це так, бо відображення $y = (u-1)/(u+1)$ відображає 2 точки 4-го порядку, кривої Монтгомері, з координатою $u = -1$ на нескінченність, тобто не у точку з афінної площини. Звідси маємо $N_E = p^k - 3$ при $p \equiv 7(\mathrm{mod}\ 8)$, $N_E = p$ при $p \equiv 3(\mathrm{mod}\ 8)$ і $k \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$.

Крива Едвардса в афінній формі над $\mathbb{F}_p, p \equiv 7(\mathrm{mod}\ 8)$ має тільки $N_E = p - 3$ точок замість очікуваних $p + 1$. Це так, оскільки наявні на проективній кривій Едвардса 2 особливі точки $p = (1, 0, 0)$ і $p' = (0, 1, 0)$ після її нормалізації шляхом біраціонального відображення $u = (1 + y)/(1 - y)$, $v = \sqrt{A}u/x$ [7, 10], мають по 2 образи. Властивостями, вказаними в означенні біраціонального ізоморфізму в [13], володіють і відображення $x = \frac{u}{v}$, $y = \frac{u-1}{u+1}$ з [7] та оберненим $(u, v) =$

$((y+1)/(y-1),\ x(y+1)/(y-1)\,)$ зі спеціальними точками цього раціонального відображення, де $v=0$ або $u=-1$. В них відображення не визначено. Особливі точки скрученої кривої Едвардса при відображенні нормалізації переходять в саме ці спеціальні точки відображення біраціональної еквівалентності $x=\frac{u}{v},\ \ y=\frac{u-1}{u+1}$ заданого в [7]. Точки, де $v=\ 0$, це $((-A\pm\sqrt{(A+\ 2)(A-2))}/2,\ 0)$, що мають порядок 2 на кривій Монтгомері, і точки, де $u=-1$ — це точки порядку 4 з координатами $(-1,\pm(A-2)/B)$ на кривій Монтгомері. При цьому ці особливі точки переходять в не особливі точки нормалізованої кривої E_M. Тому нормалізована крива Едвардса містить вже на 4 точки більше, а саме $(p-3)+4=p+1$ точок. Зауважимо, що за умови $(\frac{a}{p})=1$ крива E_d ізоморфна кривій (1), цей ізоморфізм задається відображенням $X=\frac{x}{\sqrt{a}}, Y=y$, тому в цьому випадку результати теореми поширюються на криву (1).

Наслідок 1. *Якщо коефіцієнт d кривої E_d задовольняє рівняння суперсингулярності* $\sum\limits_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}(C_{\frac{p-1}{2}}^{j})^2 d^j\equiv 0(\operatorname{mod} p)$, *наведене в доведені теоремі 1, то E_d має $p-1-2(\frac{d}{p})$ точок над F_p, а біраціонально еквівалентна [12,13] їй крива E_M має $p+1$ точку над F_p.*

Доведення. З доведення теореми 1 слідує, що конгруенція (6) а саме

$$\sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}}(C_{\frac{p-1}{2}}^{j})^2 d^j\equiv 0(\operatorname{mod} p)$$

є визначальною для виконання умови суперсингулярності. З вище сказаного слідує, що суперсингулярність кривої Едвардса рівносильна тому, що рівняння (1) або рівносильне йому $y^2\left(dx^2-1\right)=x^2-1$ має в $\mathbb{F}_p$ рівно $p-1-2\left(\frac{d}{p}\right)$ розв'язків. Це випливає з формули кількості точок (4), виведеної у теоремі 1, і умови $a_{p-1}\equiv 0(modp)$, що забезпечує виконання умови суперсингулярності (6), при цьому враховано наявність 2 особливих точок у проективної кривої $F(x;y;z)$, що знайдені у розділі 1. А це рівносильно тому, що узагальнене рівняння (3), яке має вигляд

$$y^2=(dx^2-1)(x^2-1), \tag{8}$$

має рівно $p-\left(\frac{d}{p}\right)$ розв'язків. Справді, кожний розв'язок рівняння (1) відповідає розв'язку рівняння (8), але (8) має ще розв'язки, при яких $dx^2-1\equiv 0$. Їх стільки, скільки є квадратних коренів з d в $\mathbb{F}_p$, тобто їх $1+\left(\frac{d}{p}\right)$. Отже суперсингулярність кривої Едвардса рівносильна тому, що рівняння (8) має $p-1-2\left(\frac{d}{p}\right)+1+\left(\frac{d}{p}\right)=p-\left(\frac{d}{p}\right)$ розв'язків.

Як показано вище, кількість розв'язків (2) конгруентна $-(a_{2p-2}-a_{p-1})modp$, де коефіцієнти многочлена $\left(dx^2-1\right)^{\frac{p-1}{2}}\left(x^2-1\right)^{\frac{p-1}{2}}=a_{2p-2}x^{2p-2}+...+a_0$. Тому якщо $-a_{2p}-a_{p-1}\equiv p-\left(\frac{d}{p}\right)\operatorname{mod}p$ тобто $a_{p-1}\equiv 0(modp)$, то крива Едвардса є суперсингулярною. Випадки $N_{E_d}=-\left(\frac{d}{p}\right)$ і $N_{E_d}=2p-\left(\frac{d}{p}\right)$ є неможливими, в силу нерівності $2 \leqslant N_{E_d} \leqslant 2p-2$. Дійсно, вона має хоч 2 розв'язки $y=0$, $x=\pm 1$, а більше ніж $2p-2$ розв'язків вона мати не може, бо для $x=\pm 1$ є існує один можливий $y=0$, а для інших значень x не більше ніж 2 можливих y.

Отже, результат теореми 1 можна розповсюдити на всі $d \in F_p^*$, що його задовольняють (6). Суперсингулярній кривій E_d відповідає суперсингулярна крива E_M, що має $p+1$ точок, серед яких 1 нескінченно віддалена.

2.2. Суперсингулярність еліптичних кривих

Наслідок 2. *Якщо виконується умова* $\sum\limits_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} \left(C^j_{\frac{p-1}{2}}\right)^2 d^j \equiv 0(\bmod p)$, *то крива Монтгомері* $u^2=(d-1)\,v^3+2(d+1)v^2+(d-1)\,v$ *для непарних* k *має рівно* p^k *афінних точок над* $\mathbb{F}_{p^k}$.

Доведення. Як доведено в теоремі 3.4 [2], кожна крива Монтгомері над скінченим полем k, $char(k) \equiv 3(\bmod 4)$ є біраціонально еквівалентною кривій Едвардса. З формули біраціонального відображення над k, $char(k) \neq 2$ кривої $E_{a,d}$ в E_M були отримані коефіцієнти кривої E_M: $A=\ 2\frac{(a+d)}{(a-d)}$ і $B=\ \frac{4}{a-d}$ [2]. Отже, образом знайденої нами суперсингулярної кривої E_d, де коефіцієнт d задовольняє вказану в умові конгруенцію, є крива E_M: $\frac{4}{a-d}u^2=v^3+2\frac{a+d}{a-d}v^2+v$. Враховуючи, що $a=1$, отримуємо еліптичну криву у формі Монтгомері $\frac{4}{1-d}u^2=v^3+2\frac{1+d}{1-d}v^2+v$, з відповідними коефіцієнтами $B=\frac{4}{1-d}$, $A=2\frac{1+d}{1-d}$. Оскільки $d\neq 1$, маємо рівняння еквівалентної еліптичної кривої $4u^2=(1-d)v^3+2(1+d)v^2+(1-d)v$.

З умови наслідку 1 і теореми 1 легко отримується, що властивістю суперсингулярності володіють і криві E_d з коефіцієнтами $d=17+12\sqrt{2}$ і $d=17-12\sqrt{2}$ при $p\equiv 7(\bmod 8)$. Випадок $p \equiv 3(\bmod 8)$ неможливий в силу неіснування $\sqrt{2}$.

Наслідок 3. *Якщо коефіцієнт кривої Едвардса* $d=2$ *і* $p^k \equiv 3(mod 4)$, *то в полі* F_{p^k} *кількість розв'язків* $y^2=u^3+6u^2+u$ *рівна* p^k. *Відповідно крива (1) має* p^k+1 *при* $p^k \equiv 3(\bmod 4)$ *і* p^k-3 *при* $p^k \equiv 7(\bmod 8)$.

Доведення цього наслідку слідує безпосередньо з наслідків 1 і 2 та дослідженої в теоремі 1 кількості розв'язків рівняння $y^2=(x^2-1)(2x^2-1)$, яка рівна p^k+1 при $p^k \equiv 3(\mod 8)$ і p^k-1 при $p^k\equiv 7(\bmod 8)$. Тобто має рівно $p^k-\left(\frac{d}{p}\right)$ розв'язків над F_{p^k}, що випливає з наслідку 1, бо $-a_{2p}-a_{p-1}\equiv p^k-\left(\frac{d}{p}\right)(\bmod p^k)$, де $a_{p-1}\equiv 0(\bmod p^k)$.

Сформулюємо спосіб знаходження суперсингулярної еліптичної кривої у формі Веєрштрасса.

Зауваження 2. *Суперсингулярній еліптичній кривій у канонічній формі Веєрштрасса* $y^2=x^3+ax+b$ *ізоморфна суперсингулярна еліптична крива Монтгомері* E_M.

Для зведення кривої E_M до канонічної форми Веєрштрасса поділимо рівняння кривої $4u^2=(1-d)v^3+2(1+d)v^2+(1-d)v$ на 4 і до отриманної кривої $u^2=4^{-1}((1-d)v^3+2(1+d)v^2+(1-d)v)=av^3+bv^2+ax$ застосуємо заміну $t=v-\frac{b}{3a}$, де $a=(d-1)4^{-1}$, $b=2^{-1}(1+d)$. Ця крива буде суперсингулярною еліптичною кривою у формі Веєрштрасса.

Зауваження 3. *Скручена крива Едварса допускає кофактор 4.*

Доведення. Менше ніж 4 кофактор бути не може, бо точки 4-го порядку існують на кожній кривій Едвардса. Доведення їх існування дає прикдад такої кривої. Так якщо $p = 2192 - 264 - 1$, то скручена крива Едвардса $E_{102,47} : 102x^2 + y^2 = 1 + 47x^2y^2$ має кофактор 4 [7].

Наслідок 4. *Умова неіснування точки 8-го порядку є необхідною умовою мінімальності кофактора [14] кривої Едвардса.*

Доведення. Справді, відомо, що порядок групи точок кривих E_d з мінімальним кофактором рівний $4p$ [7], тобто не ділиться на 8. Тому необхідна і достатня умова подільності на 8, яка досліджена у властивості 4, виключає максимальність порядку в разі її виконання і забезпечує мінімальність кофактора кривої в разі її невиконання, інакше в силу циклічності групи точок даної кривої в ній би існувала мультиплікативна підгрупа C_8, яка породжувалась би елементом 8-го порядку, необхідна і достатня умова існування якого досліджена автором в [28], внаслідок чого порядок кривої був би $8p$.

Наступна властивість дає спосіб побудови кривої з заданою циклічною підгрупою простого порядка q і мінімальним кофактором — 4.

Зауваження 4. *Якщо $p = 8k + 7$, де $p,\ q \in P$ і $p - 3 = 4q$, а коефіцієнт d задовольняє умову суперсингулярності (6) кривої $E_{1,d}$ над F_p, то $E_{1,d}$ має мінімальний кофактор 4 і містить просту циклічну підгрупу порядка q. Якщо $p = 8k + 3$, де $p,\ q \in P$ і $p + 1 = 4q$, а коефіцієнт d задовольняє умову суперсингулярності (6) кривої $E_{1,d}$ над F_p, то $E_{1,d}$ має мінімальний кофактор 4 і містить циклічну підгрупу простого порядка q.*

Доведення. Доведення слідує з теореми 1 про порядок суперсингулярної кривої над відповідним F_p і того факту, що точка порядку 4 [7] завжди існує на $E_{1,d}$. Окрім того простота підгрупи C_q слідує з того, що циклічна група порядку q не містить не тривіальних підгруп.

Висновки. Отже, знайдено необхідні і достатні умови суперсингулярності кривих $E_{a,d}$ і еліптичних кривих для полів F_{p^n} характеристики $p = 4k+3$. Запропоновано теоретичне підґрунтя для нового методу перевірки еліптичних кривих у формі Монтгомері і у нормальній формі Веєрштрасса на суперсингулярність, що ґрунтується на біраціональному ізоморфізмі еліптичної кривої і дослідженної нами кривої (1). Зроблено аналіз особливостей і роду скрученої кривої Едвардса.

1. **Edwards H.** A normal form for elliptic curves // American Mathematical Society. – 2007. – Vol. 44, No. 3, July – pp. 393–422.
2. **Bernstein D. J., Birkner P., Joye M., Lange T., Peters Ch.** Twisted Edwards Curves // IST Programme ECRYPT, and in part by grant ITR-0716498, 2008. – pp. 1–17.
3. **Дрозд Ю. А.** Вступ до алгебраїчної геометрії. – Л.: Внтл-Класика. 2004. – 251 с.

4. **Шафаревич Ю. А.** Основы алгебраической геометрии. – М.: Наука, 1969. – Т. 1. – 184 с.
5. **Bernstein D. J., Lange T.** Faster addition and doubling on elliptic curves // IST Programme Contract 2002-507932 ECRYPT. – 2007. – pp. 1–20.
6. **Hisil H., Koon-Ho Wong Kenneth, Carter G.** Twisted Edwards Curves Revisited // ASIACRYPT LNCS 5350. – 2008. – pp. 326–343.
7. **Fulton W.** Algebraic curves. An Introduction to Algebraic Geometry. – Third Preface – January, 2008. – 121 P.
8. **Рид М.** Алгебраическая геометрия для всех. Москва: Мир, 1991, 143 с.
9. **Болотов А. А., Гашков С. Б., Фролов А. Б., Часовских А. А.** Элементарное введение в эллиптическую криптографию. – М.: КомКника, 2006. – Т. 2. – 328 с.
10. **Koblitz N.** Eliptic Curve Cryptosystems // Mathematics of Computation. – 1987. – Vol. 48, № 177. – P. 203–209.
11. **Menezes A. J., Okamoto T., Vanstone S. A.** Reducing Elliptic Curve Logarithms to Logarithms in a Finite Field // IEEE Transactions On Information Theory. – 1993. – Vol. 39, No. 5, September. – pp. 1603–1646.
12. **Алексеев Е. К., Ошкин И. Б., Попов В. О., Смышляев С. В., Сонина Л. А.** О перспективах использования скрученных эллиптических кривых Эдвардса со стандартом ГОСТ Р 34.10-2012 и алгоритмом ключевого обмена на его основе: Материалы XVI международной конференции «РусКрипто 2014».
13. **Бессалов А. В., Цыганкова О. В.** Взаимосвязь семейства точек больших порядков кривой Эдвардса над простым полем // Захист інформації. – 2015. – Т. 17, № 1. – С. 73–80.
14. **Виноградов И. М.** Основы теории чисел: учебное пособие, 12-е изд. – СПб.: «Лань», 2009. – 271 с.
15. **Степанов С.** Арифметика алгебраических кривых. – М.: Наука, 1991. – 368 с.
16. **Gupta R., Murty M. R.** Primitive points on elliptic curves // Compos. Math. – 1986. – 58. – P. 13-–44.
17. **Montgomery P. L.**, Speeding the Pollard and Elliptic Curve Methods of Factorizations, Math. Comp. 48, (1987), PP. 243–264.
18. **Скуратовський Р.** Дослідження властивостей скрученої кривої Едвардса: Конференція державної служби спеціального звязку та захисту інформації. http://www.dstszi.gov.ua/dstszi/control/uk/publish/article?showHidden=1arti&id=252312&cat&id=240232&ctime=1464080781894.
19. **Skuratovskii R. V.** Twisted Edwards curve and its group of points over finite field F_p // XI Літня школа «Алгебра, Топологія, Аналіз» Одеса, 2016. – pp. 122–124.
20. **Скуратовский Р. В., Осадчий Е. О., Квашук Д. М.** Деление точки скрученной кривой Эдвардса на два и ее применение в криптографии // Вісник національного технічного університету «ХПІ». – №44. – С. 90-96.
21. **Skuratovskii R. V., Skruncovich U. V.** Twisted Edwards curve and its group of points over finite field F_p // Conference «Graphs and Groups, Spectra and Symmetries», Novosibirsk, Russia. http://math.nsc.ru/conference/g2/g2s2/exptext/SkruncovichSkuratovskii-abstract-G2S2.pdf.

22. **Скуратовський Р., Мовчан П.** Нормалізація скрученої кривої Едвардса та дослідження її властивостей над F_p // Збірник праць 14-ї Всеукраїнської науково-практичної конференції. ФТІ НТУУ «КПІ» 2016. – Т. 2. – С. 102–104.

23. **Skuratovskii R. V.** Constructing of finite field normal basis in deterministic polynomial time // Bulletin of Taras Shevchenko Kiev National University. – 2011. – P. 49–54.

24. **Paulo S., Barreto L. M., Naehrig M.** Pairing-Friendly Elliptic Curves of Prime Order // International Workshop on Selected Areas in Cryptography SAC, 2005. – pp. 319–331.

Скуратовский Р. В.
Суперсингулярность эллиптических кривых и кривых Эдвардса над F_{p^n}

Резюме

Мы рассматриваем алгебраические кривые в форме Эдвардса и эллиптические кривые Монтгомери над конечным полем F_{p^n}, которые в настоящее время являются одним из самых быстрых и перспективиих носителей групп, на настоящее время имеют много применений. В работе найдены условия суперсингулярности кривых Эдвардса и большого класса скрученных кривых Эдвардса над полем F_{p^n} характеристики $p\ equiv 3$ mod 4. Показано, что проективная кривая Эдвардса не является эллиптической. Исследованы некоторые интересные свойства группы точек этих кривых. Построение кривой заданного порядка с минимальным кофактором. Подсчитан род скрученной кривой Эдвардса. Сделан анализ ее классов суперсингулярних кривых. Найдены условия минимальности кофактора скрученной кривой Эдвардса и его род.
Ключевые слова: суперсингулярные кривые, конечное поле, эллиптическая криптография, кривая Эдвардса, эллиптические кривые с малой степенью погружения в поле .

Skuratovskii R. V.
Supersingularity of elliptic and Edwards curves over F_{p^n}

Summary

We consider the algebraic curves which have form of Edwards and elliptic curves with coordinates in F_{p^n}. These curves are most effective support for a cyclic group of points which have many applications now. In this paper it was found conditions of supersingularity for Edwards curve and same case of twisted Edwards and Montgomery curves over F_{p^n} where $p \equiv 3 mod 4$. There was proved that projective twisted Edwards curve is not elliptic. Some properties of this curve were investigated. Conditions of minimal cofactor of twisted Edwards curve were founded. Construction of a curve with given order and minimal cofactor was made.
Key words: supersingularity, finite field, elliptic cryptography, Edwards curve, pairing-friendly elliptic curves.

References

1. Samko, S. G., Kilbas, A. A. & Marichev, O. I. (1987). *Integraly i proizvodnye drobnoho poryadka i nekotorye ih prilozheniya [Fractional integrals and derivatives with some applications]*. Minsk: Nauka i tekhnika, 688 p.

2. Arestov, V. V. (1981). Ob integralnykh neravenstvakh dlya trigonometricheskikh polinomov i ikh proizvodnykh [About integral inequalities for trigonometrical polynomials and theirs derivatives]. *Izv. AN USSR. Ser. matem.*, Vol. 45, P. 3–22.

3. Fikhtengolz, G. M. (2001). *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [A Course of Differential and Integral Calculus], Vol. II.* Moscow: Fizmatlit, 810 p.

4. Gradshtein, I. S. & Ryzhyk, I. M. (1963). *Tablitsy sntegralov, sum i proizvedeniy [Tables of integrals, sums and derivatives].* Moscow: GITTL, 1100 p.

5. Storozhenko, E. A. (1996). K odnoi zadache Malera o nulyakh polinoma i ego proizvodnoy [For one Mahler's prooblem about zeros of polinomial and its derivative]. *Matem. sbornik*, Vol. 187, №5, P. 111–120.

6. Edwards, H. (2007). *A normal form for elliptic curves. American Mathematical Society, Vol. 44, No. 3, July – pp. 393-422.*

7. *Bernstein, D. J., Birkner, P., Joye, M., Lange, T. & Peters, Ch. Twisted Edwards Curves. IST Programme ECRYPT, and in part by grant ITR-0716498, 2008. PP. 1-17.*

8. *Drozd, Yu. A. Vstup do alhebrayichnoyi heometriyi – L.: Vntl-Klasyka. 2004. – 251 p.*

9. *Shafarevych, Yu. A. Osnovy alhebraycheskoy heometryy – M.: Nauka, T.1, 1969. – 184 p.*

10. *Bernstein, D. J., Lange Tanja. Faster addition and doubling on elliptic curves. IST Programme Contract 2002-507932 ECRYPT, – 2007. – pp. 1-20.*

11. *Hisil Huseyin, Koon-Ho Wong Kenneth, Carter Gary. Twisted Edwards Curves Revisited. ASIACRYPT LNCS 5350 – 2008. – pp. 326-343.*

12. *W. Fulton Algebraic curves. An Introduction to Algebraic Geometry – Third Preface – January, 2008. – 121 P.*

13. *Rid M. Algebraicheskaya geometriya dlya vsekh. Moskva: Mir, 1991, 143 p.*

14. *Bolotov, A. A., Gashkov, S. B., Frolov, A. B. & Chasovskikh, A. A. Elementarnoye vvedeniye v ellipticheskuyu kriptografiyu – M.: KomKnika. Tom 2., 2006. – 328 s.*

15. *Koblitz, N. [Eliptic Curve Cryptosystems] // Mathematics of Computation. - 1987. - V. 48, № 177. - P. 203-209.*

16. *Menezes, A. J., Okamoto, T. & Vanstone, S. A. [Reducing Elliptic Curve Logarithms to Logarithms in a Finite Field]. IEEE Transactions On Information Theory. – 1993. – Vol. 39, No. 5, September. pp. 1603-1646.*

17. *Alekseyev, Ye. K., Oshkin, I. B., Popov, V. O., Smyshlyayev, S. V. & Sonina, L. A. O perspektivakh ispol'zovaniya skruchennykh ellipticheskikh krivykh Edvardsa so standartom GOST R 34.10-2012 i algoritmom klyuchevogo obmena na yego osnove Conference RusCrypto 2014. pp. 75-79.*

18. *Bessalov, A. V. & Tsygankova, O. B. Vzaimosvyaz' semeystva tochek bol'shikh poryadkov krivoy Edvardsa nad prostym polem. Zakhist informatsii. 2015. – T. 17, № 1. – pp. 73-80.*

19. *Vinogradov, I. M. Osnovy teorii chisel: Uchebnoye posobiye. 12-ye izd. - SPb.: Izdatel'stvo "Lan' 2009. 271 p.*

20. *Stepanov, S. Arifmetika algebraicheskikh krivykh. M.: Nauka., 1991g., 368 p.*

21. *Gupta, R., & Murty, M. R. Primitive points on elliptic curves. Compos. Math.58, (1986) P. 13–44.*

22. *Montgomery, P. L., Speeding the Pollard and Elliptic Curve Methods of Factorizations, Math. Comp. 48, (1987), pp. 243–264.*

23. *Skuratovskii, R. Doslidzhennya vlastyvostey skruchenoyi kryvoyi Edvardsa. Konferentsiya derzhavnoyi sluzhby spetsial?noho zvyazku ta zakhystu informatsiyi. http://www.dstszi.gov.ua/dstszi/control/uk/publish/article?showHidden=1art id=252312 cat id=240232 ctime=1464080781894*

24. *Skuratovskii, R. V. Twisted Edwards curve and its group of points over finite field* F_p. *XI Letnia shkola "Algebra, Topoloia, Analys "Odessa. (2016), PP. 122-124.*

25. *Skuratovskyy, R. V., Osadchyy,E. O. & Kvashuk, D. M. Delenye tochky skruchennoy kryvoy Edvardsa na dva y ee prymenenye v kryptohrafyy. Visnyk natsional?noho tekhnichnoho universytetu «KHPI», №44, st. 90-96.*

26. *Skuratovskyy, R. V., Osadchyy,E. O. & Kvashuk, D. M. Delenye tochky skruchennoy kryvoy ?dvardsa na dva y ee prymenenye v kryptohrafyy. Visnyk natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KHPI», №44, st. 90-96.*

27. *Skuratovskii, R. V. & Skruncovich, U. V. Twisted Edwards curve and its group of points over finite field* F_p. *Akademgorodok, Novosibirsk, Russia. Conference. Graphs and Groups, Spectra and Symmetries. http://math.nsc.ru/conference/g2/g2s2/exptext/SkruncovichSkuratovskii-abstract-G2S2.pdf*

28. *Skuratovskii, R. V. & Movchan P. Normalizacia skruchennoi krivoi Edwardsa i doslidgennia yy vlastuvostei nad* F_p. *Zbirnuk prac 14 naukovo praktichoy conferencii FTI NRUU "KPI"2016, Tom 2, p. 102-104.*

29. *Skuratovskii, R. V. Constructing of finite field normal basis in deterministic polynomial time(in ukraine). Bulletin of Kiev national university of Tarasa Shevchenka. 2011, P. 49-54.*

30. *Paul, S., Barreto, L. M. & Naehrig M. Pairing-Friendly Elliptic Curves of Prime Order. International Workshop on Selected Areas in Cryptography SAC, 2005, pp. 319–331.*

УДК 539.3

Г. О. Фесенко
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПІВНЕСКІНЧЕННОГО ШАРУ

Розв'язано контактну задачу про втискування з ексцентриситетом кругового штампа у півнескінченний пружний шар, що спирається на абсолютно жорстку основу без тертя. На бічній та нижній гранях півшару задано умови гладкого контакту. Під час розв'язання використано вертикальне переміщення точок шару, під дією зосередженої на верхній межі шару сили. Отримано сингулярне інтегральне рівняння відносно невідомого контактного напруження. Розв'язок рівняння розшукується у вигляді розвинення за системою косинусів у силу парності контактного напруження відносно полярного кута. В подальшому проведено ортогоналізацію за системою косинусів, що приводить до системи парних інтегральних рівнянь. Рівняння розв'язано методом ортогональних многочленів і зведено до нескінченної двовимірної системи алгебраїчних рівнянь, яку розв'язано методом редукції. Отримані осадка штампа і момент сили, що забезпечує поступальний рух штампа, із умов рівноваги.

MSC: 74G05.

Ключові слова: контактна задача, круговий штамп, півнескінченний шар, сингулярне інтегральне рівняння, метод редукції .

DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134624.

Вступ. Дослідження контактної взаємодії твердих тіл розпочинається з класичних робіт Ж. Буссинеска та Г. Герца [1, 2]. Г. Герцем було створено достатньо загальну теорію контакта пружних тіл з гладкою поверхнею. Ж. Буссинеском фактично було побудовано розв'язок контактної задачі про втискування кругового штампа у пружний півпростір. Велику кількість робіт присвячено розв'язку просторових контактних задач для пружного шару. У цьому класі більш складних задач не знайдено точних розв'язків, але запропоновано ефективні методи наближених. М. Н. Лебєдєвим та Я. С. Уфляндом у [3] розв'язано задачу про втискування кругового штампа у пружний шар. Розв'язок побудовано за допомогою інтегрального перетворення Ханкеля та зведено до рівняння Фредгольма з симетричним ядром. У роботі І. І. Воровича та Ю. А. Устинова [4] було запропоновано асимптотичний розв'язок цієї задачі для товстого шару. Пізніше В. М. Александровим та І. І. Воровичем було розроблено асимптотичні методи, що дозволяють знаходити розв'язки як для товстого, так і для тонкого шару [5].

Втискування штампа невісьовою силою у пружний шар розглянуто у роботах К. Є. Єгорова [6], А. Л. Флоренса [7]. Більш проста задача про кручення шару круговим штампом досліджена Я. С. Уфляндом [8], А. Л. Флоренсом [7], Д. В. Грилицьким [9]. У роботах Р. Лоу [10], К. Срівастави та В. Саксени [11] розглянуто вісьосиметричні контактні задачі для пружного шару, що стискається парою штампів кругової або кільцевої форми. Г. Я. Поповим у роботі [12] наближено розв'язано контактну задачу з круговою областю контакту у випадку пружної основи загального типу. К. Є. Єгоровим розглянуто контактну задачу

Надійшла 30.10.2017

для пружного шару за дії невісьової вертикальної сили на круговий штамп, де розв'язок задачі розділено на дві частини відповідно для центральної сили та пари сил з моментом. Задачу зведено до системи парних інтегральних рівнянь Фредгольма [6]. У роботі [13] розглянуто невісьосиметричну контактну задачу для кругового штампа на пружній основі. Інтегральне рівняння завдяки ортогоналізації за системою косинусів зведено до окремих інтегральних рівнянь відносно контактних напружень під штампом, що розв'язані методом ортогональних многочленів [14] та зведені до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що розв'язані методом редукції. Проте відмітимо, що проблеми збіжності двовимірних нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь практично не досліджувались. Основний внесок тут зроблено Г. Я. Поповим у роботі [15].

Дослідження робіт, присвячених контактним задачам теорії пружності для шару за дії кругового штампа, показало, що залишається відкритою проблема дослідження напруженого стану півнескінченного шару за дії кругового штампу з ексцентриситетом. Не встановлено момент сили, що забезпечує поступальний рух штампа.

Основні результати

1. Постановка задачі та її розв'язання. У півнескінченну пружну плиту (модуль зсуву G, коефіцієнт Пуассона μ) скінченної товщини h, що спирається на абсолютно жорстку основу без тертя, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями $0 < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 < z < h$ під дією зовнішньої сили P на грані $z = h$ втискується абсолютно жорсткий круговий у плані штамп (рис.) (A — радіус штампа, B — відстань від початку координат до центра штампа), причому лінія діючої на штамп сили не збігається з його віссю. Приймаємо також, що тертя між штампом та плитою відсутнє. По торцю півшару і на нижній грані задано умови гладкого контакту. Потрібно знайти такий момент M прикладення зосередженої сили P , що штамп буде рухатися поступально на невідому величину осадки δ.

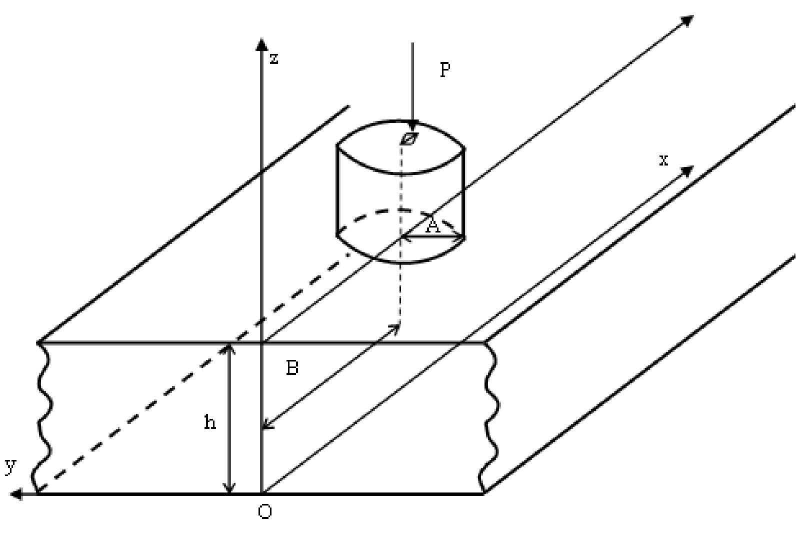


Рис. Постановка задачі

При розв'язуванні використовується формула вертикального переміщення точок півшару під дією сили P, що діє у довільній точці (a, b) грані $z = h$, аналітичне подання якого отримано у роботі [16]

$$w_0(x,y,z) = -\frac{\mu_1^{-1}}{4\pi G}\int\limits_0^\infty J_0^*(t,x,y,a,b)F(ht)dt, \quad F(ht)\frac{ch(2ht)-1}{sh(2ht)+2ht}, \quad \mu_1 = (2-2\mu)^{-1},$$

$$J_0^*(t,x,y,a,b) = J_0\left(t\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right) + J_0\left(t\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}\right), \qquad (1)$$

$J_0(t)$ — функція Бесселя.

Виділимо асимптотику підінтегральної функції виходячи з того, що

$$\lim_{t\to 0} J_0(t) = 1, \quad \lim_{t\to\infty} F(t) = 1,$$

за наступним правилом: $F(t) - 1 + 1 = R(t) + 1$, де

$$R(ht) = \frac{2e^{-4ht} - 2e^{-2ht} - 4hte^{-2ht}}{1 + 4hte^{-2ht} - e^{-4ht}} = \frac{e^{-2ht} - 2ht - 1}{sh(2ht)} + 2ht. \qquad (2)$$

Для того щоб перейти до кругового штампа $0 < r < A$, $-\pi < \phi < \pi$, виконаємо заміну до полярної системи координат

$$x = B + r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad a = B + \rho\cos\psi, \quad b = \rho\sin\psi, \qquad (3)$$

де B — відстань від початку координат до центра штампа.

Тоді замість функції $J_0^*(t,x,y,a,b)$ у (1) отримаємо

$$J_0^*(t,r,\rho,\phi,\psi,B) = J_0\left(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\phi-\psi)}\right) +$$
$$+J_0\left(t\sqrt{4B^2+4B(r\cos\phi+\rho\cos\psi)+r^2+\rho^2+2r\rho\cos(\phi-\psi)}\right).$$

Введемо наступне позначення

$$W(r,\rho,\phi,\psi) = \int\limits_0^\infty J_0\left(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\phi-\psi)}\right)(1+R(ht))dt,$$
$$W(r,\rho,\phi,\psi)_B = \int\limits_0^\infty J_0(t\sqrt{4B^2+4B(r\cos\phi+\rho\cos\psi)+r^2+\rho^2+2r\rho\cos(\phi-\psi)})\cdot$$
$$\cdot(1+R(ht))dt.$$

Тоді переміщення під дією розподіленого по круговому штампу навантаження отримаємо у вигляді

$$w_p(r,\phi) = -\frac{\mu_1^{-1}}{4\pi G}\int\limits_0^A\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[W(r,\rho,\phi,\psi) + W(r,\rho,\phi,\psi)_B\right]p(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi, \qquad (4)$$

де $p(\rho,\psi)$ — інтенсивність діючого навантаження. Навантаження задамо таким чином, що функція переміщень буде являти собою площину, причому паралельну осі y

$$Ax + Cz + D = 0 \Rrightarrow z = -\frac{A}{C}x - \frac{D}{C}. \qquad (5)$$

З іншого боку, якщо δ — відстань, на яку втискується штамп, ω — кут повороту штампа навколо осі Oy, то, розглянувши локальную систему координат, отримаємо

$$w = -\delta - x_* \sin\omega, \quad x = x_* + B \Rightarrow x_* = x - B,$$

а значить

$$w = -\delta - (x - B)\sin\omega = -x\sin\omega - (\delta - B\sin\omega).$$

Тоді із (5), прирівнявши коефіцієнти

$$\frac{A}{C} = \sin\omega, \quad \frac{D}{C} = \delta - B\sin\omega, \quad z = -\delta - (x - B)\sin\omega,$$

запишемо рівняння переміщень точок штампа

$$w_0(r,\phi) = -\delta + (B + r\cos\phi - B)\sin\omega = -\delta - r\cos\phi\sin\omega. \tag{6}$$

Переміщення верхньої межі шару (4) покладемо рівними переміщенням штампа (6) під дією на нього сили постійної інтенсивності. У результаті отримаємо інтегральне рівняння відносно невідомого контактного напруження.

Запишемо у загальному вигляді інтегральне рівняння

$$w_p(r,\phi) = w_0(r,\phi), \quad 0 < r < A, \quad -\pi < \phi < \pi. \tag{7}$$

Зробимо наступну заміну змінних

$$\begin{gathered} r = r'A, \quad r' \in [0,1] \quad \rho = \rho' A, \quad \rho' \in [0,1], \quad d\rho = A d\rho', \\ t = t'/A, \quad dt = dt'/A, \quad a = h/A. \end{gathered} \tag{8}$$

Отримаємо для (4) вираз

$$w_p(r'A,\phi) = -\frac{\mu_1^{-1}A}{4\pi G}\int\limits_0^1\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^{\infty} J_0^*(t',r',\rho',\phi,\psi,B/A)(1 + R(t'a))p(\rho' A,\psi)\rho' d\rho' d\psi dt'.$$

У подальшому штрихи не пишимо. З урахуванням вигляду J_0^* можна записати так:

$$w_p(r,\phi) = -\frac{\mu_1^{-1}A}{4\pi G}\int\limits_0^1\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[W(r,\rho,\phi,\psi) + W_{B/A}(r,\rho,\phi,\psi)\right]p(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi.$$

Тоді інтегральне рівняння (7) запишемо у формі

$$\begin{gathered} -\tfrac{\mu_1^{-1}A}{4\pi G}\int\limits_0^1\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[W(r,\rho,\phi,\psi) + W_{B/A}(r,\rho,\phi,\psi)\right]p(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi = \\ = -\delta - rA\cos\phi\sin\omega, \quad 0 < r < A, \quad -\pi < \phi < \pi. \end{gathered} \tag{9}$$

Враховуючи те, що силу прикладено симетрично відносно штампа, площина zOy є площиною симетрії, та тому контактне напруження буде парним відносно полярного кута та можна задавати його у вигляді розвинення у ряд по системі косинусів

$$p(\rho,\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(\rho)\cos\psi. \tag{10}$$

Підставимо (10) у рівняння (9)

$$\begin{gathered}-\tfrac{\mu_1^{-1}A}{4\pi G}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\rho p_n(\rho)\int_{-\pi}^{\pi}\left[W(r,\rho,\phi,\psi)+W_{B/A}(r,\rho,\phi,\psi)\right]\cos n\psi d\rho d\psi=\\ =\sum_{n=0}^{\infty}f_n\cos n\phi,\quad 0<r<A,\quad -\pi<\phi<\pi.\end{gathered} \tag{11}$$

Тут праву частину також розкладено у ряд за системою косинусів, причому, враховуючи вигляд правої частини у (9), виконуються рівності

$$f_0(r)=-\delta,\quad f_1=-rA\sin\omega.$$

Введемо позначення

$$I_1=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\rho p_n(\rho)\int_{-\pi}^{\pi}W(r,\rho,\phi,\psi)cosn\psi d\rho d\psi=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\rho p_n(\rho)\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}J_0\left(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\phi-\psi)}\right)(1+R(ht))\cos n\psi d\rho d\psi dt. \tag{12}$$

$$I_2=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\rho p_n(\rho)\int_{-\pi}^{\pi}W_{B/A}(r,\rho,\phi,\psi)\cos n\psi d\rho d\psi. \tag{13}$$

Тоді інтегральне рівняння (11) приймає вигляд

$$-\frac{\mu_1^{-1}A}{4\pi G}\left[I_1+I_2\right]=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(r)\cos n\phi. \tag{14}$$

Розглянемо у співвідношенні I_1, що визначено формулой (12), інтеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi}J_0\left(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\phi-\psi)}\right)p(\rho,\psi)d\psi=\int_{-\pi}^{0}+\int_0^{\pi}(J_0\cdot p(\rho,\psi))d\psi,$$

де після виконання у другому інтегралі заміни $\psi'=-\psi$ отримаємо

$$\int_0^{\pi}\left[J_0\left(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\phi-\psi)}\right)+J_0\left(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\phi+\psi)}\right)\right]p(\rho,\psi)d\psi.$$

Після застосування теореми додавання для функції Бесселя (8.531 [23]) маємо

$$\int_0^{\pi}\left[2J_0(tr)J_0(t\rho)+4\sum_{k=1}^{\infty}J_k(tr)J_k(t\rho)\cos k\phi\cos k\psi\right]p(\rho,\psi)d\psi. \tag{15}$$

Підставимо отриманий вираз (15) у вихідний інтеграл I_1 (12)

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_0^{\pi} \cos n\psi \int_0^{\infty} [2J_0(tr)J_0(t\rho)+$$

$$+4\sum_{k=1}^{\infty} J_k(tr)J_k(t\rho)\cos k\phi \cos k\psi](1+R(ht))d\rho d\psi dt$$

та обчислимо інтеграли по ψ, враховуючи формулу (858.517 [27]).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho p_n(\rho) \int_0^{\pi} \cos n\psi \left[2J_0(tr)J_0(t\rho) + 4\sum_{k=1}^{\infty} J_k(tr)J_k(t\rho)\cos k\phi \cos k\psi\right] d\psi =$$

$$= 2\pi p_0(\rho)J_0(tr)J_0(t\rho) + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} p_n(\rho)J_n(tr)J_n(t\rho)\cos n\phi =$$

$$= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho)J_n(tr)J_n(t\rho)\cos n\phi.$$

Запишемо остаточний вигляд перетвореного інтеграла з рівняння (14)

$$I_1 = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_0^{\infty} J_n(tr)J_n(t\rho)(1+R(ht))d\rho dt \cdot \cos n\phi. \tag{16}$$

Розглянемо інтеграл I_2, визначений у (13)

$$I_1 = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_{-\pi}^{\pi} W_{B/A}(r,\rho,\phi,\psi)\cos n\psi d\rho d\psi, \tag{17}$$

де

$$W_{B/A}(r,\rho,\phi,\psi) = \int_0^{\infty} J_0\left(t \cdot R(r,\rho,\phi,\psi)\right)(1+R(ht))dt, \tag{18}$$

$$R(r,\rho,\phi,\psi) =$$
$$= \sqrt{4(B/A)^2 + 4(B/A)(r\cos /phi + \rho\cos\psi) + r^2 + \rho^2 + 2r\rho\cos(\phi+\psi)}. \tag{19}$$

Розглянемо інтеграл (18)

$$W_{B/A}(r,\rho,\phi,\psi) = \int_0^{\infty} J_0\left(t \cdot R(r,\rho,\phi,\psi)\right) 1 + R(ht))dt =$$
$$= \frac{1}{R(r,\rho,\phi,\psi)} + \int_0^{\infty} J_0\left(t \cdot R(r,\rho,\phi,\psi)\right) R(ht)dt.$$

Тут було використано формулу (6.511[23]), у другому інтегралі підінтегральна функція $R(ht)$, що визначена у (2), експоненціально спадає. Підставимо інтегральне подання функції Бесселя [14]

$$J_0\left(t\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}\right) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{pi/2} \cos\left[t(x+a)\cos\xi\right]\cos\left[t(y-b)\sin\xi\right]d\xi$$

в останній інтеграл, враховуючи заміну змінних (13), (8)

$$\begin{gathered} W_{B/A} = \frac{1}{R(r,\rho,\phi,\psi)} + \\ +\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty R(ta)\int\limits_0^{\pi/2} \cos\left[t(2B/A + r\cos\phi + \rho\cos\psi)\cos\xi\right]\times \\ \times\cos\left[t(r\sin\phi - \rho\sin\psi)\sin\xi\right]\,d\xi\,dt. \end{gathered} \tag{20}$$

Після застосування формул (401.03., 401.04. [27]), знайдемо

$$\cos[t_c(x+a)]\cos[t_s(y-b)] =$$

$$= \cos(t_c x)\cos(t_c a)\cos(t_s y)\cos(t_s b) + \cos(t_c x)\cos(t_c a)\sin(t_s y)\sin(t_s b) -$$

$$-\sin(t_c x)\sin(t_c a)\cos(t_s y)\cos(t_s b) - \sin(t_c x)\sin(t_c a)\sin(t_s y)\sin(t_s b).$$

Тут використані позначення

$$t\cos\xi = t_c, \quad t\sin\xi = t_s.$$

Підставимо отриманий вираз (20) у I_2, що визначено у (17),

$$\begin{gathered} I_2 = A\int\limits_0^1 \rho\sum_{n=0}^\infty p_n(\rho)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos n\psi d\rho d\psi}{R(r,\rho,\phi,\psi)} + \\ +\frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^\infty\int\limits_0^1 \rho p_n(\rho)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^\infty R(ta)\cos n\psi\int\limits_0^{\pi/2} F^* d\rho d\psi dt d\xi, \end{gathered} \tag{21}$$

де

$$F^* = \cos\left[t_c(\tfrac{B}{A} + r\cos\phi)\right]\cos\left[t_c(\tfrac{B}{A} + \rho\cos\psi)\right]\cos\left[t_s(r\sin\phi)\right]\cos\left[t_s(\rho\sin\psi)\right] +$$

$$+\cos\left[t_c(\tfrac{B}{A} + r\cos\phi)\right]\cos\left[t_c(\tfrac{B}{A} + \rho\cos\psi)\right]\sin\left[t_s(r\sin\phi)\right]\sin\left[t_s(\rho\sin\psi)\right] -$$

$$-\sin\left[t_c(\tfrac{B}{A} + r\cos\phi)\right]\sin\left[t_c(\tfrac{B}{A} + \rho\cos\psi)\right]\cos\left[t_s(r\sin\phi)\right]\cos\left[t_s(\rho\sin\psi)\right] -$$

$$-\sin\left[t_c(\tfrac{B}{A} + r\cos\phi)\right]\sin\left[t_c(\tfrac{B}{A} + \rho\cos\psi)\right]\sin\left[t_s(r\sin\phi)\right]\sin\left[t_s(\rho\sin\psi)\right].$$

В інтегралі (21) використаємо парність підінтегральної функції F^* за змінною ξ та зробимо в отриманому інтегралі заміну

$$\sin\xi = \tau, \quad \cos\xi = \sqrt{1-\tau^2}, \quad d\xi = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}.$$

Застосуємо квадратурну формулу Гаусса [36] до отриманого інтеграла

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} F^* d\xi = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} F^*(\tau) fracd\tau\sqrt{1-\tau^2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{N}\sum_{-1}^{1} F^*(\tau_i^N),$$

$\tau_i = \cos\frac{2i-1}{2N}\pi, \quad i=\overline{1,N}$ – нулі многочлена Чебишева першого роду. Тоді інтеграл (21) перетвориться до вигляду

$$I_2 = A\int\limits_0^1 \rho \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(\rho) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\psi d\rho d\psi}{R(r,\rho,\phi,\psi)} +$$
$$+A\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^1 \rho p_n(\rho)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^{\infty} R(ta)\cos n\psi \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} F^*(\tau_i^N) d\rho d\psi dt. \tag{22}$$

Змінимо порядок інтегрування та розглянемо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} F^*(\tau_i^N)\cos n\psi d\psi =$$

$$= \cos\left[t_c(\tfrac{B}{A} + r\cos\phi)\right]\cos\left[t_s(r\sin\phi)\right]\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos n\psi\cos\left[t_c(\tfrac{B}{A}+\rho\cos\psi)\right]\cos\left[t_s(\rho\sin\psi)\right]d\psi+$$

$$+\cos\left[t_c(\tfrac{B}{A} + r\cos\phi)\right]\sin\left[t_s(r\sin\phi)\right]\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos n\psi\cos\left[t_c(\tfrac{B}{A}+\rho\cos\psi)\right]\sin\left[t_s(\rho\sin\psi)\right]d\psi-$$

$$-\sin\left[t_c(\tfrac{B}{A} + r\cos\phi)\right]\cos\left[t_s(r\sin\phi)\right]\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos n\psi\sin\left[t_c(\tfrac{B}{A}+\rho\cos\psi)\right]\cos\left[t_s(\rho\sin\psi)\right]d\psi-$$

$$-\sin\left[t_c(\tfrac{B}{A} + r\cos\phi)\right]\sin\left[t_s(r\sin\phi)\right]\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos n\psi\sin\left[t_c(\tfrac{B}{A}+\rho\cos\psi)\right]\sin\left[t_s(\rho\sin\psi)\right]d\psi.$$

Видно, що у другому та четвертому інтегралах підінтегральні функції непарні, а значить, ці інтеграли дорівнюють нулю. У першому та третьому – парні, значить можемо записати

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} F^*(\tau_i^N)\cos n\psi d\psi =$$

$$= 2\cos\left[t_c(\tfrac{B}{A}+r\cos\phi)\right]\cos\left[t_s(r\sin\phi)\right]\int\limits_0^{\pi}\cos n\psi\cos\left[t_c(\tfrac{B}{A}+\rho\cos\psi)\right]\cos\left[t_s(\rho\sin\psi)\right]d\psi-$$

$$-2\sin\left[t_c(\tfrac{B}{A}+r\cos\phi)\right]\cos\left[t_s(r\sin\phi)\right]\int\limits_0^{\pi}\cos n\psi\sin\left[t_c(\tfrac{B}{A}+\rho\cos\psi)\right]\cos\left[t_s(\rho\sin\psi)\right]d\psi.$$

Таким чином, для другого доданка (22) з урахуванням заміни $\sin\xi = \tau$ маємо

$$2A\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \rho p_n(\rho)\int_0^{\infty} R(ta)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F^{**}(\tau_i^N)d\rho dt, \tag{23}$$

де

$$F^{**}(\tau_i^N) = \cos\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}(\tfrac{B}{A}+r\cos\phi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\phi\right]\times$$

$$\times\int\limits_0^{\pi}\cos n\psi\cos\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}(\tfrac{B}{A}+\rho\cos\psi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\psi\right]d\psi-$$

$$-\sin\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}(\tfrac{B}{A}+r\cos\phi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\phi\right]\times$$

$$\times\int\limits_0^{\pi}\cos n\psi\sin\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}(\tfrac{B}{A}+\rho\cos\psi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\psi\right]d\psi.$$

Використаємо формули (401.03., 401.01. [27]). Введемо позначення

$$\begin{aligned} I_{ni}^{(1)}(\rho) &= \int\limits_0^{\pi}\cos n\psi\cos\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}(\tfrac{B}{A}+\rho\cos\psi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\psi\right]d\psi,\\ I_{ni}^{(2)}(\rho) &= \int\limits_0^{\pi}\cos n\psi\sin\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}(\tfrac{B}{A}+\rho\cos\psi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\psi\right]d\psi. \end{aligned} \tag{24}$$

Після виконання перетворень, отримаємо вираз для доданка (23)

$$\begin{gathered} 2A\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^1\rho p_n(\rho)\int\limits_0^{\infty}R(ta)\tfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\{\cos\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}(2\tfrac{B}{A}+r\cos\phi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\phi\right]\cdot I_{ni}^{(1)}(\rho)-\\ -\sin\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}(2\tfrac{B}{A}+r\cos\phi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\phi\right]\cdot I_{ni}^{(2)}(\rho)\}d\rho dt. \end{gathered} \tag{25}$$

Запишемо остаточний вираз для інтеграла I_2

$$I_2 = A\sum_0^1 \rho \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho) \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{\cos n\psi d\rho d\psi}{R(r,\rho,\phi,\psi)} +$$

$$+2A\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \rho p_n(\rho)\int_0^{\infty} R(ta)\tfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\{\cos\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}(2\tfrac{B}{A}+r\cos\phi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\phi\right]\cdot I_{ni}^{(1)}(\rho)-$$

$$-\sin\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}(2\tfrac{B}{A}+r\cos\phi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\phi\right]\cdot I_{ni}^{(2)}(\rho)\}d\rho dt. \tag{26}$$

У результаті проведених перетворень інтегральне рівняння (14), враховуючи (16), запишемо у формі

$$-\tfrac{\mu_1^{-1}A}{4\pi G}[2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \rho p_n(\rho)\int_0^{\infty} J_n(tr)J_n(t\rho)(1+R(ta))d\rho dt\cdot\cos n\phi +$$

$$+\int_0^1 \rho\sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho)\int_{-\pi}^{\pi}\tfrac{\cos n\psi d\rho d\psi}{R(r,\rho,\phi,\psi)} +$$

$$+2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \rho p_n(\rho)\int_0^{\infty} R(ta)\tfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\{\cos\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}(2\tfrac{B}{A}+r\cos\phi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\phi\right]\cdot I_{ni}^{(1)}(\rho)-$$

$$-\sin\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}(2\tfrac{B}{A}+r\cos\phi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\phi\right]\cdot I_{ni}^{(2)}(\rho)\}d\rho dt] =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)\cos n\phi, \tag{27}$$

де функцію $R(r,\rho,\phi,\psi)$ визначено у (19), $R(ta)$ у (2) з заміною h на a, $I_{ni}^{(i)}(p)$, $i = 0, 1$ – у співвідношеннях (24).

Домножимо рівняння (27) на $\cos k\phi$, $k = 0, 1, 2, ...$ та проінтегруємо на проміжку $\phi \in [0, \pi]$ з використанням ортогональності системи косинусів. Для першого доданка

$$I_1 = 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \rho p_n(\rho)\int_0^{\infty} J_n(tr)J_n(t\rho)(1+R(ta))d\rho dt\cdot\cos n\phi$$

отримаємо

$$I_1 = \pi^2\delta_k^*\int_0^1 \rho p_k(\rho)\int_0^{\infty} J_k(tr)J_k(t\rho)(1+R(ta))d\rho dt,$$

$$k = 0, 1, 2, ..., \quad \delta_k^* = \begin{cases} 2, k = 0 \\ 1, k \leqslant 1 \end{cases} \tag{28}$$

Для другого доданка рівняння (27) будемо мати

$$I_2 = \int\limits_0^1 \rho \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos n\psi \cdot \cos k\phi d\rho d\psi}{R(r,\rho,\phi,\psi)} +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^1 \rho p_n(\rho) \int\limits_0^{\infty} R(ta) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_{nk}(R,\rho) d\rho dt, \tag{29}$$

де

$$f_{nk}(R,\rho) = \cos\left[2\frac{B}{A}t\sqrt{1-\tau_i^2}\right]\left\{I_{ni}^{(1)}(\rho)\cdot I_{ki}^{(1)}(r) - I_{ni}^{(2)}(\rho)\cdot I_{ki}^{(2)}(r)\right\} -$$
$$- \sin\left[2\frac{B}{A}t\sqrt{1-\tau_i^2}\right]\left\{I_{ni}^{(1)}(\rho)\cdot I_{ki}^{(2)}(r) - I_{ni}^{(2)}(\rho)\cdot I_{ki}^{(2)}(r)\right\}.$$

Якщо ввести позначення

$$F_{nk}^*(r,\rho) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \rho \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos n\psi \cdot \cos k\phi d\rho d\psi d\phi}{R(r,\rho,\phi,\psi)} +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^1 \rho p_n(\rho) \int\limits_0^{\infty} R(ta) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_{nk}(R,\rho) d\rho dt, \tag{30}$$

інтегральне рівняння (27) після ортогоналізації за системою косинусів, враховуючи (28), (29), запишеться у вигляді

$$-\frac{\mu_1^{-1}A}{2\pi G}\left[\pi^2\delta_k^* \int\limits_0^1 \rho p_k(\rho) \int\limits_0^{\infty} J_k(tr)J_k(t\rho)(1+R(ta))d\rho dt + F_{nk}^*(r,\rho)\right] = f_k(r),$$
$$k = 0,1,2,... \tag{31}$$

Для правої частини будемо мати

$$f_k(r) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) \int\limits_0^{\pi} \cos k\phi \cos n\phi d\phi =$$

$$= f_0(r)\int\limits_0^{\pi} \cos k\phi d\phi + f_1(r)\int\limits_0^{\pi} \cos k\phi \cos\phi d\phi = \pi\delta_{k0}f_0(r) + \frac{\pi}{2}\delta_{k1}f_1(r).$$

Використаємо результат роботи [70]

$$W_{\mu,\gamma}^{\nu}(x,y) = \int\limits_0^{\infty} t^{\nu} J_{\mu}(tx)J_{\gamma}(ty)dt, \quad Re\nu < 1, \quad Re(\nu+\mu+\gamma) > -1,$$

де у нашому випадку інтеграл Вебера—Шафхейтліна приймає вигляд

$$W_{k,k}(r,\rho) = \int\limits_0^{\infty} J_k(tr)J_k(t\rho)dt, \quad \nu = 0, \quad \mu = \gamma = k$$
$$2\sigma_+ = 1 - \nu - (\gamma - \mu) = 1, \quad 2\sigma_- = 1 - \nu + (\gamma - \mu) = 1 \Rightarrow$$
$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}, \quad 2\sigma_- = 1 + \nu + \gamma + \mu = 1 + 2k \Rightarrow \sigma = \frac{1}{2} + k.$$

Виходячи із спектрального співвідношення [70]

$$\int_0^\infty \frac{W_{k,k}(x,y)}{\sqrt{1-y^2}} P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2y^2)Y^{k+1}dy = \sigma_{mk}x^k P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2x^2), \tag{32}$$

де $\sigma_{mk} = \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(m+k+\frac{1}{2})}{2m!\Gamma(m+k+1)}$, $P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2y^2)$ – многочлени Якобі, розв'язок рівняння (31) будемо шукати у вигляді

$$p_k(\rho) = \frac{\rho^k}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2). \tag{33}$$

Підставимо розв'язок (33) у перший інтеграл рівняння (31) та використаємо співвідношення (32)

$$\int_0^1 \frac{\rho^{k+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) W_{k,k})(r,\rho)d\rho =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{km} \int_0^1 \frac{W_{k,k})(r,\rho)}{\sqrt{1-\rho^2}} P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)\rho^{k+1}d\rho = \sum_{m=0}^{\infty} p_{km}\sigma_{km} r^k P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2).$$

Після підстановки розв'язку до другого інтеграла рівняння (31) отримаємо

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{km} \int_0^1 \int_0^\infty \frac{\rho^{k+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} R(ta) J_k(tr) J_k(t\rho) P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) d\rho dt.$$

У залишених доданках будемо підставляти розвинення

$$p_n(\rho) = \frac{\rho^n}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} P_l^{n,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2).$$

Після підстановки розв'язку (33) рівняння (31) буде мати вигляд

$$-\frac{\mu_1^{-1}A}{2\pi G}[\pi^2\delta_k^*\{\sum_{m=0}^{\infty} p_{km}\sigma_{mk} r^k P_l^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty} p_{km} \int_0^1 \int_0^\infty \frac{\rho^{k+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} J_k(tr) J_k(t\rho) P_l^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) d\rho dt\} + F_{nkl}^*(r,\rho)] = f_k(r),$$

$$k = 0, 1, 2, ... \tag{34}$$

де

$$F_{nkl}^*(r,\rho) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} P_l^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\psi \cdot \cos k\phi d\rho d\psi d\phi}{R(r,\rho,\phi,\psi)} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} P_l^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) \int_0^\infty R(ta) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_{nk}(r,\rho) d\rho dt.$$

Виконаємо ортогоналізацію за многочленами Якобі. Скористаємося формулою (7.391(1), [23]) з наступною заміною змінних

$$x = 1 - 2y^2, \quad dx = -4ydy, \quad x = -1 \to y = 1, \quad x = 1 \to y = 0.$$

Врахуємо, що $\beta = -\frac{1}{2}$, $\alpha = k$. Тоді отримаємо формулу ортогональності

$$\int_0^1 \frac{P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) P_j^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-\rho^2}} y^{2k+1} dy = \sigma_{jk}^* \delta_{jm}, \tag{35}$$

де $\sigma_{jk}^* = \dfrac{\Gamma(j+\frac{1}{2})\Gamma(k+j+1)}{2j!\Gamma(m+k+\frac{1}{2})(k+2j+\frac{1}{2})}$, δ_{jm} — символ Кронекера.

Виходячи із формули (35) проінтегруємо за змінною r на проміжку $[0,1]$ рівняння (34) з вагою $r^{k+1}(1-r^2)^{-\frac{1}{2}} P_j^{k,-\frac{1}{2}}(1-2r^2)$

$$\int_0^1 \frac{P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) P_j^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-\rho^2}} r^{2k+1} dr = \sigma_{jk}^* \delta_{mj};$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{km} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\infty} R(ta) J_k J_k(t\rho) \frac{\rho^{n+1} P_m^{n,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{\rho^{n+1} P_j^{n,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-r^2}} d\rho dr dt = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} A_{mj}^{(k)};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} \int_0^1 \frac{\rho^{n+1} P_l^{n,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^1 \frac{\rho^{n+1} P_j^{n,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-r^2}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\psi \cdot \cos k\phi d\rho d\psi d\phi}{R(r,\rho,\phi,\psi)} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} C_{jnl}^{(k)};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} \int_0^1 \frac{\rho^{n+1} P_l^{n,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^1 \frac{\rho^{n+1} P_j^{n,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-r^2}} \int_0^{\infty} R(ta) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_{nk}(r,\rho) d\rho dt = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} B_{jnl}^{(k)}.$$

Для правої частини рівняння запишемо

$$f_{kj} = -\int_0^1 \left[\delta_{k0}\delta + \frac{1}{2}\delta_{k1} r A \sin\omega \right] \frac{\rho^{k+1} P_j^{k,-\frac{1}{2}}(1-2r^2)}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Отримано нескінченну двовимірну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$-\tfrac{\mu_1^{-1}A}{2G}[\pi^2\delta_k^*\left\{\sigma_{kj}\sigma_{kj}^*p_{kj}+\sum_{m=0}^{\infty}p_{km}A_{mj}^{(k)}\right\}+$$
$$+\tfrac{1}{\pi 2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}p_{nl}(C_{jnl}^{(k)}+B_{jnl}^{(k)})]=f_{kj},\quad k,j=\overline{0,\infty}. \tag{36}$$

Регуляризируємо її, привівши до стандартного вигляду нескінченної двовимірної системи [69]

$$x_{kj}-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}t_{kjnl}x_{nl}=f_{kj},\quad k,j=\overline{0,\infty}.$$

Позначимо

$$\Lambda_{kj}=\sigma_{kj}^*\cdot\sigma_{kj}.$$

Перетворимо доданок у (36)

$$\sum_{m=0}^{\infty}p_{km}A_{mj}^{(k)}=\sum_{l=0}^{\infty}p_{kl}A_{lj}^{(k)}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}p_{nl}\delta_{nk}A_{lj}^{(k)}=\sum_{l=0}^{\infty}A_{lj}^{(k)}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{nk}p_{nl}=\sum_{l=0}^{\infty}p_{kl}A_{lj}^{(k)}.$$

Тоді

$$\frac{1}{2}\delta_k\left\{\Lambda_{kj}p_{kj}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}p_{nl}\delta_{nk}A_{lj}^{(k)}\delta_{nk}\right\}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}p_{nl}B_{jnl}^{*(k)}=\frac{2G\mu_1}{A}f_{kj},$$

де $B_{jnl}^{*(k)}=\frac{1}{\pi^2}(C_{jnl}^{(k)}+B_{jnl}^{(k)})$. Запишемо нескінченну систему (36) у вигляді

$$\Lambda_{kj}p_{kj}-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left[-A_{nl}^{(k)}\delta_{nk}-\delta_k^*B_{jnl}^{*(k)}\right]p_{nl}=\delta_k^*\frac{2G\mu_1}{A}f_{kj}, \tag{37}$$

де $\delta_k^*=\begin{cases}1,k=0\\2,k\leqslant 1\end{cases}$. Для запису системи у стандартній формі знайдемо асимптотику Λ_{kj}.

$$\sigma_{kj}=\tfrac{1}{2}j^{-\frac{1}{2}}\left(1+O(\tfrac{1}{j})\right)\tfrac{1}{(j+k)^{\frac{1}{2}}}\left(1+O(\tfrac{1}{j+k})\right),$$

$$\sigma_{kj}^*=\tfrac{1}{2}j^{-\frac{1}{2}}\tfrac{1}{k+2j+\frac{1}{j}}\left(1+O(\tfrac{1}{j})\right)(j+k)^{\frac{1}{2}}\left(1+O(\tfrac{1}{j+k})\right),$$

таким чином,

$$\Lambda_{kj}=\frac{1}{4}\frac{j^{-1}}{k+2j+\frac{1}{2}}\left(1+O(\frac{1}{j})\right)\left(1+O(\frac{1}{j+k})\right).$$

Зробимо заміну

$$p_{kj}^*=\sqrt{\Lambda_{kj}}p_{kj},$$

після чого розділимо обидві частини рівняння (37) на $\sqrt{\Lambda_{kj}}$ та запишемо нескінченну систему у стандартній формі

$$p^*_{kj} - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} T_{nlkj} p^*_{kj} = f^*_{kj}, \tag{38}$$

де

$$T_{nlkj} = -\frac{1}{\sqrt{\Lambda_{kj}}\sqrt{\Lambda_{nl}}}\left[A^{(k)}_{lj}\delta_{nk} + \delta^*_k B^{*(k)}_{jnl}\right], \tag{39}$$

$$\Lambda_{nl} = \left[\frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})}{2l!}\right]^2 \frac{1}{n+2l+\frac{1}{2}}, \quad f^*_{kj} = \delta^*_k \frac{2G\mu_1}{A}\frac{f_{kj}}{\sqrt{\Lambda_{kj}}}, \quad \delta^*_k = \begin{cases} 1, k=0 \\ 2, k \leqslant 1 \end{cases}$$

Будемо вважати, що штамп під дією прикладеної з ексцентриситетом e сили рухається поступально, тобто кут повороту $\omega = 0$. Необхідно визначити ексцентриситет, що забезпечить таке переміщення. Права частина рівняння (38) у цих припущеннях запишеться у формі

$$f^*_{kj} = \delta^*_k \cdot \delta_{k0}\frac{2G\mu_1}{A}\frac{\delta}{\sqrt{\Lambda_{kj}}}\int_0^1 \frac{r^{k+1}P_j^{k,-\frac{1}{2}}(1-2r^2)}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Матриця коефіцієнтів має вигляд (39), де

$$A^k_{lj} = \int_0^1\int_0^1 \tfrac{\rho^{k+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot P_l^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)\cdot \tfrac{r^{k+1}}{\sqrt{1-r^2}}\cdot P_j^{k,-\frac{1}{2}}(1-2r^2)\cdot$$
$$\cdot\int_0^{\infty} R(ta)\cdot J_k(t\rho)\cdot J_k(tr)d\rho dr dt,$$

$$R(ta) = \frac{e^{-2ta}-1-2ta}{sh2ta+2ta}, \quad a = \frac{h}{A},$$

$$B^{*(k)}_{jnl} = \frac{1}{\pi^2}\left[C^k_{jnl} - B^k_{jnl}\right],$$

$$C^k_{jnl} = \tfrac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \tfrac{\rho^{n+1}}{\sqrt{1-\rho^2}}\cdot P_l^{n,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)\cdot\tfrac{r^{k+1}}{\sqrt{1-r^2}}\cdot P_j^{k,-\frac{1}{2}}(1-2r^2)\cdot$$
$$\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} F(\psi,\phi;r,\rho)d\rho dr d\psi d\phi,$$

$$F(\psi,\phi;r,\rho) = \frac{\cos n\psi\cdot\cos k\phi}{\sqrt{4b^2+4b(r\cos\phi+\rho\cos\psi)^2 r^2+\rho^2+2r\rho\cos(\phi+\psi)}},$$

$$B^k_{jnl} = \tfrac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \tfrac{\rho^{n+1}}{\sqrt{1-\rho^2}}\cdot P_l^{n,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)\cdot\tfrac{r^{k+1}}{\sqrt{1-r^2}}\cdot P_j^{k,-\frac{1}{2}}(1-2r^2)\cdot$$
$$\cdot\int_0^{\infty} R(ta)\tfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F^*(t,\tau_i,\rho,r), d\rho dr dt,$$

$$F^*(t,\tau,\rho,r) = \cos[2t\tfrac{B}{A}\sin\tau_i]\cdot\left\{I^{(1)}_{ni}(\rho)\cdot I^{(1)}_{ki}(r) - I^{(2)}_{ni}(\rho)\cdot I^{(2)}_{ki}(r)\right\} -$$
$$-\sin[2t\tfrac{B}{A}\sin\tau_i]\cdot\left\{I^{(1)}_{ni}(\rho)\cdot I^{(2)}_{ki}(r) - I^{(2)}_{ni}(\rho)\cdot I^{(1)}_{ki}(r)\right\},$$

$$I_{ni}^{(1)} = \int_0^\pi \cos(n\psi) \cdot [t \cdot \rho \cdot \cos\tau_i \cdot \sin\psi] \cdot \cos(n\psi) \cdot [t \cdot \rho \cdot \sin\tau_i \cdot \cos\psi]\, d\psi,$$

$$I_{ni}^{(2)} = \int_0^\pi \cos(n\psi) \cdot [t \cdot \rho \cdot \cos\tau_i \cdot \sin\psi] \cdot \sin(n\psi) \cdot [t \cdot \rho \cdot \sin\tau_i \cdot \cos\psi]\, d\psi,$$

$$\tau_i = \frac{2i-1}{2N}\pi; \quad i = \overline{1, N}.$$

Систему (38) розв'язано методом редукції. У задачі є два невідомих параметри: δ — величина поступальної осадки штампа під дією нецентральної вертикальної сили; M – момент сили, що забезпечує необхідне переміщення. Шукані параметри знайдемо з умов рівноваги штампа:

1. Сума проекцій усіх сил, що прикладено до тіла, дорівнює нулю.
2. Сума моментів усіх сил, що прикладено до тіла, дорівнює нулю.

$$\int_0^A \int_0^\pi p(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi = P, \quad \int_0^A \int_0^\pi p(\rho,\psi)\rho^2 sin\psi d\rho d\psi = M.$$

2. Результати розрахунків та їх аналіз. Числові розрахунки проведено для шару з міді ($\mu = 1/3$, $G = 44.7$ *ГПа*) товщиною $h = 1$ в залежності від B – відстані від бічної стінки півшару до центра штампа, радіуса $A = 1$. У таблиці наведено значення осадки штампа і момента сили при відстані від бічної стінки півшару до центра кругового штампа, що дорівнює $B = 1$, $B = 5$, $B = 10$ відповідно, для різних значень N в редукції двовимірної нескінченної системи.

Таблиця

Осадка штампа та момент сили

		δ	M
$B = 1$	$N = 1(4 \times 4)$	0.00310	0.50046
	$N = 2(9 \times 9)$	0.00291	0.51493
$B = 5$	$N = 1(4 \times 4)$	0.00274	0.51527
	$N = 2(9 \times 9)$	0.00235	0.51406
$B = 10$	$N = 1(4 \times 4)$	0.00312	0.51303
	$N = 2(9 \times 9)$	0.00290	0.51301

Висновки.

1. Розв'язано контактну задачу про втискування кругового жорсткого штампа невісьовою силою у пружний півнескінченний шар.
2. Побудовано наближені формули для визначення осадки штампа та момента сили, що забезпечує поступальний рух штампа. Проблему зведено до сингулярного інтегрального рівняння відносно невідомого контактного напруження, що розв'язано методом ортогональних многочленів і зведено до нескінченної двовимірної системи алгебраїчних рівнянь, яку розв'язано методом редукції.

1. **Boussinesq J.** Application des potentiels à l'étude l'équilibre et du mouvement des solides élastiques / J. Boussinesq – Paris: Gauthiers. – Villars. – 1885. – 721 p.
2. **Hertz H.** Über die Berührung fester elastischer Körper / H. Hertz // Jornal für die reine und angewandte Mathematik. – 1882. – 92. – S. 156–171.
3. **Лебедев Н. Н.** Осесимметричная контактная задача для упругого слоя / Н. Н. Лебедев, Я. С. Уфлянд // Прикл. математика и механика. – 1958. – 22, № 3. – С. 320–326.
4. **Ворович И. И.** О давлении штампа на слой конечной толщины / И. И. Ворович, Ю. А. Устинов // Прикл. математика и механика. – 1959. – 22, вып. 3. – С. 445–454.
5. **Александров В. М.** О действии штампа на упругий слой конечной толщины / В. М. Александров, И. И. Ворович // Прикл. математика и механика. – 1960. – 24, вып. 2. – С. 323–330.
6. **Егоров К. Е.** Контактная задача для упругого слоя при действии внецентренной вертикальной силы на круглый жесткий штамп / К. Е. Егоров // Докл. АН СССР. – 1960. – 133, № 4. – С. 781–784.
7. **Уфлянд Я. С.** Кручение упругого слоя / Я. С. Уфлянд // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 129, №5. – С. 997.
8. **Гриліцький Д. В.** Кручення двошарового пружного середовища / Д. В. Гриліцький // Прикл. механіка. – 1961. Т. 7, № 1. – С. 89.
9. **Low R.** On a doubly mixed boundary value problem for an elastic layer / R. Low // Quart. Appl. Math. – 1964. – Vol.22, № 2. – P. 153–160.
10. **Srivastava K.** Axisymmetric problem of an infinite elastic plane in contact with two punches / K. Srivastava, V. Saxena // Ind. J. Pure and Appl. Math. – 1972.– Vol.3, № 6. – P. 1278–1285.
11. **Попов Г. Я.** Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта / Г. Я. Попов // Прикл. математика и механика. – 1962. – Т.26, Вып.1. – С.152–164.
12. **Босаков С. В.** Об одном подходе в контактной задаче для круглого штампа на упругом основании / С. В. Босаков // Прикл. механика – 2008. – Т.44, № 4. – С. 65–71.
13. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов – Москва: Наука,1982. – 344 с.
14. **Попов Г. Я.** Основы теории двумерных бесконечных систем / Г. Я. Попов // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2010. – Т.53, №2.– С.17–27.
15. **Fesenko A. A.** Mixed problems of stationary heat conduction and elasticity theory for a semiinfinite layer / A. A. Fesenko // Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya. – 2014. – Vol. 56; №3. – P. 182–191.

Фесенко А. А.
Контактная задача для полубесконечного слоя

Резюме

В работе рассмотрена контактная задача о вдавливании с эксцентриситетом кругового штампа в полубесконечный упругий слой, опирающийся на абсолютно жесткое основание без трения. На боковой и нижней гранях полуслоя заданы условия гладкого контакта. При решении использовано вертикальное перемещение точек слоя под действием сосредоточенной на верхней границе слоя силы. Получено сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестного контактного напряжения. Решение уравнения разыскивается в виде разложения по системе косинусов в силу четности контактного напряжения относительно полярного угла. В дальнейшем проведена ортогонализация по системе косинусов, что приводит к системе парных интегральных уравнений. Сингулярное интегральное уравнение решено методом ортогональных многочленов и сведено к бесконечной двумерной системе алгебраических уравнений, которая решена методом редукции. Получены осадка штампа и момент силы, который обеспечивает поступательное движение штампа, из условий равновесия.
Ключевые слова: контактная задача, круговой штамп, полубесконечный слой, сингулярное интегральное уравнение, метод редукции .

Fesenko A. A.
The contact problem for an elastic semi-infinite layer

Summary

It is solved the contact problem on the action of a circular stamp with an extra-central power on the elastic semi-infinite layer. On the lateral and lower side of the layer the conditions of the smooth contact are given. The solution of the elastic problem for the semi-infinite layer when concentrated force was situated on the upper side of the layer was used. This problem was solved by the new method which is based on the reduction of Lame's equations system to two together and one independent solved equations relatively to the new unknown functions associated with the displacements. Using of the integral transformations reduces the problem to a one-dimensional vector boundary value problem that to be solved exactly by the apparatus of the matrix differential calculus. The singular integral equation with respect to unknown contact pressure was obtained. The problem was reduced to the singular integral equation which was solved by the method of the orthogonal polynomials and was reduced to the infinite two-dimensional system of algebraic equations. These equations were solved by the reduction method. As a result the eccentricity and precipitation of the stamp that provide its forward movement were determined.
Key words: contact problem, circular stamp, semi-infinite layer, singular integral equation, reduction method.

References

1. Boussinesq, J. (1885). *Application des potentiels à l'étude l'équilibre et du mouvement des solides élastiques.* Paris: Gauthiers. Villars.
2. Hertz, H. (1882). Über die Berührung fester elastischer Körper. *Jornal für die reine und angewandte Mathematik.* 92. pp. 156–171.
3. Lebedev, N. N. & Uflyand, Ya. S. (1958). *Osesimmetrichnaya contactnaya zadacha dlya uprugogo sloya. Prikladnaya matematika i mekhanika.* 22 (3). pp. 320–326.

4. Vorovich, I. I. & Ustinov, U. A. (1959). O davlenii shtampa na sloi konechnoi tolshini. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 22 (3). pp. 445–454.
5. Aleksandrov, V. M. & Vorovich, I. I. (1960). O deystvii shtampa na uprugiy sloi konechnoi tolshini. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 24 (1). pp. 323–330.
6. Egorov, K. E. (1960). Contactnaya zadacha dlya uprugogo sloya pri deistvii vnezentrenoi verticalnoi sili na kruglii jestkii shnamp. *Dokladi AN SSSR.* 133 (4). pp. 781–784.
7. Florence, A. L. (1961). Two contact problems for an elastic layer. *Quart. Journ. Mech. and Appl. Math.* 14 (4). P. 456.
8. Uflyand, Ya. S. (1959). Krucheniye uprugogo sloya. *Dokladi AN SSSR.* 129 (5). P. 997.
9. Grilizkiy, D. V. (1961). Kruchenya dvosharovogo prujnogo seredovisha. *Prikladnaya mekhanika.*7 (1). P. 89.
10. Low, R. (1964). On a doubly mixed boundary value problem for an elastic layer. *Quart. Appl. Math.* 22 (2). pp. 153–160.
11. . Srivastava, K. & Saxena, V. (1972). Axisymmetric problem of an infinite elastic plane in contact with two punches. *Ind. J. Pure and Appl. Math.* 3 (6). pp. 1278–1285.
12. Popov, G. Ya. (1962). Contactnaya zadacha teorii uprugosti pri nalichii krugovoi oblasni contacta. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 26 (1). pp. 152–164.
13. Bosakov, S. V. (2008). Ob odnom podhode v contactnoi zadache dlya kruglogo shtampa na uprugom osnovanii. *Prikladnaya mekhanika.* 44 (4). pp. 65–71.
14. Popov, G. Ya. (1982). *Konzentraziya uprugih napryajenii vozle shtampov, razrezov, tonkih vklyuchenii i podkreplenii.* Moskva: Nauka.
15. Popov, G. Ya. (2010). Osnovi teorii dvumernih beskonechnih system. *Matematychni Metody ta Fizyko–Mekhanighni Polya.* 53 (2). pp. 17–27.
16. Fesenko, A. A. (2014). Mixed problems of stationary heat conduction and elasticity theory for a semiinfinite layer. *Matematychni Metody ta Fizyko–Mekhanighni Polya.* 56 (3). pp. 182–191.

Researches in Mathematics and Mechanics. – 2018. – V. 23, Is. 1(31). – P. 130–137

UDC 517.925.52, 517.929

I. Kiguradze[1], **T. Kiguradze**[2]
[1]A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia
[2]Florida Institute of Technology, Melbourne, FL 32901, USA

OSCILLATION CRITERIA FOR HIGHER ORDER SUBLINEAR DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

The results of this paper were reported at International Workshop "Nonlinear Analysis and Nonautonomous Ordinary Differential Equations", Odesa, Ukraine, June 23-27, 2017.

In the interval $[a,+\infty[$, the sublinear differential equations of order $n \geqslant 2$ are considered. A solution of such equation is called proper if it is not identically equal to zero in any neighbourhood of $+\infty$. The proper solution is called oscillatory if it changes its sign in any neighbourhood of $+\infty$. We say that the equation has property A if every its proper solution for n even is oscillatory, and for n odd either oscillatory or monotone and vanishing at infinity together with their derivatives up to order $n-1$, inclusive.

To investigate oscillatory properties of the above-mentioned equations the sets $M_{sub}([a,+\infty[\times\mathbb{R})$ and $\widetilde{M}_{sub}([a,+\infty[\times\mathbb{R})$ of sublinear with respect to the second argument continuous functions $f : [a,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are introduced (see Definitions 1 and 2).

In the case when $f \in M_{sub}([a,+\infty[\times\mathbb{R})$, for the differential equation

$$u^{(n)}(t) = f\big(t, u(\tau(t))\big)$$

the criterion of the existence of property A and in the case when $f \in \widetilde{M}_{sub}([a,+\infty[\times\mathbb{R})$ the criterion of oscillation of all proper solutions are established.

As an example, the delay differential equation

$$u''(t) = p(t)\big[\ln(1+|u(\tau(t))|)\big]^{\mu}\operatorname{sgn}(u(\tau(t)))$$

is considered, where μ is a positive constant, while $p : [a,+\infty[\to]-\infty,0]$ and $\tau : [a,+\infty[\to [1,+\infty[$ are continuous functions. It is stated that if n is even, or n is odd and

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\tau(t)}{t} < 1,$$

then for all proper solutions of that equation to be oscillatory, it is necessary and sufficient that the equality

$$\int_a^{+\infty}[\ln(\tau(t))]^{\mu}p(t)\,dt = -\infty$$

be satisfied.

MSC: 34C10, 34K11.
Key words: delay differential equation, nonautonomous, sublinear, proper solution, oscillatory solution, property A, oscillation criterion.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134625.

Introduction. The problem on the oscillation of solutions of nonautonomous ordinary differential and functional differential equations has long been attracting the

Received 03.12.2017

attention of mathematicians and is the subject of numerous studies (see, e.g., [1–18] and the references therein). Nevertheless, this problem for some classes of sublinear equations still remains unsolved. The results of the present paper fill up to some extent the existing gap.

On the infinite interval $[a, +\infty[$ consider the differential equation

$$u^{(n)}(t) = f(t, u(\tau(t))), \tag{1}$$

where $n \geqslant 2$, $a > 1$, while $f : [a, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $\tau : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ are continuous functions such that

$$f(t, x)x \leqslant 0 \quad \text{for} \quad t \geqslant a, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$1 < \tau(t) \leqslant t \quad \text{for} \quad t \geqslant a, \qquad \lim_{t\to+\infty} \tau(t) = +\infty. \tag{3}$$

Let $t_0 \geqslant a$. The n-times continuously differentiable function $u : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ is said to be a **solution of equation** (1) **defined on the interval** $[t_0, +\infty[$ if there exists a continuous function $u_0 :]-\infty, t_0]$ such that

$$u^{(n)}(t) = f\big(t, w(u)(\tau(t))\big) \quad \text{for} \quad t \geqslant t_0,$$

where

$$w(u)(t) = \begin{cases} u(t) & \text{for } t > t_0, \\ u_0(t) & \text{for } t \leqslant t_0. \end{cases}$$

A solution u of equation (1) defined on some infinite interval $[t_0, +\infty[\subset [a, +\infty[$ is said to be **proper** if it is not identically equal to zero in any neighborhood of $+\infty$.

A proper solution $u : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ of equation (1) is said to be:

- **oscillatory** if it changes its sign in any neighbourhood of $+\infty$ and **nonoscillatory**, otherwise;
- **Kneser solution** if there exists $t_1 \geqslant t_0$ such that

$$(-1)^{i-1}u^{(i-1)}(t)u(t) \geqslant 0 \quad \text{for} \quad t \geqslant t_1;$$

- **vanishing at infinity** if

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0.$$

Following [16], we say that equation (1) has **property** A if every its proper solution for n even is oscillatory, and for n odd either is oscillatory or is vanishing at infinity Kneser solution.

Besides these definitions generally accepted in the oscillation theory, we apply also the following two definitions.

Definition 1. *The function* $f : [a, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *belongs to the set* $M_{sub}([a, +\infty[\times\mathbb{R})$ *if there exist numbers* $\lambda \in [0, 1[$, $r_0 > 0$, $r \geqslant 1$ *and a nondecreasing function* $\delta :]0, r_0] \to]0, 1]$ *such that*

$$|f(t, y)| \geqslant \delta(|x|)|f(t, x)| \quad \textit{for} \quad t \geqslant a, \quad xy > 0, \quad |x| \leqslant |y| \leqslant r_0,$$

$$|y|^{-\lambda}|f(t, y)| \leqslant r|x|^{-\lambda}|f(t, x)| \quad \textit{for} \quad t \geqslant a, \quad xy > 0, \quad |y| \geqslant |x| \geqslant r_0.$$

Definition 2. *The function* $f : [a,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *belongs to the set* $\widetilde{M}_{sub}([a,+\infty[\times\mathbb{R})$ *if there exist numbers* $\lambda \in]0,1[$ *and* $r \geqslant 1$ *such that*

$$|y|^{-\lambda}|f(t,y)| \leqslant r|x|^{-\lambda}|f(t,x)| \ \text{ for } t \geqslant a, \ \ xy > 0, \ \ |y| \geqslant |x|.$$

The oscillatory criteria below deal with the cases, where

$$f \in M_{sub}([a,+\infty[\times\mathbb{R}), \tag{4}$$

or

$$f \in \widetilde{M}_{sub}([a,+\infty[\times\mathbb{R}). \tag{5}$$

In both cases we have

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f(t,x)}{x} = 0.$$

Consequently, equation (1) is sublinear.

The above-considered classes of sublinear equations contain, for example, the equations

$$u^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{m} p_k(t)\big(1+|u(\tau(t))|\big)^{\mu_k}|u(\tau(t))|^{\lambda_k}\operatorname{sgn}(u(\tau(t))), \tag{6}$$

$$u^{(n)}(t) = p(t)\big[\ln\big(1+|u(\tau(t))|\big)\big]^{\mu}\operatorname{sgn}(u(\tau(t))), \tag{7}$$

$$u^{(n)}(t) = p(t)\exp\big(-|u(\tau(t))|\big)|u(\tau(t))|^{\mu}\operatorname{sgn}(u(\tau(t))), \tag{8}$$

where $p_k : [a,+\infty[\to]-\infty,0]$ $(k=1,\dots,m)$, $p : [a,+\infty[\to]-\infty,0]$ and $\tau : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ are continuous functions, while λ_k, μ_k $(k=1,\dots,m)$ and μ are constants.

Theorem 1. *Let conditions* (2)–(4) *be fulfilled. Then equation* (1) *has property* A *if and only if the equalities*

$$\int_a^{+\infty} t^{n-1}|f(t,x)|\,dt = +\infty, \qquad \int_a^{+\infty} \big|f\big(t,[\tau(t)]^{n-1}x\big)\big|\,dt = +\infty \ \text{ for } \ x \neq 0 \tag{9}$$

hold.

Remark 1. According to condition (4) the equality

$$\int_a^{+\infty} |f(t,[\tau(t)]^{n-1}x)|\,dt = +\infty \ \text{ for } \ x \neq 0 \tag{10}$$

implies the equality

$$\int_a^{+\infty} t^{n-1}|f(t,x)|\,dt = +\infty \ \text{ for } \ |x| \geqslant r_0$$

for some sufficiently large $r_0 > 0$. However, the equality

$$\int_a^{+\infty} t^{n-1}|f(t,x)|\,dt = +\infty \quad \text{for} \quad x \neq 0$$

does not follow from (10). Consequently, in Theorem 1 condition (9) cannot be replaced by condition (10).

As an example, consider the case, where

$$f(t,x) = \begin{cases} g(t)x & \text{for } |x| \leqslant 1, \\ g(t)\big[1+(|x|-1)|g(t)|\exp(t)\big]^{-1} + h(t)(|x|-1)^{\lambda}\operatorname{sgn} x & \text{for } 1<|x|<2, \\ g(t)\big[1+(|x|-1)|g(t)|\exp(t)\big]^{-1} + h(t)\Big(\frac{|x|}{2}\Big)^{\lambda}\operatorname{sgn} x & \text{for } |x| \geqslant 2, \end{cases} \tag{11}$$

where $\lambda \in]0,1[$, and $g : [a,+\infty[\to]-\infty,0]$ and $h : [a,+\infty[\to]-\infty,0]$ are continuous functions. Then condition (9) is equivalent to the condition

$$\int_a^{+\infty} t^{n-1}g(t)\,dt = -\infty, \qquad \int_a^{+\infty} [\tau(t)]^{(n-1)\lambda}h(t)\,dt = -\infty, \tag{12}$$

whereas condition (10) is equivalent to the condition

$$\int_a^{+\infty} [\tau(t)]^{(n-1)\lambda}h(t)\,dt = -\infty.$$

Remark 2. If the function f is of form (11), then, by Theorem 1, equation (1) has property A if and only if equalities (12) hold.

From the above theorem, for equations (6)–(8) we have the following corollaries.

Corollary 1. *Let*

$$\lambda_k > 0, \;\; \mu_k + \lambda_k < 1 \;\; (k = 1, \dots, m)$$

and condition (3) *hold. Then equation* (6) *has property A if and only if*

$$\int_a^{+\infty} \bigg(\sum_{k=1}^{n} \int_a^{+\infty} [\tau(t)]^{(n-1)}(\lambda_k + \mu_k)p_k(t) \bigg)\,dt = -\infty. \tag{13}$$

Corollary 2. *Let $\mu > 0$ and condition* (3) *hold. Then equation* (7) *has property A if and only if*

$$\int_a^{+\infty} [\ln(\tau(t))]^{\mu}p(t)\,dt = -\infty. \tag{14}$$

Corollary 3. *Let $\mu > 0$ and condition* (3) *hold. Then equation* (8) *has property A if and only if*

$$\int\limits_a^{+\infty} [\tau(t)]^{(n-1)\mu} \exp\big(-x[\tau(t)]^{n-1}\big)p(t)\,dt = -\infty \quad \textit{for} \;\; x \neq 0. \tag{15}$$

Remark 3. If

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{[\tau(t)]^{n-1}}{\ln t} > 0$$

and the function

$$p_0(t) = [\tau(t)]^{1-n} \ln\big([\tau(t)]^{(n-1)\mu}|p(t)|\big)$$

is nondecreasing, then (15) is fulfilled if and only if

$$\lim_{t\to+\infty} p_0(t) = +\infty.$$

The following theorem is specific for differential equations with delay and concerns the case where the function τ satisfies the condition

$$1 < \tau(t) < t \;\; \text{for} \;\; t > a, \quad \lim_{t\to+\infty} \tau(t) = +\infty, \quad \limsup_{t\to+\infty} \frac{\tau(t)}{t} < 1. \tag{16}$$

Theorem 2. *Let n be odd and conditions* (2), (5) *and* (16) *be fulfilled. Then every proper solution of equation* (1) *is oscillatory if and only if equality* (10) *holds.*

Unlike the oscillation theorems of Chanturia–Koplatadze [17], Theorems 1 and 2 cover the case, where

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f(t,x)}{|x|^\varepsilon} = 0 \;\; \text{for any} \;\; \varepsilon > 0,$$

or

$$\lim_{|x|\to+\infty} |x|^\gamma f(t,x) = 0 \;\; \text{for any} \;\; \gamma > 0.$$

From Theorem 2, just as from Theorem 1, follow new oscillation criteria for equations (6)–(8).

Corollary 4. *Let n be odd,*

$$0 < \lambda_k < 1, \;\; \mu_k + \lambda_k < 1 \;\; (k = 1, \dots, m),$$

and condition (16) *be fulfilled. Then every proper solution of equation* (6) *is oscillatory if and only if equality* (13) *holds.*

Corollary 5. *Let n be odd,*

$$0 < \mu < 1, \tag{17}$$

and condition (16) *be fulfilled. Then every proper solution of equation* (7) *is oscillatory if and only if equality* (14) *holds.*

Corollary 6. *Let n be odd and conditions* (16), (17) *be fulfilled. Then every proper solution of equation* (8) *is oscillatory if and only if equality* (15) *holds.*

1. Agarwal, R. P., Grace, S. R. and O'Regan, D. (2000), *Oscillation theory for difference and functional differential equations*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
2. Agarwal, R. P., Grace, S. R. and O'Regan, D. (2003), *Oscillation theory for second order dynamic equations*. Series in Mathematical Analysis and Applications, 5. London: Taylor & Francis, Ltd.
3. Astashova, I. V. (2010), *Qualitative properties of solutions of quasilinear ordinary differential equations* (in Russian). Moscow: Izd. tsentr MESI.
4. Bartušek, M. (1992), *Asymptotic properties of oscillatory solutions of differential equations of the nth order*. Folia Facultatis Scientiarium Naturalium Universitatis Masarykianae Brunensis. Mathematica, 3. Brno: Masaryk University.
5. Bartušek, M., Cecchi, M., Došlá, Z. and Marini, M. (2006) On oscillatory solutions of quasilinear differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 320, №1, P. 108–120.
6. Došlá, Z. and Partsvania, N. (2009), Oscillation theorems for second order nonlinear differential equations. *Nonlinear Anal.*, Vol. 71, №12, P. e1649–e1658.
7. Došlá, Z. and Partsvania, N. (2010), Oscillatory properties of second order nonlinear differential equations. *Rocky Mountain J. Math.*, Vol. 40, №2, P. 445–470.
8. Kiguradze, I. T. (1964), On the oscillatory character of solutions of the equation $d^m u/dt^m + a(t)|u|^n \operatorname{sign} u = 0$. *Mat. Sb. (N.S.)*, Vol. 65(107), №2, P. 172–187 (in Russian).
9. Kiguradze, I. T. (1965), On the question of variability of solutions of nonlinear differential equations. *Differencial'nye Uravnenija*, Vol. 1, №8, P. 995–1006 (in Russian); translation in *Differential Equations*, Vol. 1, №8, P. 773–782.
10. Kiguradze, I. T. (1975). *Some singular boundary value problems for ordinary differential equations* (in Russian). Tbilisi: Izdat. Tbilis. Univ.
11. Kiguradze, I. T., Chanturia, T. A. (2012), *Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations*. Springer Science & Business Media.
12. Kiguradze, I., Chichua, D. (1995), On proper oscillatory and vanishing at infinity solutions of differential equations with a deviating argument. *Georgian Math. J.*, Vol. 2, №4, P. 395–418.
13. Kiguradze, I. T., Izjumova D. V. (1985), On oscillatory properties of a class of differential equations with deviating argument. *Differentsial'nye Uravneniya*, Vol. 21, №4, P. 588–596 (in Russian); translation in *Differ. Equations*, Vol. 21, №4, P. 384–391.
14. Kiguradze, I., Kiguradze, T. (2016), Oscillatory solutions of higher order sublinear differential equations. *Czech-Georgian Workshop on Boundary Value Problems – WBVP-2016* (Brno, Czech Republic, February 8-11, 2016); http://users.math.cas.cz/ sremr/wbvp2016/abstracts/kiguradze2.pdf.
15. Kiguradze, I., Stavroulakis, I. P. (1998), On the oscillation of solutions of higher order Emden–Fowler advanced differential equations. *Appl. Anal.*, Vol. 70, №1-2, P. 97–112.
16. Kondrat'ev, V. A. (1961), Oscillatory properties of solutions of the equation $y^{(n)} + p(x)y = 0$. *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, Vol. 10, P. 419–436 (in Russian).
17. Koplatadze, R. (1994), On oscillatory properties of solutions of functional-differential equations. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, Vol. 3, P. 1–179.
18. Koplatadze, R. G., Chanturiya, T. A. (1977), Oscillation properties of differential equations with deviating argument (in Russian) Tbilisi: Izdat. Tbilis. Univ.

Кігурадзе І., Кігурадзе Т.

Критерій осциляції для сублінійних диференціальних рівнянь із запізненням

Резюме

Розглядається сублінійне диференціальне рівняння порядку $n \geqslant 2$ на інтервалі $[a, +\infty[$. Розв'язок такого рівняння називається правильним, якщо він не дорівнює нулеві в будь-якому околі $+\infty$. Правильний розв'язок називається осцилюючим, якщо він змінює свій знак в будь-якому околі $+\infty$. Казатимемо, що рівняння володіє властивістю A, якщо кожний його правильний розв'язок для парного n є осцилюючим, а для непарного n або осцилюючим, або таким, що монотонно наближається до нуля на нескінченності разом із своїми похідними до $n-1$-го порядку включно.

Щоб дослідити осциляційні властивості таких рівнянь, вводяться дві множини — $M_{sub}([a,+\infty[\times\mathbb{R})$ та $\widetilde{M}_{sub}([a,+\infty[\times\mathbb{R})$ — сублінійних за другим аргументом неперервних функцій $f : [a,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

У випадку, коли $f \in M_{sub}([a,+\infty[\times\mathbb{R})$, для диференціального рівняння

$$u^{(n)}(t) = f\big(t, u(\tau(t))\big)$$

отримано критерій існування властивості A, а для випадку, коли $f \in \widetilde{M}_{sub}([a,+\infty[\times\mathbb{R})$, отримано критерій осциляції усіх правильних розв'язків.

В якості прикладу розглянуто диференціальне рівняння із запізненням

$$u''(t) = p(t)\big[\ln(1 + |u(\tau(t))|)\big]^{\mu} \operatorname{sgn}(u(\tau(t))),$$

де μ є позитивною константою, $p : [a,+\infty[\to]-\infty, 0]$ та $\tau : [a,+\infty[\to [1,+\infty[$ є неперервними функціями. Стверджується, що, якщо n парне або n непарне та одночасно

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\tau(t)}{t} < 1,$$

то для того, щоб усі правильні розв'язки рівняння були осцилюючими, необхідно і достатньо виконання рівності

$$\int_a^{+\infty} [\ln(\tau(t))]^{\mu} p(t)\, dt = -\infty.$$

Ключові слова: диференціальне рівняння із запізненням, неавтономне, сублінійне, правильний розв'язок, осцилюючий розв'язок, властивість A, критерій осциляції .

Кигурадзе И., Кигурадзе Т.

Критерий осцилляции для сублинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием

Резюме

Рассматривается сублинейное дифференциальное уравнение порядка $n \geqslant 2$ на интервале $[a, +\infty[$. Решение такого уравнения называется правильным, если оно не равно нулю в любой окрестности $+\infty$. Правильное решение называется осциллирующим, если оно меняет свой знак в любой окрестности $+\infty$. Будем говорить, уравнение обладает свойством A, если каждое его правильное решение для четного n является осциллирующим, а для нечетного n либо осциллирующим, либо стремящимся к нулю на бесконечности вместе со своими производными до $n-1$-го порядка включительно.

Чтобы исследовать осцилляционные свойства таких уравнений, вводятся два множества — $M_{sub}([a,+\infty[\times\mathbb{R})$ и $\widetilde{M}_{sub}([a,+\infty[\times\mathbb{R})$ — сублинейных по второму аргументу непрерывных функций $f:[a,+\infty[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

В случае, когда $f\in M_{sub}([a,+\infty[\times\mathbb{R})$, для дифференциального уравнения

$$u^{(n)}(t)=f\big(t,u(\tau(t))\big)$$

получен критерий выполнения условия A, а для случая, когда $f\in\widetilde{M}_{sub}([a,+\infty[\times\mathbb{R})$, получен критерий осцилляции всех правильных решений.

В качестве примера рассмотрено дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$u''(t)=p(t)\big[\ln(1+|u(\tau(t))|)\big]^{\mu}\operatorname{sgn}(u(\tau(t))),$$

где μ — положительная константа, $p:[a,+\infty[\to]-\infty,0]$ и $\tau:[a,+\infty[\to[1,+\infty[$ являются непрерывными функциями. Утверждается, что, если либо n четное, либо n нечетное и одновременно

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\tau(t)}{t}<1,$$

то для того, чтобы все правильные решения уравнения были осциллирующими, необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\int\limits_a^{+\infty}[\ln(\tau(t))]^{\mu}p(t)\,dt=-\infty.$$

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с запаздыванием, неавтономное, сублинейное, правильное решение, осциллирующее решение, свойство A, критерий осцилляции .

UDC 511.19

A. Korchevskiy[1], **Ya. Vorobyov**[2]
[1]Arvada, Colorado, United States
[2]Izmail State University of Humanities, Odesa, Ukraine

ON THE MULTIPLICATIVE PARTITION FUNCTION

We study the number of representations $n = s_1 \cdots s_m$, where s_j are sonor numbers, i.e. for every s_j there do not exist the natural numbers n and k such that $s_j = n^k$, $k \geqslant 2$. The counting function $f(n)$ of such representation is the multiplicative analogue of the additive partitions of n. We construct the asymptotic formula for summatory function of $f(n)$ and investigate the distribution of values of the generalized divisor function $L(n)$ (as the number of representations n factoring two sonor numbers).
MSC: 11N37, 11P81, 11P82.
Key words: multiplicative particion function, sonor numbers, asymptotic formula, Dirichlet series.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134626.

Introduction. Let $\mathcal{M}$ be a subset of integers with positive density, e. g.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n\in\mathcal{M},\\ n\leqslant N}} 1 > 0,$$

and $e(n)$ — its characteristic function. Multiplicative partition of an integer $n > 1$ is a representation of n as any product of numbers from $\mathcal{M}$, greater than 1. Number of such representations is denoted as $f^*(n, \mathcal{M})$ (or simply $f^*(n)$ if it is clear what $\mathcal{M}$ is selected). A sign $*$ shows that we mean the multiplicative partition. MacMahon [8] first studied a distribution of $f^*(n)$ at the set $\mathcal{M} = \mathbb{N}$, as multiplicative analog of Ramanujan partitions. He built an asymptotic formula for a sum $\sum\limits_{n\leqslant x} f^*(n)$. Soon thereafter Oppenheim ([9], [10]) improved the result of MacMahon, obtaining a representation of the summation function $\sum\limits_{n\leqslant x} f^*(n)$ as a series on values of a Bessel's function of the first kind $I_k(z)$:

$$\sum_{n\leqslant x} f^*(n) = x \sum_{k=0}^{\infty} d_k \frac{I_{k+1}(2\sqrt{\log x})}{\sqrt{\log x}^{k+1}} + O\left(x \frac{e^{\sqrt{\log x}}}{(\log x)^{\frac{3}{8}}} \right), \tag{1}$$

where d_k are the coefficients of Taylor's series expansion by the powers of a $(s-1)$ of the function $\frac{1}{s}F(s)e^{-\frac{1}{s-1}}$, where $F(s)$ – generating series of the sequence $\{f^*(n)\}$. Then other improvements of the remaining term in the formula (1) followed (see [5], [11], [7]), as well as various generalizations of a choice of the set $\mathcal{M}$(see [1], [12], [13], [4]). In [2], an order of the growth of $f^*(n)$ has been studied. The authors demonstrated that there is an infinite sequence of "highly factorable numbers" n, at which $f^*(n)$ takes maximal positive values:

Received 06.03.2018

$$f^*(n) = n \cdot \exp\left(-\frac{\log n \log\log\log n}{\log\log n} + o\left(1\right)\right).$$

In a work of Warlimont[13], various examples of factorizations of integers are explored (e.g., different $\mathcal{M}$ sets).

In this paper, we will study another type of factorization of integers, which wasn't included in the list of the types of factorizations in [13].

Main Results

1. Statement of the problem. Let $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r} > 1$ and let $\alpha = GSD(a_1, a_2, \dots, a_r)$. We say that n is a "sonor" number (or integer non-power), if $\alpha = 1$. The unity (1) apparently is not classifiable as either sonor or integer power. We will denote the set of sonor numbers as S and integer powers as Q. Because $\mathbb{N} = S \cup Q$ and $S \cap Q = \emptyset$, taking into consideration that amount of integer powers $\leqslant x$ is $O(X^{1/2})$, the density of S is 1. Also, for convenience, we will use an expanded set of sonor numbers, S',

$$S' = S \cup \{1\}.$$

Denoting the number of sonors $\leqslant x$ as $k(x)$ and number of integer powers as $p(x)$, we can get

$$k(x) + p(x) + 1 = [x],$$

and therefore

$$k(x) = x - x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

A generating series $E(s)$ for sonor numbers

$$E(s) = \sum_{\substack{n=1,\\ n\in S}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \zeta(2s) - \zeta(3s) + g(s), \Re s > 1,$$

where $g(s)$ is regular in a half-plane $\Re s > \frac{1}{5}$ allows to investigate the function $k(x)$. Besides that, we can obtain an equality

$$\int_2^{\infty} \frac{k(x) x^{s-1}}{\left(x^s - 1\right)^2} dx = \frac{\zeta(s) - 1}{s} (\Re s > 1),$$

that is an interesting analogy of a well-known formula

$$\int_2^{\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx = \frac{\ln \zeta(s)}{s} \; (\Re s > 1),$$

relating the function $\pi(x)$ and Reimann's zeta-function. In general, sonor numbers can be seen as an analogy for prime numbers (with prime numbers being a subset of sonors).

Further in this paper, we will explore some arithmetical functions associated with the sequence of sonor numbers.

Each integer number greater than 1 can be represented as a product of "expanded" sonor numbers (if 1 is included into the set of sonor numbers), but this representation is not unique. For example,

$$n = p_1^2 p_2^2 = p_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_2 = p_1(p_1 p_2^2) = p_2(p_2 p_1^2) = (p_1 \cdot p_2) \cdot (p_1 \cdot p_2).$$

Further we will take "expanded" S' as an example of $\mathcal{M}$ for the problems of multiplicative representations. Our attention will be focused on an investigation of three functions:

$$f^*(n) = \sum_{\substack{n=n_1\cdots n_k,\\ n_i \in S'}} 1, \quad f_0^*(n) = \sum_{\substack{n=n_1\cdots n_k,\\ n_i \in S',\\ 1<n_1<\cdots<n_k}} 1, \quad \hat{d}(n) = \sum_{\substack{n=n_1 n_2,\\ n_1,n_2 \in S'}} 1.$$

2. Notation and supporting corollaries. Throughout we will use the following notation. The letter p denotes a prime number. We write $gcd(a,b) = (a,b)$ for the greatest common divisor of a and b. For any $t \in \mathbb{R}$ we write $\exp(t) = e^t$. For $s \in \mathbb{C}$ we denote $\Re s = \sigma$, $\Im s = t$, $s = \sigma + it$. $\zeta(s)$ is the Riemann zeta-function. $f(x) = O(g(x))$ means $|f(x)| \leqslant cg(x)$ for $x \geqslant x_0$ and some absolute constant $c > 0$. Here $f(x)$ is the complex function of the real x and $g(x)$ is a positive function of x for $x \geqslant x_0$. $f(x) \ll g(x)$ means the same as $f(x) = O(g(x))$. $f(x) = o(1)$ means that $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Now we shall consider some assertions which will be necessary furthermore.

Corollary 7. *For $|t| \geqslant 3$ uniformly at σ we have*

$$\zeta(\sigma+it) \ll \begin{cases} 1 & if \quad \sigma \geqslant \frac{5}{4}, \\ \log|t| & if \quad 1 \leqslant \sigma \leqslant \frac{5}{4}, \\ |t|^{\frac{1-\sigma}{3}} \log|t| & if \quad \frac{1}{2} \leqslant \sigma < 1, \end{cases}$$

$$\zeta(1+it) \ll \log|t|.$$

Corollary 8. *For any $T \geqslant 3$ we have*

$$\int_1^T \left|\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt \ll T\log T.$$

Those corollaries are well known.

Let then $e(n)$ be an arbitrary arithmetical function (not necessary a characteristic function of $\mathcal{M}$). We shall assume that $e(n) \geqslant 0$, $e(n) \leqslant n^{\varepsilon}$ for every small ε. Therefore, the series $\sum\limits_1^{\infty} \frac{e(n)}{n^s}$ absolutely converges in the half-plane $\Re s > 1$, and the following equality is true:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{e(n)}{n^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^*(n)}{n^s}, \tag{2}$$

where $f^*(n) = \sum\limits_{n=n_1\cdots n_k} e(n_1 \cdots e(n_k),\ f^*(1) = 1.$

If $e(n) = 0$ for $n \notin \mathcal{M}$, then

$$f^*(n) = \sum_{\substack{n=n_1\cdots n_k,\\ 1<n_i\in\mathcal{M}}} e(n_1)\cdots e(n_k),\ \ f^*(1) = 1.$$

Let's denote as $f_0^*(n)$ the number of representation of n as a product of different elements $n_1, \ldots, n_k$, greater than 1, from $\mathcal{M}$, that is

$$f_0^*(n) = \sum_{\substack{n=n_1\cdots n_k,\\ 1<n_1<\cdots<n_k,\\ n_i\in\mathcal{M}}} e(n_1)\cdots e(n_k).$$

In this case we have

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{e(n)}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^*(n)}{n^s}. \tag{3}$$

If $\mathcal{M}$ is the expanded set of sonor numbers (including 1), functions $f^*(n)$ and $f_0^*(n)$, generally speaking, are not multiplicative. The function $\hat{d}(n)$ defined above as a number of representations of n as a product of two sonor numbers (including 1 as a potential co-factor), also is not multiplicative. Indeed, we have

$$\hat{d}\left(p^a\right) = \begin{cases} 1, & if \quad a=0\\ 2, & if \quad a=1\\ 1, & if \quad a=2,\\ 0, & if \quad a\geqslant 3.\end{cases}$$

However,

$$\hat{d}\left(p_1^2p_2^3\right) = \#\left\{\begin{array}{lll} p_1\cdot p_1p_2^3; & p_1p_2^3\cdot p_1; & p_1p_2^2\cdot p_1p_2;\\ p_1p_2\cdot p_1p_2^2; & p_1^2p_2^3\cdot 1; & 1\cdot p_1^2p_2^3 \end{array}\right\} = 6,$$
$$\hat{d}\left(p_1^2\right)\cdot\hat{d}\left(p_2^3\right) = 0.$$

We will investigate the function $f_0^*(n)$ introduced above using a theorem proved by Y. Katai, M. Subbarao.

Corollary 9 ([7]**.** *, Th. 5.1] Let the sequences* $\{e(n)\}$ *and* $\{f(n)\}$ *satisfy to equation (3) with* $e(1) = f(1) = 1$ *and let the function* $E(s)$ *given for* $\Re s > 1$ *by the equation*

$$E(s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e(n)}{n^s}$$

satisfies for two assumptions

(i) there exist the positive constants A and β such that

$$E(s)=\frac{A}{(s-1)^{\beta}}+G(s),$$

where $G(s)$ be regular in the semi-plane $\Re s>\frac{1}{2}$;

(ii) there exists a positive constant A_0 such that

$$|E(1+it)|\leqslant A_0\log|t|,\ if\ |t|\geqslant 3.$$

Then for any natural number N the asymptotic formula

$$T(x):=\sum_{n\leqslant x}f(n)=\exp\left(c_0(\log x)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\left\{\sum_{(h,\nu)}{}^{*}H(h,\nu)(\log x)^{-\frac{2h+\nu\beta}{2\beta+2}}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left[1+c_0(\log x)^{-\frac{1}{\beta+1}}-\frac{2h+\nu\beta}{2\beta}(\log x)^{-1}\right]+O\left((\log x)^{-\frac{2N+4+\beta}{2\beta+2}}\right)\right\}\right),$$

holds, where c_0 is a computable constant depended only on A and β; N is any fixed natural number; $H(h,\nu)$ are the suitable constants do not depended on x and N; the sign $*$ for $\sum\limits_{(h,\nu)}$ means that summation passes over all pairs (h,ν), $1\leqslant h\leqslant N$, $\nu=1,2,\ldots$, for which $h+\frac{1}{2}\nu\beta\leqslant N+2+\frac{1}{2}\beta$.

3. Function of divisors $\hat{d}(n)$. The function of divisors $\hat{d}(n)$, as we mentioned above, is not multiplicative, dissimilar to the classical divisor function of Dirichlet. We have for $\Re s>1$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{d}(n)}{n^s}&=\left(\sum_{m\in S'}\frac{1}{m^s}\right)^2=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\sum_{q\in Q}\frac{1}{q^s}\right)^2:=\left(\zeta(s)-g_0(s)\right)^2=\\&=\left(\zeta(s)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}+g_1(s)\right)^2,\end{aligned}\tag{4}$$

where $g_1(s)$ is regular in the half-plane $\Re s>\frac{1}{3}$.

Theorem 1. *With $x\to\infty$, the following asymptotical formula is true:*

$$D(x):=\sum_{n\leqslant x}\hat{d}(n)=x\log x+A_1x+O\left(x^{\frac{1}{2}}\log x\right)$$

with a computable constant A_1 and an absolute constant in the symbol "O".

Proof. The Perron's formula for the coefficient of Dirichlet series and the statement (4) yields:

$$\begin{gathered}D(x)=\\=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\left(\zeta^2(s)-2\zeta(s)\right)\left(\zeta(2s)-g_1(s)\right)+\left(\zeta(2s)-g_1(s)\right)^2\right)\frac{x^s}{s}ds+\\+O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\right),\end{gathered}\tag{5}$$

where $c > 1$, $T > 1$ will be chosen later.

Let's analyze a closed contour consisting of 8 parts:

$$\Gamma_0 : [c - iT,\ c + iT], \quad \Gamma_4 : \left[\tfrac{1}{4} - 3i,\ \tfrac{1}{4} + 3i\right],$$

$$\Gamma_1 : \left[\tfrac{1}{2} + iT,\ c + iT\right], \quad \Gamma_5 : \left[\tfrac{1}{4} - 3i,\ \tfrac{1}{2} - 3i\right],$$

$$\Gamma_2 : \left[\tfrac{1}{2} + 3i,\ \tfrac{1}{2} + iT\right], \quad \Gamma_6 : \left[\tfrac{1}{2} - iT,\ \tfrac{1}{2} - 3i\right],$$

$$\Gamma_3 : \left[\tfrac{1}{4} + 3i,\ \tfrac{1}{2} + 3i\right], \quad \Gamma_7 : \left[\tfrac{1}{2} - iT,\ c - iT\right].$$

In this case, the Cauchy's residue theorem yields:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} = + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_3} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_4} - \\ - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_5} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_6} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_7} + \operatorname*{res}_{s=\frac{1}{2}} + \operatorname*{res}_{s=1},$$

where integrated functions under all integrals, and also functions for which the residues are being determined, are equal to the function

$$\left(\left(\zeta^2(s) - 2\zeta(s)\right)\left(\zeta(2s) - g_1(s)\right) + \left(\zeta(2s) - g_1(s)\right)^2\right)\frac{x^s}{s}.$$

All the integrals, except integrals on contours Γ_3 and Γ_6, could be estimated using Corollary 1 as $O\left(x^2\right)$, and those integrals in its turn, following the Corollary 2, are estimated as

$$\left|\int_{\Gamma_3}\right| + \left|\int_{\Gamma_6}\right| \ll x^2 \log^2 x, \tag{6}$$

if we take $c = 1 + \frac{1}{\log x}$, $T = x^{\frac{3}{4}}$.

Besides that, it is easy to see that

$$\operatorname*{res}_{s=\frac{1}{2}} + \operatorname*{res}_{s=1} = x \log x + A_1 x, \tag{7}$$

where A_1 is a suitable constant.

From (5)-(4), the corollary's statement follows.

4. Functions $f^*(n)$ and $f_0^*(n)$ of multiplicative partitions of integers. To build an asymptotical formula for the average meaning of the function $f^*(n)$ introduced above, determining a number of multiplicative partitions of integers on the set of sonor numbers, we will use the Oppenheim's method [10].

Let's look at a modified Bessel's function of the first kind $I_n(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, defined by a series

$$I_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)}, \tag{8}$$

where $\Gamma(u)$ is the Euler's gamma function.

For a real positive x, the modified function $I_n(x)$ has an integral representation as

$$I_n(x) = \frac{x^n}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{s+\frac{x^2}{4s}}}{s^{n+1}} ds, \tag{9}$$

where c is any positive number.

Besides that, for $I_n(x)$ there is an asymptotic representation

$$I_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{4n^2-1}{8x} + O\left(x^{-2}\right)\right). \tag{10}$$

(More about the function $I_n(x)$ see in [3]).

Theorem 2. *With $x \to \infty$, we have*

$$\sum_{n \ll x} f^*(n) = x \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{I_{n+1}(2\sqrt{\log x})}{(\sqrt{\log x})^{n+1}} + O(x), \tag{11}$$

where coefficients d_n, $n = 0, 1, \ldots$ can be expressed through coefficients of Taylor's series on powers $(s-1)$ of a function, defined below in an equality (16).

Proof. Let $F(s)$ is the generating series for $f^*(n)$:

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^*(n)}{n^s}.$$

It is clear that for $\Re s > 1$ we have

$$F(s) = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{e(n)}{n^s}\right)^{-1},$$

where $e(n)$ is a characteristic function of the set of expanded sonor numbers S.

From here,

$$\log F(s) = \sum_{m \in S'} \log\left(1 - \frac{1}{m^s}\right) = \sum_{m \in S'} m^{-s} + F_1(s), \tag{12}$$

where $F_1(s)$ is regular in a half-plane $\Re s > \frac{1}{2}$.

From (12) we conclude that $\log F(s) = \zeta(s) + F_2(s)$, where $F_2(s)$ is regular for $\Re s > \frac{1}{2}$. Therefore,

$$F(s) = \exp\left(\zeta(s) + F_2(s)\right) = \exp\left(\frac{1}{s-1} + F_3(s)\right),$$

where $F_3(s)$ is regular for $\Re s > \frac{1}{2}$ and in particular is a circle $|s-1| < \frac{1}{2}$.

Let we have in this circle a decomposition

$$\exp\left(F_3(s)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (s-1)^k.$$

Then

$$F(s) = d_1 e^{\frac{1}{s-1}} \left(1 + b_1\,(s-1) + b_2\,(s-1)^2 + \cdots\right),$$

where $d_1 = e^{F_3(1)}$, $b_k = \frac{d_k}{d_1}$, $k = 2, 3, \ldots$.

For deriving an asymptotic formula for summation function $\sum\limits_{n \ll x} f^*(n)$, we will utilize Landau's method, building first an asymptotic representation of a sum

$$\sum_{n \ll x} f^*(n)(x-n),$$

and then based on asymptotic differentiation will find the necessary formula for the sum $\sum_{n \ll x} f^*(n)$.

We have

$$\sum_{n \ll x} f^*(n)(x-n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(s)}{s(s+1)} x^{s+1} ds,\ (c>1).$$

Because $F(s)$ doesn't have singularities in the half-plane $\Re s \geqslant 1$ expect the point $s = 1$, we shall replace the integration contour $(c - i\infty,\ c + i\infty)$ by a composition of three contours,

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1: \text{ line segment } (1 - i\infty,\ 1 - ia],\\
&\Gamma_2: \text{ semicircle of radius a } 1 + ae^{i\theta},\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 < a \leqslant 1,\\
&\Gamma_3: \text{ line segment } [1 + ia,\ 1 + i\infty).
\end{aligned}$$

From the estimation of $\zeta(s)$ on the unit line (see Corollary 1), we obtain that the integrals on Γ_1 and Γ_3 are evaluated as $O\left(x^2\right)$. On the semicircle Γ_2 we will make a change of variable $s = 1 + \frac{1}{z}$, so that $z = a^{-1} e^{i\theta}$ and θ changes from $-\frac{\pi}{2}$ to $\frac{\pi}{2}$. We will contract the semicircle Γ_2 to a point. Then we get that for any $b > 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} F(s) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} F(s) \frac{x^{s-1+2}}{s(s+1)} ds = \\
&= c_1 x^2 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{x^{\frac{1}{z}} e^z}{(z+1)(2z+1)} e^{F_2\left(1+\frac{1}{z}\right)} dz + O\left(x^2\right) = \\
&= c_1 x^2 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{e^{z+\frac{\log x}{z}}}{(z+1)(2z+1)} \left(1 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots\right) dz + O\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

Now, by virtue of a definition of the modified Bessel's function $I_n(z)$, we immediately get

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} F(s)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds =$$

$$= \frac{c_1x^2}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{e^{z+\frac{\log x}{z}}}{z^2}\left(1+\frac{b_1'}{z}+\frac{b_2'}{z^2}+\cdots\right)dz + O\left(x^2\right) =$$

$$= \frac{c_1x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n'\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{z+\frac{\log x}{z}}z^{-n-2}dz + O\left(x^2\right) =$$

$$= \frac{c_1x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n I_{n+1}(2\sqrt{\log x})(\log x)^{-\frac{n+1}{2}} + O\left(x^2\right).$$

Now, using asymptotic differentiation, we come to the statement of the theorem.

Note. The relation (10) shows that the asymptotic formula, obtained in the Theorem 2, is nontrivial.

Now we are going over to an investigation of the sum:

$$D_0(x) := \sum_{n\leqslant x} f_0^*(n).$$

From (3) it follows that for $\Re s > 1$

$$E(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e(n)}{n^s} = \sum_{m\in S'}\frac{1}{m^s} = \zeta(s) + F_0(s),$$

where $F_0(s)$ is regular in a half-plane $\Re s > \frac{1}{2}$.

Therefore, all conditions of the Katai-Subbarao theorem are satisfied with a parameter $\beta = 1$. Hence the following assertion is true.

Theorem 3. *Let $f_0^*(n)$ be a number of representation of n as a product of sonor numbers. Then,*

$$D_0(x) = e^{c_0\sqrt{\log x}}\left\{\sum\nolimits_{(h,v)}^{*} H(h,v)(\log x)^{-\frac{2h+v}{4}}\left(1 + c_0(\log x)^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{2h+v}{2}(\log x)^{-1}\right) + \right.$$

$$\left. + O\left((\log x)^{-\frac{2N+5}{4}}\right)\right\},$$

where sign $*$ at the sum $\sum\limits_{(h,v)}$ means that the summation is performed for all pairs (h,v), $1\leqslant h\leqslant N$, $v=1,2\ldots$, for which $h+\frac{1}{2}v\leqslant N+\frac{5}{2}$.

Conclusion. The proved theorems show that the problems of a multiplicative partition of integer numbers on the set of sonor numbers can be researched by methods of investigation of similar problems for multiplicative partitions on the set of $\mathbb{N}$, and it is possible to assume the correctness of an analogy regarding the maximum order of the functions $f^*(n)$ and $f_0^*(n)$.

1. Broughan, K. (2014). Quadrafree factorization numerorum. *Rocky Mountain J. Math.*, 44(3), pp. 791–807.
2. Canfield, E. R., Erdos, P. & Pomerance, C. (1983). In a problem of Oppenheim concerning ¡¡Factorizatio Numerorum¿¿. *J. Number Theory*, 17, pp. 1–28.
3. Digital Library of Mathematical Functions (2011). *National Institute of Standards and Technology*, http:/dimt.nist.gov.
4. Hwang, H.-K. (2000). Distribution of the number of factors in random ordered factorization of integers. *J. Number Theory*, 81, pp. 61–92.
5. Ivič, A. (1985). *The Riemann zeta-function. Theory and Applications*, New York — Wiley, 517 p.
6. Kalman, L. (1931). A ¡¡factorization numerarum¿¿ problemajaral. *Matematikai Lapok*, 38, pp. 1–15.
7. Kaniewa, R. (1983). On the multiplicative partition function. *Tsukura J. Math.*, 7(2), pp. 355–365.
8. Katai, I. & Subbarao, M. B. (2006). On product partitions and asymptotic formulas. *Proc. Of the Intern. Conference on analytic number theory*, Bangalore, India. December 13-15, 2003; *Mysore: Ramanujan Math. Soc., Ramanujan Math. Soc. Lecture Notice*, 2, pp. 99–114.
9. MacMahon, P. A. (1924). Dirichlet series and the theory of partitions. *Proc. London math. Soc.*, 22(2), pp. 401–411.
10. Oppenheim, A. (126). On the arithmetic function. *J. of the London Math. Soc.*, s1-1(4), pp. 205–211.
11. Oppenheim, A. (1927). On the arithmetic function, II. *J. of the London Math. Soc.*, s1-2(2), pp. 123–130.
12. Sen, D. N. (1941). A problem on ¡¡factorisatio numerorum¿¿. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 33, pp. 1–8.
13. Sklar, A. (1952). On the factorization of squarefree integers. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3, pp. 701–705.
14. Warlimont, R. (1993). Factorisatio numerorum with contraints. *J. Number Theory*, 45, pp. 186–199.

А. Корчевський, Я. Воробйов

Про мультиплікативну функцію розбиття

Резюме

Ми вивчаємо кількість зображень $n = s_1 \cdots s_m$, де s_j — сонорні числа, тобто для кожного s_j не існує натуральних чисел n і k, таких що $s_j = n^k$, $k \geqslant 2$. Зчитуюча функція $f(n)$ таких зображень є мультиплікативним аналогом адитивної функції розбиттів n. Ми будуємо асимптотичну формулу для суматорної функції для $f(n)$ і досліджуємо розподілення значень узагальненої функції дільників $L(n)$ (кількість зображень n у вигляді добутку двох сонорних чисел).

Ключові слова: мультиплікативна функція розбиттів, сонорні числа, асимптотична формула, ряди Діріхле .

А. Корчевский, Я. Воробьёв

О мультипликативной функции разбиения

Резюме

Мы изучаем количество представлений $n = s_1 \cdots s_m$, где s_j — сонорные числа, т. е. для каждого s_j не существуют натуральные числа n и k, такие что $s_j = n^k$, $k \geqslant 2$. Считывающая функция $f(n)$ таких представлений является мультипликативным аналогом аддитивной функции разбиения n. Мы строим асимптотическую формулу для сумматорной функции для $f(n)$ и исследуем распределение значений обобщенной функции делителей $L(n)$ (количество представлений n в виде произведения двух сонорных чисел).

Ключевые слова: мультипликативная функция разбиений, сонорные числа, асимптотическая формула, ряды Дирихле .

Researches in Mathematics and Mechanics. – 2018. – V. 23, Is. 1(31). – P. 149–156

UDC 517.926

S. A. Shchogolev
I. I. Mechnikov Odesa National University

THE ANALOGUE OF THE FLOQUET-LYAPUNOV THEOREM FOR THE LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS OF THE SPECIAL KIND

The analogue of the well known in the theory of the linear differential systems Floquet's–Lyapunov's theorem are constructed by the certain condidtions for the linear differential system, whose coefficients are represented as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency.
MSC: 34A30, 34C25.
Key words: linear differential systems, Fourier series, slowly-varying parameters.
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134627.

Introduction. In the theory of linear systems of differential equations is well known the Floquet–Lyapunov theorem [1]. The fundamental matrix $X(t)$ of the linear homogeneous system

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

where $A(t)$ – is a continuous T-periodic matrix, has a kind:

$$X(t) = F(t)\ e^{tK}, \tag{2}$$

where $F(t)$ – is a T-periodic matrix, and K – is a constant matrix.

There exists many analogues of this theorem for the linear systems of different types, for example, for the systems with quasiperiodic coefficients [2], for the countable systems of differential equations [3], for the differential equations in the Banach spaces [4] and other.

The purpose of this paper is to obtain of analogue of Floquet-Lyapunov theorem for the linear systems of differential equations whose coefficients are represented as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency. Here we make substantial use of the results of our paper [5].

Notation. Let $G(\varepsilon_0) = \{t, \varepsilon : \ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \ -L\varepsilon^{-1} \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}, \ 0 < L < +\infty\}$.

Definition 1. We say, that a function $p(t, \varepsilon)$ belong to class $S(m; \varepsilon_0)$ $(m \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, if

1) $p : G(\varepsilon_0) \to \mathbb{C}$, 2) $p(t, \varepsilon) \in C^m(G(\varepsilon_0))$ with respect t;

3) $d^k p(t, \varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k p_k^*(t, \varepsilon)$ $(0 \leqslant k \leqslant m)$,

$$\|p\|_{S(m;\varepsilon_0)} \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{m} \sup_{G(\varepsilon_0)} |p_k^*(t, \varepsilon)| < +\infty.$$

Under the slowly varying function we mean a function of class $S(m; \varepsilon_0)$.

Received 20.09.2017

Definition 2. We say, that a function $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ belong to class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(m\in\mathbb{N}\cup\{0\})$, if this function can be represented as:

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n(t,\varepsilon)\exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),$$

and:

1) $f_n(t,\varepsilon)\in S(m;\varepsilon_0)$;

2)

$$\|f\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\stackrel{def}{=}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|f_n\|_{S(m;\varepsilon_0)}<+\infty,$$

3) $\theta(t,\varepsilon)=\int\limits_0^t\varphi(\tau,\varepsilon)d\tau$, $\varphi(t,\varepsilon)\in\mathbb{R}^+$, $\varphi(t,\varepsilon)\in S(m;\varepsilon_0)$, $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)}\varphi(t,\varepsilon)=\varphi_0>0$.

State some properties of functions of classes $S(m;\varepsilon_0)$, $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ (the proofs are given in [6]). Let $k=\text{const}$, $p,q\in S(m;\varepsilon_0)$, $u,v\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$. Then kp, $p\pm q$, pq belongs to class $S(m;\varepsilon_0)$, ku, $u\pm v$, uv belongs to class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, and

1) $\|kp\|_{S(m;\varepsilon_0)}=|k|\cdot\|p\|_{S(m;\varepsilon_0)}$;

2) $\|p\pm q\|_{S(m;\varepsilon_0)}\leqslant\|p\|_{S(m;\varepsilon_0)}+\|q\|_{S(m,\varepsilon_0)}$;

3) $\|pq\|_{S(m;\varepsilon_0)}\leqslant 2^m\|p\|_{S(m;\varepsilon_0)}\|q\|_{S(m;\varepsilon_0)}$;

4) $\|ku\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}=|k|\cdot\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$;

5) $\|u\pm v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\leqslant\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}+\|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$;

6) $\|uv\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\leqslant 2^m\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\cdot\|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$;

7) let $u\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, and the function $f(t,\varepsilon,\theta,u)$ belongs to class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ with respect t,ε,θ and analytic with respect u, if $|u|<r$, means

$$f(t,\varepsilon,\theta,u)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(t,\varepsilon,\theta)u^k,$$

where $f_k(t,\varepsilon,\theta)\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$. Then by the condition

$$2^m\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\leqslant r_0<r,$$

the function $f(t,\varepsilon,\theta,u)$ belongs to class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, and

$$\|f(t,\varepsilon,\theta,u)\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\|f_k(t,\varepsilon,\theta)\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}r_0^k.$$

Particularly, all polynomies with respect u with the coefficients from $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, functions $\exp u$, $\sin u$, $\cos u$ belongs to class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$. For function $\exp u$ we have:

$$\|\exp u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\leqslant 2^{-m}\exp\left(2^m\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\right).$$

Statement of the Problem. We consider the next system of differential equations:

$$\frac{dx_j}{dt}=\lambda_j(t,\varepsilon)x_j+\mu\sum_{k=1}^{N}p_{jk}(t,\varepsilon,\theta)x_k,\ j=\overline{1,N},\tag{3}$$

where $\lambda_j(t,\varepsilon) \in S(m;\varepsilon_0)$, $p_{jk}(t,\varepsilon,\theta) \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $(j,k=\overline{1,N})$, $\mu \in (0,\mu_0) \subset \mathbb{R}^+$.

We study the problem about the structure of fundamental system of solutions $x_{jk}(t,\varepsilon,\mu)$ $(j,k=\overline{1,N})$ of system (3).

Auxiliary arguments.

Lemma 1. *Let the function*

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} f_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon))$$

belongs to class $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$. Then the function

$$x(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \varepsilon \int\limits_0^t f(\tau,\varepsilon,\theta(\tau,\varepsilon))d\tau$$

belongs to class $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ also, and there exists $K_1 \in (0,+\infty)$, that does not depend on the function f, such, that

$$\|x(t,\varepsilon,\theta)\|_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant K_1 \|f(t,\varepsilon,\theta)\|_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)}.$$

The proof are given in the paper [5].

Lemma 2. *Let we have the linear nonhomogeneous first-order differential equation:*

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(t,\varepsilon)x + \varepsilon u(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)), \tag{4}$$

where $\lambda(t,\varepsilon) \in S(m;\varepsilon_0)$, $u(t,\varepsilon,\theta) \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$. Let holds the condition $|\mathrm{Re}\lambda(t,\varepsilon)| \geq \gamma_0 > 0$. Then equation (4) has a particularly solution $x(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, and there exists $K_2 \in (0,+\infty)$, that does not depend on the function $u(t,\varepsilon,\theta)$, such that

$$\|x(t,\varepsilon,\theta)\|_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \frac{K_2}{\gamma_0}\ \|u(t,\varepsilon,\theta)\|_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)}. \tag{5}$$

The proof are given in the paper [7].

Lemma 3. *Let the system (3) such, that*

$$|\mathrm{Re}(\lambda_j(t,\varepsilon) - \lambda_k(t,\varepsilon))| \geq \gamma_1 > 0,\ \ (j \neq k). \tag{6}$$

Then there exists $\mu_1 \in (0,\mu_0)$, such, that for all $\mu \in (0,\mu_1)$ there exists the Lyapunov's transformation of kind

$$x_j = y_j + \mu \sum_{k=1}^{N} \psi_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)y_k,\ \ j=\overline{1,N}, \tag{7}$$

where $\psi_{jk} \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, reducing the system (3) to kind:

$$\frac{dy_j}{dt} = (\lambda_j(t,\varepsilon) + \mu u_j(t,\varepsilon,\mu))y_j + \mu\varepsilon \sum_{k=1}^{N} v_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)y_k,\ \ j=\overline{1,N}, \tag{8}$$

where $u_j \in S(m;\varepsilon_0)$, $v_{jk} \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ $(j,k=\overline{1,N})$.

The proof are given in the paper [5].

Lemma 4. *Let holds the condidtion (6). Then there exists* $\mu_2 \in (0,\mu_1)$ *(*μ_1 *are defined in Lemma 3) such, that for all* $\mu \in (0,\mu_2)$ *there exists the Lyapunov's transformaion of kind*

$$y_j = z_j + \mu \sum_{k=1}^{N} q_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu) z_k,\ j=\overline{1,N}, \tag{9}$$

where $q_{jk} \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$*, reducing the system (8) to the pure diagonal form:*

$$\frac{dz_j}{dt} = d_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) z_j,\ j=\overline{1,N}, \tag{10}$$

where

$$d_j = \lambda_j(t,\varepsilon) + \mu u_j(t,\varepsilon,\mu) + \mu\varepsilon v_{jj}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \\ + \mu\varepsilon \sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq j)}}^{N} v_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu) q_{kj}(t,\varepsilon,\theta,\mu),\ j=\overline{1,N}. \tag{11}$$

Proof. We make in the system (8) the substitution (9) and using the condidtion of diagonality of transformed system. We obtain the next system of differential equations for coefficients q_{jk}:

$$\frac{dq_{jk}}{dt} = \left(\lambda_j(t,\varepsilon) - \lambda_k(t,\varepsilon) + \mu(u_j(t,\varepsilon,\mu) - u_k(t,\varepsilon,\mu))\right) q_{jk} + \\ + \mu\varepsilon\left(v_{jj}(t,\varepsilon,\theta,\mu) - v_{kk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\right) q_{jk} + \varepsilon v_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \\ + \mu\varepsilon \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq j, s\neq k)}} v_{js}(t,\varepsilon,\theta,\mu) q_{sk} - \mu^2 \varepsilon q_{jk} \sum_{\substack{s=1 \\ (s\neq k)}} v_{ks}(t,\varepsilon,\theta,\mu) q_{sk}, \\ j,k=\overline{1,N},\ j\neq k. \tag{12}$$

It is easy to see, that the system (12) is divided into N independent $(N-1)$-order subsystems.

Together with the system (12) we consider the linear nonhomogeneous system:

$$\frac{dq_{jk}^{(0)}}{dt} = \left(\lambda_j(t,\varepsilon) - \lambda_k(t,\varepsilon) + \mu(u_j(t,\varepsilon,\mu) - u_k(t,\varepsilon,\mu))\right) q_{jk}^{(0)} + \\ + \varepsilon v_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu),\ j,k=\overline{1,N},\ j\neq k. \tag{13}$$

We denote $u^*(\mu) = \max\limits_{j,k} \|u_j(t,\varepsilon,\mu) - u_k(t,\varepsilon,\mu)\|_{S(m;\varepsilon_0}$. We choose a parameter μ so small that $\mu u^*(\mu) < \gamma_1$. Then

$$\left|\mathrm{Re}\left(\lambda_j(t,\varepsilon) - \lambda_k(t,\varepsilon) + \mu(u_j(t,\varepsilon,\mu) - u_k(t,\varepsilon,\mu))\right)\right| \geq \gamma_1 - \mu u^*(\mu) > 0. \tag{14}$$

The system (13) is a set of $N(N-1)$ independent linear nonhomogeneous equations each of which has form (4). By virtue unequality (14) each of which theese equations is satisfied to condidtions of Lemma 2. Therefore the system (13) has a particular solution $q_{jk}^{(0)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, and there exists $K_3 \in (0,+\infty)$ such, that

$$\|q_{jk}^{(0)}\|_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \frac{K_3}{\gamma_1 - \mu u^*(\mu)}\ \|q_{jk}^{(0)}\|_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)}\ (j,k=\overline{1,n};\ j \neq k). \tag{15}$$

We seek the solution from class $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ of system (12) by the method of successive approximations, defifning the initial approximation $q_{jk}^{(0)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j,k=\overline{1,N};\ j\neq k)$, and the subsequent approximations defining as solutions from class $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ of the linear nonhomogeneous systems:

$$\frac{dq_{jk}^{(\nu+1)}}{dt} = (\lambda_j(t,\varepsilon) - \lambda_k(t,\varepsilon) + \mu(u_j(t,\varepsilon,\mu) - u_k(t,\varepsilon,\mu)))\, q_{jk}^{(\nu+1)} +$$

$$+\mu\varepsilon\,(v_{jj}(t,\varepsilon,\theta,\mu) - v_{kk}(t,\varepsilon,\theta,\mu))\, q_{jk}^{(\nu)} + \varepsilon v_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+\mu\varepsilon \sum_{\substack{s=1\\(s\neq j,s\neq k)}} v_{js}(t,\varepsilon,\theta,\mu) q_{sk}^{(\nu)} - \mu^2 \varepsilon q_{jk}^{(\nu)} \sum_{\substack{s=1\\(s\neq k)}} v_{ks}(t,\varepsilon,\theta,\mu) q_{sk},$$

$$j,k=\overline{1,N},\ j\neq k;\ \nu=0,1,2,\ldots\ . \tag{16}$$

We denote $V = \max\limits_{j,k} \|v_{jk}\|_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)}$. Then by (15):

$$\|q_{jk}^{(0)}\|_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \frac{K_3 V}{\gamma_1 - \mu u^*(\mu)}\ (j,k=\overline{1,N};\ j\neq k). \tag{17}$$

We denote

$$\Omega = \Big\{ q_{jk} \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta):\ \|q_{jk} - q_{jk}^{(0)}\|_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \rho \Big\},$$

where $\rho \in (0,+\infty)$.

Using techniques contraction mapping principle [8] it is easy to show that for sufficiently small values of μ all approximations $q_{jk}^{(\nu)}$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$ belongs to Ω. And process (16) is convergent to solution from class $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ of the system (12).

Lemma 4 are proved.

Main Results.

Theorem. *Let for the system (3) the condition (6) is holds. Then there exists $\mu_3 \in (0,\mu_0)$ such, that for all $\mu \in (0,\mu_3)$ the system (3) has a fundamental system of solutions of kind:*

$$x_{jk} = r_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \exp\left(\int_0^t \sigma_j(s,\varepsilon,\mu)ds\right),\ j,k=\overline{1,N} \tag{18}$$

(j – the number of solution, k – the number of component), where $r_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, $\sigma_j(t,\varepsilon,\mu) \in S(m-1;\varepsilon_0)$.

Proof. The fundamental system of solutions (FSS) of the system (10) has a kind:

$$z_{jk} = \delta_j^k \exp\left(\int\limits_0^t d_j(s,\varepsilon,\theta(s,\varepsilon),\mu)ds\right), \ j,k=\overline{1,N} \tag{19}$$

(j – the number of solution, k – the number of component, δ_j^k – the symbol of Kronecker). By virtue (9) FSS of system (8) has a kind:

$$y_{jk} = \widetilde{q}_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\exp\left(\int\limits_0^t d_j(s,\varepsilon,\theta(s,\varepsilon),\mu)ds\right), \ j,k=\overline{1,N}, \tag{20}$$

where $\widetilde{q}_{jk} = \delta_j^k + (1-\delta_j^k)\mu q_{jk}$ (j – the number of solution, k – the number of component). By virtue (7) FSS of system (3) has a kind:

$$x_{jk} = \left(\sum_{l=1}^N \widetilde{\psi}_{kl}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{q}_{lj}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\right)\exp\left(\int\limits_0^t d_j(s,\varepsilon,\theta(s,\varepsilon),\mu)ds\right), \ j,k=\overline{1,N}, \tag{21}$$

where $\widetilde{\psi}_{jk} = \delta_j^k + \mu\psi_{jk}$ (ψ_{jk} are defined in Lemma 3).

Consider:

$$\int\limits_0^t d_j(s,\varepsilon,\theta(s,\varepsilon),\mu)ds = \int\limits_0^t \lambda_j(s,\varepsilon) + \mu_j(s,\varepsilon,\mu))ds +$$

$$+\mu\varepsilon\int\limits_0^t w_j(s,\varepsilon,\theta(s,\varepsilon),\mu)ds,$$

where $w_j = v_{jj} + \sum_{k=1}^N \psi_{jk}q_{kj} \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$. We represent the functions w_j as $w_j = w_j^*(t,\varepsilon,\mu) + \widetilde{w}_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)$, where

$$w_j^*(t,\varepsilon,\mu) = \overline{w_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} w_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)d\theta \in S(m-1;\varepsilon_0).$$

Accordingly $\widetilde{w}_j \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, and $\overline{\widetilde{w}_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)} \equiv 0$. Then

$$\exp\left(\int\limits_0^t d_j(s,\varepsilon,\theta(s,\varepsilon),\mu)ds\right) = \exp\left(\int\limits_0^t \left(\lambda_j(s,\varepsilon) + \mu u_j(s,\varepsilon,\mu) + \mu\varepsilon w_j^*(s,\varepsilon,\mu)\right)\right)\times$$

$$\times\exp\left(\mu\varepsilon\int_0^t \widetilde{w}_j(s,\varepsilon,\theta(s,\varepsilon),\mu)ds\right). \tag{22}$$

By virtue Lemma 1 we concluding, that

$$\varepsilon\int\limits_0^t \widetilde{w}_j(s,\varepsilon,\theta(s,\varepsilon),\mu)ds \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta) \ (j=\overline{1,N}).$$

It follows by virtue the property 7) of functions from class $F(m; \varepsilon_0; \theta)$, that

$$g_j(t, \varepsilon, \theta, \mu) = \exp\left(\mu\varepsilon \int_0^t \widetilde{w}_j(s, \varepsilon, \theta(s, \varepsilon), \mu) ds\right) \in F(m-1; \varepsilon_0; \theta) \ (j = \overline{1, N}). \quad (23)$$

By virtue (21), (22), (23) we obtain the statement of the Theorem.

Obviously, the formula (18) is an analogue of Floquet-Lyapunov theorem for the systems of kind (3).

Conclusion. Thus, the analogue of the Floquet-Lyapunov theorem, well known in the theory of linear homogeneous systems of the differential equations, are obtained for the linear homogeneous systems, whose coefficients are represented as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency.

References

1. **Yakubovich, V. A. & Starzhinskiy, V. M.** (1972). Lineynyie differentsialnyie uravneniya s periodicheskimi koefficientami i ih prilozheniya [The linear differential equations with periodic coefficients and their applications], M.: Nauka, 720 p.
2. **Shtokalo, I. Z.** (1960). Lineynyie differentsialnyie uravneniya s peremennymi koefficientami [The linear differential equations with variable coefficients], K.: Izd-vo AN USSR, 76 p.
3. **Samoylenko, A. M. & Teplinskiy, Yu. V.** (1993). Schyotnyie sistemyi differentsialnyih uravneniy [Countable systems of differential equations], K.: IM NAN Ukrainyi, 308 p.
4. **Daletskiy, Yu. L. & Kreyn, M. G.** (1970). Ustoychivost resheniy differentsialnyih uravneniy v banahovom prostranstve [The stability of solutions of differential equations in Banach spaces], M.: Nauka, 536 p.
5. **Shchogolev, S. A.** (2014). On a reduction of a linear homogeneous differential system with oscillating coefficients to a system with slowky-varying coefficients. *Vysnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh., Vol. 19*, 1(21), 81–91.
6. **Shchogolev S. A.** (2012). Deyaki zadachi teoryi kolyvanj dlya diferetsialnyih sistem, yaki mistyatj povilno zminni parametryi [The some problems of the theory of oscillations for the differential systems, containing slowly varying parameters]. – Manuscript. – The thesis for obtaining the scientific degree of Doctor of physical and mathematical sciencies. Kyiv Taras Shevcenko National University, 290 p.
7. **Shchogolev S. A.** (2007). O reshenyiah, predstavyimyih ryadami Furie s medlenno menyayushchimisya parametrami, quasilineynyih differentsialnyih sistem vtorogo poryadka [On a solutions, represented by a Fourier series with slowly varying parameters, of the quasilinear second-order differential systems], *Vysnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh., Vol. 12*, 7, 156–176.
8. **Kantorovich, L. V. & Akilov, G.P.** (1984). Funcional'nyi analiz [Functional analys], M.: Nauka, 752 p.

Щоголев С. А.

Аналог теореми Флоке—Ляпунова для лінійних диференціальних систем спеціального вигляду

Резюме

Аналог добре відомої в теорії лінійних диференціальних систем з періодичними коефіцієнтами теореми Флоке—Ляпунова побудовано за певних умов для лінійної диференціальної системи, коефіцієнти якої зображувані абсолютно та рівномірно збіжними рядами Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотою.

Ключові слова: лінійні диференціальні системи, ряди Фур'є, повільно змінні параметри.

Щёголев С. А.

Аналог теоремы Флоке—Ляпунова для линейных дифференциальных систем специального вида

Резюме

Аналог хорошо известной в теории линейных дифференциальных систем с периодическими коэффициентами теоремы Флоке—Ляпунова построен при определённых условиях для линейной дифференциальной системы, коэффициенты которой представимы абсолютно и равномерно сходящимися рядами Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой.

Ключевые слова: линейные дифференциальные системы, ряды Фурье, медленно меняющиеся параметры.

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ
(скорочений варіант)

Журнал «Дослідження в математиці і механіці» має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень, огляди з актуальних проблем за тематикою видання, а також повідомлення про ювілеї, знаменні дати та події.

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Електронну версію рукопису слід надсилати на e-mail журналу

rmm-journal@onu.edu.ua

або завантажувати через сайт журналу

www.rmm-journal.onu.edu.ua

Вона повинна складатися з

1) вихідного TEX-файла,
2) PDF-файла,
3) всіх допоміжних файлів (графіки, рисунки, ілюстрації тощо),
4) документа з анкетними даними авторів (прізвище, ім'я, по батькові, місце роботи, e-mail, адреса для листування та телефон).

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LATEX відповідно до вимог та з використанням шаблону, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті. Також вимоги можна отримати в редакційній колегії журналу.

Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 25 сторінок.

Структура статті:

— УДК;
— список авторів;
— місце роботи авторів;
— назва статті;
— резюме мовою оригіналу обсягом не менш як 100 слів;
— Mathematical Subject Classification (2010);
— список ключових слів мовою оригіналу;
— основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України «Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України» від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується подана стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому

напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером у квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформлюється відповідно до державного стандарту України ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 «Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання» та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008);

— анотації двома іншими мовами, які повинні містити назву, список авторів, резюме обсягом не менш як 100 слів та список ключових слів;

— додатково, якщо стаття написана українською або російською мовами, після анотацій подається список літератури у транслітерації, оформлений у відповідності до міжнародного стандарту *Harvard* (зразок та правила оформлення можна знайти в шаблоні статті на сайті).

Усі надіслані статті проходять анонімне рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу «Дослідження в математиці і механіці».

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, зокрема і у співавторстві.

Редакційна колегія журналу
«Дослідження в математиці і механіці»
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2
м. Одеса, 65082

Українською, російською та англійською мовами

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: серія КВ, № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

Затверджено до друку вченою радою
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова
Протокол № 8 від 24 квітня 2018 р.

Відповідальний за випуск *О. П. Огуленко*
Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*
Технічний редактор *М. М. Бушин*

Тираж 100 прим. Зам. № 330(68).

Адреса редколегії:
65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
astro_print@ukr.net
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Дослідження в математиці і механіці. – 2018. – Т. 23, вип. 1(31). – С. 1–159.