



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

# ДОСЛІДЖЕННЯ В МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

Науковий журнал

Виходить 2 рази на рік

Журнал заснований у січні 1997 р.

**Том 22. Випуск 2(30). 2017**

Одеса  
«Астропринт»  
2017

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

*Редакційна колегія журналу*

В. М. Євтухов (головний редактор)  
М. О. Перестюк (заступник головного редактора)

A. Alifov	В. Й. Жуковський	А. В. Плотніков
A. Ashyralyev	М. І. Іванчов	В. Г. Попов
K. Belkacem	А. Й. Калінін	В. В. Реут
Bui Minh Phong	В. О. Капустян	О. Г. Савченко
S. Dashkovskiy	О. В. Капустян	В. Г. Самойленко
D. S. Dzhumabaev	І. Т. Кігурадзе	Н. В. Скрипник
L. Fridman	О. Д. Кічмаренко	О. М. Станжицький
Yu. D. Karlunov	П. І. Когут	Е. Ю. Стороженко
I. Kátai	Ан. О. Кореновський	В. І. Суцанський
A. Laurinčikas	О. Ф. Кривий	Ю. В. Теплінський
C. K. Асланов	В. Г. Кротов	Р. С. Хапко
В. І. Берник	В. Є. Круглов	І. М. Черевко
О. А. Бойчук	В. В. Лобода	Ф. Л. Черноусько
Н. Д. Вайсфельд	С. І. Максименко	В. В. Шарко
П. Д. Варбанець	В. В. Михаськів	І. О. Шевчук
О. В. Вербицький	А. Д. Мілка	Г. А. Шинкаренко
О. Н. Вітюк	С. М. Мхитарян	В. Ф. Щербак
Г. О. Воропаєв	О. Г. Наконечний	С. А. Щоголєв
Д. В. Дмитришин	Ю. В. Нестеренко	А. І. Яцько
А. А. Дороговцев	А. П. Петравчук	
Я. О. Жук	В. В. Пічкур	

*Відповідальний редактор* — О. П. Огуленко

*Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу  
масової інформації серія КВ № 21400—11200ПР від  
17 червня 2015 р.*

*Журнал внесений до переліку наукових фахових видань наказом  
Міністерства освіти і науки України № 693 від 10.05.2017*

© Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2017

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE  
Odesa I. I. Mechnikov National University

# RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Scientific journal

Published twice a year

Journal founded in January, 1997

**Volume 22. Issue 2(30). 2017**

Odesa  
«Astroprint»  
2017

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

*Editorial board of the journal*

V. M. Evtukhov (Editor-in-chief)

M. O. Perestyuk (Deputy Editor-in-chief)

A. Alifov	O. D. Kichmarenko	O. G. Savchenko
A. Ashyralyev	I. T. Kiguradze	V. F. Scherbak
S. K. Aslanov	P. I. Kogut	V. V. Sharko
K. Belkacem	An. O. Korenovskyi	S. A. Shchogolev
V. I. Bernik	V. Krotov	I. A. Shevchuk
O. A. Boichuk	V. Ye. Kruglov	G. A. Shynkarenko
Bui Minh Phong	O. F. Kryvyi	N. V. Skripnik
I. M. Cherevko	A. Laurinčikas	O. M. Stanzhytskyi
F. L. Chernousko	V. V. Loboda	E. O. Storozhenko
S. Dashkovskiy	S. I. Maksymenko	W. I. Sushchansky
D. V. Dmitrishin	A. D. Milka	Yu. V. Teplinskyi
A. A. Dorogovtsev	S. M. Mkhitarian	P. D. Varbanets
D. S. Dzhumabaev	V. V. Mykhaskiv	N. D. Vaysfeld
L. Fridman	O. G. Nakonechny	O. V. Verbitsky
R. S. Hapko	Yu. V. Nesterenko	O. N. Vitjuk
M. I. Ivanchov	A. P. Petravchuk	G. O. Voropaev
I. Kátai	V. V. Pichkur	A. Yatsko
A. I. Kalinin	A. V. Plotnikov	Ya. O. Zhuk
Yu. D. Kaplunov	V. G. Popov	V. I. Zhukovsky
V. O. Kapustyan	V. V. Reut	
O. V. Kapustyan	V. G. Samoilenko	

*Executive Editor* — O. P. Ogulenko

*The certificate of mass media state registration under the number № 21400–11200IIP issued on June 17, 2015.*

*The journal was included in the list of scientific specialized publications by the order № 693 of Ministry of education and science of Ukraine issued on May 10, 2017.*

© Odesa I. I. Mechnikov National University, 2017

## ЗМІСТ

<i>Дудик М. В., Решітник Ю. В., Феньків В. М.</i> Контакт берегів міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу . . . . .	7
<i>Комлева Т. А., Плотникова Л. И., Плотников А. В.</i> Некоторые замечания к абсолютной непрерывности множественнозначных отображений . . . . .	17
<i>Корепанова Е. С.</i> Асимптотика одного класса решений обыкновенных дифференциальных уравнений $n$ -го порядка с правильно меняющимися нелинейностями . . . . .	28
<i>Пічкур В. В., Роговченко Т. М.</i> Про метод адаптивного налаштування параметрів регулятора в дискретні моменти часу . . . . .	45
<i>Тацій Р. М., Чмир О. Ю., Карабин О. О.</i> Загальні крайові задачі для гіперболічного рівняння із кусково-неперервними коефіцієнтами та правими частинами . . . . .	55
<i>Черникова А. Г.</i> Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью . . . . .	71
<i>Шацький І. П., Курташ І. С.</i> Гранична рівновага пластини із заповненою щільною під дією розтягу та згину . . . . .	85
<i>Щербій А. Б.</i> Вплив гнучкого покриття на граничну рівновагу циліндричної оболонки з тріщинами вздовж твірної . . . . .	94
<i>Юхименко Б. И., Волкова Н. П.</i> Приближенные алгоритмы решения задачи о многомерном ранце . . . . .	105
<i>Partsvania N.</i> On some nonlocal boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations with delay . . . . .	117

## CONTENTS

<i>Dudyk M. V., Reshitnyk Yu. V., Fen'kiv V. M.</i> Contact of the faces of the interfacial crack outcoming from angular point of the broken interface . . . . .	7
<i>Komleva T. A., Plotnikova L. I., Plotnikov A. V.</i> Some remarks on the absolute continuity of set-valued mappings . . . . .	17
<i>Korepanova K. S.</i> Asymptotics of one class of solutions of $n$ -th order ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities .	28
<i>Pichkur V. V., Rogovchenko T. M.</i> On an adaptive method of regulator parameters adjustment at discrete time points . . . . .	45
<i>Tatsij R.M., Chmyr O.Yu., Karabyn O.O.</i> The total boundary value problems for hiperbolic equation with piecewise continuous coefficients and right parts . . . . .	55
<i>Chernikova A. G.</i> Asymptotic behaviour of solutions of second-order differential equations with rapid varying nonlinearities . . . . .	71
<i>Shatskyi I. P., Kurtash I. S.</i> Limiting equilibrium of plate with filled slit under tension and bending . . . . .	85
<i>Shcherbii A. B.</i> Influence of flexible coating on limit equilibrium of cylindrical shell with cracks along a generatrix . . . . .	94
<i>Yukhymenko B. I., Volkova N. P.</i> Approximate algorithms for solving the multidimensional knapsack problem . . . . .	105
<i>Partsvania N.</i> On some nonlocal boundary value problems for non-linear ordinary differential equations with delay . . . . .	117

УДК 539.375

М. В. Дудик, Ю. В. Решітник, В. М. Феньків

Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

## КОНТАКТ БЕРЕГІВ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ, ЩО ВИХОДИТЬ З КУТОВОЇ ТОЧКИ ЛАМАНОЇ МЕЖІ ПОДІЛУ

В умовах плоскої деформації за допомогою методу Вінера-Хопфа знайдено розв'язок задачі про розрахунок маломасштабної контактної зони біля вершини міжфазної тріщини, що виходить з куткової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Отримано вирази для визначення довжини контактної зони і контактного напруження та виконано числовий аналіз їх залежності від пружних характеристик з'єднаних матеріалів, кута зламу межі поділу середовищ, конфігурації навантаження і коефіцієнта тертя.

MSC: 74B20, 74C05, 74G70.

Ключові слова: контактна зона, ламана межа поділу, міжфазна тріщина.

**Вступ.** Дослідження напружено-деформованого стану у кусково-однорідному тілі біля вершини міжфазної тріщини, що виходить з куткової точки ламаної межі поділу двох різних матеріалів, виявили наявність комплексного показника сингулярності напружень на певних інтервалах кутів зламу, які залежать від пружних характеристик з'єднаних матеріалів [1]. Комплексні значення показника сингулярності передбачають просторові осциляції берегів тріщини і, як наслідок, їх взаємний перетин, неможливий з фізичної точки зору. Для усунення цього протиріччя М.Комніоу [2] була запропонована модель тріщини, що припускає контакт берегів біля її вершини. В [3] за допомогою методу Вінера-Хопфа знайдено аналітичний розв'язок задачі про контактну зону малих розмірів для міжфазної тріщини, розташованої на плоскій межі поділу, при наявності тертя берегів і навантаженні, заданому коефіцієнтом інтенсивності напружень. В даній роботі аналогічне дослідження виконано у більш загальному випадку ламаної межі поділу.

**ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ 1. Постановка задачі.** В умовах плоскої деформації розглядається задача про розрахунок розмірів маломасштабної контактної зони біля вершини міжфазної тріщини, яка співпадає з кутовою точкою ламаної межі поділу двох різних пружних матеріалів з модулями Юнга  $E_1, E_2$ , коефіцієнтами Пуассона  $\nu_1, \nu_2$  і кутом зламу  $\alpha$ . Контактну зону моделюємо розрізом, береги якого взаємодіють за законом сухого тертя Кулона з коефіцієнтом тертя  $\mu$ . На розрізі передбачається стискувальне нормальне напруження і допускається стрибок лише дотичної складової переміщення.

Вважаючи довжину контактної зони  $s$  значно меншою порівняно з довжиною тріщини  $L$  та іншими суттєвими розмірами тіла, будемо розглядати тіло як кусково-однорідну площину з півнескінченим розрізом на одній з меж поділу, частина берегів якого, прилегла до вершини, перебуває у контакті, а решта - вільна від навантаження (Рис.1).

Малість контактної зони дозволяє сформулювати умову на нескінченості у вигляді вимоги можливості зшивання розшукуваного розв'язку з асимптотичним



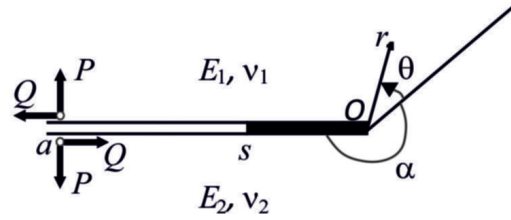


Рис. 1. Розрахункова модель контактної зони

розв'язком біля вершини тріщини аналогічної задачі про міжфазну тріщину без контакту берегів [4]. В результаті приходимо до статичної задачі теорії пружності з крайовими умовами:

$$\theta = 0 : \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \quad (1)$$

$$\theta = (2\pi - \alpha) \bigcup (-\alpha) : \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\mu \sigma_\theta; \quad (2)$$

$$\theta = (2\pi - \alpha) \bigcup (-\alpha) : \quad r < s, \quad \langle u_\theta \rangle = 0; \quad r > s, \quad \sigma_\theta = 0; \quad (3)$$

$$\theta = (2\pi - \alpha) \bigcup (-\alpha), \quad r \rightarrow \infty : \quad \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle = -\frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1} \sum_i (2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) r^{\lambda_i} + o(1/r). \quad (4)$$

де  $\langle f \rangle$  - стрибок величини  $f$ ;  $K_i$  - коефіцієнти інтенсивності напружень;  $\lambda_i$  - показники сингулярності, які є коренями характеристичного рівняння ( $-1 < \text{Re} \lambda_i < 0$ ) [4]:

$$D(-\lambda - 1) = 0, \quad (5)$$

$$D(p) = (1 + \kappa_1)^2 \Delta_1 + e^2(1 + \kappa_2)^2 \Delta_2 - 4(1 - e)^2 \Delta_1 \Delta_2 - 2(1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2) \Delta_3 + \\ - 4(1 - e)(1 + \kappa_1) \Delta_1 \sin^2 p(2\pi - \alpha) + 4(1 - e)e(1 + \kappa_2) \Delta_2 \sin^2 p\alpha,$$

$$\Delta_1 = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha,$$

$$\Delta_2 = p^2 \sin^2 \beta - \sin^2 p\beta, \quad \beta = 2\pi - \alpha,$$

$$\Delta_3 = p^2 \sin^2 \alpha + \sin p\alpha \sin p(2\pi - \alpha) \cos 2p\pi,$$

$$e = \frac{E_1(1 + \nu_2)}{E_2(1 + \nu_1)}, \quad \kappa_i = 3 - 4\nu_i,$$

$$F(\lambda_i, \alpha) = \frac{e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1)F_1(\lambda_i, \alpha) + eF_2(\lambda_i, \alpha)}{(1 + \kappa_1)(\lambda + 2)\Delta'_B(\lambda)},$$

$$F_1(\lambda_i, \alpha) = (1 + \kappa_1)\psi_1 + 2(1 - e)(\psi_2 - \psi_1) + e(1 + \kappa_2)(\psi_4 - \psi_1),$$

$$F_2(\lambda_i, \alpha) = 2e(1 + \kappa_2)t_3[(e - 1)\psi_6 - e(1 + \kappa_2)] + 4e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1)\psi_1 + \\ + 4(1 - e)^2 t_3 \psi_5 - (1 + \kappa_1)[(1 + \kappa_1) - 4(1 - e)t_2]\psi_5,$$

$$\psi_1 = \lambda \sin \alpha \sin(2\lambda\pi + \alpha) + \cos 2\lambda\pi - \cos(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda(2\pi - \alpha),$$

$$\psi_2 = (\lambda^2 + 3\lambda + 2) \sin^2 \alpha \cos 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha),$$

$$\psi_3 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha + \sin(\lambda + 1)\alpha \cos 2\lambda\pi \sin(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$\begin{aligned}
\psi_4 &= \lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 2\lambda\pi - \cos(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda\alpha, \\
\psi_5 &= 2\lambda(\lambda + 2) \sin^2 \alpha - 2 \sin \lambda\alpha \sin(\lambda + 2)\alpha + \\
&\quad + (1 + \kappa_2)[\lambda \sin^2 \alpha + 1 - \cos \lambda\alpha \cos(\lambda + 2)\alpha], \\
\psi_6 &= (1 + \kappa_2) \cos 2(\lambda + 1)\alpha + 4 \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \\
\Delta'_B &= 2(e - 1)t_3[2(e - 1)t_{13} + e(1 + \kappa_2) \sin(\lambda + 2)\alpha] - \\
&\quad - (1 + \kappa_1)t_{13}[4(e - 1)t_2 + (1 + \kappa_1)] + e(1 + \kappa_2)(1 + \kappa_1)t_{14}, \\
t_2 &= \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha), \\
t_3 &= (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha), \\
t_{12} &= (\lambda + 2) \sin \lambda\alpha + 2 \sin(\lambda + 2)\alpha, \\
t_{13} &= \lambda \cos(\lambda + 1)\alpha \sin \alpha - \sin \lambda\alpha.
\end{aligned}$$

Введені в (4) коефіцієнти інтенсивності напружень  $K_i$  через відсутність симетрії у будові кусково-однорідного тіла не зв'язні з певними модами навантаження. Надалі вважаємо їх заданими за умовою задачі і такими, що забезпечують стискувальні напруження на берегах контактної зони ( $\sigma_0(r, 2\pi - \alpha) = \sigma_0(r, -\alpha) < 0$  при  $r < s$ ).

Розв'язок сформульованої крайової задачі шукаємо у вигляді суми розв'язків наступних двох задач. Перша задача відрізняється від початкової тим, що замість першої з умов (3) використовуємо умову

$$\theta = (2\pi - \alpha) \cup (-\alpha), \quad r < s: \quad \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle = \frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1} \sum_i (2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) r^{\lambda_i}, \quad (6)$$

а на нескінченності  $\left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \sim o(1/r)$ . Друга задача – аналогічна задача без контактної зони, розв'язок якої відомий [4], тому достатньо знайти розв'язок першої задачі.

**2. Розв'язання задачі методом Вінера–Хопфа.** За допомогою інтегрального перетворення Мелліна сформульована крайова задача (1-4) зводиться до функціонального рівняння Вінера – Хопфа першої задачі у смугі  $-\varepsilon_1 < \text{Re } p < \varepsilon_2$  ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – достатньо малі позитивні числа), що містить уявну вісь:

$$\Phi^+(p) - \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i}}{p + 1 + \lambda_i} = -G_0(p) \frac{B \sin p\pi}{\sin(p - \lambda_0)\pi} \Phi^-(p), \quad (7)$$

$$\Phi^+(p) = \frac{E_1}{2(1 - \nu_1^2)} \int_1^\infty \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\theta=2\pi-\alpha \cup -\alpha}^{r=\rho s} \rho^p d\rho,$$

$$\Phi^-(p) = \int_0^1 \sigma_\theta(\rho s, 2\pi - \alpha) \rho^p d\rho,$$

$$G_0(p) = \frac{2D_0(p)}{D(p)} \frac{\sin(p - \lambda_0)\pi}{B(1 + \kappa_1) \sin p\pi}, \quad B = \frac{1 + \kappa_1 + e(1 + \kappa_2)}{2(1 + \kappa_1)},$$

$$\begin{aligned}
D_0(p) &= (1 - e)^3 2\mu \Delta_1 \Delta_2 - (1 - e) e^2 (1 + \kappa_2)^2 \Delta_4 - (1 - e)^2 e (1 + \kappa_2) \Delta_5 + \\
&\quad + (1 - e) (1 + \kappa_1) e (1 + \kappa_2) \Delta_6 + \\
&\quad + (1 - e) (1 + \kappa_1)^2 \Delta_7 - (1 - e)^2 (1 + \kappa_1) \Delta_8 + (1 + \kappa_1)^2 e (1 + \kappa_2) \Delta_9 - \\
&\quad - (1 + \kappa_1) e^2 (1 + \kappa_2)^2 \Delta_{10},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= \cos px + \mu \sin px, \delta_1 = p \sin \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha), \\
\Delta_4 &= \delta(\alpha) \Delta_2 \sin p\alpha, \\
\Delta_5 &= \Delta_4 + (\delta_1 + 2\mu \sin^2 p\alpha) \Delta_2, \\
\Delta_6 &= \delta(-\beta) \Delta_1 \sin p\beta, \\
\Delta_7 &= 2\delta(\alpha - \pi) (p^2 \sin^2 \alpha + \sin p\alpha \sin p\beta) \sin p(\alpha - \pi) - \\
&\quad - 4 \sin^2 p\pi (\delta_1 \cos^2 p(\alpha - \pi) + \mu \sin p\alpha \sin p\beta), \\
\Delta_8 &= \Delta_6 - (\delta_1 + 2\mu \sin^2 p\beta) \Delta_1, \\
\Delta_9 &= \sin^2 p\pi \cdot (\delta_1 - \delta(-\beta) \sin p\alpha), \\
\Delta_{10} &= \sin^2 p\pi \cdot (\delta_1 + \delta(\alpha) \sin p\beta),
\end{aligned}$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi} \arccos \left( \frac{-\mu\beta}{\sqrt{1+\mu^2\beta^2}} \right) - 1, \beta = \frac{(1+\epsilon\kappa_2)-(e+\kappa_1)}{(1+\epsilon\kappa_2)+(e+\kappa_1)} - \text{параметр Дундурса.}$$

Функція  $G_0(it)$  має парну додатну дійсну і непарну уявну частини, які при  $t \rightarrow \pm\infty$  прямують до 1 і 0 відповідно, тому індекс функції  $G_0(p)$  по уявній вісі дорівнює 0 і справедлива факторизація за формулою Гахова [5]:

$$G_0(p) = \frac{G_0^+(p)}{G_0^-(p)} \quad (Rep = 0), \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G_0^+(p), & Rep < 0, \\ G_0^-(p), & Rep > 0. \end{cases} \quad (8)$$

З теорії гамма-функцій Ейлера випливає подання [6]:

$$\frac{\sin p\pi}{\sin(p-\lambda_0)\pi} = \frac{p}{(p-\lambda_0)Q^+(p)Q^-(p)}, Q^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1 \mp p \pm \lambda_0)} \quad (9)$$

Використовуючи (8) і (9), перепишемо (7) у вигляді:

$$\begin{aligned}
&\frac{\Phi^+(p)Q^+(p)}{pG_0^+(p)} - \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i} \left[ \frac{Q^+(p)}{pG_0^+(p)} + \frac{Q^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i)G_0^+(-1-\lambda_i)} \right] = \\
&= -\frac{B\Phi^-(p)}{(p-\lambda_0)G_0^-(p)Q^-(p)} - \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i} \frac{Q^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i)G_0^+(-1-\lambda_i)} \quad (Rep = 0). \quad (10)
\end{aligned}$$

Ліва частина рівняння (10) є аналітичною функцією у півплощині  $Rep < 0$ , а права – у півплощині  $Rep > 0$ . Тому, згідно з принципом аналітичного продовження повинна існувати єдина функція, яка є аналітичною у всій комплексній площині  $p$  і дорівнює лівій і правій частинам цього рівняння у відповідних півплощинах. Щоб її знати дослідимо асимптотичну поведінку функцій, що входять в рівняння (10) на нескінченості. За допомогою формули Стерлінга отримаємо  $Q^\pm(p) \sim e^{\pm\lambda_0} (\mp p)^{\mp\lambda_0}$ , а з (8) випливає, що  $\lim_{p \rightarrow \infty} G_0^\pm(p) = 1$ . Врахуємо також, що у відповідності із загальними положеннями про поведінку напружень і переміщень біля концентраторів в кінці контактної зони мають місце сингулярності виду

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta(r, 2\pi - \alpha \cup -\alpha) &\sim M_1(s-r)^{-1-\lambda_0} \quad (r \rightarrow s-0), \\
\frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\theta=2\pi-\alpha \cup -\alpha} &\sim M_2(r-s)^{-1-\lambda_0} \quad (r \rightarrow s+0),
\end{aligned}$$

де  $M_1, M_2$  — деякі сталі. Тоді за теоремою абелева типу [7] знаходимо, що при  $p \rightarrow \infty$

$$\Phi^-(p) \sim M_1 \Gamma(-\lambda_0) s^{-1-\lambda_0} p^{\lambda_0}, \Phi^+(p) \sim M_2 \Gamma(-\lambda_0) s^{-1-\lambda_0} (-p)^{\lambda_0}. \quad (11)$$

Підставляючи знайдені вище асимптотики  $Q^\pm(p), G_0^\pm(p)$  та  $\Phi^\pm(p)$  в (10), знаходимо, що функції в її лівій і правій частинах на нескінченності обертаються в нуль. Отже, за теоремою Ліувіля єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулю у всій комплексній площині. Прирівнюючи обидві частини рівняння (10) до нуля, отримуємо його точний розв'язок:

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) &= \frac{p G_0^+(p)}{Q^+(p)} \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i} \left[ \frac{Q^+(p)}{p G_0^+(p)} + \frac{Q^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i) G_0^+(-1-\lambda_i)} \right] (Re p < 0), \\ \Phi^-(p) &= -\frac{(p-\lambda_0) G_0^-(p) Q^-(p)}{B} \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i} \frac{Q^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i) G_0^+(-1-\lambda_i)} (Re p > 0). \end{aligned} \quad (12)$$

**3. Розрахунок параметрів контактної зони.** З (12) випливає, що при  $p \rightarrow \infty$

$$\Phi^-(p) \sim -\frac{e^{-\lambda_0} p^{\lambda_0}}{B} \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i} Q^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i) G_0^+(-1-\lambda_i)} (Re p > 0). \quad (13)$$

Порівнюючи (11) з (13), знаходимо:

$$M_1 = -\frac{e^{-\lambda_0} s^{1+\lambda_0}}{B \Gamma(-\lambda_0)} \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i} Q^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i) G_0^+(-1-\lambda_i)}.$$

Оскільки в кінці контактної зони нормальне напруження обертається в 0 (при  $r > s$  тріщина відкрита), тому повинно бути  $M_1 = 0$ , що приводить до трансцендентного рівняння для визначення довжини контактної зони:

$$\sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i} Q^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i) G_0^+(-1-\lambda_i)} = 0. \quad (14)$$

У цьому рівнянні для підвищення точності можна взяти довільну кількість доданків з коренями характеристичного рівняння (5), що задовольняють умову  $Re \lambda_i > -1$ , проте для маломасштабної зони з  $s \ll L$  можна обмежитись лише двома найбільшими за модулем показниками сингулярності  $\lambda_1, \lambda_2 \sim -0,5$ , що дозволяє отримати вираз для довжини контактної зони

$$s = \left[ \frac{(2\pi)^{\lambda_1} K_1 F(\lambda_1, \alpha) Q^+(-1-\lambda_1) (1+\lambda_2) G_0^+(-1-\lambda_2)}{(2\pi)^{\lambda_2} K_2 F(\lambda_2, \alpha) Q^+(-1-\lambda_2) (1+\lambda_1) G_0^+(-1-\lambda_1)} \right]^{1/(\lambda_2-\lambda_1)}. \quad (15)$$

Даний вираз годиться як для дійсних  $\lambda_1, \lambda_2$ , так і для комплексно спряжених  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ . В останньому випадку в (15) використовуються комплексно спряжені коефіцієнти інтенсивності напружень  $K_1 = \bar{K}_2$ .

З розв'язку (12) визначили трансформанту нормального напруження на берегах тріщини та, застосувавши до неї зворотне перетворення Мелліна і теорему про лишки, знайшли вираз для контактної напруження:

$$\sigma_{\theta}(r, 2\pi - \alpha) = \sum_k \left[ \frac{(1 + \kappa_1) D(-1 - \lambda'_k)}{2D'_0(-1 - \lambda'_k)} \left(\frac{r}{s}\right)^{\lambda'_k} \frac{(1 + \lambda'_k) G_0^+(-1 - \lambda'_k)}{Q^+(-1 - \lambda'_k)} \times \right. \\ \left. \times \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i} Q^+(-1 - \lambda_i)}{(\lambda_i - \lambda'_k)(1 + \lambda_i) G_0^+(-1 - \lambda_i)} \right], \quad (16)$$

де  $\lambda'_k$  - корені рівняння

$$D_0(-1 - \lambda'_k) = 0 \quad (Re \lambda'_k > -1), \quad (17)$$

$D'_0(p) = dD_0(p)/dp$ . Для забезпечення точності при будь-яких  $0 \leq r \leq s$  необхідно в сумах по  $k$  брати якомога більше доданків. Вираз (16) вказує на те, що біля вершини тріщини зберігається концентрація напружень, яка характеризується показником сингулярності  $\lambda'_1$ .

**4. Аналіз числових результатів.** Згідно (14) і (15), довжина контактної зони при незмінній конфігурації зовнішнього навантаження не залежить від його модуля, який лінійно входить в коефіцієнти інтенсивності напружень. Для дослідження залежності розмірів контактної зони від конфігурації навантаження і параметрів композитного тіла розглянемо дію зосереджених сил з нормальними і дотичними компонентами  $P$  і  $Q$ , прикладених на відстані  $a \ll L$  від вершини тріщини до її берегів (рис. 1). Конфігурація навантаження визначалась відношенням  $n=P/Q$ . Коефіцієнти інтенсивності для даного випадку визначені в [4]. Результати числових розрахунків довжини контактної зони для окремих параметрів тіла і навантаження подані на рис. 2. В усіх розрахунках покладалось  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ .

Довжина контактної зони стрімко зменшується при зближенні пружних характеристик з'єднаних матеріалів (рис. 2a) та зі збільшенням відношення  $n=P/Q$  розтягувальних зусиль до зсувних (рис. 2c), набуваючи екстремально малих значень, для яких контактна модель міжфазної тріщини стає фізично некоректною. Навпаки, зусилля, що призводять до зсуву берега тріщини в менш жорсткому матеріалі відносно протилежного берега в напрямку від вершини, зумовлюють розміри зони, зрівнянні за порядком величини з довжиною тріщини, однак у цьому випадку порушується прийнята в даній роботі умова маломасштабності зони, і для великих її розмірів отриманий розв'язок стає необґрунтованим.

Залежність розміру контактної зони від тертя виявляється менш вираженою: її довжина повільно зростає зі збільшенням тертя (рис. 2d), що узгоджується з висновками робіт [3, 8, 9]. В той же час довжина області контакту берегів істотно залежить від кута зламу межі поділу з'єднаних матеріалів (рис. 2e): в цій залежності виявляється максимум при куті зламу, близькому до  $\alpha \approx 170^\circ$ .

Згідно (16), напруження біля вершини тріщини мають степеневу особливість з дійсним показником сингулярності  $-1 < \lambda'_1 < 0$  (рис. 3), що задовольняє рівняння (17). Таким чином, контактна зона усуває просторові осциляції переміщень і напружень біля вершини тріщини, характерні для класичної моделі міжфазної тріщини на ламаній межі поділу при кутах зламу в інтервалі  $60^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$ .

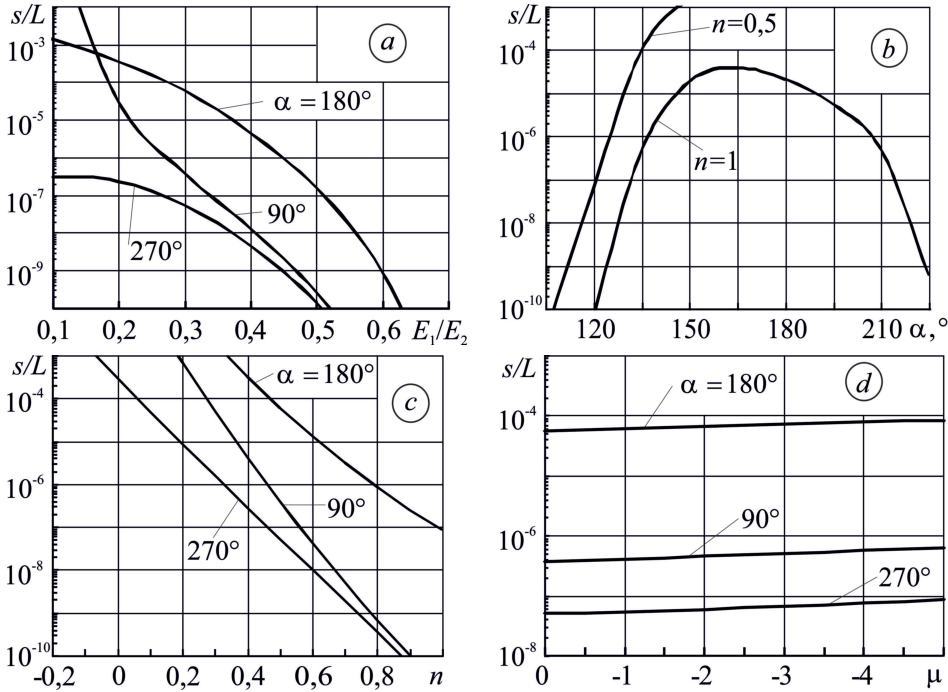


Рис. 2. Залежність довжини контактної зони від: а) відношення модулів Юнга для  $n=0,5$ ,  $\mu = -0,5$ ; б) кута зламу межі поділу для  $E_1/E_2=0,1$ ,  $\mu = -0,5$ ; в) конфігурації навантаження для  $E_1/E_2=0,3$ ,  $\mu = -0,5$ ; д) коефіцієнта тертя для  $E_1/E_2=0,3$ ,  $n=0,5$ .

Проте, при відмінному від 0 коефіцієнті тертя показник сингулярності на порівняно вузьких інтервалах кутів зламу може набути комплексних значень, які обумовлюють фізично некоректні просторові осциляції переміщень (штрихована ділянка на графіку  $\lambda'_1(\alpha)$  для  $\mu = -1$ , рис. 3).

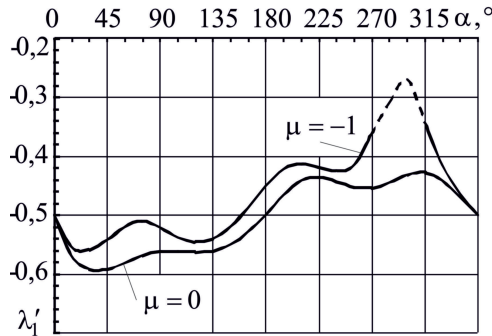


Рис. 3. Залежність показника сингулярності напружень від кута зламу межі поділу для  $E_1/E_2=0,3$ .

Розв'язання цього протиріччя, у відповідності з комплексною моделлю міжфазної тріщини [10], вбачаємо в утворенні зони передруйнування в околі верши-

ни. Зокрема, модель міжфазної тріщини з контактом берегів і бічною пластичною зоною передруйнування на плоскій межі поділу матеріалів розглянута в [11].

**Висновки.** За допомогою методу Вінера-Хопфа знайдено розв'язок задачі про розрахунок розмірів маломасштабної області контакту берегів біля вершини міжфазної тріщини, яка виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Між берегами тріщини передбачається взаємодія за законом сухого тертя. Отримано вирази для довжини контактної зони і контактного напруження та виконано числовий аналіз їх залежностей від пружних характеристик з'єднаних матеріалів, кута зламу, конфігурації зовнішнього навантаження і коефіцієнта тертя. Встановлено, що контакт берегів тріщини усуває фізично некоректні просторові осциляції переміщень, передбачувані класичною теорією міжфазних тріщин, за винятком досить вузького інтервалу кутів зламу.

1. **Дудик М. В.** Розвиток зони передруйнування від міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу двох пружних середовищ / М. В. Дудик, Ю. В. Діхтяренко // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2011. – Т.54, №2. – С.103–114.
2. **Comninou M.** The Interface crack / M. Comninou // J. Appl. Mech. - 1977. - Vol. 44. - P. 631-636.
3. **Камінський А. О.** Маломасштабна контактна зона з тертям берегів біля вершини міжфазної тріщини / А. О. Камінський, М. В. Дудик, Л. А. Кіпніс // Вісник Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2014. - №1. – С. 62-67.
4. **Дудик М. В.** Дослідження напружено-деформованого стану біля кутової точки межі поділу матеріалів, з якої виходить міжфазна тріщина / М. В. Дудик // Вісник ТНТУ.- 2014. № 3.- С. 87-98.
5. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
7. **Нобл Б.** Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных / Б. Нобл. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279с.
8. **Острик В. И.** Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости / В. И. Острик, А. Ф. Улитко. – К. : Наук. думка, 2006. – 328 с.
9. **Антипов Ю. А.** Трещина на линии раздела упругих сред при наличии сухого трения / Ю. А. Антипов // Прикл. мат. и мех. – 1995. – Т. 59, вып. 2. – С. 290-306.
10. **Каминский А. А.** О страгивании трещины, расположенной на границе раздела упругих сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис // Доповіді НАН України. – 2011. - №1. – С.38-43.
11. **Дудик М. В.** Вплив пластичної зони біля вершини міжфазної тріщини на контакт її берегів / М. В. Дудик // Дослідження в математиці і механіці. – 2015. – Т. 20, вип. 2(26). – С. 7–19.

Дудик М. В., Решетник Ю. В., Феньків В. М.

КОНТАКТ БЕРЕГОВ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ, ВЫХОДЯЩЕЙ ИЗ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ЛОМАНОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА

*Резюме*

В условиях плоской деформации с помощью метода Винера-Хопфа найдено решение задачи о расчете маломасштабной контактной зоны вблизи вершины межфазной трещины, выходящей из угловой точки ломаной границы раздела двух разных однородных изотропных материалов. Получены выражения для определения длины контактной зоны и контактного напряжения и выполнен числовой анализ их зависимости от упругих характеристик соединенных материалов, угла излома границы раздела сред, конфигурации нагрузки и коэффициента трения.

*Ключевые слова:* контактная зона, ломаная граница раздела, межфазная трещина .

Dudyk M. V., Reshitnyk Yu. V., Fen'kiv V. M.

CONTACT OF THE FACES OF THE INTERFACIAL CRACK OUTCOMING FROM ANGULAR POINT OF THE BROKEN INTERFACE

*Summary*

The model of the interfacial crack outcoming from the angular point of the broken interface of two different homogeneous isotropic materials has been developed. The model assumes the existence of a near the tip of the crack small-scale contact region of the faces interacting according to the law of dry friction. Owing to the small sizes of the contact zone the condition on the infinity as a demand of the possibility of sewing together the sought solution with the asymptotic solution near the crack tip of the analogous problem about an interfacial crack without contact of faces was formulated. The solution of the suitable static boundary-value problem of the theory of elasticity under the conditions of plane deformation is found by using the Wiener – Hopf method. The equations for the determination of the length of the contact zone and stress singularity index near the crack tip and an expression for the contact stress were obtained. The numerical analysis of the dependence of the contact zone length and stress singularity index on the external load configuration, friction and elastic characteristics of the joined materials was made. The fact that the length of the contact zone decreases impetuously under the normal component of the load increases or the moduli of elasticity of the joined materials become closer was discovered. At the same time, its dependence on the friction coefficient is less pronounced: with the enhancement of the friction of the faces, the length of the contact zone increases slightly. We have established that the contact of the faces eliminates the physically uncorrected spatial oscillation of the displacements predicted by the classic theory of the interfacial cracks with the exception of a narrow enough interval of the interfacial angle.

*Key words:* contact zone, broken interface, interfacial crack.

## REFERENCES

1. Dudyk, M. V. & Dikhtyarenko Yu. V. (2012). Development of a prefracture zone from an interfacial crack at a corner point of an interface of two elastic media. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol.184, 2, 121–135.
2. Comninou, M. (1977). The Interface crack. *Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, Vol. 44, 631–636.



3. Kaminsky, A. A., Dudik, M. V. & Kipnis, L.A. (2014). Malomasshtabna kontaktna zona z tertiam berehiv bilia vershyny mizhfaznoi trishchyny [Small-scale contact zone with friction of the faces near the tip of an interface crack]. *Visn. Kyiv. Nats. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauk.- Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics. No. 1*, 62–67 [in Ukrainian].
4. Dudyk, M. (2014). Doslidzhennia napruzhenno-deformovanoho stanu bilia kutovoi tochky mezhi podilu materialiv, z yakoi vykhodyt mizhfazna trishchyn [Investigation of the stress-strain state near the corner point of interface, from which the interfacial crack is initiated]. *Visnyk Ternopil'skogo nacionalnogo tekhnichnogo universytetu - Scientific Journal of the Ternopil National Technical University*, №3 (75), 87–98.
5. Gakhov, F. D. (1966). *Boundary Value Problems*. Oxford: Pergamon Press.
6. Abramowitz, M. & Stegun, I. A. (editors) (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. New York: Dover.
7. Noble, B. (1988). *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique*. New York.
8. Ostriuk, V. I. & Ulitko, A. F. (2006). *Metod Vinera-Hopfa v kontaktnykh zadachakh teorii uprugosti [Wiener-Hopf Method in Contact Problems of the Theory of Elasticity]*. Kiev: Naukova Dumka [in Russian].
9. Antipov Y. A. (1995). An interface crack between elastic materials when there is dry friction. *J. Appl. Math. Mech. (PMM)*, Vol.59, 2, 273–287.
10. Kaminsky, A. A. & Kipnis, L. A. (2011). O stragivaniu treshhiny, raspolozhennoj na granice razdela uprugih sred [On the start of a crack located on the interface of elastic media]. *Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy – Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, No. 1*, 38–43 [in Russian].
11. Dudyk, M. (2015). Vplyv plastychnoi zony bilia vershyny mizhfaznoi trishchyny na kontakt yii berehiv [Influence of plastic zone near the tip of interfacial crack on the contact of its lips]. *Doslidzhennia v matematytsi i mekhanitsi - Researches in Mathematics and Mechanics*, Vol. 20, 2 (26), 7–19.

УДК 517.9

Т. А. Комлева<sup>1</sup>, Л. И. Плотникова<sup>2</sup>, А. В. Плотников<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Одесская государственная академия строительства и архитектуры

<sup>2</sup>Одесский национальный политехнический университет

<sup>3</sup>Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

## НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ МНОЖЕСТВЕННОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В последнее время многие авторы рассматривали вопросы существования, единственности и свойства решений множественнозначных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, уравнений высших порядков, исследовали импульсные и управляемые системы в рамках теории множественнозначных уравнений. Очевидно, что получение всех этих результатов было бы невозможно без развития теории множественнозначного анализа. В частности при рассмотрении множественнозначных дифференциальных уравнений, когда правая часть удовлетворяет условиям Каратеодори, в качестве решений рассматриваются абсолютно непрерывные множественнозначные отображения. В статье показывается, что абсолютно непрерывные множественнозначные отображения (при имеющихся понятиях производной и интеграла) не удовлетворяют тем свойствам, которым удовлетворяют однозначные абсолютно непрерывные функции и предлагается ввести дополнительно понятие интегрально абсолютно непрерывного множественнозначного отображения.

MSC: 34A60, 34A12.

Ключевые слова: множественнозначность, абсолютная непрерывность, производная Хуксгары .

**ВВЕДЕНИЕ.** В последнее время в рамках теории множественнозначных уравнений были рассмотрены свойства решений множественнозначных дифференциальных уравнений, множественнозначных дифференциальных включений, множественнозначных интегро-дифференциальных уравнений и множественнозначных интегральных уравнений, а также исследовались импульсные множественнозначные системы и управляемые множественнозначные системы (см. [1-6] и ссылки в них). Очевидно, что получение всех этих результатов было невозможно без развития теории множественнозначного анализа. В данной работе сделаны некоторые замечания к абсолютной непрерывности множественнозначных отображений и тем самым показано отличие множественнозначного случая от однозначного, а так же вводится дополнительно понятие интегрально абсолютно непрерывного множественнозначного отображения.

### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**1. Необходимые определения и обозначения.** Пусть  $R^n$  -  $n$ -мерное пространство с евклидовой метрикой  $d(\cdot, \cdot)$ .

**Определение 1.** [7] Функция  $f : [a, b] \rightarrow R^n$  называется абсолютно непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что для любой конечной системы непересекающихся интервалов  $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^m$  из отрезка

$[a, b]$  таких, что  $\sum_{k=1}^m (b_k - a_k) < \delta$ , имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^m d(f(b_k), f(a_k)) < \varepsilon.$$

**Теорема 1.** [7, 8] Следующие утверждения являются эквивалентными:

- 1) функция  $f(\cdot)$  абсолютно непрерывна на  $[a, b]$ ;
- 2) функция  $f(\cdot)$  дифференцируема почти всюду на  $[a, b]$ ,  $f'(\cdot)$  интегрируема по Лебегу на  $[a, b]$  и для всех  $x \in [a, b]$  выполняется равенство  $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(s) ds$ ;
- 3) существует интегрируемая по Лебегу на отрезке  $[a, b]$  функция  $g(\cdot)$  такая, что для всех  $x \in [a, b]$  выполняется равенство  $f(x) = f(a) + \int_a^x g(s) ds$ .

**Замечание 1.** Следовательно, абсолютно непрерывные функции и только они восстанавливаются по своей производной интегрированием (вообще говоря, по Лебегу). Это свойство абсолютно непрерывных функций позволяет рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные включения, правая часть которых удовлетворяет условиям Каратеодори [9-11]. Для таких уравнений решениями определяются абсолютно непрерывные функции, которые удовлетворяют уравнению почти всюду на рассматриваемом промежутке.

Пусть  $\text{conv}(R^n)$  - метрическое пространство всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства  $R^n$  с метрикой Хаусдорфа

$$h(A, B) = \max \left\{ \max_{a \in A} \min_{b \in B} d(a, b), \max_{b \in B} \min_{a \in A} d(a, b) \right\},$$

где  $A, B \in \text{conv}(R^n)$ .

Как известно, пространство  $\text{conv}(R^n)$  не является линейным пространством относительно операций сложения и умножения на скаляр, так как в общем случае нельзя ввести противоположного для  $A \in \text{conv}(R^n)$  элемента, то есть в общем случае  $A + (-1)A \neq \{0\}$ , хотя, если  $A = \{a\} \in R^n$ , то для него противоположный элемент существует.

Отсутствие противоположного элемента в пространстве  $\text{conv}(R^n)$  приводит к неоднозначному введению понятия разности множеств и условиям ее существования. Наиболее распространенной и используемой в научных публикациях является разность Хукухары [12].

**Определение 2.** [12] Пусть  $X, Y \in \text{conv}(R^n)$ , а множество  $Z \in \text{conv}(R^n)$  таково, что  $X = Y + Z$ . Тогда множество  $Z$  мы будем называть разностью по Хукухаре множеств  $X$  и  $Y$  и писать  $Z = X \overset{h}{\setminus} Y$ .

Основными свойствами разности Хукухары [4] являются следующие:

- 1) если разность Хукухары двух множеств  $A \overset{h}{B}$  существует, то она единственная;
- 2)  $A \overset{h}{A} = \{0\}$  для любого  $A \in \text{conv}(R^n)$ ;
- 3)  $(A + B) \overset{h}{B} = A$  для любых  $A, B \in \text{conv}(R^n)$ .

Данная разность позволяет ввести следующее определение производной:

**Определение 3.** [12] Множественнозначное отображение  $F : [a, b] \rightarrow \text{conv}(R^n)$  называется дифференцируемым по Хукухаре в точке  $x \in [a, b]$ , если существует  $D_H F(x) \in \text{conv}(R^n)$  такое, что пределы

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} (F(x + \Delta) \overset{h}{-} F(x)) \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} (F(x) \overset{h}{-} F(x - \Delta))$$

существуют и равны  $D_H F(x)$ . Множество  $D_H F(x)$  при этом называется производной Хукухары множественнозначного отображения  $F : [a, b] \rightarrow \text{conv}(R^n)$  в точке  $x$ .

Заметим, что в данном определении предполагается, что для всех достаточно малых  $\Delta > 0$  разности  $F(x + \Delta) \overset{h}{-} F(x)$ ,  $F(x) \overset{h}{-} F(x - \Delta)$  существуют.

Далее покажем, что теорема аналогичная теореме 1 не справедлива для абсолютно непрерывных множественнозначных отображений при имеющихся определениях абсолютно непрерывного отображения, производной и интеграла.

**2. Абсолютно непрерывные множественнозначные отображения.** В начале приведем определение абсолютно непрерывного множественнозначного отображения:

**Определение 4.** [13, 14] Множественнозначное отображение  $F : [a, b] \rightarrow \text{conv}(R^n)$  называется абсолютно непрерывным на отрезке  $[a, b]$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что для любой конечной системы непересекающихся интервалов  $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^m$  из отрезка  $[a, b]$  таких, что  $\sum_{k=1}^m (b_k - a_k) < \delta$ , имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^m h(F(b_k), F(a_k)) < \varepsilon.$$

Очевидно, что данное определение обобщает определение 1 абсолютно непрерывной функции в пространстве  $R^n$ . Однако, далее мы покажем, что утверждения теоремы 1 не будут верны для множественнозначного случая.

Для этого введем следующие обозначения:

$AC[a, b]$  – множество множественнозначных отображений  $F : [a, b] \rightarrow \text{conv}(R^n)$ , удовлетворяющих определению 4.

$ACD[a, b]$  – множество множественнозначных отображений  $F : [a, b] \rightarrow \text{conv}(R^n)$  таких, что  $F(\cdot)$  дифференцируемо по Хукухаре почти всюду на  $[a, b]$ ,  $D_H F(\cdot)$  интегрируемо по Хукухаре [12] на  $[a, b]$  и для всех  $x \in [a, b]$  выполняется равенство

$$F(x) = F(a) + \int_a^x D_H F(s) ds.$$

$ACI[a, b]$  – множество множественнозначных отображений  $F : [a, b] \rightarrow conv(R^n)$  таких, что существует интегрируемое по Хукухару [12] на отрезке  $[a, b]$  множественнозначное отображение  $G(\cdot)$  такое, что для всех  $x \in [a, b]$  выполняется равенство

$$F(x) = F(a) + \int_a^x G(s) ds. \quad (1)$$

Далее докажем, что  $ACD[a, b] = ACI[a, b] \subset AC[a, b]$ , т.е. утверждения теоремы 1 не будут верны для множественнозначного случая.

**Лемма 1.**  $ACI[a, b] \subset AC[a, b]$ .

**Доказательство.** Возьмем произвольное множественнозначное отображение  $F(\cdot) \in ACI[a, b]$ . Из теоремы 4.1 [14] следует, что для того, чтобы множественнозначное отображение  $F : [a, b] \rightarrow conv(R^n)$  было представимо в виде (1) необходимо и достаточно, чтобы оно было абсолютно непрерывно в смысле определения 4 и удовлетворяло условию

- а) для любых  $x', x'' \in [a, b]$ ,  $x' < x''$  существует  $R(x', x'') \in conv(R^n)$  такое, что  $F(x'') = F(x') + R(x', x'')$ .

Следовательно,  $ACI[a, b] \subset AC[a, b]$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.**  $ACI[a, b] = ACD[a, b]$ .

**Доказательство.** Возьмем произвольное множественнозначное отображение  $F(\cdot) \in ACI[a, b]$ . Следовательно, существует интегрируемое по Хукухару множественнозначное отображение  $G(\cdot)$  такое, что  $F(x) = F(a) + \int_a^x G(s) ds$  для всех  $x \in [a, b]$ .

Из [12] следует, что для почти всех  $x \in [a, b]$  справедливо равенство

$$D_H \left( F(a) + \int_a^x G(s) ds \right) = \{0\} + D_H \left( \int_a^x G(s) ds \right) = G(x).$$

Следовательно, множественнозначное отображение  $F(\cdot)$  дифференцируемо по Хукухару для почти всех  $x \in [a, b]$  и  $D_H F(x) \equiv G(x)$ . Отсюда,  $F(\cdot) \in ACD[a, b]$ , то есть  $ACI[a, b] \subset ACD[a, b]$ .

Возьмем произвольное множественнозначное отображение  $F(\cdot) \in ACD[a, b]$ . Следовательно,  $F(\cdot)$  дифференцируемо по Хукухару почти всюду на  $[a, b]$ ,  $D_H F(\cdot)$  интегрируемо по Хукухару на  $[a, b]$  и для всех  $x \in [a, b]$  выполняется равенство  $F(x) = F(a) + \int_a^x D_H F(s) ds$ . Взяв  $G(x) \equiv D_H F(x)$  для всех  $x \in [a, b]$ , получаем, что  $F(\cdot) \in ACI[a, b]$ , то есть  $ACD[a, b] \subset ACI[a, b]$ . Лемма доказана.

**Лемма 3.**  $ACD[a, b] \subset AC[a, b]$ .

**Доказательство.** Из леммы 1 мы имеем  $ACI[a, b] \subset AC[a, b]$ . Из леммы 2  $ACI[a, b] = ACD[a, b]$ . Следовательно,  $ACD[a, b] \subset AC[a, b]$ . Лемма доказана.

Для демонстрации полученных результатов приведем следующие примеры.

**Пример 1.** Пусть  $F(x) = [-\cos(x), \cos(x)]$  для  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Множественнозначное отображение  $F(\cdot)$  не дифференцируемо по Хукхару на сегменте  $[0, \frac{\pi}{2}]$  и не существует множественнозначного отображения  $G(\cdot)$  такого, что  $F(x) = F(a) + \int_0^x G(s)ds$  для всех  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , так как диаметр  $F(x)$ , равный  $2\cos(x)$ , на этом сегменте убывает.

Теперь покажем, что множественнозначное отображение  $F(\cdot)$  является абсолютно непрерывным множественнозначным отображением на отрезке  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Выберем любое  $\varepsilon > 0$  и возьмем  $\delta = \varepsilon$ . Возьмем любую конечную систему непересекающихся интервалов  $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^m$  из отрезка  $[0, \frac{\pi}{2}]$  такую, что  $\sum_{k=1}^m (b_k - a_k) < \delta = \varepsilon$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^m h(F(b_k), F(a_k)) = \sum_{k=1}^m |\cos(b_k) - \cos(a_k)| \leq \sum_{k=1}^m |b_k - a_k| < \delta = \varepsilon.$$

Следовательно, множественнозначное отображение  $F(\cdot)$  является абсолютно непрерывным множественнозначным отображением в смысле определения 4.

**Пример 2.** Пусть для  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  и  $F(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} K$ , где  $K = \{f \in R^2 : |f_i| \leq 1, i = 1, 2\}$ .

Так как для любых двух  $x_1, x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$  разность Хукхару  $F(x_1) \overset{h}{\sim} F(x_2)$  не существует, то множественнозначное отображение  $F(x)$  не дифференцируемо по Хукхару на сегменте  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , т.е.  $F(\cdot) \notin ACD[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Так как множественнозначное отображение  $F(\cdot)$  не удовлетворяет условиям теоремы 4.1 из [14], то не существует множественнозначного отображения  $G(\cdot)$  такого, что  $F(x) = F(a) + \int_0^x G(s)ds$  для всех  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , т.е.  $F(\cdot) \notin ACI[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Теперь покажем, что множественнозначное отображение  $F(\cdot)$  является абсолютно непрерывным множественнозначным отображением на отрезке  $[0, \frac{\pi}{2}]$  в смысле определения 4. Выберем любое  $\varepsilon > 0$  и возьмем  $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ . Возьмем любую конечную систему непересекающихся интервалов  $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^m$  из отрезка  $[0, \frac{\pi}{2}]$  такую, что  $\sum_{k=1}^m (b_k - a_k) < \delta$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m h(F(b_k), F(a_k)) < \\ & < \sqrt{2} \sum_{k=1}^m \sqrt{\left(\sin\left(b_k + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(a_k + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \left(\cos\left(b_k + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(a_k + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2} = \\ & = \sqrt{2} \sum_{k=1}^m \sqrt{2 + 2\sin\left(b_k + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(a_k + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(b_k + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(a_k + \frac{\pi}{4}\right)} = \\ & = \sqrt{2} \sum_{k=1}^m \sqrt{2 + 2\cos(b_k - a_k)} = 2 \sum_{k=1}^m \sqrt{1 + \cos(b_k - a_k)} = \end{aligned}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^m \sqrt{2 \cos^2 \left( \frac{b_k - a_k}{2} \right)} = 2\sqrt{2} \sum_{k=1}^m \left| \cos \left( \frac{b_k - a_k}{2} \right) \right| < \sqrt{2} \sum_{k=1}^m |b_k - a_k| < \sqrt{2}\delta = \varepsilon.$$

Следовательно, множественнозначное отображение  $F(\cdot)$  является абсолютно непрерывным множественнозначным отображением на отрезке  $[0, \frac{\pi}{2}]$  в смысле определения 4.

Введем определение интегрального абсолютно непрерывного множественнозначного отображения.

**Определение 5.** Множественнозначное отображение  $F : [a, b] \rightarrow \text{conv}(R^n)$  называется интегрально абсолютно непрерывным на отрезке  $[a, b]$ , если существует интегрируемое по Хукхару множественнозначное отображение  $G : [a, b] \rightarrow \text{conv}(R^n)$  такое, что  $F(x) \equiv F(a) + \int_a^x G(s) ds$ .

**Замечание 2.** Как известно, аналогичное определение так же используют для определения абсолютно непрерывных функций на отрезке  $[a, b]$  в однозначном случае (смотри, например, [10, 15]) и в отличие от множественнозначного случая, согласно теореме 1, в однозначном случае это определение эквивалентно определению 1.

Тогда из лемм 1-3 следует справедливость следующей теоремы аналогичной теореме 1:

**Теорема 2.** Следующие утверждения являются эквивалентными:

- 1) отображение  $F(\cdot)$  интегрально абсолютно непрерывно на  $[a, b]$ ;
- 2) отображение  $F(\cdot)$  дифференцируемо по Хукхару почти всюду на  $[a, b]$ , отображение  $D_H F(\cdot)$  интегрируемо по Хукхару на  $[a, b]$  и для всех  $x \in [a, b]$  справедливо равенство  $F(x) = F(a) + \int_a^x D_H F(s) ds$ ;
- 3) существует интегрируемое по Хукхару на отрезке  $[a, b]$  отображение  $G(\cdot)$  такое, что для всех  $x \in [a, b]$  справедливо равенство  $F(x) = F(a) + \int_a^x G(s) ds$ .

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** В заключение сделаем несколько замечаний:

**Замечание 3.** Из лемм 1-3 следует, что в отличие от теории однозначных функций, для множественнозначных отображений, удовлетворяющих условию определения 4, не выполняется теорема 1.

**Замечание 4.** При рассмотрении дифференциальных уравнений с производной Хукхару, удовлетворяющих условию Каратеодори, при введении понятия решения необходимо использовать интегрально абсолютно непрерывные множественнозначные отображения.

**Замечание 5.** В случае, когда вместо производной Хукхары рассматривается обобщенная производная в смысле [16-18], необходимо использовать следующее определение интегрально абсолютно непрерывного множественнозначного отображения:

**Определение 6.** Множественнозначное отображение  $F : [a, b] \rightarrow \text{conv}(R^n)$  называется интегрально абсолютно непрерывным на отрезке  $[a, b]$ , если существует интегрируемое по Хукхару множественнозначное отображение  $G : [a, b] \rightarrow \text{conv}(R^n)$  такое, что существует конечное разбиение отрезка  $[a, b]$  точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$  такое, что на каждом сегменте  $[x_i, x_{i+1}]$  выполняется одно из равенств  $F(x) = F(x_i) + \int_{x_i}^x G(s)ds$  или  $F(x_i) = F(x) + \int_{x_i}^x G(s)ds$ .

Тогда будет выполняться следующая теорема аналогичная теореме 2:

**Теорема 3.** Следующие утверждения являются эквивалентными:

- 1) отображение  $F(\cdot)$  интегрально абсолютно непрерывно в смысле определения 6 на  $[a, b]$ ;
- 2) отображение  $F(\cdot)$  дифференцируемо в смысле обобщенной производной [16-18] почти всюду на  $[a, b]$ , отображение  $DF(\cdot)$  интегрируемо по Хукхару на  $[a, b]$  и существует конечное разбиение отрезка  $[a, b]$  точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$  такое, что на каждом сегменте  $[x_i, x_{i+1}]$  выполняется одно из равенств  $F(x) = F(x_i) + \int_{x_i}^x DF(s)ds$  или  $F(x_i) = F(x) + \int_{x_i}^x DF(s)ds$ .
- 3) существует интегрируемое по Хукхару на отрезке  $[a, b]$  отображение  $G(\cdot)$  такое, что существует конечное разбиение отрезка  $[a, b]$  точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$  такое, что на каждом сегменте  $[x_i, x_{i+1}]$  выполняется одно из равенств  $F(x) = F(x_i) + \int_{x_i}^x G(s)ds$  или  $F(x_i) = F(x) + \int_{x_i}^x G(s)ds$ .

**Замечание 6.** В случае, если размерность пространства равняется единице и вместо производной Хукхары рассматривается обобщенная производная в смысле [19], необходимо использовать следующее определение интегрально абсолютно непрерывного сегментнозначного отображения.

**Определение 7.** Сегментнозначное отображение  $F : [a, b] \rightarrow \text{conv}(R)$  называется интегрально абсолютно непрерывным на отрезке  $[a, b]$ , если существует интегрируемое по Хукхару сегментнозначное отображение  $G : [a, b] \rightarrow \text{conv}(R)$  такое, что на отрезке  $[a, b]$  выполняется одно из равенств  $F(x) = F(a) + \int_a^x G(s)ds$  или  $F(a) = F(x) + (-1) \int_a^x G(s)ds$ .



Тогда будет выполняться следующая теорема аналогичная теореме 2:

**Теорема 4.** Следующие утверждения являются эквивалентными:

- 1) отображение  $F(\cdot)$  интегрально абсолютно непрерывное в смысле определения 7 на  $[a, b]$ ;
- 2) отображение  $F(\cdot)$  дифференцируемо в смысле обобщенной производной [19] почти всюду на  $[a, b]$ , отображение  $D_{gh}F(\cdot)$  интегрируемо по Хукухару на  $[a, b]$  и для всех  $x \in [a, b]$  выполняется одно из равенств  $F(x) = F(a) + \int_a^x D_{gh}F(s)ds$  или  $F(a) = F(x) + (-1) \int_a^x D_{gh}F(s)ds$ ;
- 3) существует интегрируемое по Хукухару на отрезке  $[a, b]$  отображение  $G(\cdot)$  такое, что для всех  $x \in [a, b]$  выполняется одно из равенств  $F(x) = F(a) + \int_a^x G(s)ds$  или  $F(a) = F(x) + (-1) \int_a^x G(s)ds$ .

**Замечание 7.** Очевидно, что замечания 3-6 справедливы для нечетких отображений и для соответствующих нечетких дифференциальных уравнений [4, 20-24].

1. **Aubin J.-P.** Differential Inclusions. Set-valued maps and Viability Theory / J.-P. Aubin, A. Cellina. – Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo: Springer–Verlag, 1984, 342 p.
2. **Lakshmikantham V.** Theory of set differential equations in metric spaces / V. Lakshmikantham, T. Granna Bhaskar, J. Vasundhara Devi. – Cambridge Scientific Publishers, 2006, 204 p.
3. **Perestyuk N.A.** Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities / N.A. Perestyuk, V.A. Plotnikov, A.M. Samoilenko, N.V. Skripnik. – de Gruyter Stud. Math. Vol. 40. – Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH & Co, 2011, 309 p.
4. **Плотников А.В.** Дифференциальные уравнения с четкой и нечеткой правой частью. Асимптотические методы / А.В. Плотников, Н.В. Скрипник. – Одесса: АстроПринт, 2009, 192 с.
5. **Плотников В.А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В.А. Плотников, А.В. Плотников, А.Н. Витюк. – Одесса: АстроПринт, 1999, 355 с.
6. **Половинкин Е.С.** Многозначный анализ и дифференциальные включения / Е.С. Половинкин. – М.: Физматлит, 2014, 597 с.
7. **Natanson I.P.** Theory of functions of a real variable / I.P. Natanson. – Translated by Leo F. Boron with the collaboration of Edwin Hewitt. – New York: Frederick Ungar Publishing Co., 1955, 277 p.
8. **Кадец В.М.** Функциональный анализ / В.М. Кадец. – Харьков: ХНУ, 2006, 607 с.
9. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1985, 255 с.
10. **Егоров А.И.** Классификация решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка / А.И. Егоров. – М.: Физматлит, 2013, 108 с.

11. **Финогенко И.А.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / И.А. Финогенко. – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2013, 82 с.
12. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe / M. Hukuhara. // Funkcial. Ekvac. – 1967. – №10. – P. 205–223.
13. **Kikuchi N.** On the absolute continuity of multi-functions and orientor fields / N. Kikuchi, Y. Tomita. // Funkcial. Ekvac. – 1971. – №14. – P. 161–170.
14. **Arstein Z.** On the calculus of closed set-valued functions / Z. Arstein. // Indiana Univ. Math. J. – 1974. – V.24, №5. – P. 433–441.
15. **Nikolsky S.M.** A course of mathematical analysis / S.M. Nikolsky. – Vol. 2. Reprint of the 1977 translation by V. M. Volosov. – Moscow: Mir, 1985, 440 p.
16. **Plotnikov A.V.** Set-Valued Differential Equations With Generalized Derivative / A.V. Plotnikov, N.V. Skripnik. // Journal of Advanced Research in Pure Mathematics. – 2011. – V. 3, №1. – P. 144–160.
17. **Plotnikov A.V.** An Existence and Uniqueness Theorem to the Cauchy Problem for Generalised Set Differential Equations / A.V. Plotnikov, N.V. Skripnik. // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis.– 2013. – V.20, №4. – P. 433–445.
18. **Плотников А.В.** Многочленные дифференциальные уравнения с обобщенной производной / А.В. Плотников, Н.В. Скрипник. // Укр. мат. журн. – 2013. – Т. 65, №10. – С. 1350–1362.
19. **Bede B.** Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations / B. Bede, L. Stefanini. – Univ. Urbino "Carlo Bo", Working Paper Series in Economics, Math. and Statistics, WP-EMS # 2008/03, 2008.
20. **Plotnikov A.V.** Fuzzy Differential Equations with Generalized Derivative / A.V. Plotnikov, N.V. Skripnik // Journal of Fuzzy Set Valued Analysis. – 2012. – V. 2012, Article ID jfsva00113. – 12 pages.
21. **Plotnikov A.V.** New Definition of a Generalized Fuzzy Derivative / A.V. Plotnikov, N.V. Skripnik // Journal of Advanced Research in Pure Mathematics. – 2014. - V.6, №3. – P. 69-77.
22. **Bede B.** Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations / B. Bede, S.G. Gal // Fuzzy Sets Syst. – 2005. - №. 151. - P. 581–599.
23. **Gomes L.T.** Fuzzy differential equations in various approaches. / L.T. Gomes, L.C. de Barros, B. Bede – SpringerBriefs in Mathematics. Heidelberg–New York–Dordrecht–London: Springer, 2015, 119 p.
24. **Bede B.** Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic. / B. Bede – Studies in fuzziness and soft computing, Vol. 295. Berlin-Heidelberg: Springer-verlag, 2013, 258 p.

*Комлева Т. О., Плотникова Л. И., Плотников А. В., Скрипник Н. В.*

ДЕЯКІ ЗАУВАЖЕННЯ ДО АБСОЛЮТНОЇ НЕПЕРЕРВНОСТІ МНОЖИННОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

*Резюме*

В останній час багато авторів розглядали питання існування, єдиності та властивості розв'язків множиннозначних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь, рівнянь вищих порядків, досліджували імпульсних та керованих систем в рамках теорії

множиннозначних рівнянь. Вочевидь, отримання всіх цих результатів було б неможливим без розвитку теорії множиннозначного аналізу. Зокрема при розгляді множиннозначних диференціальних рівнянь, коли права частина задовольняє умовам Каратеодорі, як рішення розглядаються абсолютно неперервні множиннозначні відображення. У статті показується, що абсолютно неперервні множиннозначні відображення (при наявних поняттях похідної та інтеграла) не задовольняють тим властивостям, яким задовольняють однозначні абсолютно неперервні функції та пропонується ввести додатково поняття інтегрально абсолютно неперервного множиннозначного відображення.

*Ключові слова:* множиннозначність, абсолютна неперервність, похідна Хукухари .

*Komleva T. A., Plotnikova L. I., Plotnikov A. V.*

SOME REMARKS ON THE ABSOLUTE CONTINUITY OF SET-VALUED MAPPINGS

*Summary*

Recently, many authors have considered the existence, uniqueness and properties of solutions of set-valued differential and integral-differential equations, higher-order equations and investigated impulsive and control systems within the framework of the theory of set-valued equations. Obviously, obtaining all these results would be impossible without the development of the theory of set-valued analysis. In particular, when considering set-valued differential equations, when the right-hand side satisfies Caratheodory conditions, absolutely continuous set-valued mappings are considered as solutions. The article show that absolutely continuous set-valued mappings (under the existing concepts of the derivative and integral) do not satisfy those properties that are satisfied by single-valued absolutely continuous functions and therefore it is proposed to introduce additionally the concept of a integrally absolutely continuous set-valued mapping.

*Key words:* set-valued, absolutely continuous, Hukuhara derivative.

## REFERENCES

1. Aubin, J.-P., Cellina, A. (1984). *Differential Inclusions. Set-valued maps and Viability Theory*. Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo: Springer–Verlag, 342 p.
2. Lakshmikantham, V., Granna Bhaskar, T. and Vasundhara Devi, J. (2006). *Theory of set differential equations in metric spaces*. Cambridge Scientific Publishers, 204 p.
3. Perestyuk, N.A., Plotnikov, V.A., Samoilenko, A.M. and Skripnik, N.V. (2011). *Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities*. de Gruyter Stud. Math. Vol. 40, Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH& Co, 309 p.
4. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2009). *Differential equations with "clear" and fuzzy multivalued right-hand side. Asymptotics methods*. Odessa: AstroPrint, 192 p.
5. Plotnikov, V.A., Plotnikov, A.V. and Vityuk, A.N. (1999). *Differential equations with multivalued right-hand side. Asymptotic methods*. Odessa: AstroPrint, 355 p.
6. Polovinkin, E.S. (2014) *Multivalued analysis and differential inclusions*. Moscow: FIZMATLIT, 597 p.
7. Natanson, I.P. (1955). *Theory of functions of a real variable*. Translated by Leo F. Boron with the collaboration of Edwin Hewitt. New York: Frederick Ungar Publishing Co., 277 p.

8. Kadets, V.M. (2006). *Functional Analysis*. Kharkiv: V. N. Karazin Kharkiv National University, 607 p.
9. Filippov, A.F. (1985). *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Kluwer Academic Publishers, 307 p.
10. Egorov, A.I. (2013) *Classification of solutions of ordinary differential equations of the first order*. Moscow: FIZMATLIT, 108 p.
11. Finogenko, I.A. (1985). *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Irkutsk: IDSTU SO RAN, 82 p.
12. Hukuhara, M. (1967). Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcial. Ekvac.*, №10, P. 205–223.
13. Kikuchi, N., Tomita, Y. (1971). On the absolute continuity of multi-functions and orientor fields. *Funkcial. Ekvac.*, №14, P. 161–170.
14. Arstein, Z. (1974). On the calculus of closed set-valued functions. *Indiana Univ. Math. J.*, V.24, №5, P. 433–441.
15. Nikolsky, S.M. (1985). *A course of mathematical analysis*. Vol. 2. Reprint of the 1977 translation by V. M. Volosov. Moscow: Mir, 440 p.
16. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2011). Set-Valued Differential Equations With Generalized Derivative. *Journal of Advanced Research in Pure Mathematics*, V.3, №1, P. 144–160.
17. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2013). An Existence and Uniqueness Theorem to the Cauchy Problem for Generalised Set Differential Equations. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis*, V.20, №4, P. 433–445.
18. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2014). Conditions for the Existence of Local Solutions of Set-Valued Differential Equations with Generalized Derivative. *Ukrainian Math. J.*, V.65, № 10, P. 1498–1513
19. Bede, B., Stefanini, L. (2008). *Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations*. Univ. Urbino "Carlo Bo", Working Paper Series in Economics, Math. and Statistics, WP-EMS # 2008/03.
20. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2012). Fuzzy Differential Equations with Generalized Derivative. *Journal of Fuzzy Set Valued Analysis*, V. 2012, Article ID jfsva00113, 12 pages.
21. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2014). New Definition of a Generalized Fuzzy Derivative. *Journal of Advanced Research in Pure Mathematics*, V.6, №3, P. 69–77.
22. Bede, B., Gal, S.G. (2005). Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets Syst.*, №151, P. 581–599.
23. Gomes, L.T., de Barros, L.C. and Bede, B. (2015). *Fuzzy differential equations in various approaches*. SpringerBriefs in Mathematics. Heidelberg–New York–Dordrecht–London: Springer, 119 p.
24. Bede, B. (2013). *Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic*. Studies in fuzziness and soft computing, V. 295. Berlin-Heidelberg: Springer-verlag, 258 p.

УДК 517.925

**Е. С. Корепанова**

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова

**АСИМПТОТИКА ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ  
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  $N$ -ГО  
ПОРЯДКА С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ  
НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ**

В настоящей работе для двучленного неавтономного обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка с правильно меняющимися нелинейностями устанавливаются условия существования решений, для которых существует  $k \in \{3, \dots, n\}$  такое, что  $(n-k)$ -я производная решения стремится к отличной от нуля константе при стремлении аргумента к  $+\infty$ , а также асимптотические представления их производных до порядка  $n-1$  включительно. При изучении данного вопроса возникают проблемы с установлением асимптотики  $(n-k+1)$ -й и последующих производных решения. В связи с этим вводится класс, так называемых,  $\mathcal{P}_{+\infty}^k(\lambda_0)$ -решений, где  $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$ , и исследуется вопрос о наличии и асимптотике  $\mathcal{P}_{+\infty}^k(\lambda_0)$ -решений в особых случаях, когда  $\lambda_0 = \frac{n-j-1}{n-j}$ ,  $j = n-k+2, n-1$ . Все остальные неособые случаи были исследованы в предыдущих работах автора. Полученные результаты существенно дополняют исследования о существовании решений такого вида в монографии И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурия для уравнений общего вида и дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера, в которых накладывается достаточно жесткое ограничение на  $(n-k+1)$ -ю производную решения.

*MSC: 34D05, 34C11.*

*Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, высший порядок, правильно меняющиеся нелинейности, класс  $\mathcal{P}_{+\infty}^k(\lambda_0)$ -решений, условия существования, асимптотика решений.*

**ВВЕДЕНИЕ.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \alpha p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}), \quad (1.1)$$

в котором  $n \geq 3$ ,  $\alpha \in \{-1, 1\}$ ,  $p : [a, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  — непрерывная функция,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_j : \Delta Y_j \rightarrow ]0, +\infty[$  — непрерывная и правильно меняющаяся при  $y^{(j)} \rightarrow Y_j$  функция порядка  $\sigma_j$ ,  $j = \overline{0, n-1}$ ,  $\Delta Y_j$  — некоторая односторонняя окрестность точки  $Y_j$ ,  $Y_j \in \{0, \pm \infty\}^*$ .

Среди множества всех монотонных решений уравнения (1.1), заданных в некоторой окрестности  $+\infty$ , выделим решения, для которых существует  $k \in \{1, \dots, n\}$  такое, что

$$y^{(n-k)}(t) = c + o(1) \quad (c \neq 0) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (1.2_k)$$

\*При  $Y_j = \pm \infty$  здесь и далее будем полагать, что все числа из окрестности  $\Delta Y_j$  одного знака.

Некоторые результаты о существовании степенных решений вида (1.2<sub>k</sub>) были получены в широко известной монографии И.Т. Кигурадзе и Т.А Чантурия [7] в следствиях 8.2, 8.6, 8.12 [7, Гл. II, §8, стр. 207, 214, 223] и следствиях 9.3, 9.7 [7, Гл. II, §9, стр. 230, 233] для уравнений общего вида и теореме 16.9 [7, Гл. IV, §16, стр. 321] для дифференциальных уравнений типа Эмдена-Фаулера. Однако эти результаты обеспечивают достаточно жесткое ограничение на  $(n - k + 1)$ -ю и последующие производные решения.

При  $k = 1, 2$  или в случае, когда пределы  $\varphi_i(y^{(i)})$  ( $i = \overline{n - k + 1, n - 2}$ ) при  $y^{(i)} \rightarrow Y_i$  равны положительным постоянным, вопрос о наличии решений вида (1.2<sub>k</sub>) у уравнения (1.1) и их асимптотике был решен в работах [4] и [8] без дополнительных ограничений на эти решения. В противном случае — в работе [10] было введено следующее определение.

**Определение.** *Решение  $y$  дифференциального уравнения (1.1) будем при  $k \in \{3, \dots, n\}$  называть  $\mathcal{P}_{+\infty}^k(\lambda_0)$ -решением, где  $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$ , если оно определено на промежутке  $[t_{0k}, +\infty[ \subset [a, +\infty[$  и удовлетворяет следующим условиям*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y^{(n-k)}(t) = c \quad (c \neq 0), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n-2)}(t)y^{(n)}(t)} = \lambda_0. \quad (1.3)$$

Из первого соотношения (1.3) непосредственно следует, что для таких решений имеют место следующие представления

$$y^{(l-1)}(t) = \frac{ct^{n-l-k+1}}{(n-l-k+1)!} [1 + o(1)] \quad (l = \overline{1, n-k}) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty \quad (1.4_k)$$

и  $c \in \Delta Y_{n-k}$ .

Из вида уравнения (1.1) становится очевидно, что  $y^{(n)}(t)$  сохраняет знак в некоторой окрестности  $+\infty$ . Тогда  $y^{(n-l)}(t)$  ( $l = \overline{1, k-1}$ ) являются строго монотонными функциями в окрестности  $+\infty$  и в силу (1.2<sub>k</sub>) могут стремиться только к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ . Поэтому также необходимо, чтобы

$$Y_{j-1} = 0 \quad \text{при } j = \overline{n-k+2, n}. \quad (1.5_k)$$

Всюду далее будем предполагать, что числа  $\mu_j$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ), определяемые следующим образом:

$$\mu_j = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_j = +\infty, \\ & \text{либо } Y_j = 0 \text{ и } \Delta Y_j \text{ — правая окрестность } 0, \\ -1, & \text{если } Y_j = -\infty, \\ & \text{либо } Y_j = 0 \text{ и } \Delta Y_j \text{ — левая окрестность } 0, \end{cases}$$

таковы, что

$$\mu_j \mu_{j+1} > 0 \quad \text{при } j = \overline{0, n-k-1}, \quad \mu_j \mu_{j+1} < 0 \quad \text{при } j = \overline{n-k+1, n-2}, \quad (1.6_k)$$

$$\alpha \mu_{n-1} < 0. \quad (1.7_k)$$

Данные условия на  $\mu_j$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ) и  $\alpha$  являются необходимыми для существования у уравнения (1.1)  $\mathcal{P}_{+\infty}^k(\lambda_0)$ -решений, поскольку для каждого из них в некоторой окрестности  $+\infty$

$$\text{sign } y^{(j)}(t) = \mu_j \quad (j = \overline{0, n-1}), \quad \text{sign } y^{(n)}(t) = \alpha.$$

Кроме того, для таких решений из (1.4<sub>k</sub>) следует, что

$$Y_{j-1} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \mu_{n-k} > 0, \\ -\infty, & \text{если } \mu_{n-k} < 0, \end{cases} \quad \text{при } j = \overline{1, n-k}. \quad (1.8_k)$$

Согласно работе [2] по своим асимптотическим свойствам множество всех  $\mathcal{P}_{+\infty}^k(\lambda_0)$ -решений уравнения (1.1) распадается на  $k+1$  непересекающихся подмножеств, которые соответствуют следующим значениям параметра  $\lambda_0$ :

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{k-3}{k-2}, 1 \right\}, \quad \lambda_0 = \pm\infty, \quad \lambda_0 = 1,$$

$$\lambda_0 = \frac{n-j-1}{n-j}, \quad j \in \{n-k+2, \dots, n-1\}.$$

Случай  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{k-3}{k-2}, 1 \right\}$  был исследован в работе [10], получены необходимые и достаточные условия существования у уравнения (1.1)  $\mathcal{P}_{+\infty}^k(\lambda_0)$ -решений. Целью настоящей работы является установление необходимых и достаточных условий существования у уравнения (1.1)  $\mathcal{P}_{+\infty}^k(\lambda_0)$ -решений ( $k \in \{3, \dots, n\}$ ) в особых случаях, когда  $\lambda_0 = \frac{n-j-1}{n-j}$ ,  $j = \overline{n-k+2, n-1}$ , а также асимптотических при  $t \rightarrow +\infty$  формул для всех их производных до порядка  $n-1$  включительно. Кроме того, решается вопрос о количестве таких решений.

Отметим, что в силу полученных результатов из работы В.М. Евтухова [2] исследуемые решения уравнения (1.1) обладают следующими априорными асимптотическими свойствами.

**Лемма 1.1.** Пусть  $k \in \{3, \dots, n\}$  и  $y : [t_{0k}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  — произвольное  $\mathcal{P}_{+\infty}^k(\lambda_0)$ -решение уравнения (1.1). Тогда если  $\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i}$  для некоторого  $i \in \{n-k+2, \dots, n-1\}$ , то имеют место асимптотические при  $t \rightarrow +\infty$  соотношения

$$y^{(l-1)}(t) \sim \frac{t^{i-l}}{(i-l)!} y^{(i-1)}(t) \quad (l = \overline{n-k+2, i-1})^\dagger, \quad (1.9)$$

$$y^{(i)}(t) = o\left(\frac{y^{(i-1)}(t)}{t}\right), \quad (1.10)$$

$$y^{(l)}(t) \sim (-1)^{l-i} \frac{(l-i)!}{t^{l-i}} y^{(i)}(t) \quad (l = \overline{i+1, n}), \quad (1.11)$$

причем в случае, когда  $i = n-1$ , соотношение (1.11) имеет место при дополнительном условии существования конечного или равного  $\pm\infty$   $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{ty^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$ .

В уравнении (1.1) каждая из функций  $\varphi_j$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ), будучи правильно меняющейся при  $y^{(j)} \rightarrow Y_j$  функцией порядка  $\sigma_j$ , представима (см. [9], гл. I, §1, с.10) в виде

$$\varphi_j(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_j} L_j(y^{(j)}) \quad (j = \overline{0, n-1}), \quad (1.12)$$

где  $L_j : \Delta Y_j \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ) — медленно меняющаяся при  $y^{(j)} \rightarrow Y_j$  функция. Согласно определению и свойств медленно меняющихся функций

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \rightarrow Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta Y_j}} \frac{L_j(\lambda y^{(j)})}{L_j(y^{(j)})} = 1 \quad \text{для любого } \lambda > 0 \quad (j = \overline{0, n-1}). \quad (1.13)$$

<sup>†</sup>При  $i = n-k+2$  эти соотношения отсутствуют.

Приведем две важные теоремы, на которых базируются основные положения теории правильно и медленно меняющихся функций (см. [9], гл. I, §1, с.10).

**Теорема 1.1** (о равномерной сходимости). *Если  $L : \Delta Y_0 \rightarrow ]0, +\infty[$  — медленно меняющаяся функция при  $y \rightarrow Y_0$ , то предельное соотношение (1.13) выполняется равномерно по  $\lambda$  на любом промежутке  $[c, d] \subset ]0, +\infty[$ .*

**Теорема 1.2** (о представлении). *Функция  $L : \Delta Y_0 \rightarrow ]0, +\infty[$  является медленно меняющейся при  $y \rightarrow Y_0$  тогда и только тогда, когда для некоторого  $b \in \Delta Y_0$  она представима в виде*

$$L(y) = c(y) \exp \left( \int_b^y \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right) \quad \text{при } y \in \Delta_b Y_0,$$

где  $\Delta_b Y_0$  — односторонняя окрестность точки  $Y_0$ , содержащая точку  $b$ ,  $c$  — измеримая на промежутке  $\Delta_b Y_0$  функция такая, что  $c(y) \rightarrow c_0 \in ]0, +\infty[$  при  $y \rightarrow Y_0$ , и  $\varepsilon$  — непрерывная на  $\Delta_b Y_0$  функция, стремящаяся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ .

В силу данной теоремы о представлении существуют непрерывно дифференцируемые медленно меняющиеся функции  $L_{0j} : \Delta Y_j \rightarrow ]0, +\infty[$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ) такие, что

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \rightarrow Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta Y_j}} \frac{L_j(y^{(j)})}{L_{0j}(y^{(j)})} = 1, \quad \lim_{\substack{y^{(j)} \rightarrow Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta Y_j}} \frac{y^{(j)} L'_{0j}(y^{(j)})}{L_{0j}(y^{(j)})} = 0. \quad (1.14)$$

Будем также говорить, что медленно меняющаяся при  $y \rightarrow Y_0$  функция  $L : \Delta Y_0 \rightarrow ]0, +\infty[$  удовлетворяет условию  $S_0$ , если

$$L \left( \mu e^{[1+o(1)] \ln |y|} \right) = L(y) [1 + o(1)] \quad \text{при } y \rightarrow Y_0 \quad (y \in \Delta Y_0),$$

где  $\mu = \text{sign } y$ .

Условию  $S_0$  заведомо удовлетворяют функции  $L$ , имеющие конечный предел при  $y \rightarrow Y_0$ , а также функции вида

$$L(y) = |\ln |y||^{\gamma_1}, \quad L(y) = |\ln |y||^{\gamma_1} |\ln |\ln |y|||^{\gamma_2},$$

где  $\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$ , и многие другие.

**Замечание 1.1.** Если медленно меняющаяся при  $y \rightarrow Y_0$  функция  $L : \Delta Y_0 \rightarrow ]0, +\infty[$  удовлетворяет условию  $S_0$ , то для любой медленно меняющейся при  $y \rightarrow Y_0$  функции  $l : \Delta Y_0 \rightarrow ]0, +\infty[$

$$L(y)l(y) = L(y)[1 + o(1)] \quad \text{при } y \rightarrow Y_0 \quad (y \in \Delta Y_0).$$

Справедливость данного утверждения непосредственно следует из сформулированных выше теоремы 1.1 о равномерной сходимости и теоремы 1.2 о представлении медленно меняющихся функций.

**Замечание 1.2** (см. [6]). Если медленно меняющаяся при  $y \rightarrow Y_0$  функция  $L : \Delta Y_0 \rightarrow ]0, +\infty[$  удовлетворяет условию  $S_0$ , а функция  $y : [t_0, +\infty[ \rightarrow \Delta Y_0$  — непрерывно дифференцируемая и такая, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = Y_0, \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)} [r + o(1)] \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$



где  $r$  — отличная от нуля вещественная постоянная,  $\xi$  — непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности  $+\infty$  вещественная функция, для которой  $\xi'(t) \neq 0$ , то

$$L(y(t)) = L(\mu|\xi(t)|^r) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

где  $\mu = \text{sign } y(t)$  в некоторой окрестности  $+\infty$ .

**Замечание 1.3** (см. [3]). Если медленно меняющаяся при  $y \rightarrow Y_0$  функция  $L : \Delta Y_0 \rightarrow ]0, +\infty[$  удовлетворяет условию  $S_0$ , а функция  $r : \Delta Y_0 \times K \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $K$  — компакт в  $\mathbb{R}^n$ , такая, что

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \Delta Y_0 \\ v \in \Delta Y_0}} r(z, v) = 0 \quad \text{равномерно по } v \in K,$$

то

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \Delta Y_0 \\ v \in \Delta Y_0}} \frac{L(v e^{[1+r(z,v)] \ln |z|})}{L(z)} = 1 \quad \text{равномерно по } v \in K, \text{ где } v = \text{sign } z.$$

### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Прежде всего покажем, что для уравнения (1.1) справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** *Если  $k \in \{4, \dots, n\}$ , то уравнение (1.1) не имеет  $\mathcal{P}_{+\infty}^k \left( \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решений при  $i \in \{n-k+3, \dots, n-1\}$ .*

**Доказательство теоремы 2.1.** Действительно, пусть  $y : [t_{0k}, +\infty[ \rightarrow \Delta Y_0$  — произвольное  $\mathcal{P}_{+\infty}^k \left( \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решение уравнения (1.1) для некоторого  $i \in \{n-k+3, \dots, n-1\}$ . Тогда из соотношения (1.10) непосредственно следует, что

$$y^{(i-1)}(t) \sim t^{o(1)} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad i \in \{n-k+3, \dots, n-1\},$$

а это вместе с соотношениями (1.9) противоречит условию (1.5 $_k$ ).

Далее рассмотрим случай, когда  $k \in \{3, \dots, n\}$  и  $\lambda_0 = \frac{k-3}{k-2}$ . В этом случае для  $\mathcal{P}_{+\infty}^k \left( \frac{k-3}{k-2} \right)$ -решений справедливы утверждения леммы 1.1 при  $i = n-k+2$  и поэтому имеют место асимптотические при  $t \rightarrow +\infty$  соотношения

$$y^{(n-k+2)}(t) = o\left(\frac{y^{(n-k+1)}(t)}{t}\right), \quad (2.1)$$

$$y^{(l)}(t) \sim (-1)^{l-n+k-2} \frac{(l-n+k-2)!}{t^{l-n+k-2}} y^{(n-k+2)}(t) \quad (l = \overline{n-k+3, n}), \quad (2.2)$$

причем при  $k=3$  соотношение (2.2) имеет место при дополнительном условии существования  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$ .

Из (2.2) непосредственно следует, что при  $t \in ]a, +\infty[$  справедливы неравенства

$$(-1)^{j-n+k-2} \mu_j \mu_{n-k+2} > 0 \quad (j = \overline{n-k+3, n-1}), \quad (-1)^{k-2} \alpha \mu_{n-k+2} > 0 \quad (2.3_k)$$

и имеют место асимптотические при  $t \rightarrow +\infty$  соотношения

$$\frac{y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)} = \frac{n-j-k+1}{t} [1 + o(1)] \quad (j = \overline{n-k+2, n-1}). \quad (2.4)$$

Кроме фактов, указанных в введении, о правильно и медленно меняющихся при  $y^{(j)} \rightarrow Y_j$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ) функциях, для изучения случая  $\lambda_0 = \frac{k-3}{k-2}$  будут использоваться при  $k \in \{3, \dots, n\}$  следующие вспомогательные обозначения:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= 1 - \sum_{j=n-k+2}^{n-1} \sigma_j, \quad \nu_k = \sum_{j=n-k+2}^{n-1} \sigma_j(n-j-k+2) + k - 3, \\ M_k(c) &= \prod_{j=1}^{n-k} \left| \frac{c}{(n-j-k+1)!} \right|^{\sigma_{j-1}}, \quad C_k = \frac{\prod_{j=n-k+3}^{n-1} ((j-n+k-2)!)^{\sigma_j}}{(k-2)!}, \\ I_k(t) &= \varphi_{n-k}(c) M_k(c) \int_{A_{0k}}^t p(\tau) \tau^{\nu_k} \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j(\mu_j \tau^{n-k-j}) \prod_{j=n-k+2}^{n-1} L_j(\mu_j \tau^{n-k-j+1}) d\tau, \\ I_{1k}(t) &= \int_{A_{1k}}^t |I_k(\tau)|^{\frac{1}{\gamma_k}} d\tau, \end{aligned}$$

где  $A_{0k}$  ( $A_{1k}$ ) выбирается равным числу  $a_{0k} \geq a$  ( $a_{1k} \geq a_{0k}$ ) (справа от которого подынтегральная функция непрерывна), если при этом значении предела интегрирования соответствующий интеграл стремится к  $+\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ , и равным  $+\infty$ , если при таком значении предела интегрирования он стремится к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ .

**Теорема 2.2.** Пусть  $k \in \{4, \dots, n\}$ ,  $\gamma_k \notin \{0, \sigma_{n-k+1}\}$  и медленно меняющиеся при  $y^{(j)} \rightarrow Y_j$  функции  $L_j$  ( $j = n-k+2, n-1$ ) удовлетворяют условию  $S_0$ . Для существования у уравнения (1.1)  $\mathcal{P}_{+\infty}^k \left( \frac{k-3}{k-2} \right)$ -решений необходимо, чтобы  $c \in \Delta Y_{n-k}$ , наряду с (1.5<sub>k</sub>) – (1.8<sub>k</sub>) выполнялись условия

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t I'_k(t)}{I_k(t)} = -\gamma_k, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t I'_{1k}(t)}{I_{1k}(t)} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |I_{1k}(t)|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}} = 0 \quad (2.5_k)$$

и были справедливы при  $t \in ]a, +\infty[$  неравенства (2.3<sub>k</sub>) и

$$\gamma_k I_k(t) < 0, \quad \frac{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}{\gamma_k} I_{1k}(t) < 0. \quad (2.6_k)$$

Более того, для каждого такого решения, помимо (1.2<sub>k</sub>) и (1.4<sub>k</sub>), имеют место при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотические представления

$$\frac{|y^{(n-k+1)}(t)|^{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}}{L_{n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))} = |\gamma_k C_k| \left| \frac{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}{\gamma_k} I_{1k}(t) \right|^{\gamma_k} [1 + o(1)], \quad (2.7_k)$$

$$y^{(j)}(t) = \frac{(-1)^{j-n+k-2} \frac{(j-n+k-2)!}{t^{j-n+k-2}} \frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}} \frac{I'_{1k}(t)}{I_{1k}(t)} y^{(n-k+1)}(t) [1 + o(1)]}{(j = n-k+2, n-1)}. \quad (2.8_k)$$

Здесь в теореме 2.2 асимптотическое при  $t \rightarrow +\infty$  представление (2.7<sub>k</sub>) записано в неявном виде. Следующая теорема указывает дополнительные ограничения, при которых асимптотические при  $t \rightarrow +\infty$  представления  $\mathcal{P}_{+\infty}^k \left( \frac{k-3}{k-2} \right)$ -решений уравнения (1.1) и их производные до порядка  $n-1$  включительно могут быть записаны в явном виде.

**Теорема 2.3.** Пусть соблюдаются условия теоремы 2.2 и медленно меняющаяся при  $y^{(n-k+1)} \rightarrow Y_{n-k+1}$  функция  $L_{n-k+1}$  удовлетворяет условию  $S_0$ . Тогда в случае наличия у уравнения (1.1)  $\mathcal{P}_{+\infty}^k \left( \frac{k-3}{k-2} \right)$ -решений выполняется условие

$$\int_{a_{*k}}^{+\infty} \left| L_{n-k+1} \left( \mu_{n-k+1} |I_{1k}(\tau)|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}} \right) \right|^{\frac{1}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}} |I_{1k}(\tau)|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}} d\tau < +\infty, \quad (2.9_k)$$

где  $a_{*k} \geq a_{1k}$  такое, что  $\mu_{n-k+1} |I_{1k}(t)|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}} \in \Delta Y_{n-k+1}$  при  $t \geq a_{*k}$ , и для каждого из таких решений имеют место асимптотические при  $t \rightarrow +\infty$  представления (1.4<sub>k</sub>), (2.8<sub>k</sub>) и

$$y^{(n-k)}(t) = c + \mu_{n-k+1} W_k(t) [1 + o(1)], \quad (2.10_k)$$

$$y^{(n-k+1)}(t) = \mu_{n-k+1} W'_k(t) [1 + o(1)], \quad (2.11_k)$$

где

$$W_k(t) = \int_{+\infty}^t \left| \gamma_k C_k L_{n-k+1} \left( \mu_{n-k+1} |I_{1k}(\tau)|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}} \right) \right|^{\frac{1}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}} \times \\ \times \left| \frac{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}{\gamma_k} I_{1k}(\tau) \right|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}} d\tau.$$

В следующей теореме приводятся достаточные условия наличия у уравнения (1.1)  $\mathcal{P}_{+\infty}^k \left( \frac{k-3}{k-2} \right)$ -решений с указанными в теореме 2.3 асимптотическими представлениями.

**Теорема 2.4.** Пусть  $k \in \{4, \dots, n\}$ ,  $\gamma_k \notin \{0, \sigma_{n-k+1}\}$ ,  $c \in \Delta Y_{n-k}$ , выполняются условия (1.5<sub>k</sub>) – (1.8<sub>k</sub>), (2.3<sub>k</sub>), (2.5<sub>k</sub>), (2.6<sub>k</sub>), (2.9<sub>k</sub>) и медленно меняющиеся при  $y^{(j)} \rightarrow Y_j$  функции  $L_j$  ( $j = n-k+1, n-1$ ) удовлетворяют условию  $S_0$ . Пусть, кроме того, выполняется неравенство  $\sigma_{n-1} \neq 1$  и алгебраическое относительно  $\rho$  уравнение

$$\sum_{j=n-k+1}^{n-3} (2-k)\sigma_j \prod_{l=n-k+2}^j (\rho + (n-l-k+1)) \prod_{l=j+1}^{n-2} (n-l-k+1) = \\ = (\rho + (2-k)(\sigma_{n-1} - 1)) \prod_{l=n-k+2}^{n-2} (\rho + (n-l-k+1)) \quad (2.12)$$

не имеет корней с нулевой действительной частью. Тогда у уравнения (1.1) существует  $(n-k+t+1)$ -параметрическое семейство  $\mathcal{P}_{+\infty}^k \left( \frac{k-3}{k-2} \right)$ -решений с асимптотическими при  $t \rightarrow +\infty$  представлениями (1.4<sub>k</sub>), (2.8<sub>k</sub>), (2.10<sub>k</sub>) и (2.11<sub>k</sub>), где  $t$  – число корней (с учетом кратных) алгебраического уравнения (2.12) с отрицательными действительными частями.

**Доказательство теорем 2.2–2.3.** Пусть  $y : [t_{0k}, +\infty[ \rightarrow \Delta Y_0$  – произвольное  $\mathcal{P}_{+\infty}^k \left( \frac{k-3}{k-2} \right)$ -решение уравнения (1.1). Тогда, как было установлено перед формулировками теорем,  $c \in \Delta Y_{n-k}$ , справедливо (1.5<sub>k</sub>) – (1.8<sub>k</sub>), при  $t \in [t_{0k}, +\infty[$  выполняются неравенства (2.3<sub>k</sub>) и имеют место асимптотические при  $t \rightarrow +\infty$  представления (1.2<sub>k</sub>) и (1.4<sub>k</sub>). Из (1.4<sub>k</sub>) также следует, что

$$\frac{y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)} = \frac{n-j-k}{t} [1 + o(1)] \quad (j = \overline{0, n-k-1}) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Учитывая представления (1.12) правильно меняющихся при  $t \rightarrow +\infty$  функций  $\varphi_j(y^{(j)})$  при  $j = \overline{0, n-k-1}$  и справедливость выполнения соотношений (1.13) равномерно по  $\lambda$  на любом отрезке  $[d_1, d_2] \subset ]0, +\infty[$ , имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{j-1} \left( \frac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!} [1 + o(1)] \right) &= \left| \frac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!} [1 + o(1)] \right|^{\sigma_{j-1}} \times \\ &\times L_{j-1} \left( \frac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!} [1 + o(1)] \right) = \left| \frac{c}{(n-j-k+1)!} \right|^{\sigma_{j-1}} t^{(n-j-k+1)\sigma_{j-1}} \times \\ &\times L_{j-1} (\mu_{j-1} t^{n-j-k+1}) [1 + o(1)] = \left| \frac{c}{(n-j-k+1)!} \right|^{\sigma_{j-1}} \times \\ &\times \varphi_{j-1} (\mu_{j-1} t^{n-j-k+1}) [1 + o(1)] \quad (j = \overline{1, n-k}) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Тогда подставив решение вместе с производными до порядка  $n-k$  включительно в (1.1), при  $t \rightarrow +\infty$  получим

$$\frac{y^{(n)}(t)}{\prod_{j=n-k+1}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}(t))} = \alpha M_k(c) p(t) \varphi_{n-k}(c) \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j(\mu_j t^{n-k-j}) [1 + o(1)]. \quad (2.13)$$

Из соотношений (2.4) и замечания 1.2 следует, что для медленно меняющихся при  $t \rightarrow +\infty$  функций  $L_j$  ( $j = \overline{n-k+2, n-1}$ ), удовлетворяющих условию  $S_0$ , имеют место представления

$$L_j(y^{(j)}(t)) = L_j(\mu_j t^{n-k-j+1}) [1 + o(1)] \quad (j = \overline{n-k+2, n-1}) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Учитывая (1.12) и эти представления, перепишем (2.13) в виде

$$\begin{aligned} &\frac{y^{(n)}(t)}{|y^{(n-k+1)}(t)|^{\sigma_{n-k+1}} L_{n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t)) \prod_{j=n-k+2}^{n-1} |y^{(j)}(t)|^{\sigma_j} L_j(\mu_j t^{n-k-j+1})} = \\ &= \alpha M_k(c) p(t) \varphi_{n-k}(c) \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j(\mu_j t^{n-k-j}) [1 + o(1)]. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая то, что согласно (2.4), при  $t \rightarrow +\infty$

$$y^{(n)}(t) = \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \times \dots \times \frac{y^{(n-k+4)}(t)}{y^{(n-k+3)}(t)} y^{(n-k+3)}(t) \sim \frac{(-1)^{k-3} (k-2)!}{t^{k-3}} y^{(n-k+3)}(t),$$

получим с учетом (1.12), (2.2) и введённых обозначений, следующее соотношение при  $t \rightarrow +\infty$

$$\frac{y^{(n-k+3)}(t) |y^{(n-k+2)}(t)|^{\gamma_{k-1}}}{|y^{(n-k+1)}(t)|^{\sigma_{n-k+1}} L_{n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))} = (-1)^{k-3} \alpha C_k I'_k(t) [1 + o(1)]. \quad (2.14)$$

Согласно (1.12) и тереме 1.2 о представлении существует непрерывно дифференцируемая медленно меняющаяся при  $y^{(j)} \rightarrow Y_j$  функция  $L_{0n-k+1} : \Delta Y_{n-k+1} \rightarrow ]0; +\infty[$ , удовлетворяющая условиям (1.14). В силу этих условий, (2.1) и (2.4) име-

ем

$$\begin{aligned} & \left( \frac{|y^{(n-k+2)}(t)|^{\gamma_k}}{|y^{(n-k+1)}(t)|^{\sigma_{n-k+1}} L_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))} \right)' = \frac{\mu_{n-k+2} y^{(n-k+3)}(t) |y^{(n-k+2)}(t)|^{\gamma_k-1}}{|y^{(n-k+1)}(t)|^{\sigma_{n-k+1}} L_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))} \times \\ & \times \left[ \gamma_k - \sigma_{n-k+1} \frac{y^{(n-k+2)}(t) y^{(n-k+2)}(t)}{y^{(n-k+3)}(t) y^{(n-k+1)}(t)} - \frac{y^{(n-k+2)}(t) y^{(n-k+2)}(t) y^{(n-k+1)}(t) L'_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))}{y^{(n-k+3)}(t) y^{(n-k+1)}(t) L_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))} \right] = \\ & = \frac{y^{(n-k+3)}(t) |y^{(n-k+2)}(t)|^{\gamma_k-1}}{|y^{(n-k+1)}(t)|^{\sigma_{n-k+1}} L_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))} [\mu_{n-k+2} \gamma_k + o(1)]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Отсюда следует, что (2.14) может быть переписано в виде

$$\left( \frac{|y^{(n-k+2)}(t)|^{\gamma_k}}{|y^{(n-k+1)}(t)|^{\sigma_{n-k+1}} L_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))} \right)' = \mu_{n-k+2} \gamma_k (-1)^{k-3} \alpha C_k I'_k(t) [1+o(1)].$$

Интегрируя данное соотношение на промежутке от  $t_{0k}$  до  $t$ , получим при  $t \rightarrow +\infty$

$$\frac{|y^{(n-k+2)}(t)|^{\gamma_k}}{|y^{(n-k+1)}(t)|^{\sigma_{n-k+1}} L_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))} = C + \mu_{n-k+2} \gamma_k (-1)^{k-3} \alpha C_k I_k(t) [1+o(1)],$$

где  $C$  — некоторая вещественная постоянная.

Используя (2.15) несложно показать, что константа  $C = 0$  и тогда при  $t \rightarrow +\infty$

$$\frac{|y^{(n-k+2)}(t)|^{\gamma_k}}{|y^{(n-k+1)}(t)|^{\sigma_{n-k+1}} L_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))} = \mu_{n-k+2} \gamma_k (-1)^{k-3} \alpha C_k I_k(t) [1+o(1)]. \quad (2.16)$$

Отсюда непосредственно следует, что ввиду последнего неравенства (2.3<sub>k</sub>) выполняется первое неравенство из (2.6<sub>k</sub>). Кроме того, ввиду первого соотношения (1.14) и (2.14), имеем

$$\frac{y^{(n-k+3)}(t)}{y^{(n-k+2)}(t)} \sim \frac{I'_k(t)}{\gamma_k I_k(t)} \text{ при } t \rightarrow +\infty \quad (2.17)$$

и, учитывая (2.4), получаем справедливость первого предельного соотношения из (2.5<sub>k</sub>). Из (2.16) также следует, что

$$\frac{y^{(n-k+2)}(t)}{|y^{(n-k+1)}(t)|^{\frac{\sigma_{n-k+1}}{\gamma_k}} L_{0n-k+1}^{\frac{1}{\gamma_k}}(y^{(n-k+1)}(t))} = \mu_{n-k+2} |\gamma_k C_k I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}} [1+o(1)]. \quad (2.18)$$

Так как

$$\begin{aligned} & \left( \frac{|y^{(n-k+1)}(t)|^{1-\frac{\sigma_{n-k+1}}{\gamma_k}}}{L_{0n-k+1}^{\frac{1}{\gamma_k}}(y^{(n-k+1)}(t))} \right)' = \frac{\mu_{n-k+1} y^{(n-k+2)}(t) |y^{(n-k+1)}(t)|^{-\frac{\sigma_{n-k+1}}{\gamma_k}}}{L_{0n-k+1}^{\frac{1}{\gamma_k}}(y^{(n-k+1)}(t))} \times \\ & \times \left[ 1 - \frac{\sigma_{n-k+1}}{\gamma_k} - \frac{1}{\gamma_k} \frac{y^{(n-k+1)}(t) L'_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))}{L_{0n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))} \right] = \\ & = \frac{\mu_{n-k+1} y^{(n-k+2)}(t) |y^{(n-k+1)}(t)|^{-\frac{\sigma_{n-k+1}}{\gamma_k}}}{L_{0n-k+1}^{\frac{1}{\gamma_k}}(y^{(n-k+1)}(t))} \left[ 1 - \frac{\sigma_{n-k+1}}{\gamma_k} + o(1) \right] \text{ при } t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

то из (2.18) с учетом (1.6<sub>k</sub>) получаем, что при  $t \rightarrow +\infty$

$$\left( \frac{|y^{(n-k+1)}(t)|^{1-\frac{\sigma_{n-k+1}}{\gamma_k}}}{L_{0n-k+1}^{\frac{1}{\gamma_k}}(y^{(n-k+1)}(t))} \right)' = \frac{\sigma_{n-k+1}-\gamma_k}{\gamma_k} |\gamma_k C_k I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}} [1+o(1)].$$

Интегрируя данное соотношение на промежутке от  $t_{0k}$  до  $t$ , получим

$$\frac{|y^{(n-k+1)}(t)|^{\frac{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}{\gamma_k}}}{L_{0n-k+1}^{\frac{1}{\gamma_k}}(y^{(n-k+1)}(t))} = \frac{\sigma_{n-k+1} - \gamma_k}{\gamma_k} |\gamma_k C_k|^{\frac{1}{\gamma_k}} I_{1k}(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Отсюда непосредственно следует, что выполняется второе неравенство (2.6<sub>k</sub>) и имеет место асимптотическое при  $t \rightarrow +\infty$  соотношение (2.7<sub>k</sub>). Отсюда же, ввиду первого соотношения (1.14) и (2.18), имеем

$$\frac{y^{(n-k+2)}(t)}{y^{(n-k+1)}(t)} \sim \frac{\gamma_k I'_{1k}(t)}{(\gamma_k - \sigma_{n-k+1}) I_{1k}(t)} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty \quad (2.19)$$

и, учитывая (2.1), получаем справедливость второго и третьего предельного соотношения из (2.5<sub>k</sub>), а также асимптотические при  $t \rightarrow +\infty$  соотношения (2.8<sub>k</sub>). Таким образом, доказаны утверждения теоремы 2.2.

Допустим теперь дополнительно, что медленно меняющаяся при  $t \rightarrow +\infty$  функция  $L_{n-k+1}$  удовлетворяет условию  $S_0$ . Тогда согласно (2.19) и замечанию 1.2

$$L_{n-k+1} \left( y^{(n-k+1)}(t) \right) = L_{n-k+1} \left( \mu_{n-k+1} |I_{1k}(t)|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}} \right) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Поэтому из (2.7<sub>k</sub>) следует, что имеют место асимптотические при  $t \rightarrow +\infty$  соотношения (2.11<sub>k</sub>).

Проинтегрировав (2.11<sub>k</sub>) на  $[t_{*k}, t]$ , где  $t_{*k} = \max\{a_{*k}, t_{0k}\}$ , имеем

$$y^{(n-k)}(t) = y^{(n-k)}(t_{*k}) + \mu_{n-k+1} \int_{t_{*k}}^t \left| \gamma_k C_k L_{n-k+1} \left( \mu_{n-k+1} |I_{1k}(\tau)|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}} \right) \right|^{\frac{1}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}} \times \\ \times \left| \frac{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}{\gamma_k} I_{1k}(\tau) \right|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}} [1 + o(1)] d\tau \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

В силу первого из условий (1.3)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_{*k}}^t \left| \gamma_k C_k L_{n-k+1} \left( \mu_{n-k+1} |I_{1k}(\tau)|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}} \right) \right|^{\frac{1}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}} \times \\ \times \left| \frac{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}{\gamma_k} I_{1k}(\tau) \right|^{\frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}} [1 + o(1)] d\tau = \text{const}$$

и тогда по признаку сравнения верно (2.9<sub>k</sub>). Используя предложение 6 из монографии [1] (гл.V, §3, с.293) об асимптотическом вычислении интегралов, для  $(n-k)$ -й производной решения получим представление (2.10<sub>k</sub>).

Таким образом, асимптотические при  $t \rightarrow +\infty$  соотношения (1.2<sub>k</sub>) и (2.7<sub>k</sub>) приняли вид (2.10<sub>k</sub>) и (2.11<sub>k</sub>). Теоремы 2.2–2.3 доказаны.

**Доказательство теоремы 2.4.** Покажем, что для данного  $c$  из условия теоремы у уравнения (1.1) существует хотя бы одно  $\mathcal{P}_{+\infty}^k \left( \frac{k-3}{k-2} \right)$ -решение, заданное на некотором промежутке  $[t_{0k}, +\infty[ \subset [a, +\infty[$ , допускающее при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотические представления (1.4<sub>k</sub>), (2.8<sub>k</sub>), (2.10<sub>k</sub>) и (2.11<sub>k</sub>), а также выясним вопрос о количестве таких решений.

Применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\begin{aligned}
y^{(l-1)}(t) &= \frac{ct^{n-l-k+1}}{(n-l-k+1)!} [1 + v_l(t)] \quad (l = \overline{1, n-k}), \\
y^{(n-k)}(t) &= c + \mu_{n-k+1} W_k(t) [1 + v_{n-k+1}(t)], \\
y^{(n-k+1)}(t) &= \mu_{n-k+1} W'_k(t) [1 + v_{n-k+2}(t)], \\
y^{(l-1)}(t) &= (-1)^{l-n+k-3} \mu_{n-k+1} \frac{(l-n+k-3)!}{t^{l-n+k-3}} \frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}} \frac{I'_{1k}(t)}{I_{1k}(t)} W'_k(t) [1 + v_l(t)] \\
&\quad (l = \overline{n-k+3, n}),
\end{aligned} \tag{2.20}$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned}
v'_l &= \frac{n-l-k+1}{t} [-v_l + v_{l+1}] \quad (l = \overline{1, n-k-1}), \\
v'_{n-k} &= \frac{1}{t} \left( \frac{\mu_{n-k+1}}{c} W_k(t) [1 + v_{n-k+1}] - v_{n-k} \right), \\
v'_{n-k+1} &= \frac{W'_k(t)}{W_k(t)} [-v_{n-k+1} + v_{n-k+2}], \\
v'_{n-k+2} &= \frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}} \frac{I'_{1k}(t)}{I_{1k}(t)} [1 + v_{n-k+3}] - \frac{W''(t)}{W'_k(t)} [1 + v_{n-k+2}], \\
v'_l &= \frac{-n-l-k+3}{t} [1 + v_l] - h(t) [1 + v_l] + \frac{n-l-k+2}{t} [1 + v_{l+1}] - \frac{W''_k(t)}{W'_k(t)} [1 + v_l] \\
&\quad (l = \overline{n-k+3, n-1}), \\
v'_n &= \frac{1}{t} \left[ k-3 - th(t) - \frac{tW''_k(t)}{W'_k(t)} \right] [1 + v_n] + \\
&\quad + \frac{\alpha\varphi(t)\varphi_0 \left( \frac{ct^{n-k}}{(n-k)!} [1 + v_1] \right) \dots \varphi_{n-1} \left( (-1)^{k-3} \mu_{n-k+1} \frac{(k-3)!}{t^{k-3}} \frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}} \frac{I'_{1k}(t)}{I_{1k}(t)} W'_k(t) [1 + v_n] \right)}{\mu_{n-k+1} (-1)^{k-3} \frac{(k-3)!}{t^{k-3}} \frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}} \frac{I'_{1k}(t) W'_k(t)}{I_{1k}(t)}},
\end{aligned} \right. \tag{2.21}$$

где  $h(t) = \frac{I''_{1k}(t)I_{1k}(t) - I'^2_{1k}(t)}{I'_{1k}(t)I_{1k}(t)}$ ,  $th(t) \rightarrow -1$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Рассмотрим её на множестве  $\Omega^n = [t_{0k}, +\infty[ \times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$ , где  $\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n = \{(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n : |v_j| \leq \frac{1}{2}, j = \overline{1, n}\}$  и  $t_{0k} \geq a_{*k}$  выбрано с учетом (2.9<sub>k</sub>) таким образом, чтобы при  $t > t_{0k}$  и  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$  выполнялись условия:

$$\begin{aligned}
\frac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!} [1 + v_j(t)] &\in \Delta Y_{j-1} \quad (j = \overline{1, n-k}), \\
c + \mu_{n-k+1} W_k(t) [1 + v_{n-k+1}(t)] &\in \Delta Y_{n-k}, \\
\mu_{n-k+1} W'_k(t) [1 + v_{n-k+2}(t)] &\in \Delta Y_{n-k+1}, \\
(-1)^{j-n+k-3} \mu_{n-k+1} \frac{(j-n+k-3)!}{t^{j-n+k-3}} \frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}} \frac{I'_{1k}(t)}{I_{1k}(t)} W'_k(t) [1 + v_j(t)] &\in \Delta Y_{j-1} \\
(j = \overline{n-k+3, n}).
\end{aligned}$$

Поскольку функции  $\varphi_j(y^{(j)})$  ( $j \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{n-k\}$ ) представимы в виде (1.12) и соотношения (1.13) выполняются равномерно по  $\lambda$  на любом отрезке  $[d_1, d_2] \subset ]0, +\infty[$ , а также в силу непрерывности функции  $\varphi_{n-k}(y^{(n-k)})$ , (2.9<sub>k</sub>) и того, что медленно меняющиеся при  $t \rightarrow +\infty$  функции  $L_j$  ( $j = \overline{n-k+1, n-1}$ )

удовлетворяют условию  $S_0$ , имеем

$$\begin{aligned}
 & \varphi_j \left( \frac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!} [1 + v_{j+1}] \right) = \varphi_j \left( \frac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!} \right) (1 + v_{j+1})^{\sigma_j} (1 + R_j(t, v_{j+1})) = \\
 & = \left| \frac{c}{(n-k-j)!} \right|^{\sigma_j} \varphi_j (\mu_j t^{n-k-j}) (1 + v_{j+1})^{\sigma_j} (1 + R_j(t, v_{j+1})) \quad (j = \overline{0, n-k-1}), \\
 & \varphi_{n-k+1} (\mu_{n-k+1} W'_k(t) [1 + v_{n-k+2}(t)]) = \\
 & = \varphi_{n-k+1} (\mu_{n-k+1} W'_k(t)) (1 + v_{n-k+2})^{\sigma_{n-k+1}} (1 + R_{n-k+1}(t, v_{n-k+2})), \\
 & \varphi_j \left( (-1)^{j-n+k-2} \mu_{n-k+1} \frac{(j-n+k-2)!}{t^{j-n+k-2}} \frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}} \frac{I'_{1k}(t)}{I_{1k}(t)} W'_k(t) [1 + v_{j+1}(t)] \right) = \\
 & = \left| \frac{\gamma_k (j-n+k-2)!}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}} \right|^{\sigma_j} \varphi_j \left( \mu_j \frac{I'_{1k}(t)}{t^{j-n+k-2} I_{1k}(t)} W'_k(t) \right) (1 + v_{j+1})^{\sigma_j} (1 + R_j(t, v_{j+1})) = \\
 & = (k-2)! C_k \left| \frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}} \right|^{\sigma_j} \varphi_j (\mu_j t^{n-j-k+1}) (1 + v_{j+1})^{\sigma_j} (1 + R_j(t, v_{j+1})) \\
 & (j = \overline{n-k+2, n-1}), \\
 & \varphi_{n-k} (c + \mu_{n-k+1} W_k(t) [1 + v_{n-k+1}(t)]) = \varphi_{n-k}(c) (1 + R_{n-k}(t, v_{n-k+1})),
 \end{aligned}$$

где функции  $R_j(t, v_{j+1})$  ( $j = \overline{0, n-1}$ ) стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$  равномерно по  $v_{j+1} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .

В силу вида функции  $W_k(t)$ , (2.1) – (2.2), (2.9<sub>k</sub>) и (1.14)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{tW'_k(t)}{W'_k(t)} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{tW''_k(t)}{W'_k(t)} = 1,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{W''_k(t) I_{1k}(t)}{W'_k(t) I'_{1k}(t)} = \frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{tI''_{1k}(t)}{I'_{1k}(t)} = -1.$$

Тогда, с использованием указанных выше представлений, система уравнений (2.21) может быть переписана в виде

$$\begin{cases}
 v'_l = \frac{n-l-k+1}{t} [-v_l + v_{l+1}] \quad (l = \overline{1, n-k-1}), \\
 v'_{n-k} = \frac{1}{t} [-v_{n-k} + \frac{\mu_{n-k+1}}{c} W_k(t) (1 + v_{n-k+1})], \\
 v'_{n-k+1} = \frac{1}{t} [-v_{n-k+1} + v_{n-k+2} + V_{n-k+1,1}(t, v_1, \dots, v_n)], \\
 v'_{n-k+2} = \frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}} \frac{I'_{1k}(t)}{I_{1k}(t)} [-v_{n-k+2} + v_{n-k+3} + V_{n-k+2,1}(t, v_1, \dots, v_n)], \\
 v'_l = \frac{n-l-k+2}{t} [-v_l + v_{l+1} + V_{l,1}(t, v_1, \dots, v_n)] \quad (l = \overline{n-k+3, n-1}), \\
 v'_n = \frac{2-k}{t} \left[ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n-k+1}}^{n-1} \sigma_{j-1} v_j + (\sigma_{n-1} - 1) v_n + \sum_{i=1}^2 V_{n,i}(t, v_1, \dots, v_n) \right],
 \end{cases} \quad (2.22)$$

где

$$\begin{aligned}
 V_{n-k+1,1}(t, v_1, \dots, v_n) &= \left( \frac{tW'_k(t)}{W'_k(t)} - 1 \right) [-v_{n-k+1} + v_{n-k+2}], \\
 V_{n-k+2,1}(t, v_1, \dots, v_n) &= \left( \frac{(\gamma_k - \sigma_{n-k+1}) W''_k(t) I_{1k}(t)}{\gamma_k W'_k(t) I'_{1k}(t)} - 1 \right) [1 + v_{n-k+2}], \\
 V_{l,1}(t, v_1, \dots, v_n) &= \left( th(t) + 1 - \frac{tW''_k(t)}{W'_k(t)} \right) [1 + v_l] \quad (l = \overline{n-k+2, n-1}), \\
 V_{n,1}(t, v_1, \dots, v_n) &= \left( th(t) + 1 - \frac{tW''_k(t)}{W'_k(t)} \right) [1 + v_n] + \\
 &+ \left( \prod_{j=0}^{n-1} (1 + R_j(t, v_{j+1})) - 1 \right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n-k+1}}^n (1 + v_j)^{\sigma_{j-1}}, \\
 V_{n,2}(t, v_1, \dots, v_n) &= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n-k+1}}^n (1 + v_j)^{\sigma_{j-1}} - \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n-k+1}}^n v_j \sigma_{j-1} - 1.
 \end{aligned}$$



При этом заметим, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V_{j,1}(t, v_1, \dots, v_n) = 0 \quad (j = \overline{n-k+2, n})$$

равномерно по  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$ ,

$$\lim_{|v_1| + \dots + |v_n| \rightarrow 0} \frac{V_{n,2}(t, v_1, \dots, v_n)}{|v_1| + \dots + |v_n|} = 0$$

равномерно по  $t \in [t_{0k}, +\infty[$ .

Сделаем в (2.22) замену переменных следующим образом

$$\begin{cases} v_j = z_j & (j = \overline{1, n-k+1}), \\ v_{n-k+2} = z_n, \\ v_{j+1} = z_j & (j = \overline{n-k+2, n-1}), \end{cases} \quad (2.23)$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z'_l = \frac{n-l-k+1}{t} [-z_l + z_{l+1}] & (l = \overline{1, n-k-1}), \\ z'_{n-k} = \frac{1}{t} \left[ -z_{n-k} + \frac{\mu_{n-k+1}}{c} W_k(t) (1 + z_{n-k+1}) \right], \\ z'_{n-k+1} = \frac{1}{t} [-z_{n-k+1} + z_{n-k+2} + Z_{n-k+1,1}(t, z_1, \dots, z_n)], \\ z'_l = \frac{n-l-k+1}{t} [-z_l + z_{l+1} + Z_{l,1}(t, z_1, \dots, z_n)] & (l = \overline{n-k+2, n-2}), \\ z'_{n-1} = \frac{2-k}{t} \left[ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \{n-k+1, n-1\}}}^n \sigma_{j-1} z_j + (\sigma_{n-1} - 1) z_{n-1} + \sum_{i=1}^2 Z_{n,i}(t, z_1, \dots, z_n) \right], \\ z'_n = \frac{\gamma_k}{\gamma_k - \sigma_{n-k+1}} \frac{I'_{1k}(t)}{I_{1k}(t)} [-z_n + z_{n-k+2} + Z_{n-k+2,1}(t, z_1, \dots, z_n)], \end{cases} \quad (2.24)$$

в которой  $Z_{j,m}(t, z_1, \dots, z_n) = V_{j,m}(t, v_1, \dots, v_{n-k+1}, v_{n-k+3}, \dots, v_n, v_{n-k+2})$  ( $m = 1, 2, j = \overline{n-k+1, n}$ ) и такие, что предел  $\lim_{t \rightarrow +\infty} Z_{j,1}(t, z_1, \dots, z_n) = 0$  существует равномерно по  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$  и предел  $\lim_{|z_1| + \dots + |z_n| \rightarrow 0} \frac{\partial Z_{n,2}(t, z_1, \dots, z_n)}{\partial z_k} = 0$  ( $k = \overline{1, n}$ ) существует равномерно по  $t \in [t_{0k}, +\infty[$ .

Характеристическое уравнение матрицы коэффициентов при  $z_1, \dots, z_{n-1}$  (при этом коэффициент при  $z_n$  отличен от 0) системы (2.24)

$$\prod_{l=1}^{n-k} (\rho + (n-l-k+1)) (\rho + 1) \left[ \sum_{j=n-k+1}^{n-3} (2-k) \sigma_j \prod_{l=n-k+2}^j (\rho + (n-l-k+1)) \times \right. \\ \left. \times \prod_{l=j+1}^{n-2} (n-l-k+1) - (\rho + (2-k)(\sigma_{n-1} - 1)) \prod_{l=n-k+2}^{n-2} (\rho + (n-l-k+1)) \right] = 0$$

имеет  $n-k+1$  отрицательных корней  $\rho_l = -(n-l-k+1)$  ( $l = \overline{1, n-k}$ ),  $\rho_{n-k+1} = -1$  и  $k-2$  корней алгебраического уравнения (2.12), среди которых (согласно условию теоремы) нет корней с нулевой действительной частью.

Тогда для системы (2.24) выполнены все условия теоремы 2.6 из работы [5] и, следовательно, у неё существует по крайней мере одно решение  $(z_j)_{j=1}^n : [t_{1k}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$  ( $t_{1k} \in [t_{0k}, +\infty[$ ), стремящееся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ . Каждому такому решению в силу замен (2.20) и (2.23) соответствует  $\mathcal{P}_{+\infty}^k \left( \frac{k-3}{k-2} \right)$ -решение уравнения (1.1), допускающее при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотические представления (1.4<sub>k</sub>), (2.8<sub>k</sub>), (2.10<sub>k</sub>) и (2.11<sub>k</sub>).

Так как  $\rho_l = -(n-l-k+1)$  ( $l = \overline{1, n-k}$ ),  $\rho_{n-k+1} = -1$  являются отрицательными, то, согласно этой теореме, таких решений заведомо существует  $(n-k+1)$ -параметрическое семейство. Более того, существует  $(n-k+m+1)$ -параметрическое семейство решений с такими представлениями, где  $m$  — число корней (с учетом кратных) с отрицательными действительными частями алгебраического уравнения (2.12). Теорема доказана.

Из теорем 2.2–2.4 выпадает случай  $k = 3$ , который в силу леммы 1.1 требует дополнительного ограничения — существования  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{ty^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$ . Из доказательства теоремы 2.2 становится ясно, что соотношение (2.17) остается справедливым и при  $k = 3$ . Поэтому это ограничение можно заменить на существование  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{tI_3'(t)}{I_3(t)}$ . Далее продолжая рассуждения доказательств теорем 2.2 и 2.3 получим их аналоги в случае  $k = 3$ . То есть для уравнения (1.1) также справедливы следующие утверждения.

**Теорема 2.5.** Пусть  $\gamma_3 \notin \{0, \sigma_{n-2}\}$ , существует  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{tI_3'(t)}{I_3(t)}$  и медленно меняющаяся при  $y^{(n-1)} \rightarrow Y_{n-1}$  функция  $L_{n-1}$  удовлетворяет условию  $S_0$ . Для существования у уравнения (1.1)  $\mathcal{P}_{+\infty}^3(0)$ -решений необходимо, чтобы  $c \in \Delta Y_{n-3}$ , наряду с (1.5<sub>3</sub>) — (1.8<sub>3</sub>) выполнялись условия (2.5<sub>3</sub>) и были справедливы при  $t \in ]a, +\infty[$  неравенства (2.3<sub>3</sub>) и (2.6<sub>3</sub>). Более того, для каждого такого решения, помимо (1.2<sub>3</sub>) и (1.4<sub>3</sub>), имеют место при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотические представления (2.7<sub>3</sub>) и (2.8<sub>3</sub>).

**Теорема 2.6.** Пусть соблюдаются условия теоремы 2.5 и медленно меняющаяся при  $y^{(n-2)} \rightarrow Y_{n-2}$  функция  $L_{n-2}$  удовлетворяет условию  $S_0$ . Тогда в случае наличия у уравнения (1.1)  $\mathcal{P}_{+\infty}^3(0)$ -решений выполняется условие (2.9<sub>3</sub>) и для каждого из таких решений имеют место асимптотические при  $t \rightarrow +\infty$  представления (1.4<sub>3</sub>), (2.8<sub>3</sub>), (2.10<sub>3</sub>) и (2.11<sub>3</sub>).

Кроме того заметим, что алгебраическое относительно  $\rho$  уравнение (2.12) при  $k = 3$  имеет единственный корень  $\rho = \sigma_{n-1} - 1$ . Тогда приходим к справедливости следующего аналога теоремы 2.4 при  $k = 3$ .

**Теорема 2.7.** Пусть  $\gamma_3 \notin \{0, \sigma_{n-2}\}$ ,  $c \in \Delta Y_{n-2}$ , существует  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{tI_3'(t)}{I_3(t)}$ , выполняются условия (1.5<sub>3</sub>) — (1.8<sub>3</sub>), (2.3<sub>3</sub>), (2.5<sub>3</sub>), (2.6<sub>3</sub>) и (2.9<sub>3</sub>), медленно меняющиеся при  $y^{(j)} \rightarrow Y_j$  функции  $L_j$  ( $j = \overline{n-2, n-1}$ ) удовлетворяют условию  $S_0$  и  $\sigma_{n-1} \neq 1$ . Тогда у уравнения (1.1) существует  $(n-2)$ -параметрическое ( $(n-1)$ -параметрическое) семейство  $\mathcal{P}_{+\infty}^3(0)$ -решений с асимптотическими при  $t \rightarrow +\infty$  представлениями (1.4<sub>3</sub>), (2.8<sub>3</sub>), (2.10<sub>3</sub>) и (2.11<sub>3</sub>) в случае  $\sigma_{n-1} > 1$  ( $\sigma_{n-1} < 1$ ).

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** В данной работе для двучленного неавтономного обычно-

венного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка с правильно меняющимися нелинейностями (1.1) исследован вопрос о наличии и асимптотике, так называемых,  $\mathcal{P}_{+\infty}^k\left(\frac{n-i-1}{n-i}\right)$ -решений в случае  $i \in \{n-k+2, \dots, n-1\}$  при  $k \in \{3, \dots, n\}$ .

В результате было доказано, что у дифференциального уравнения (1.1) не существует  $\mathcal{P}_{+\infty}^k\left(\frac{n-i-1}{n-i}\right)$ -решений при всех  $i$  за исключением  $i = n-k+2$ . Особенность данного случая потребовала наложения условия  $S_0$  на медленно меняющиеся при  $y^{(j)} \rightarrow Y_j$  функции  $L_j$  ( $j = n-k+2, n-1$ ) для получения необходимых условий существования  $\mathcal{P}_{+\infty}^k\left(\frac{k-3}{k-2}\right)$ -решений, а также неявных асимптотических при  $t \rightarrow +\infty$  формул для их производных до порядка  $n-1$  включительно. Кроме того, при наложении условия  $S_0$  и на функцию  $L_{n-k+1}$  асимптотические формулы записаны в явном виде и получены достаточные условия существования у дифференциального уравнения (1.1) решений с найденными представлениями.

1. **Бурбаки Н.** Функции действительного переменного / Н. Бурбаки. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
2. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов // Дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 – Киев. – 1998. – 295 с.
3. **Евтухов В. М., Клопот А. М.** Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка с правильно меняющимися нелинейностями / В. М. Евтухов, А. М. Клопот // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, №5. – С. 584–600.
4. **Евтухов В. М., Корепапова Е. С.** Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями / В. М. Евтухов, Е. С. Корепапова // Укр. мат. журн. – 2017. – Т.69, №9. – С. 1198–1216.
5. **Евтухов В. М., Самойленко А. М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений. / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Укр. мат. ж. – 2010. – Т. 62, №1. – С. 52–80.
6. **Евтухов В. М., Самойленко А. М.** Асимптотическое представление решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Дифференц. уравнения – 2011. – Т. 47, №5. – С. 628–650.
7. **Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.** Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия. – М.:Наука. – 1990. – 430 с.
8. **Корепапова К. С.** Умови існування розв'язків степеневого виду у диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями / К. С. Корепапова // Буковинський мат. ж. – 2016. – Т. 4, №3–4. – С. 75–79.
9. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета – М.:Наука. – 1985. – 144 с.
10. **Evtukhov V. M., Korepanova K. S.** Asymptotic Behaviour of Solutions of One Class of  $n$ -th Order Differential Equations / V. M. Evtukhov, K. S. Korepanova // Memoirs on Diff. Eq. and Math. Phys. – 2017. – V.71. – P. 111–124.

Корепанова К. С.

АСИМПТОТИКА ОДНОГО КЛАСУ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ  $n$ -ГО ПОРЯДКУ З ПРАВИЛЬНО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Резюме

В роботі для двочленного неавтономного звичайного диференціального рівняння  $n$ -го порядку з правильно змінними нелінійностями встановлюються ознаки існування розв'язків, для яких існує  $k \in \{3, \dots, n\}$  таке, що  $(n - k)$ -а похідна розв'язку прямує до відмінної від нуля сталої при прямуванні аргументу до  $+\infty$ , а також асимптотичні зображення їх похідних до порядку  $n - 1$  включно. При дослідженні даного питання виникають проблеми з встановленням асимптотики  $(n - k + 1)$ -ї та наступних похідних розв'язку. У зв'язку з цим вводиться клас, так званих,  $\mathcal{P}_{+\infty}^k(\lambda_0)$ -розв'язків, де  $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$ , та досліджується питання про наявність та асимптотику  $\mathcal{P}_{+\infty}^k(\lambda_0)$ -розв'язків в особливих випадках, коли  $\lambda_0 = \frac{n-j-1}{n-j}$ ,  $j = \overline{n - k + 2, n - 1}$ . Усі інші неособливі випадки були досліджені у попередніх роботах автора. Отримані результати суттєво доповнюють дослідження про існування розв'язків такого вигляду в монографії І. Т. Кігурадзе та Т. А. Чантурія для рівнянь загального вигляду та диференціальних рівнянь типу Емдена-Фаулера, в яких забезпечується достатньо жорстке обмеження на  $(n - k + 1)$ -у похідну розв'язку.

*Ключові слова:* нелінійні диференціальні рівняння, вищий порядок, правильно змінні нелінійності, клас  $\mathcal{P}_{+\infty}^k(\lambda_0)$ -розв'язків, умови існування, асимптотика розв'язків.

Korepanova K. S.

ASYMPTOTICS OF ONE CLASS OF SOLUTIONS OF  $n$ -TH ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH REGULARLY VARYING NONLINEARITIES

Summary

In the present paper the existence conditions of solutions, for each of which there exists a number  $k \in \{3, \dots, n\}$  such that  $(n - k)$ -th derivative of solution tends to nonzero constant as the argument tends to  $+\infty$ , of a binomial non-autonomous  $n$ -th order ordinary differential equation with regularly varying nonlinearities and the asymptotic representations of their derivatives of order up to  $n - 1$  are established. During the investigation of this question the problems with the asymptotics of  $(n - k + 1)$ -st and the subsequent derivatives of order  $\leq n - 1$  are arose. As a result, the class of so-called  $\mathcal{P}_{+\infty}^k(\lambda_0)$ -solutions, where  $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$ , is introduced and the question of existence and asymptotics of  $\mathcal{P}_{+\infty}^k(\lambda_0)$ -solutions in singular cases, when  $\lambda_0 = \frac{n-j-1}{n-j}$ ,  $j = \overline{n - k + 2, n - 1}$ , is considered. All other nonsingular cases have been studied in the previous author's works. These results are essentially complement the research concerning the existence of such solutions in the monograph by I. T. Kiguradze and T. A. Chanturiya for the equations of general type and the differential equations of Emden-Fauler type, where a considerably strict restriction to the  $(n - k + 1)$ -st derivative of solution is provided for.

*Key words:* nonlinear differential equations, higher order, regularly varying nonlinearities, class of  $\mathcal{P}_{+\infty}^k(\lambda_0)$ -solutions, existence conditions, asymptotics of solutions.

## REFERENCES

1. **Burbaki, N.** (1965). *Funktsii deystvitelnogo peremennogo [Functions of real variables]*. Moscow: Nauka, 424 p.

2. **Evtukhov, V. M.** (1998). *Asimptoticheskie predstavleniya resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy [Asymptotic representations of solutions of non-autonomous differential equations]*. Kiev: Diss. dokt. phys-mat. nauk: 01.01.02, 295 p.
3. **Evtukhov, V. M., Klopot, A. M.** (2014). Asimptoticheskoe povedenie resheniy obyknovennykh differentsialnykh uravneniy  $n$ -go poryadka s pravilno menyayuschimisya nelineynostyami [The asymptotic behaviour of solutions of  $n$ -th order ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities.] *Diff. uravneniya*, Vol. 50, №5. – P. 584–600.
4. **Evtukhov, V. M., Korepanova, K. S.** (2017). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy differentsialnykh uravneniy s pravilno menyayuschimisya nelineynostyami [Asymptotic representations of solutions of differential equations with regularly varying nonlinearities.] *Ukr. mat. zhurn.*, Vol. 69, № 9. – P. 1198–1216.
5. **Evtukhov, V. M., Samoilenko, A. M.** (2010). Usloviya suschestvovaniya ischezayuschikh v osoboy tochke resheniy u veschestvennykh neavtonomnykh sistem kvazilineynykh differentsialnykh uravneniy [Existence conditions of solutions vanishing at the critical point of real nonautonomous system of quasi-linear differential equations.] *Ukr. mat. zh.*, Vol. 62, №1. – P. 52–80.
6. **Evtukhov, V. M., Samoilenko, A. M.** (2011). Asimptoticheskoe predstavlenie resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy s pravilno menyayuschimisya nelineynostyami [The asymptotic representation of solutions of non-autonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities.] *Diff. uravneniya*, Vol. 47, №5. – P. 628–650.
7. **Kiguradze, I. T., Chanturiya, T. A.** (1990). *Asimptoticheskie svoystva resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy [Asymptotic properties of solutions of ordinary differential equations]* Moscow: Nauka, 430 p.
8. **Korepanova, K. S.** (2016). Umovy isnuvannya rozvjazkiv stepenevogo vydu u dyfferentsialnykh rivnyan z pravylno zminnymy neliniynostyamy [Existence conditions of power-mode solutions of differential equations with regularly varying nonlinearities]. *Bukov. mat. zh.*, Vol. 4, № 3–4. – P. 75–79.
9. **Seneta, E.** (1985). *Pravilno menyayuschiesya funktsii [Properly varying functions]* Moscow: Nauka, 144 p.
10. **Evtukhov, V. M., Korepanova, K. S.** (2017). Asymptotic Behaviour of Solutions of One Class of  $n$ -th Order Differential Equations. *Memoirs on Diff. Eq. and Math. Phys.*, Vol. 71. – P. 111–124.

УДК 519.714

**В. В. Пічкур, Т. М. Роговченко**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

## **ПРО МЕТОД АДАПТИВНОГО НАЛАШТУВАННЯ ПАРАМЕТРІВ РЕГУЛЯТОРА В ДИСКРЕТНІ МОМЕНТИ ЧАСУ**

В статті пропонується адаптивний метод налаштування параметрів стабілізуючого регулятора в дискретні моменти часу. Ідея методу полягає в наступному: в задані дискретні моменти часу для регулятора параметричного вигляду ми підбираємо параметри керування, які мінімізують критерій якості, що описує відстань траєкторії системи до початку координат. Для цього здійснюється лінеаризація розв'язку системи за допомогою функції чутливості в околі поточного значення параметру. Для знаходження функції чутливості інтегрується матричне рівняння чутливості. Метод і його модифікації одержуємо за допомогою мінімізації квадратичної частини критерію якості в поточний момент часу. Розроблений алгоритм застосовується до задачі стабілізації коливання двох мас. Для цього знаходимо параметричне представлення регулятора, який розв'язує дану задачу. Для проведення обчислювального експерименту розглядаємо випадок залежності регулятора від одного параметру при постійному часовому кроці. Результати обчислювального експерименту наводяться в роботі.

*MSC: 93C40, 93D21.*

*Ключові слова: адаптивна стабілізація, параметризація керування, функція чутливості.*

**Вступ.** Методи теорії стійкості і стабілізації є базовими при дослідженні систем керування. Вони застосовуються при проектуванні систем із заданою якістю функціонування, при побудові автоматизованих систем керування тощо. Класичним підходом до розв'язування задачі стабілізації є метод функцій Ляпунова, а також алгебраїчні методи аналізу стійких режимів [1, 2, 4]. Разом з тим, вимоги, які висуваються до систем керування на теперішньому етапі, пов'язані з наявністю фазових обмежень, побудовою керувань за умов невизначеності. При цьому характеристики шумів, які впливають на динаміку системи, можуть бути невідомими заздалегідь. Ці обставини передбачають створення нових та розвиток наявних математичних засобів і алгоритмів, які б враховували вказані особливості. До таких підходів належать методи стабілізації, практичної стабілізації для систем з багатозначною правою частиною [10, 11, 13]. Інша методика пов'язана з побудовою робастних стабілізуючих регуляторів [3, 4, 8]. В роботах [6, 12, 14] розглядаються адаптивні методи до задач ідентифікації параметрів і керування системами. В [9] висвітлюються підходи до побудови адаптивних регуляторів на основі параметричного представлення функції Ляпунова.

В статті пропонується адаптивний метод налаштування параметрів стабілізуючого регулятора в дискретні моменти часу. В основі методу лежить рівняння для функції чутливості та підходи оптимізаційних методів другого порядку. Знайдене параметричне представлення керування, що розв'язує задачу стабілізації коливання двох мас, для якого застосовується розроблений адаптивний алгоритм. Проведено обчислювальні експерименти.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

**1. Адаптивне налаштування параметрів регулятора в дискретні моменти часу.** Нехай задана система керування вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(x, p, t), t), \quad t \geq t_0. \quad (1)$$

Тут  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^*$  — вектор стану,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^*$  — вектор керування,  $u(0, p) = 0$ ,  $p = (p_1, p_2, \dots, p_r)^*$  — вектор параметрів,  $f(x, u, t)$  — вектор-функція правих частин системи (1), яка є неперервно диференційованою за змінними  $x$ ,  $u$  і неперервною за змінною  $t$  на  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1$ ,  $f(0, 0, t) = 0$ .

Припускаємо, що керування  $u = u(x, p, t)$  розв'язує задачу стабілізації системи (1) для всіх  $p \in P$ , де  $P \subset \mathbb{R}^r$  — відкрита множина. Слід зазначити, що існує цілий ряд факторів, які суттєво впливають на поведінку системи, на вибір параметра  $p \in P$  і які можуть бути невідомими до початку процесу виконання алгоритму стабілізації: початкові дані системи можуть бути невідомими; існують шуми, які діють на праву частину системи і природа цих шумів не може бути визначена заздалегідь.

Тому ми пропонуємо здійснювати адаптивне налаштування параметру  $p$  в залежності від поточного положення системи. Зміну значення параметру  $p$  будемо реалізовувати в дискретні моменти часу  $t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots$ . Вважаємо, що на проміжках  $(t_i, t_{i+1})$  параметр  $p$  приймає постійні значення  $p = p^{(i)}$ ,  $i = 0, 1, \dots$ . В моменти часу  $t$ , які відповідають різним інтервалам, значення параметру  $p$  можуть відрізнятись.

Позначимо  $x(t, p)$  — розв'язок (1),  $x(t_0) = x_0$  при керуванні  $u = u(x, p, t)$ . За теоремою про неперервну диференційованість розв'язків системи диференціальних рівнянь за параметрами, функція  $x(t, p)$  є неперервно диференційованою за змінною  $p$  за умови, що функція керування є неперервно диференційованою за параметром  $p$ . В моменти  $t = t_i$  відома реалізація  $x(t, p)$  розв'язку (1), яка відповідає значенню параметра  $p = p^{(i-1)}$ . На основі даної реалізації шукаємо таке значення параметра  $p^{(i)}$ , яке мінімізує критерій якості вигляду

$$I_i(p) = \|x(t_i, p)\|^2 \rightarrow \min_{p \in P}. \quad (2)$$

Застосуємо підходи, які є характерними для методів оптимізації другого порядку, а також використаємо властивості матриці чутливості. Збудимо параметр  $p$  в точці  $p^{(i-1)}$  на величину  $h$  і запишемо розв'язок системи (1) з врахуванням лінійного наближення

$$x(t_i, p^{(i-1)} + h) = x(t_i, p^{(i-1)}) + W(t_i, p^{(i-1)})h + r_i(h). \quad (3)$$

Тут  $W(t) = W(t, p^{(i-1)})$  — матриця чутливості системи (1), яка відповідає значенню на розв'язковій  $x(t, p)$  при  $p = p^{(i-1)}$ ,  $h$  належить  $\mathbb{R}^r$ ,  $r_i(h)$  нескінченно мала вищих порядків малості по відношенню до  $h$  при  $h \rightarrow 0$ . Матриця чутливості задовольняє матричне диференціальне рівняння [5]

$$\frac{dW(t)}{dt} = F(t, p)W(t) + g(t, p), \quad W(t_i) = 0, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad (4)$$

де  $F(t,p) = \frac{\partial f(t,p)}{\partial x} + \frac{\partial f(t,p)}{\partial u} \frac{\partial u(t,p)}{\partial p}$ ,  $g(t,p) = \frac{\partial f(t,p)}{\partial u} \frac{\partial u(t,p)}{\partial p}$ ,  $p = p^{(i-1)}$ . Тут  $f(t,p) = f(x(t,p), u(x(t,p), t), p), t)$ ,  $u(t,p) = u(x(t,p), p, t)$ .

Позначимо  $x^{(i)} = x(t_i, p^{(i-1)})$ . Відкидаючи в (3) функцію  $r_i(h)$ , підставимо лінійне наближення до  $x(t_i, p^{(i-1)} + h)$  в функціонал (2). Одержуємо квадратичний функціонал вигляду

$$\begin{aligned} J(h) &= \langle x^{(i)} + W(t_i)h, x^{(i)} + W(t_i)h \rangle = \\ &= \langle x^{(i)}, x^{(i)} \rangle + \langle W^*(t_i)W(t_i)h, h \rangle + 2 \langle h, W^*(t_i)x^{(i)} \rangle. \end{aligned}$$

Шукаємо параметр  $h = h^{(i)}$  з умови мінімуму  $J(h)$ . З  $\frac{\partial J(h^{(i)})}{\partial h} = 0$  одержуємо для знаходження  $h^{(i)}$  систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$W^*(t_i)W(t_i)h = -W^*(t_i)x^{(i)}.$$

Припустимо, що матриця  $W^*(t_i)W(t_i)$  є невинродженою. Тоді

$$h^{(i)} = -(W^*(t_i)W(t_i))^{-1}W^*(t_i)x^{(i)}. \quad (5)$$

Виходячи з (1), (4), (5), метод можна записати так

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, u(x, p^{(i)}, t), t), \\ x(t_0) &= x_0 \text{ при } i = 0, \quad x(t_i) = x(t_i, p^{(i-1)}) \text{ при } i = 1, 2, \dots, \\ \frac{dW(t)}{dt} &= F(t, p^{(i)})W(t) + g(t, p^{(i)}), \quad W(t_i) = 0, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \\ p^{(i+1)} &= p^{(i)} - s_i(W^*(t_{i+1})W(t_{i+1}))^{-1}W^*(t_{i+1})x^{(i+1)}, \quad p^{(0)} = p_0, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $s_i \in (0, 1]$  вибираємо так, щоб  $p^{(i+1)} \in P$ ,  $i = 0, 1, \dots$

Якщо матриця  $W^*(t_{i+1})W(t_{i+1})$  вироджена або близька до виродженої, то можна застосувати регуляризацию методу (6). Для цього вводиться параметр регуляризації  $\varepsilon > 0$ , для якого одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, u(x, p^{(i)}, t), t), \\ x(t_0) &= x_0 \text{ при } i = 0, \quad x(t_i) = x(t_i, p^{(i-1)}) \text{ при } i = 1, 2, \dots, \\ \frac{dW(t)}{dt} &= F(t, p^{(i)})W(t) + g(t, p^{(i)}), \quad W(t_i) = 0, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \\ p^{(i+1)} &= p^{(i)} - s_i(W^*(t_{i+1})W(t_{i+1}) + \varepsilon I)^{-1}W^*(t_{i+1})x^{(i+1)}, \quad p^{(0)} = p_0, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $s_i \in (0, 1]$  вибираємо так, щоб  $p^{(i+1)} \in P$ ,  $i = 0, 1, \dots$ ,  $I - m \times m$ -одична матриця. Слід зауважити, що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (W^*(t_{i+1})W(t_{i+1}) + \varepsilon I)^{-1}W^*(t_{i+1}) = W^+(t_{i+1}),$$

де  $W^+(t_{i+1})$  – псевдообернена матриця до матриці  $W(t_{i+1})$ . Тому в (7) останню стрічку можна модифікувати так

$$p^{(i+1)} = p^{(i)} - s_i W^+(t_{i+1})x^{(i+1)}, \quad p^{(0)} = p_0. \quad (8)$$



Нехай система (1) є лінійною і має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad t \geq t_0,$$

де  $A$ ,  $B$  –  $n \times n$  і  $n \times m$  – матриці з постійними коефіцієнтами. Припустимо, що керування, яке розв'язує задачу стабілізації, має вигляд

$$u = C(p)x,$$

де  $C(p)$  –  $m \times n$  – матриця, компоненти якої гладко залежать від  $p$ . Тоді методи (6), (7) будуть записуватись аналогічно з врахуванням того, що  $F(t,p) = A + BC(p)$ ,  $g(t,p) = \frac{\partial(A+BC(p))x}{\partial p}$ .

**2. Адаптивне налаштування параметрів регулятора в задачі стабілізації системи коливання двох мас.**

**2.1. Параметричне представлення регулятора.** Математична модель коливання двох мас  $M_1$ ,  $M_2$ , які взаємодіють через сили тертя  $B$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  і поєднані пружинами з відповідними жорсткостями  $K$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  має вигляд [7]

$$\begin{cases} M_1 \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + (B + B_1) \frac{dy_1(t)}{dt} + (K + K_1) y_1(t) - B \frac{dy_2(t)}{dt} - K y_2(t) = u_1(t), \\ M_2 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + (B + B_2) \frac{dy_2(t)}{dt} + (K + K_2) y_2(t) - B \frac{dy_1(t)}{dt} - K y_1(t) = -u_2(t). \end{cases}$$

Тут  $y_1$ ,  $y_2$  – відхилення мас  $M_1$ ,  $M_2$  від положення рівноваги,  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  – зовнішні сили, які діють на маси  $M_1$ ,  $M_2$  відповідно. Вважаємо, що  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $B$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $K$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  є заданими додатніми константами. Таку систему можна подати у вигляді

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = y_3(t), \quad \frac{dy_2(t)}{dt} = y_4(t), \\ M_1 \frac{dy_3(t)}{dt} + (K + K_1) y_1(t) - K y_2(t) + (B + B_1) y_3(t) - B y_4(t) = u_1(t), \\ M_2 \frac{dy_4(t)}{dt} - K y_1(t) + (K + K_2) y_2(t) - B y_3(t) + (B + B_2) y_4(t) = -u_2(t). \end{cases} \quad (9)$$

Розглядається задача стабілізації положення рівноваги системи (9), в якій зовнішні сили  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  відіграють роль функцій керування. Керування шукаємо у формі з оберненим зв'язком

$$\begin{aligned} u_1(y_1, y_2, y_3, y_4) &= A_1 y_1 + C_1 y_2 + D_1 y_3 + E_1 y_4, \\ u_2(y_1, y_2, y_3, y_4) &= A_2 y_1 + C_2 y_2 + D_2 y_3 + E_2 y_4. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут  $A_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $E_1$ ,  $A_2$ ,  $C_2$ ,  $D_2$ ,  $E_2$  – коефіцієнти, які визначаються так, щоб тривіальний розв'язок системи (9) був асимптотично стійким. Має місце твердження.

**Теорема** (про параметричне представлення регулятора). *Припустимо, що коефіцієнти  $A_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $E_1$  задовольняють такі умови*

$$\begin{aligned} A_1 &\neq K + K_1 - \frac{K + C_1}{B + E_1} \left( B + B_1 - D_1 - \frac{M_1(K + C_1)}{B + E_1} \right), \quad \text{якщо } E_1 \neq -B, \\ C_1 &\neq -K, \quad \text{якщо } E_1 = -B. \end{aligned} \quad (11)$$

Припустимо також, що  $A_2, C_2, D_2, E_2$  визначаються як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь  $L\bar{x} = \bar{g}$ . Тут  $\bar{x} = (A_2, C_2, D_2, E_2)^*$ ,

$$\begin{aligned} \bar{g} &= \left( k_1 + g_1, \frac{k_2^2 k_3 + k_3^2 + k_4 k_1^2}{k_1 k_2 k_3} + g_2, \frac{k_3^2 + k_4 k_1^2}{k_2 k_3} + g_3, \frac{k_4}{k_3} + g_4 \right)^*, \\ g_1 &= -\frac{BM_1 + BM_2 + B_1 M_2 + B_2 M_1 - D_1 M_2}{M_1 M_2}, \\ g_2 &= \frac{A_1 M_2 - BB_1 - BB_2 + BD_1 + BE_1 - B_1 B_2 + B_2 D_1 - KM_1}{M_1 M_2} - \\ &\quad - \frac{KM_2 - K_1 M_2 - K_2 M_1}{M_1 M_2}, \\ g_3 &= \frac{A_1 B + A_1 B_2 + BC_1 - BK_1 - BK_2 - B_1 K - B_1 K_2 - KB_2 - K_1 B_2}{M_1 M_2} + \\ &\quad + \frac{D_1 K + K_2 D_1 + E_1 K}{M_1 M_2}, \quad g_4 = \frac{A_1 K + A_1 K_2 + KC_1 - KK_1 - KK_2 - K_1 K_2}{M_1 M_2}, \\ L &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & a & b & d \\ b & d & c & e \\ c & e & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{1}{M_2}, \quad b = \frac{B + E_1}{M_1 M_2}, \quad c = \frac{K + C_1}{M_1 M_2}, \\ d &= \frac{B + B_1 - D_1}{M_1 M_2}, \quad e = \frac{K + K_1 - A_1}{M_1 M_2}, \end{aligned}$$

$k_1, k_2, k_3, k_4$  – довільні додатні константи. Тоді керування (10) є розв'язком задачі стабілізації системи (9).

**Доведення.** Підставляємо керування (10) в (9). Одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь, характеристичний многочлен якої  $P(\lambda) = \lambda^4 + p_1 \lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_3 \lambda + p_4$ , причому

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{E_2}{M_2} + \frac{BM_1 + BM_2 + B_1 M_2 + B_2 M_1 - D_1 M_2}{M_1 M_2}, \\ p_2 &= \frac{C_2}{M_2} + \frac{(B + E_1) D_2}{M_1 M_2} + \frac{(B + B_1 - D_1) E_2}{M_1 M_2} - \frac{1}{M_1 M_2} [A_1 M_2 - BB_1 - \\ &\quad - BB_2 + BD_1 + BE_1 - B_1 B_2 + B_2 D_1 - KM_1 - KM_2 - K_1 M_2 - K_2 M_1], \\ p_3 &= \frac{(B + E_1) A_2}{M_1 M_2} + \frac{(B + B_1 - D_1) C_2}{M_1 M_2} + \frac{(C_1 + K) D_2}{M_1 M_2} + \\ &\quad + \frac{(K + K_1 - A_1) E_2}{M_1 M_2} - \frac{1}{M_1 M_2} [A_1 B + A_1 B_2 + BC_1 - BK_1 - BK_2 - \\ &\quad - B_1 K - B_1 K_2 - KB_2 - K_1 B_2 + D_1 K + K_2 D_1 + E_1 K], \\ p_4 &= \frac{(C_1 + K) A_2}{M_1 M_2} + \frac{(K + K_1 - A_1) C_2}{M_1 M_2} - \\ &\quad - \frac{1}{M_1 M_2} [A_1 K + A_1 K_2 + KC_1 - KK_1 - KK_2 - K_1 K_2]. \end{aligned} \tag{12}$$

Відповідно до критерія Гурвіца, для того, щоб нульова точка рівноваги системи

була асимптотично стійкою, необхідно і достатньо, щоб

$$\Delta_1 = p_1 > 0, \Delta_2 = p_1 p_2 - p_3 > 0, \Delta_3 = p_3 \Delta_2 - p_4 p_1^2 > 0, \Delta_4 = p_4 \Delta_3 > 0.$$

Покладемо  $\Delta_1 = k_1, \Delta_2 = k_2, \Delta_3 = k_3, \Delta_4 = k_4$ , де  $k_1, k_2, k_3, k_4$  – довільні додатні константи. Тоді  $p_1 = k_1, p_2 = \frac{k_2^2 k_3 + k_3^2 + k_4 k_1^2}{k_1 k_2 k_3}, p_3 = \frac{k_3^2 + k_4 k_1^2}{k_2 k_3}, p_4 = \frac{k_4}{k_3}$ . Систему (12) можна записати у вигляді  $L\bar{x} = \bar{g}$ . Її розв'язком є вектор  $(A_2, C_2, D_2, E_2)^*$ . Умови невиродженості матриці  $L$  такі:  $e \neq \frac{bcd-ac^2}{b^2}$  при  $b \neq 0$ ;  $c \neq 0$  якщо  $b = 0$ . Це еквівалентно (11) і дає умови для знаходження  $(A_1, C_1, D_1, E_1)^*$ . Теорему доведено.

**Зауваження 1.** Якщо в умовах теореми  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = p$ , то

$$\bar{g} = \left( p + g_1, 2 + \frac{1}{p} + g_2, 1 + p + g_3, 1 + g_4 \right)^*$$

**2.2. Обчислювальний експеримент.** Припустимо, що керування (10) є таким, що  $A_1, C_1, D_1, E_1, A_2 = A_2(p), C_2 = C_2(p), D_2 = D_2(p), E_2 = E_2(p)$  задовольняють умовам теореми про параметричне представлення регулятора при  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = p$ . У цьому випадку підстановка (10) в (9) дає

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = y_3(t), & \frac{dy_2(t)}{dt} = y_4(t), \\ \frac{dy_3(t)}{dt} = \frac{(-K-K_1+A_1)}{M_1} y_1(t) + \frac{(K+C_1)}{M_1} y_2(t) + \frac{(-B-B_1+D_1)}{M_1} y_3(t) + \frac{(B+E_1)}{M_1} y_4(t), \\ \frac{dy_4(t)}{dt} = \frac{(K-A_2(p))}{M_2} y_1(t) + \frac{(-K-K_2-C_2(p))}{M_2} y_2(t) + \\ + \frac{(B-D_2(p))}{M_2} y_3(t) + \frac{(-B-B_2-E_2(p))}{M_2} y_4(t). \end{cases}$$

Тут

$$\begin{aligned} A_2(p) &= e_{11}(p + g_1) + e_{12}(2 + p^{-1} + g_2) + e_{13}(1 + p + g_3) + e_{14}(1 + g_4), \\ C_2(p) &= e_{21}(p + g_1) + e_{22}(2 + p^{-1} + g_2) + e_{23}(1 + p + g_3) + e_{24}(1 + g_4), \\ D_2(p) &= e_{31}(p + g_1) + e_{32}(2 + p^{-1} + g_2) + e_{33}(1 + p + g_3) + e_{34}(1 + g_4), \\ E_2(p) &= e_{41}(p + g_1) + e_{42}(2 + p^{-1} + g_2) + e_{43}(1 + p + g_3) + e_{44}(1 + g_4), \end{aligned}$$

$e_{ij}$  – компоненти матриці  $L^{-1}$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . Рівняння для функції чутливості  $W(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t), w_4(t))^*$  має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dw_1(t)}{dt} = w_3(t), & \frac{dw_2(t)}{dt} = w_4(t), \\ \frac{dw_3(t)}{dt} = \frac{(-K-K_1+A_1)}{M_1} w_1(t) + \frac{(K+C_1)}{M_1} w_2(t) + \frac{(-B-B_1+D_1)}{M_1} w_3(t) + \frac{(B+E_1)}{M_1} w_4(t), \\ \frac{dw_4(t)}{dt} = \frac{(K-A_2(p))}{M_2} w_1(t) + \frac{(-K-K_2-C_2(p))}{M_2} w_2(t) + \frac{(B-D_2(p))}{M_2} w_3(t) + \\ + \frac{(-B-B_2-E_2(p))}{M_2} w_4(t) - \frac{A'_2(p)}{M_2} y_1(t) - \frac{C'_2(p)}{M_2} y_2(t) - \frac{D'_2(p)}{M_2} y_3(t) - \frac{E'_2(p)}{M_2} y_4(t), \end{cases}$$

$t \in [t_i, t_{i+1}]$ ,  $w_1(t_i) = w_2(t_i) = w_3(t_i) = w_4(t_i) = 0$ . Тут  $A'_2(p) = e_{11} + e_{13} - e_{12}p^{-2}$ ,  $C'_2(p) = e_{21} + e_{23} - e_{22}p^{-2}$ ,  $D'_2(p) = e_{31} + e_{33} - e_{32}p^{-2}$ ,  $E'_2(p) = e_{41} + e_{43} - e_{42}p^{-2}$ .

Застосуємо у цьому випадку метод (8) і наведемо результати обчислювального експерименту.

*Експеримент 1.* Вхідні дані:  $M_1 = 1.0$ ,  $M_2 = 1.0$ ,  $B = 100.0$ ,  $B_1 = 100.0$ ,  $B_2 = 100.0$ ,  $K = 100.0$ ,  $K_1 = 0.0001$ ,  $K_2 = 0.0001$ . Початкові умови:  $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = 100$ . Умова виходу з алгоритму

$$|y_j(T)| \leq \varepsilon, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

де  $\varepsilon = 0.1$ ,  $T$  – момент закінчення роботи алгоритму. Вибираємо  $s_i = 1$ , якщо  $p^{(i+1)} > 0$ , інакше  $s_i = 0.0000001$ ,  $i = 0, 1, \dots$ . Позначимо  $\tau = t_{i+1} - t_i$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , тобто крок методу постійний.

При  $p = 1$  за умови, що регулятор вибирається згідно твердження без застосування (8), момент закінчення роботи алгоритму  $T = 729.50999$ . Вибираємо  $p_0 = 1$  як початкове наближення і застосовуємо метод (8). Одержуємо такі результати:  $T = 161.984$  при  $\tau = 10$ ;  $T = 83.729$  при  $\tau = 15$ ;  $T = 130.684$  при  $\tau = 20$ .

При  $p = 0.1$  за умови, що регулятор вибирається згідно твердження без застосування (8), момент закінчення роботи алгоритму  $T = 2680.659$ . Вибираємо  $p_0 = 0.1$  як початкове наближення і застосовуємо метод (8). Одержуємо такі результати:  $T = 197.177$  при  $\tau = 10$ ;  $T = 116.171$  при  $\tau = 15$ ;  $T = 128.331$  при  $\tau = 20$ .

*Експеримент 2.* Вхідні дані:  $M_1 = 210000$ ,  $M_2 = 50000$ ,  $B = 7.75$ ,  $B_1 = 89.99$ ,  $B_2 = 1.123$ ,  $K = 2144.2$ ,  $K_1 = 4.62$ ,  $K_2 = 913.1$ . Решта параметрів аналогічні попередньому експерименту.

При  $p = 1$  за умови, що регулятор вибирається згідно твердження без застосування (8), момент закінчення роботи алгоритму  $T = 99.286$ . Вибираємо  $p_0 = 1$  як початкове наближення і застосовуємо метод (8). Одержуємо такі результати:  $T = 101.711$  при  $\tau = 10$ ;  $T = 97.361$  при  $\tau = 15$ ;  $T = 101.719$  при  $\tau = 20$ .

При  $p = 0.001$  за умови, що регулятор вибирається згідно твердження без застосування (8), момент закінчення роботи алгоритму  $T = 13822.607$ . Вибираємо  $p_0 = 0.001$  як початкове наближення і застосовуємо метод (8). Одержуємо такі результати:  $T = 865.2659$  при  $\tau = 10$ ;  $T = 781.9009$  при  $\tau = 15$ ;  $T = 1323.7369$  при  $\tau = 50$ .

При  $p = 0.1$  за умови, що регулятор вибирається згідно твердження без застосування (8), момент закінчення роботи алгоритму  $T = 890.0079$ . Вибираємо  $p_0 = 0.1$  як початкове наближення і застосовуємо метод (8). Одержуємо такі результати:  $T = 490.4159$  при  $\tau = 5$ ;  $T = 889.9449$  при  $\tau = 10$ ;  $T = 878.7369$  при  $\tau = 15$ ;  $T = 889.87399$  при  $\tau = 50$ .

### Висновки.

1. Одержано адаптивний метод налаштування параметрів стабілізуючого регулятора в дискретні моменти часу. В основі методу лежить рівняння для функції чутливості та підходи оптимізаційних методів другого порядку.
2. Для задачі стабілізації коливання двох мас запропоновано параметричне представлення керування.
3. На основі параметричного представлення регулятора для задачі стабілізації коливання двох мас наведено алгоритм адаптивної стабілізації коливання двох мас.
4. Проведено обчислювальний експеримент.

1. **Кириченко Н. Ф.** Введение в теорию стабилизации движения/Н. Ф. Кириченко. — К.: Вища школа, 1978. — 184 с.
2. **Кунцевич В. М.** Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова/ В. М. Кунцевич, М. М. Лычак. — М.: Наука, 1977. — 400 с.
3. **Мазко А. Г.** Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств/ А. Г. Мазко. — Київ: Інститут математики НАН України, 2016. — 330 с.
4. **Поляк Б. Т.** Робастная устойчивость и управление/ Б. Т. Поляк, П. С. Щербатов. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
5. **Розенвассер Е. Н.** Чувствительность систем управления/Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов. — М.: Наука, 1981. — 464 с.
6. **Цыпкин Я. З.** Адаптация и обучение в автоматических системах/Я. З. Цыпкин. — М.: Наука, 1968. — 400 с.
7. **Antsaklis P. J.** Linear Systems/P. J. Antsaklis, A. N. Michel. — Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2005. — 670 p.
8. **Boyd S.** Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM Studies in Applied Mathematics, 15/S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan. — Philadelphia: PA, 1994. — 193 p.
9. **Krstić M.** Nonlinear and Adaptive Control Design/ M. Krstić, I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotović. — N.Y.: Wiley & Sons, Inc., 1995. — 563 p.
10. **Pichkur V.** On practical stability of differential inclusions using Lyapunov functions/ V. V. Pichkur // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. — Vol. 22, Number 5. — 2017. — pp. 1977–1986.
11. **Pichkur V. V.** Maximum set of initial conditions for the problem of weak practical stability of a discrete inclusion/ V. V. Pichkur, M. S. Sasonkina // Journal of Mathematical Sciences. — Vol. 194, Issue 4. — 2013. — pp. 414–425.
12. **Sastry S.** Adaptive control: stability, convergence, and robustness/ S. Sastry, M. Bodson. — New Jersey: Prentice Hall, 1989. — 196 p.
13. **Smirnov G.** Introduction to the Theory of Differential Inclusions/ G. Smirnov — American Mathematical Society, 2002. — 226 p.
14. **Fradkov A. L.** Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems/A. L. Fradkov, I. V. Miroshnik, V. O. Nikiforov. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. — 510 p.

*Пічкур В. В., Роговченко Т. Н.*

О МЕТОДЕ АДАПТИВНОЙ НАСТРОЙКИ ПАРАМЕТРОВ РЕГУЛЯТОРА В ДИСКРЕТНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

*Резюме*

В статье предлагается адаптивный метод настройки параметров стабилизирующего регулятора в дискретные моменты времени. Идея метода заключается в следующем: в заданные дискретные моменты времени для регулятора параметрического вида мы подбираем параметры управления, которые минимизируют критерий качества, описывающего расстояние траектории системы до начала координат. Для этого мы линеаризируем решение системы с помощью функции чувствительности в окрестности

текущего значения параметра. Для нахождения функции чувствительности мы записываем матричное уравнение чувствительности. Метод и его модификации получаем с помощью минимизации квадратичной части критерия качества в текущий момент времени. Мы применяем разработанный алгоритм к задаче стабилизации колебания двух масс. Для этого находим параметрическое представление регулятора, который решает данную задачу. Для проведения вычислительного эксперимента рассматриваем случай зависимости регулятора от одного параметра при постоянном временном шаге. Результаты вычислительного эксперимента приведены в работе.

*Ключевые слова:* адаптивна стабілізація, параметризація керування, функція чутливості.

*Pichkur V. V., Rogovchenko T. M.*

ON AN ADAPTIVE METHOD OF REGULATOR PARAMETERS ADJUSTMENT AT DISCRETE TIME POINTS

*Summary*

We offer an adaptive method of regulator parameters correction at discrete points of time. The method is based on the following idea: we choose the parameters of the parametric regulator at discrete moments of time minimizing the quality criterion. The criterion describes Euclidean distance between the system trajectory and the equilibrium point. In order to solve the minimization problem, we linearise the solution of the system in the neighbourhood of the current parameter value via the sensitivity function. The sensitivity function depends on the system solution. We calculate this function plugging the current system solution into the right part of the differential matrix sensitivity equation. We obtain the method and its modifications by minimizing the quadratic part of the quality criterion at the current time. Further we apply the developed algorithm to the problem of stabilization of two-mass oscillations. For this purpose we find the parametric representation of the proper regulator. In computational experiment we use the case of one parameter regulator and the constant time step. The results of the computational experiment are given in the last section of the paper.

*Key words:* adaptive stabilization, control parametrization, sensitivity function.

## REFERENCES

1. Kirichenko, N. F. (1978) *Vvedenie v teoriyu stabilizacii dvizheniya [Introduction to the theory of movement stabilization]*. Kyiv: Vyscha shkola, 184 p.
2. Kuncovich, V. M., Lychak, M. M. (1977) *Sintez sistem avtomaticheskogo upravleniya s pomoshchyu funkciy Lyapunova [Synthesis of automatic control systems using Lyapunov functions]*. Moscow: Nauka, 400 p.
3. Mazko, A. G. (2016) *Robastnaya ustoychivost i stabilizaciya dinamicheskikh sistem. Metody matrichnyh i konusnyh neravenstv [Robust stability and stabilization of dynamic systems. Methods of matrix and cone inequalities]*. Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 330 p.
4. Polyak, B. T., Shcherbakov, P.S. (2002) *Robastnaya ustoichivost i upravlenie [Robust stability and control]*. Moscow: Nauka, 303 p.
5. Rosenvasser, E. N., Yusupov, R. M. (1981) *Chuvstvitelnost sistem upravleniya [Control systems sensitivity]*. Moscow: Nauka, 464 p.

6. Суркин, Ya. Z. (1968) *Adaptaciya i obucheniye v avtomaticheskikh sistemah*[*Adaptation and learning in automatic systems*]. Moscow: Nauka, 400 p.
7. Antsaklis, P. J., Michel, A. N. (2005) *Linear Systems*. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 670 p.
8. Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V. (1994) *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM Studies in Applied Mathematics, 15*. Philadelphia: PA, 193 p.
9. Krstić, M., Kanellakopoulos, I., Kokotović, P. V. (1995) *Nonlinear and Adaptive Control Design*. N.Y.: Wiley & Sons, Inc., 563 p.
10. Pichkur, V. (2017) On practical stability of differential inclusions using Lyapunov functions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B*, Vol. 22, Number 5, P. 1977 – 1986.
11. Pichkur, V. V., Sasonkina, M. S. (2013) Maximum set of initial conditions for the problem of weak practical stability of a discrete inclusion. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 194, Issue 4, P. 414–425.
12. Sastry, S., Bodson, M. (1989) *Adaptive control: stability, convergence, and robustness*. New Jersey: Prentice Hall, 196 p.
13. Smirnov, G. (2002) *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*. American Mathematical Society, 226 p.
14. Fradkov, A. L., Miroshnik, I. V., Nikiforov, V. O. (1999) *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 510 p.

УДК 517.9

Р. М. Тацій, О. Ю. Чмир, О. О. Карабин

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

## ЗАГАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ІЗ КУСКОВО-НЕПЕРЕРВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ПРАВИМИ ЧАСТИНАМИ

В даній роботі розглянуто загальні крайові задачі для гіперболічного рівняння із кусково-неперервними за просторовою змінною коефіцієнтами та правими частинами. Знайдено розв'язки таких задач за допомогою концепції квазіпохідних, сучасної теорії систем лінійних диференціальних рівнянь, класичного методу Фур'є та методу редукції.  
MSC: 34B05.

Ключові слова: квазидиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Коші, задача на власні значення, метод Фур'є та метод власних функцій.

**Вступ.** Точні методи розв'язування мішаних крайових задач математичної фізики, які не використовують різного роду інтегральних перетворень, прийнято називати прямими методами. Загальна схема реалізації таких методів полягає в наступному:

- 1) редукція, тобто зведення вихідної задачі до розв'язування двох простіших, взаємозв'язаних задач;
- 2) застосування схеми Фур'є, що включає в себе відокремлення змінних, розв'язування задачі на власні значення та реалізації методу власних функцій.

Важливу роль в цих методах відіграє концепція квазіпохідних, яка дозволяє уникнути проблеми множення узагальнених функцій [1].

Для рівняння параболічного типу реалізація такої схеми вперше була проведена у роботі [2]. Подальший розвиток цей метод отримав в роботах [3]– [6]. Для рівнянь гіперболічного типу, вперше, ці ідеї були впроваджені в роботі [7].

В даній роботі розглядається гіперболічне рівняння з кусково-неперервними за просторовою змінною коефіцієнтами та правими частинами з найбільш загальними локальними крайовими умовами. Окремо виділено частинний, але важливий в прикладному аспекті випадок, кусково-сталих коефіцієнтів та правих частин, коли розв'язки вихідної задачі можуть бути отримані в замкненій формі.

### ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

**1. Основні позначення, формулювання задачі.** Нехай  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} \dots < x_{n-1} < x_n = l$  – довільне розбиття відрізка  $[0; l]$  дійсної осі  $Ox$  на  $n$  частин,  $\theta_i$  – характеристична функція проміжку  $[x_i; x_{i+1})$ , тобто  $\theta_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i; x_{i+1}), \\ 0, & x \notin [x_i; x_{i+1}), \end{cases} \quad i = \overline{0, n-1}$ .

Нехай  $m_i(x)$ ,  $a_i(x)$ ,  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , – додатньо визначені функції на кожному з проміжків  $[x_i; x_{i+1})$ . Покладемо:  $m(x) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x) \cdot \theta_i$ ,  $a(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) \cdot \theta_i$ ,  
 $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(x) \cdot \theta_i$ .



Позначимо  $u^{[1]} = a(x)u_x'$  (квазіпохідна).

Розглянемо загальну крайову задачу для гіперболічного рівняння

$$m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x), \quad x \in (x_0; x_n), t \in (0; +\infty), \quad (1)$$

із загальними крайовими умовами

$$\begin{cases} p_{11}u(x_0, t) + p_{12}u^{[1]}(x_0, t) + q_{11}u(x_n, t) + q_{12}u^{[1]}(x_n, t) = \psi_0(t), \\ p_{21}u(x_0, t) + p_{22}u^{[1]}(x_0, t) + q_{21}u(x_n, t) + q_{22}u^{[1]}(x_n, t) = \psi_l(t), \end{cases} \quad t \in [0; +\infty), \quad (2)$$

які вважаються лінійно незалежними,  
та початковими умовами

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x), \end{cases} \quad x \in [x_0; x_n], \quad (3)$$

де  $\psi_0(t), \psi_l(t) \in C^2(0; +\infty)$ ,  $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$  — абсолютно-неперервні функції на  $[x_0; x_n]$ .

Надалі розглядатимемо частинний, але такий, що має важливе практичне застосування, випадок локальних крайових умов, коли  $p_{21} = p_{22} = q_{11} = q_{12} = 0$

$$\begin{cases} p_{11}u(x_0, t) + p_{12}u^{[1]}(x_0, t) = \psi_0(t), \\ q_{21}u(x_n, t) + q_{22}u^{[1]}(x_n, t) = \psi_l(t), \end{cases} \quad t \in [0; +\infty).$$

Метод редукції відшукання розв'язку задачі детально описаний, наприклад, в [8, 9]. Згідно з цим методом розв'язок задачі (1)-(3) шукаємо у вигляді суми двох функцій

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t), \quad (4)$$

одну з яких, наприклад  $w(x, t)$ , конструємо спеціальним способом, а іншу —  $v(x, t)$  визначаємо однозначно.

**2. Побудова функції  $w(x, t)$ .** Визначимо функцію  $w(x, t)$  як розв'язок крайової задачі

$$(a(x)w_x')_x' = -f(x), \quad (5)$$

$$\begin{cases} p_{11}w(x_0) + p_{12}w^{[1]}(x_0) = \psi_0(t), \\ q_{21}w(x_n) + q_{22}w^{[1]}(x_n) = \psi_l(t), \end{cases} \quad t \in [0; +\infty). \quad (6)$$

Зауважимо, що змінна  $t$  тут вважається параметром.

В основі методу розв'язування задачі (5), (6) лежить концепція квазіпохідних [10].

Введемо вектори  $\bar{W} = \begin{pmatrix} w \\ w^{[1]} \end{pmatrix}$ , де  $w^{[1]} = a(x)w_x'$ ,  $\bar{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x) \end{pmatrix}$ .

За таких позначень квазідиференціальне рівняння (5) зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\bar{W}_x' = A(x) \cdot \bar{W} + \bar{F}, \quad (7)$$

де  $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Під розв'язком системи (7) розуміємо вектор-функцію  $\bar{W}(x,t)$ , що за змінною  $x$  є абсолютно-неперервна та справджує систему (7) майже всюди (див. [10]).

Крайові умови (6) теж запишемо у векторній формі

$$P \cdot \bar{W}(x_0,t) + Q \cdot \bar{W}(x_n,t) = \bar{\Gamma}(t), \quad (8)$$

де  $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ , причому  $\text{rang}(P|Q) = 2$ ,  $\bar{\Gamma}(t) = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_l(t) \end{pmatrix}$ .

Нехай  $w_i(x,t)$  та  $w_i^{[1]}(x,t)$  визначені на проміжку  $[x_i; x_{i+1})$ . Покладемо

$$w(x,t) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i(x,t)\theta_i. \quad (9)$$

На проміжку  $[x_i; x_{i+1})$  система (7) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}'_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_i(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f_i(x) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Розглянемо однорідну систему, що відповідає системі (10)

$$\begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_i(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}.$$

Матриця Коші  $B_i(x,s)$  такої системи має вигляд

$$B_i(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & b_i(x,s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{де } b_i(x,s) = \int_s^x \frac{1}{a_i(z)} dz \quad (\text{див. [11]}). \quad (11)$$

Для довільного  $k \geq i$  позначимо

$$B(x_k, x_i) \stackrel{\text{def}}{=} B_{k-1}(x_k, x_{k-1}) \cdot B_{k-2}(x_{k-1}, x_{k-2}) \cdot \dots \cdot B_i(x_{i+1}, x_i). \quad (12)$$

Структура (11) матриць  $B_i(x,s)$  дає можливість встановити структуру матриці (12)

$$B(x_k, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{m=i}^{k-1} b_m(x_{m+1}, x_m) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причому  $B(x_k, x_k) \stackrel{\text{def}}{=} E$ , де  $E$  — одинична матриця.

Розв'язок системи (10) на проміжку  $[x_i; x_{i+1})$  має вигляд

$$\bar{W}_i(x,t) = B_i(x, x_i) \cdot \bar{P}_i + \int_{x_i}^x B_i(x,s) \cdot \bar{F}_i(s) ds, \quad (13)$$

де  $\bar{P}_i$  — поки що невідомий вектор.

Аналогічно, на проміжку  $[x_{i-1}; x_i)$

$$\bar{W}_{i-1}(x,t) = B_{i-1}(x,x_{i-1}) \cdot \bar{P}_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^x B_{i-1}(x,s) \cdot \bar{F}_{i-1}(s) ds. \quad (14)$$

В точці  $x = x_i$  повинна виконуватись умова спряження, а саме  $\bar{W}_i(x_i,t) = \bar{W}_{i-1}(x_i,t)$  (див. [12]), в результаті чого одержимо рекурентне співвідношення

$$\bar{P}_i = B_{i-1}(x_i,x_{i-1}) \cdot \bar{P}_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} B_{i-1}(x_i,s) \cdot \bar{F}_{i-1}(s) ds. \quad (15)$$

Методом математичної індукції, з (15) одержуємо

$$\bar{P}_i = B(x_i,x_0) \cdot \bar{P}_0 + \sum_{k=0}^i B(x_i,x_k) \bar{Z}_k, \quad (16)$$

де  $\bar{Z}_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} B_{k-1}(x_k,s) \cdot \bar{F}_{k-1}(s) ds$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ , причому  $\bar{Z}_0 \stackrel{def}{=} \bar{0}$ ,  $\bar{P}_0$  — початковий (невідомий) вектор. Для знаходження  $\bar{P}_0$  використовуємо крайові умови (8), в яких покладемо  $\bar{W}(x_0,t) \stackrel{def}{=} \bar{P}_0$ ,

$$\begin{aligned} \bar{W}(x_n,t) \stackrel{def}{=} \bar{W}_{n-1}(x_n,t) &= B_{n-1}(x_n,x_{n-1}) \bar{P}_{n-1} + \int_{x_{n-1}}^{x_n} B_{n-1}(x_n,s) \cdot \bar{F}_{n-1}(s) ds = \\ &= B(x_n,x_0) \bar{P}_0 + \sum_{k=1}^n B(x_n,x_k) \bar{Z}_k. \end{aligned}$$

Тоді  $[P + QB(x_n,x_0)] \bar{P}_0 + Q \sum_{k=1}^n B(x_n,x_k) \bar{Z}_k = \bar{\Gamma}$ , звідки одержуємо

$$\bar{P}_0 = [P + Q \cdot B(x_n,x_0)]^{-1} \cdot \left( \bar{\Gamma} - Q \sum_{k=1}^n B(x_n,x_k) \bar{Z}_k \right). \quad (17)$$

Обчислимо

$$\begin{aligned} &[P + Q \cdot B(x_n,x_0)]^{-1} = \\ &= \left[ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sum_{m=0}^{n-1} b_m(x_{m+1},x_m) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} q_{21}\sigma_n + q_{22} & -p_{12} \\ -q_{21} & p_{11} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

де  $\sigma_n = \sum_{m=0}^{n-1} b_m(x_{m+1},x_m)$ ,  $\sigma_0 \stackrel{def}{=} 0$ ,  $\Delta = p_{11}(q_{21}\sigma_n + q_{22}) - q_{21}p_{12} \neq 0$ ;

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma} - Q \sum_{k=1}^n B(x_n, x_k) \bar{Z}_k = \\ & = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_l(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \sum_{k=1}^n B(x_n, x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} B_{k-1}(x_k, s) \cdot \bar{F}_{k-1}(s) ds. \end{aligned} \quad (18)$$

Запишемо праву частину (18) в матричному вигляді

$$\begin{aligned} & \int_{x_{k-1}}^{x_k} B_{k-1}(x_k, s) \cdot \bar{F}_{k-1}(s) ds = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \begin{pmatrix} 1 & b_{k-1}(x_k, s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -f_{k-1}(s) \end{pmatrix} ds = \\ & = \begin{pmatrix} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} b_{k-1}(x_k, s) \cdot f_{k-1}(s) ds \\ - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_{k-1}(s) ds \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} I_{k-1}(x_k) \\ I_{k-1}^{[1]}(x_k) \end{pmatrix} = \bar{Z}_k; \\ & \sum_{k=1}^n B(x_n, x_k) \begin{pmatrix} I_{k-1}(x_k) \\ I_{k-1}^{[1]}(x_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n (I_{k-1}(x_k) + I_{k-1}^{[1]}(x_k) \cdot \sum_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1}, x_m)) \\ \sum_{k=1}^n I_{k-1}^{[1]}(x_k) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо

$$\begin{aligned} & \bar{\Gamma} - Q \sum_{k=1}^n B(x_n, x_k) \bar{Z}_k = \\ & = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_l(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n (I_{k-1}(x_k) + I_{k-1}^{[1]}(x_k) \cdot \sum_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1}, x_m)) \\ \sum_{k=1}^n I_{k-1}^{[1]}(x_k) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_l(t) - q_{21} \sum_{k=1}^n (I_{k-1}(x_k) + I_{k-1}^{[1]}(x_k) \cdot \sum_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1}, x_m)) - q_{22} \sum_{k=1}^n I_{k-1}^{[1]}(x_k) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

Підставимо (19) в (17)

$$\begin{aligned} & \bar{P}_0 = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} q_{21}\sigma_n + q_{22} & -p_{12} \\ -q_{21} & p_{11} \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_l(t) - q_{21} \sum_{k=1}^n (I_{k-1}(x_k) + I_{k-1}^{[1]}(x_k) \cdot \sum_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1}, x_m)) - q_{22} \sum_{k=1}^n I_{k-1}^{[1]}(x_k) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

Зокрема, перша координата вектора  $\bar{P}_0$  дорівнює

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta} \left( (q_{21}\sigma_n + q_{22})\psi_0(t) - p_{12} \left( \psi_l(t) - q_{21} \sum_{k=1}^n (I_{k-1}(x_k) + \right. \right. \\ & \left. \left. + I_{k-1}^{[1]}(x_k) \cdot \sum_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1}, x_m)) - q_{22} \sum_{k=1}^n I_{k-1}^{[1]}(x_k) \right) \right), \end{aligned}$$

а друга координата вектора  $\bar{P}_0$  –

$$\frac{1}{\Delta} \left( -q_{21}\psi_0(t) + p_{11} \left( \psi_l(t) - q_{21} \sum_{k=1}^n (I_{k-1}(x_k) + I_{k-1}^{[1]}(x_k)) \cdot \sum_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1}, x_m) - \right. \right. \\ \left. \left. - q_{22} \sum_{k=1}^n I_{k-1}^{[1]}(x_k) \right) \right).$$

На основі формул (13), (16), (20), після перетворень, отримаємо зображення вектор-функції  $\bar{W}_i(x, t)$  на проміжку  $[x_i; x_{i+1})$

$$\begin{aligned} \bar{W}_i(x, t) &= B_i(x, x_i) \cdot \left( B(x_i, x_0) \cdot \bar{P}_0 + \sum_{k=1}^i B(x_i, x_k) \bar{Z}_k \right) + \int_{x_i}^x B_i(x, s) \cdot \bar{F}_i(s) ds = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & b_i(x, x_i) + \sigma_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{P}_0 + \\ &+ \begin{pmatrix} 1 & b_i(x, x_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{array}{c} \sum_{k=1}^i (I_{k-1}(x_k) + I_{k-1}^{[1]}(x_k)) \sum_{m=k}^{i-1} b_m(x_{m+1}, x_m) \\ \sum_{k=1}^i I_{k-1}^{[1]}(x_k) \end{array} \right) + \\ &+ \begin{pmatrix} -\int_{x_i}^x b_i(x, s) \cdot f_i(s) ds \\ -\int_{x_i}^x f_i(s) ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_i(x, x_i) + \sigma_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{P}_0 + \\ &+ \left( \begin{array}{c} \sum_{k=1}^i (I_{k-1}(x_k) + I_{k-1}^{[1]}(x_k)) \sum_{m=k}^{i-1} b_m(x_{m+1}, x_m) + b_i(x, x_i) \sum_{k=1}^i I_{k-1}^{[1]}(x_k) + I_i(x) \\ \sum_{k=1}^i I_{k-1}^{[1]}(x_k) + I_i^{[1]}(x) \end{array} \right). \quad (21) \end{aligned}$$

Перша координата вектора  $\bar{W}_i(x, t)$  в (21) і є шуканою функцією  $w_i(x, t)$ . Отже,

$$\begin{aligned} w_i(x, t) &= \frac{1}{\Delta} ((q_{21}\sigma_n + q_{22})\psi_0(t) - \\ &- p_{12} \left( \psi_l(t) - q_{21} \sum_{k=1}^n (I_{k-1}(x_k) + I_{k-1}^{[1]}(x_k)) \cdot \sum_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1}, x_m) - \right. \\ &\quad \left. - q_{22} \sum_{k=1}^n I_{k-1}^{[1]}(x_k) \right) + (b_i(x, x_i) + \sigma_i) \times \\ &\times \left( -q_{21}\psi_0(t) + p_{11} \left( \psi_l(t) - q_{21} \sum_{k=1}^n (I_{k-1}(x_k) + I_{k-1}^{[1]}(x_k)) \cdot \sum_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1}, x_m) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - q_{22} \sum_{k=1}^n I_{k-1}^{[1]}(x_k) \right) \right) + \sum_{k=1}^i (I_{k-1}(x_k) + I_{k-1}^{[1]}(x_k)) \sum_{m=k}^{i-1} b_m(x_{m+1}, x_m) + \end{aligned}$$

$$+b_i(x, x_i) \sum_{k=1}^i I_{k-1}^{[1]}(x_k) + I_i(x). \quad (22)$$

Підставляючи вираз (22) у (9), можемо записати розв'язок на всьому проміжку  $[x_0; x_n]$ .

**3. Побудова функції  $v(x, t)$ .** Запишемо мішану задачу для функції  $v(x, t)$ . Підставляючи (4) в (1) та враховуючи, що функція  $w(x, t)$  задовольняє (5), одержуємо неоднорідне рівняння

$$m(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -m(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, x \in (x_0; x_n), t \in (0; +\infty). \quad (23)$$

Підставимо (4) в початкові умови (3). Одержимо для функції  $v(x, t)$  початкові умови

$$\begin{cases} v(x, 0) = \Phi_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = \Phi_1(x), \end{cases} x \in [x_0; x_n], \quad (24)$$

де  $\Phi_0(x) \stackrel{def}{=} \varphi_0(x) - w(x, 0)$ ,  $\Phi_1(x) \stackrel{def}{=} \varphi_1(x) - \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0)$ .

Оскільки функція  $w(x, t)$  справджує крайові умови (6), то із (4) випливають крайові умови для функції  $v(x, t)$

$$\begin{cases} p_{11}v(x_0) + p_{12}v^{[1]}(x_0) = 0, \\ q_{21}v(x_n) + q_{22}v^{[1]}(x_n) = 0, \end{cases} t \in [0; +\infty). \quad (25)$$

Отже, за умови, що розв'язок  $w(x, t)$  задачі (5), (6) є відомим, функція  $v(x, t)$  є розв'язком мішаної задачі (23) - (25).

**4. Метод Фур'є та задача на власні значення.** Для рівняння (23) розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$m(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (26)$$

Знайдемо його нетривіальні розв'язки у вигляді

$$v(x, t) = \sin(\omega t + \varepsilon) \cdot X(x), \quad (27)$$

де  $\omega$  — параметр,  $\varepsilon$  — константа,  $X(x)$  — поки що невідома функція [8], що справджує крайові умови (25).

Підставимо (27) в рівняння (26). Одержимо квазідиференціальне рівняння

$$(a(x)X'(x))' + \omega^2 m(x)X(x) = 0. \quad (28)$$

Підставивши (27) в умови (25), одержимо крайові умови

$$\begin{cases} p_{11}X(x_0) + p_{12}X^{[1]}(x_0) = 0, \\ q_{21}X(x_n) + q_{22}X^{[1]}(x_n) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Як і вище, під розв'язком рівняння (28) розуміємо абсолютно-неперервну на  $[x_0; x_n]$  функцію  $X(x)$ , що справджує його майже всюди.

Ввівши квазіпохідну  $X^{[1]} \stackrel{def}{=} aX'$ , вектор  $\bar{X} = \begin{pmatrix} X \\ X^{[1]} \end{pmatrix}$  та матрицю  $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a(x)} \\ -m(x) \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ , запишемо задачу (28), (29) в матричному вигляді

$$\bar{X}' = A(x) \cdot \bar{X}, \quad (30)$$

$$P\bar{X}(x_0) + Q\bar{X}(x_n) = \bar{0}. \quad (31)$$

Відповідну систему на проміжку  $[x_i, x_{i+1})$  запишемо у вигляді

$$\bar{X}'_i = A_i(x) \cdot \bar{X}_i, i = \overline{0, n-1}, \quad (32)$$

де  $A_i(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_i(x)} \\ -\omega^2 m_i(x) & 0 \end{pmatrix}$ .

Матрицю Коші системи (32) позначимо  $\tilde{B}_i(x, s, \omega)$  і аналогічно, як і в формулі (12), позначимо  $\tilde{B}(x_i, x_0, \omega) \stackrel{def}{=} \prod_{j=0}^i \tilde{B}_{i-j}(x_{i-j+1}, x_{i-j}, \omega)$ .

Позначимо також

$$\tilde{B}(x, x_0, \omega) \stackrel{def}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{B}_i(x, x_i, \omega) \cdot \tilde{B}(x_i, x_0, \omega) \cdot \theta_i, \quad (33)$$

(аналог матриці Коші на всьому проміжку  $[x_0; x_n]$ );

$$\tilde{B}(x_n, x_0, \omega) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Нетривіальний розв'язок  $\bar{X}(x, \omega)$  системи (30) шукаємо у вигляді

$$\bar{X}(x, \omega) = \tilde{B}(x, x_0, \omega) \cdot \bar{C}, \quad (35)$$

де  $\bar{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$  — деякий ненульовий вектор.

Вектор - функція  $\bar{X}(x, \omega)$  має задовольняти крайові умови (31), тобто

$$P \cdot \bar{X}(x_0, \omega) + Q \cdot \bar{X}(x_n, \omega) = \bar{0},$$

$$\left( P \cdot \tilde{B}(x_0, x_0, \omega) + Q \cdot \tilde{B}(x_n, x_0, \omega) \right) \cdot \bar{C} = \bar{0},$$

врахувавши, що  $\tilde{B}(x_0, x_0, \omega) = E$ , прийдемо до рівності

$$\left( P + Q \cdot \tilde{B}(x_n, x_0, \omega) \right) \cdot \bar{C} = \bar{0}. \quad (36)$$

Для існування ненульового вектора  $\bar{C}$  в (36) необхідно і досить виконання умови

$$\det \left( P + Q \cdot \tilde{B}(x_n, x_0, \omega) \right) = 0. \quad (37)$$

Конкретизуємо вигляд лівої частини характеристичного рівняння (37), врахувавши вигляд матриць  $P$ ,  $Q$  та (34)

$$\begin{aligned} \det \left( P + Q \cdot \tilde{B}(x_n, x_0, \omega) \right) &= \det \left( \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ q_{21}b_{11}(\omega) + q_{22}b_{21}(\omega) & q_{21}b_{12}(\omega) + q_{22}b_{22}(\omega) \end{pmatrix} = \\ &= p_{11} \cdot (q_{21}b_{12}(\omega) + q_{22}b_{22}(\omega)) - p_{12} \cdot (q_{21}b_{11}(\omega) + q_{22}b_{21}(\omega)). \end{aligned}$$

Сформулюємо наступне твердження.

**Зауваження 1.** Характеристичне рівняння задачі на власні значення (28), (29) має вигляд

$$p_{11} \cdot (q_{21}b_{12}(\omega) + q_{22}b_{22}(\omega)) - p_{12} \cdot (q_{21}b_{11}(\omega) + q_{22}b_{21}(\omega)) = 0. \quad (38)$$

Як відомо [13], корені характеристичного рівняння (38), які є власними значеннями задачі (28), (29), є дійсними та різними.

Для знаходження ненульового вектора  $\bar{C}$  підставимо в рівність (36)  $\omega_k$  замість  $\omega$ . Тоді прийдемо до векторної рівності

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ q_{21}b_{11}(\omega_k) + q_{22}b_{21}(\omega_k) & q_{21}b_{12}(\omega_k) + q_{22}b_{22}(\omega_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

яка еквівалентна системі рівнянь

$$\begin{cases} p_{11}C_1 + p_{12}C_2 = 0, \\ (q_{21}b_{11}(\omega_k) + q_{22}b_{21}(\omega_k)) \cdot C_1 + (q_{21}b_{12}(\omega_k) + q_{22}b_{22}(\omega_k)) \cdot C_2 = 0. \end{cases} \quad (39)$$

Оскільки виконується (38), то система (39) зводиться до рівняння  $p_{11}C_1 + p_{12}C_2 = 0$ , з якого знаходимо координати вектора  $\bar{C}$  при певних припущеннях на коефіцієнти матриці  $P$ :

1.  $p_{11} \neq 0$ ,  $p_{12} \neq 0$ , поклавши  $C_2 = 1$ , маємо  $C_1 = -\frac{p_{12}}{p_{11}}$ , тобто  $\bar{C} = \begin{pmatrix} -\frac{p_{12}}{p_{11}} \\ 1 \end{pmatrix}$ ;
2.  $p_{11} \neq 0$ ,  $p_{12} = 0$ , тоді  $C_1 = 0$ , а  $C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , наприклад,  $C_2 = 1$ , тобто  $\bar{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;
3.  $p_{11} = 0$ ,  $p_{12} \neq 0$ , тоді  $C_2 = 0$ , а  $C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , наприклад,  $C_1 = 1$ ,  $\bar{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Нехай  $\bar{X}_k(x, \omega_k)$  - нетривіальний власний вектор, що відповідає власному значенню  $\omega_k$ . Справедливим є твердження.

**Зауваження 2.** Власні вектори системи диференціальних рівнянь (30) з крайовими умовами (31) мають структуру

$$\bar{X}_k(x, \omega_k) = \tilde{B}(x, x_0, \omega_k) \cdot \bar{C}, k \in \mathbb{N}.$$

**Наслідок.** Власні функції  $X_k(x, \omega_k)$ , як перші координати власних векторів  $\bar{X}_k(x, \omega_k)$ , можна записати у вигляді

$$X_k(x, \omega_k) = (1 \ 0) \cdot \tilde{B}(x, x_0, \omega_k) \cdot \bar{C}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (40)$$



Зокрема, оскільки  $X_k(x, \omega_k)$  має вигляд  $X_k(x, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{ki}(x, \omega_k) \cdot \theta_i$ , то з (33) та (40) випливає, що

$$X_{ki}(x, \omega_k) = (1 \ 0) \cdot \tilde{B}_i(x, x_i, \omega_k) \cdot \tilde{B}(x_i, x_0, \omega_k) \cdot \bar{C}, i = \overline{0, n-1}. \quad (41)$$

**5. Побудова розв'язку  $v(x, t)$  мішаної задачі (23) - (25).** Розвинення деякої функції  $F(x)$  в ряд Фур'є за власними функціями  $X_k(x, \omega_k)$  має вигляд

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cdot X_k(x, \omega_k), \quad (42)$$

де коефіцієнти Фур'є  $F_k$  обчислюють за формулами

$$F_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \int_{x_0}^{x_n} F(x) \cdot X_k(x, \omega_k) \cdot m(x) dx. \quad (43)$$

Зауважимо, що  $\|X_k\|^2$  — квадрат норми власної функції  $X_k$

$$\|X_k\|^2 = \int_{x_0}^{x_n} X_k^2(x, \omega_k) \cdot m(x) dx. \quad (44)$$

Уточнимо, які ж умови задовольняє функція  $F(x)$ , щоб її можна було розвинути в ряд Фур'є. Вважатимемо, що  $F(x)$  — абсолютно неперервна функція, яка має різні аналітичні вирази на кожному з проміжків  $[x_i; x_{i+1})$ , тобто допускає зображення  $F(x) = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(x) \cdot \theta_i$  на проміжку  $[x_0; x_n]$ .

Покладемо

$$X_k(x, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{ki}(x, \omega_k) \cdot \theta_i. \quad (45)$$

Тоді для коефіцієнтів Фур'є  $F_k$  з розвинення (42) та для квадратів норми функцій  $X_k(x)$  з формул (43) і (44) отримаємо:

$$F_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} F_i(x) \cdot X_{ki}(x, \omega_k) \cdot m_i(x) dx,$$

$$\|X_k\|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} X_{ki}^2(x, \omega_k) \cdot m_i(x) dx.$$

Для розв'язання задачі (23) - (25) застосуємо метод власних функцій [9], який полягає в тому, що розв'язок задачі (23) - (25) шукаємо у вигляді

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x, \omega_k), \quad (46)$$

де  $T_k(t)$  — поки що невідомі функції.

Оскільки  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  входить в праву частину рівняння (23), то розвинемо її в ряд Фур'є за власними функціями  $X_k(x, \omega_k)$  крайової задачі (28), (29)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \cdot X_k(x, \omega_k). \quad (47)$$

Підставляючи вираз (46) у (23) та враховуючи (47), отримаємо рівність

$$m(x) \sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) X_k(x, \omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) (a(x) X_k'(x, \omega_k))' - m(x) \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) X_k(x, \omega_k).$$

Враховуючи, що власні функції  $X_k(x, \omega_k)$  задовольняють рівняння (28), приходимо до рівності

$$m(x) \sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t) X_k(x, \omega_k) = -m(x) \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 X_k(x, \omega_k) T_k(t) - m(x) \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) X_k(x, \omega_k),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [T_k''(t) + \omega_k^2 \cdot T_k(t) + w_k(t)] \cdot m(x) \cdot X_k(x, \omega_k) = 0. \quad (48)$$

Помножимо ліву і праву частини (48) на  $X_j(x, \omega_j)$  та проінтегруємо за змінною  $x$  на проміжку  $[x_0; x_n]$ . Врахувавши ортогональність власних функцій, приходимо до сукупності диференціальних рівнянь

$$T_k''(t) + \omega_k^2 \cdot T_k(t) = -w_k(t), k = 1, 2, 3, \dots \quad (49)$$

Загальний розв'язок кожного з диференціальних рівнянь (49) має вигляд

$$T_k(t) = a_k \cos \omega_k t + d_k \sin \omega_k t - \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \sin \omega_k(t-s) \cdot w_k(s) ds, \quad (50)$$

де  $a_k, d_k$  — невідомі сталі [14].

Позначимо  $I(t) = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \sin \omega_k(t-s) \cdot w_k(s) ds$ . Зауважимо, що  $I(0) = 0$ ,  $I'_t(0) = 0$  [12].

Для визначення сталих  $a_k, d_k$  розвинемо в ряди Фур'є за власними функціями  $X_k(x, \omega_k)$  праві частини початкових умов (24)

$$\Phi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{0k} \cdot X_k(x, \omega_k), \quad (51)$$

$$\Phi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{1k} \cdot X_k(x, \omega_k), \quad (52)$$

де  $\Phi_{0k}, \Phi_{1k}$  — відповідні коефіцієнти Фур'є.

З (50) випливає, що

$$T_k(0) = a_k, \quad (53)$$

$$T_k'(t) = -a_k \omega_k \sin \omega_k t + d_k \omega_k \cos \omega_k t - I_t'(t),$$

звідки

$$T_k'(0) = d_k \omega_k. \quad (54)$$

З (46), першої умови в (24), та врахувавши (51), одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \cdot X_k(x, \omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{0k} \cdot X_k(x, \omega_k). \text{ Звідки, використовуючи (53), маємо}$$

$$T_k(0) = a_k = \Phi_{0k}.$$

Аналогічно з (46), другої умови в (24), врахувавши (52), маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) \cdot X_k(x, \omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{1k} \cdot X_k(x, \omega_k). \text{ Звідки, використовуючи (54), знаходимо}$$

$$T_k'(0) = d_k \omega_k = \Phi_{1k}, \text{ або } d_k = \frac{\Phi_{1k}}{\omega_k}.$$

Отже, остаточно отримуємо розв'язок мішаної задачі (23) - (25) у вигляді ряду

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \Phi_{0k} \cos \omega_k t + \frac{\Phi_{1k}}{\omega_k} \sin \omega_k t - \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \sin \omega_k(t-s) \cdot w_k(s) ds \right) \cdot X_k(x, \omega_k). \quad (55)$$

**6. Частковий випадок кусково-сталих коефіцієнтів та правих частин.** При розв'язуванні прикладних задач коефіцієнти  $m_i$  і  $a_i$ , праві частини  $f_i$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  зазвичай вважаються сталими, як наслідок, коефіцієнти  $m(x)$  і  $a(x)$ , права частина  $f(x)$  у рівнянні (1) є кусково-сталими функціями з розривами першого роду в точках  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ . З врахуванням цього матриця у формулі (10) прийме вигляд  $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; вираз у формулі (11) обчислюється таким чином:

$$b_i(x, s) = \int_s^x \frac{1}{a_i} dz = \frac{x-s}{a_i}.$$

Тоді маємо матрицю

$$B(x_k, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{m=i}^{k-1} b_m(x_{m+1}, x_m) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{m=i}^{k-1} \frac{x_{m+1} - x_m}{a_m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

та вираз

$$\sigma_n = \sum_{m=0}^{n-1} b_m(x_{m+1}, x_m) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{x_{m+1} - x_m}{a_m}.$$

За таких умов формули (13) та (14) набувають вигляду

$$\bar{W}_i(x,t) = B_i(x,x_i) \cdot \bar{P}_i + \begin{pmatrix} -f_i \frac{(x-x_i)^2}{2a_i} \\ -f_i(x-x_i) \end{pmatrix},$$

$$\bar{W}_{i-1}(x,t) = B_{i-1}(x,x_{i-1}) \cdot \bar{P}_{i-1} + \begin{pmatrix} -f_{i-1} \frac{(x-x_{i-1})^2}{2a_{i-1}} \\ -f_{i-1}(x-x_{i-1}) \end{pmatrix},$$

а також

$$\bar{Z}_k = \begin{pmatrix} I_{k-1}(x_k) \\ I_{k-1}^{[1]}(x_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{k-1} \frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2a_{k-1}} \\ -f_{k-1}(x_k-x_{k-1}) \end{pmatrix}.$$

Матриця  $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a(x)} \\ -m(x) \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$  прийме вигляд  $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ -m \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ ,

а матриця  $A_i(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_i(x)} \\ -\omega^2 m_i(x) & 0 \end{pmatrix}$  матиме вигляд  $A_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_i} \\ -\omega^2 m_i & 0 \end{pmatrix}$ ,

$$F_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} m_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} F_i(x) \cdot X_{k i}(x, \omega_k) dx,$$

$$\|X_k\|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} X_{k i}^2(x, \omega_k) dx.$$

Безпосередньою перевіркою переконаємось, що матриця Коші системи (32) на  $[x_i, x_{i+1})$  має вигляд

$$\tilde{B}_i(x,s,\omega) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i(x-s) & \frac{\sin \alpha_i(x-s)}{a_i \alpha_i} \\ -a_i \alpha_i \sin \alpha_i(x-s) & \cos \alpha_i(x-s) \end{pmatrix},$$

де  $\alpha_i = \omega \sqrt{\frac{m_i}{a_i}}$ .

Використовуючи вище описані міркування, формули (22), (9), (55) та (4), одержуємо розв'язок задачі (1)–(3) у випадку кусково-сталих коефіцієнтів та правих частин.

**Висновки.** В даній роботі за допомогою методу редукції розв'язування вихідної мішаної крайової задачі для гіперболічного рівняння із кусково-неперервними за просторовою змінною коефіцієнтами та правими частинами зведено до знаходження розв'язків двох взаємозв'язаних задач: квазістаціонарної неоднорідної крайової задачі з найбільш загальними локальними крайовими умовами та мішаної задачі з нульовими крайовими умовами для неоднорідного рівняння.

В частинному випадку кусково-сталих коефіцієнтів та правих частин всі складові розв'язків таких задач отримано в замкненій формі. В основі побудови розв'язків лежить концепція квазіпохідних, яка дозволяє оминати проблему множення узагальнених функцій.

1. **Тацій Р.М.** Моделювання дискретно-континуальних систем. Основні концепції квазіпохідних / Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, В.В. Мазуренко. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2009. – № 10. – С. 7–37.
2. **Тацій Р.М.** Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково - змінними коефіцієнтами / Р.М. Тацій, О.О. Власій, М.Ф. Стасюк. // Вісник НУ "Львівська політехніка": Серія "Фіз. - мат. науки". – 2014. – № 804. – С. 64–69.
3. **Тацій Р.М.** Общие краевые задачи для уравнения теплопроводности с кусочно-непрерывными коэффициентами / Р.М. Тацій, О.Ю. Пазен. // Инженерно-физический журнал. – 2016. – Том 89, № 2. – С. 350–361.
4. **Семерак М.М.** Теплоизолирующая способность многослойных строительных конструкций с учётом разрушения произвольного слоя / М.М. Семерак, Р.М. Тацій, О.Ю. Пазен. // Вестник Кокшетауского технического института Министерства по чрезвычайным ситуациям республики Казахстан: Сб. науч. тр. – Кокшетау: КТИ КЧС МВД РК, 2015. – № 4 (20). – С. 8–17.
5. **Тацій Р.М.** Загальна третя крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-сталими коефіцієнтами та внутрішніми джерелами тепла / Р.М. Тацій, Т.І. Ушак, О. Ю. Пазен. // Пожежна безпека: Зб. наук. пр. – Львів: ЛДУ БЖД, 2015. – № 27. – С. 120–126.
6. **Тацій Р.М.** Прямий метод розрахунку нестационарного температурного поля за умов пожежі / Р.М. Тацій, О. Ю. Пазен. // Пожежна безпека: Зб. наук. пр. – Львів: ЛДУ БЖД, 2015. – № 26. – С. 135–141.
7. **Тацій Р.М.** Загальні крайові задачі для гіперболічного рівняння із сумовними коефіцієнтами та правими частинами / Р.М. Тацій, О.О. Карабин, О.Ю. Чмир. // Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції "Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання". – Івано-Франківськ, 15-20 травня 2017. – С. 431–435.
8. **Арсенин В.Я.** Методы математической физики / В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
9. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1977. – 735 с.
10. **Тацій Р.М.** Узагальнені квазидиференціальні рівняння / Р.М. Тацій, М.Ф. Стасюк, В. Мазуренко, О.О. Власій. – Дрогобич: Коло, 2011. – 297 с.
11. **Рудавський Ю.К.** Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч. посібник. / Ю.К. Рудавський, П.І. Каленюк, Р.М. Тацій та ін. – Л.: Вид. Національного університету "Львівська політехніка 2001. – 244 с.
12. **Мартынченко В.С.** Операционное исчисление: Учеб. пособие. – 4 - е изд., перераб. и доп. / В.С. Мартыненко. – К.: Выща школа, 1990. – 359 с.
13. **Мазуренко В.В.** Про звідність дискретно-неперервної крайової задачі до узагальненої схеми Аткинсона / В.В. Мазуренко.// Доповіді НАН України. – 2001. – № 8 – С. 19–22.
14. **Каленюк П.І.** Диференціальні рівняння: Навч. посібник. / П.І. Каленюк, Ю.К. Рудавський, Р.М. Тацій, І.Ф. Ключник, В.М. Колісник, П.П. Костробій, І.Я. Олеків. – Л.: Вид. Національного університету "Львівська політехніка 2014. – 380 с.

Тацій Р.М., Чмырь О.Ю., Карабин О.О.

ОБЩИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

*Резюме*

В данной работе рассмотрены общие краевые задачи для гиперболического уравнения с кусочно-непрерывными по пространственной переменной коэффициентами и правыми частями. Найдено решения таких задач с помощью концепции квазипроизводных, современной теории систем линейных дифференциальных уравнений, классического метода Фурье и метода редукции.

*Ключевые слова:* квазидифференциальное уравнение, краевая задача, матрица Коши, задача на собственные значения, метод Фурье та метод собственных функций .

Tatsij R.M., Chmyr O.Yu., Karabyn O.O.

THE TOTAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR HIPERBOLIC EQUATION WITH PIECEWISE CONTINUOUS COEFFICIENTS AND RIGHT PARTS

*Summary*

In this paper, the general boundary value problems for hyperbolic equation with piecewise continuous on spatial variable coefficients and right parts was considered. The solutions such problems were found by using a concept of quasi-derivatives, a modern theory of systems of linear differential equations, the classical Fourier method and a reduction method.

*Key words:* kvazidifferential equation, the boundary value problem, the Cauchy matrix, the eigenvalues problem, the method of Fourier and the method of eigenfunctions.

## REFERENCES

1. Tatsij, R. M., Stasjuk, M. F., Mazurenko, V. V. (2009). Modelyuvannya dyskretno-kontynualnykh system. Osnovni kontseptsiyi kvazipokhidnykh [The modelling of the discrete-continual systems. The main conceptions of the quasi-derivatives]. *Physico-mathematical modelling and informational technologies*, №10. – P. 7–37.
2. Tatsij, R. M., Vlasij, O. O., Stasjuk, M. F. (2014). Zagalna persha krayova zadacha dlya rivnyannya teploprovodnosti z kuskovo-zminnymy koefitsiyentamy [General first boundary value problem for the heat equation with piecewise variable coefficients]. *Bulletin of the University "Lviv Polytechnic series "Physics and mathematics"*, №804. – P. 64–69.
3. Tatsij, R. M., Pazen, O. Y. (2016). Obshchiye krayevyye zadachi dlya uravneniya teploprovodnosti s kusochno-nepreryvnymi koefitsiyentami [The total boundary value problems for the heat equation with piecewise continuous coefficients]. *The Engineering-physical journal*, Vol. 89, №2. – P. 350–361.
4. Semerak, M. M., Tatsij, R. M., Pazen, O. Y. (2015). Teploizoliruyushchaya sposobnost mnogosloynnykh stroitelnykh konstruksiy s uchetom razrusheniya proizvolnogo sloya [Thermal insulating ability of multi-layer building structures taking into account the destruction of an arbitrary layer]. *The Bulletin of the Kokshetau Technical Institute of the Ministry of Emergency Situations of the Republic of Kazakhstan*, №4(20). – P. 8–17.
5. Tatsij, R. M., Ushak, T.I., Pazen, O. Y. (2015). Zagalna tretya krayova zadacha dlya rivnyannya teploprovodnosti z kuskovo-stalymy koefitsiyentamy ta vnutrishnimy dzherelamy tepla [General third boundary problem for the heat equation with piecewise constant and internal heat sources]. *The journal of scientific works "Fire Safety"*, №27. – P. 120-126.

6. Tatsij, R. M., Pazen, O. Y. (2015). Pryamyy metod rozrakhunku nestatsionarnogo temperaturnogo polya za umov pozhezhi [Direct method of calculation unsteady temperature field in a fire]. *The journal of scientific works "Fire Safety"*, №26. – P. 135-141.
7. Tatsij, R. M., Karabyn, O. O., Chmyr, O. Yu. (2017). Zagalni krayovi zadachi dlya giperbolichnogo rivnyannya iz sumovnymy koefitsiyentamy ta pravymy chastynamy [The total boundary value problems for hiperbolic equation with summable coefficients and right parts]. *The materials of the international scientific and practical conference "Information Technologies and Computer Modeling"*. – P. 431-435.
8. Arsenin, V. Ya. (1974). *Metody matematicheskoyu fiziki [Methods of Mathematical Physics]*. Moscow: Nauka, 432 p.
9. Tikhonov, A. N., Samarskii, A. A. (1977). *Uravneniya matematicheskoyu fiziki [Equations of Mathematicai Physics]*. Moscow: Nauka, 735 p.
10. Tatsij, R. M., Stasjuk, M. F., Mazurenko, V. V., Vlasij, O. O. (2011). *Uzagalneni kvazi-dyferentsialni rivnyannya [Generalized quasi-differential equations]*. Drogobych: Kolo, 297 p.
11. Rudavsky, J. K., Kaleniuk, P. I., Tatsij, R. M. (2001). *Zbirnyk z dyferentsialnykh rivnyan [Collection of problems of the differential equations]*. Lviv: Polytechnic Publisher, 244 p.
12. Martynenko, V. S. (1990). *Operatsionnoye ischislyeniye [The operational calculus]*. Kyiv: Vyshcha shkola, 359 p.
13. Mazurenko, V. V. (2001). Pro zvidnist dyskretno-neperervnoyi krayovoyi zadachi do uzagalnenoyi skhemy Atkinsona [The reporting of the discrete-continuous boundary problem to the generalized scheme of Atkinson]. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, №8. – P. 19-22.
14. Kaleniuk, P. I., Rudavsky, J. K., Tatsij, R. M., Kliinik, I. F., Kostrobij, P. P., Oleksiv, I. Ya. (2014). *Dyferentsialni rivnyannya [Differential Equations]*. Lviv: Polytechnic Publisher, 380 p.

УДК 517.925

**А. Г. Черникова**

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С  
БЫСТРО МЕНЯЮЩЕЙСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ**

В работе для двучленного неавтономного дифференциального уравнения второго порядка с быстро меняющейся при  $y \rightarrow Y_0$  нелинейностью, где  $Y_0$  равно либо нулю, либо  $\pm\infty$  исследуется вопрос о существовании и асимптотическом поведении при  $t \uparrow \omega$  ( $\omega \leq +\infty$ )  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ - решений в случае, когда  $\lambda_0 = 1$ . В этом случае каждое такое решение и его производная первого порядка являются быстро меняющимися функциями при  $t \uparrow \omega$ . Получены новые результаты о необходимых и достаточных условиях существования  $P_\omega(Y_0, 1)$ - решений у рассматриваемого класса существенно нелинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, а также об асимптотическом поведении при  $t \uparrow \omega$  таких решений и их производных первого порядка. Эти результаты существенно дополняют исследования, проводимые в данном направлении.

MSC: 34E05, 34E10, 26A12.

Ключевые слова: правильно меняющиеся функции, быстро меняющиеся функции, функции из класса Г, существенно нелинейные дифференциальные уравнения,  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -решения, условия существования, асимптотическое поведение .

**ВВЕДЕНИЕ.** Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi(y), \tag{1}$$

где  $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ ,  $p : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  непрерывная функция,  $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ,  $\varphi : \Delta_{Y_0} \rightarrow ]0, +\infty[$  – дважды непрерывно дифференцируемая функция, такая, что

$$\varphi'(y) \neq 0 \text{ при } y \in \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } +\infty, \end{cases} \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi(y)\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)} = 1, \tag{2}$$

$Y_0$  равно либо нулю, либо  $\pm\infty$ ,  $\Delta_{Y_0}$ - некоторая односторонняя окрестность  $Y_0$ .

Из условий (2) непосредственно вытекает, что

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \pm\infty, \tag{3}$$

В силу (2) и (3) функция  $\varphi$  и ее производная первого порядка являются (см. монографию М.Марича [1], Гл.3, §3.4, Леммы 3.2, 3.3, С. 91-92) быстро меняющимися при  $y \rightarrow Y_0$ .



**Определение 1.** Решение  $y$  дифференциального уравнения (1) называется  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -решением, где  $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$ , если оно определено на промежутке  $[t_0, \omega[ \subset [a, \omega[$  и удовлетворяет следующим условиям

$$y(t) \in \Delta_{Y_0} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

В работе [2] были установлены две теоремы о существовании и асимптотике  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -решений уравнения (1) в особом случае, когда  $\lambda_0 = 1$ . В этом случае такие решения и их производные первого порядка являются быстроменяющимися функциями при  $t \uparrow \omega$ .

В настоящей работе при некоторых вполне естественных ограничениях на коэффициент  $p$  эти две теоремы будут дополнены новыми утверждениями, позволяющими снять некоторые из жестких условий, которые использовались в [2] при доказательстве фактического существования  $P_\omega(Y_0, 1)$ -решений с найденными асимптотическими представлениями.

**ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.** Введем необходимые для дальнейшего вспомогательные обозначения. Неограничивая общности будем считать, что

$$\Delta_{Y_0} = \begin{cases} [y_0, Y_0[, & \text{если } \Delta_{Y_0} \text{ левая окрестность } Y_0, \\ ]Y_0, y_0], & \text{если } \Delta_{Y_0} \text{ правая окрестность } Y_0, \end{cases}$$

где  $y_0 \in \mathbb{R}$  такое, что  $|y_0| < 1$  при  $Y_0 = 0$  и  $y_0 > 1$  ( $y_0 < -1$ ) при  $Y_0 = +\infty$  (при  $Y_0 = -\infty$ ).

Далее, положим

$$\mu_0 = \text{sign } \varphi'(y), \quad \nu_0 = \text{sign } y_0, \quad \nu_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta_{Y_0} = [y_0, Y_0[, \\ -1, & \text{если } \Delta_{Y_0} = ]Y_0, y_0], \end{cases}$$

и введем следующие функции

$$J_{10}(t) = \int_{A_{10}}^t p_0^{\frac{1}{2}}(\tau) d\tau, \quad \Phi_1(y) = \int_{B_1}^y \frac{ds}{|s|^{\frac{1}{2}} \varphi^{\frac{1}{2}}(s)},$$

где  $p_0(t) \sim p(t)$  при  $t \uparrow \omega$ ,

$$A_{10} = \begin{cases} \omega, & \text{если } \int_{\omega}^{\omega} p_0^{\frac{1}{2}}(\tau) d\tau < +\infty, \\ a, & \text{если } \int_a^{\omega} p_0^{\frac{1}{2}}(\tau) d\tau = +\infty, \end{cases} \quad B_1 = \begin{cases} Y_0, & \text{если } \int_{y_0}^{Y_0} \frac{ds}{|s|^{\frac{1}{2}} \varphi^{\frac{1}{2}}(s)} = \text{const}, \\ y_0, & \text{если } \int_{y_0}^{Y_0} \frac{ds}{|s|^{\frac{1}{2}} \varphi^{\frac{1}{2}}(s)} = \pm\infty. \end{cases}$$

Учитывая определение  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -решения дифференциального уравнения (1), заметим, что числа  $\nu_0$ ,  $\nu_1$  и  $\alpha_0$  определяют знаки любого  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -решения, его

первой и второй производных (соответственно) в некоторой левой окрестности  $\omega$ . При этом ясно, что условия

$$\nu_0\nu_1 < 0, \quad \text{если } Y_0 = 0, \quad \nu_0\nu_1 > 0, \quad \text{если } Y_0 = \pm\infty,$$

и

$$\nu_1\alpha_0 < 0, \quad \text{если } \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = 0, \quad \nu_1\alpha_0 > 0, \quad \text{если } \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = \pm\infty,$$

являются необходимыми для существования таких решений.

Теперь укажем на некоторые свойства функции  $\Phi_1$ . Она сохраняет знак на промежутке  $\Delta_{y_0}$ , стремится либо к нулю, либо к  $\pm\infty$  при  $y \rightarrow Y_0$  и является возрастающей на  $\Delta_{Y_0}$ , поскольку на этом промежутке  $\Phi_1'(y) = |y|^{-\frac{1}{2}}\varphi^{-\frac{1}{2}}(y) > 0$ . Поэтому для нее существует обратная функция  $\Phi_1^{-1} : \Delta_{Z_0} \rightarrow \Delta_{Y_0}$ , где в силу второго из условий (2) и монотонного возрастания  $\Phi_1^{-1}$

$$\Delta_{Z_0} = \begin{cases} [z_0, Z_0[, & \text{если } \Delta_{Y_0} = [y_0, Y_0[, \\ ]Z_0, z_0], & \text{если } \Delta_{Y_0} = ]Y_0, y_0], \end{cases} \quad (4)$$

$$Z_0 = \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \Phi_1(y) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } +\infty, \end{cases} \quad z_0 = \Phi_1(y_0). \quad (5)$$

Заметим, что

$$\left( \frac{\varphi^{\frac{1}{2}}(y)}{|y|^{\frac{1}{2}}\varphi'(y)} \right)' = \frac{1}{|y|^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}(y)} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\varphi(y)}{y\varphi'(y)} - \frac{\varphi''(y)\varphi(y)}{\varphi'^2(y)} \right].$$

Отсюда с учетом условий (2) и (3) получим соотношение

$$\left( \frac{\varphi^{\frac{1}{2}}(y)}{|y|^{\frac{1}{2}}\varphi'(y)} \right)' = \frac{1}{|y|^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{1}{2}}(y)} \left[ -\frac{1}{2} + o(1) \right] \quad \text{при } y \rightarrow Y_0.$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от  $y_0$  до  $y$  и учитывая правило выбора предела интегрирования  $B_1$  в функции  $\Phi_1$ , приходим к выводу, что

$$\Phi_1(y) = -\frac{2\varphi^{\frac{1}{2}}(y)}{|y|^{\frac{1}{2}}\varphi'(y)} [1 + o(1)] \quad \text{при } y \rightarrow Y_0 \quad (6)$$

Отсюда с учетом знака  $\varphi'$  также следует, что

$$\text{sign } \Phi_1(y) = -\mu_0 \quad \text{при } y \in \Delta_{Y_0}. \quad (7)$$

В силу (6) и (3) также имеем

$$\frac{\Phi_1'(y)}{\Phi_1(y)} = \frac{|y|^{-\frac{1}{2}}\varphi^{-\frac{1}{2}}(y)}{\Phi_1(y)} \sim -\frac{\varphi'(y)}{2\varphi(y)} \quad \text{при } y \rightarrow Y_0, \quad (8)$$

$$\frac{\Phi_1''(y)\Phi_1(y)}{\Phi_1'^2(y)} = -\frac{1}{2} \frac{|y|^{-\frac{1}{2}}\varphi^{-\frac{3}{2}}\varphi'(y) \left[ \frac{\varphi(y)}{y\varphi'(y)} + 1 \right] \Phi_1(y)}{|y|^{-1}\varphi^{-1}(y)} \sim 1 \quad \text{при } y \rightarrow Y_0. \quad (9)$$

Так как

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow Z_0} \frac{z (\varphi(\Phi_1^{-1}(z)))'}{\varphi(\Phi_1^{-1}(z))} &= \lim_{z \rightarrow Z_0} \frac{z \varphi'(\Phi_1^{-1}(z)) |\Phi_1(z)|^{\frac{1}{2}} \varphi^{\frac{1}{2}}(\Phi_1^{-1}(z))}{\varphi(\Phi_1^{-1}(z))} = \\ &= \lim_{y \rightarrow Y_0} \frac{\Phi_1(y) \varphi'(y) |y|^{\frac{1}{2}}}{\varphi^{\frac{1}{2}}(y)} = -2. \end{aligned}$$

то функция  $\varphi(\Phi_1^{-1}(z))$  является правильно меняющейся функцией порядка -2 при  $z \rightarrow Z_0$ .

Кроме указанных выше обозначений введем также вспомогательные функции:

$$\begin{aligned} H_{10}(t) &= \frac{\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)) \varphi'(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))}{\varphi(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))}, \\ q_{10}(t) &= \frac{\alpha_0 \nu_1 J_{20}(t)}{p_0^{\frac{1}{2}}(t) |\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}} \varphi^{\frac{1}{2}}(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))}, \\ q_{20}(t) &= \frac{\pi_\omega(t) p_0^{\frac{1}{2}}(t) \varphi^{\frac{1}{2}}(\nu_1 J_{10}(t))}{|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}}}, \quad \pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если } \omega < +\infty, \end{cases} \\ J_{20}(t) &= \int_{A_{20}}^t p_0(\tau) \varphi(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau))) d\tau, \end{aligned}$$

где

$$A_{20} = \begin{cases} t_0, & \text{если } \int_{t_0}^{\omega} p_0(\tau) \varphi(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau))) d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \int_{t_0}^{\omega} p_0(\tau) \varphi(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau))) d\tau < +\infty, \end{cases} \quad t_0 \in [a, \omega].$$

Здесь функции  $H_{10}$ ,  $q_{10}$ ,  $J_{10}$  и  $J_{20}$  получены из функций  $H_1$ ,  $q_1$ ,  $J_1$  и  $J_2$  из работы [2] заменой в них функции  $p$  на  $p_0$ .

Повторяя рассуждения доказательства теоремы 2.1 из работы [2] и учитывая, что для  $P_\omega(Y_0, 1)$ -решения уравнения (1)  $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \pm\infty$ , легко сначала убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

**Теорема 1.** Пусть  $p(t) \sim p_0(t)$  при  $t \uparrow \omega$ , где  $p_0 : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  – непрерывная функция. Тогда для существования у дифференциального уравнения (1)  $P_\omega(Y_0, 1)$ -решений, необходимо чтобы соблюдались условия

$$\alpha_0 \nu_0 > 0, \quad \mu_0 \nu_1 J_{10}(t) < 0 \quad \text{при } t \in ]a, \omega[, \quad (10)$$

$$\nu_1 \lim_{t \uparrow \omega} J_{10}(t) = Z_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{10}(t)}{J_{10}(t)} = \pm\infty, \quad (11)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} q_{10}(t) = 1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} q_{20}(t) = \pm\infty. \quad (12)$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$y(t) = \Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)) \left[ 1 + \frac{o(1)}{H_{10}(t)} \right] \quad \text{при } t \uparrow \omega, \quad (13)$$

$$y'(t) = \nu_1 p_0^{\frac{1}{2}}(t) \varphi^{\frac{1}{2}}(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))) |\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (14)$$

Теперь установим наиболее существенные дополнения к теореме 2.2 из работы [2].

**Теорема 2.** Пусть

$$p(t) = p_0(t)[1 + r(t)], \quad \lim_{t \uparrow \omega} r(t) = 0, \quad (15)$$

где  $p_0 : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[$  — непрерывно дифференцируемая функция и  $r : [a, \omega[ \rightarrow ]-1, +\infty[$  — непрерывная функция. Пусть, кроме того, выполняются условия (10), (11), первое из условий (12) и существуют конечные или равные  $\pm\infty$  пределы

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{q_{10}(t) J_{20}(t)}{J'_{20}(t)}, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\left( \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)'}{\left( \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)^2} \sqrt{\left| \frac{y \varphi'(y)}{\varphi(y)} \right|}. \quad (16)$$

Тогда: 1) если  $\alpha_0 \mu_0 > 0$ , то у дифференциального уравнения (1) существует однопараметрическое семейство  $P_\omega(Y_0, 1)$  — решений с представлениями (13), (14), причем таких, производная которых удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$y'(t) = J_{20}(t) \left[ \frac{1}{q_{10}(t)} + o\left(|H_{10}(t)|^{-\frac{1}{2}}\right) \right] \quad \text{при } t \uparrow \omega; \quad (17)$$

2) если  $\alpha_0 \mu_0 < 0$  и соблюдаются условия

$$\lim_{t \uparrow \omega} \left[ r(t) + \frac{q'_{10}(t) J_{20}(t)}{q_{10}(t) J'_{20}(t)} \right] \left( \int_{t_0}^t \frac{J'_{20}(\tau) |H_{10}(\tau)|^{\frac{1}{2}} d\tau}{J_{20}(\tau)} \right)^2 = 0, \quad (18)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} r(t) \int_{t_0}^t \frac{J'_{20}(\tau) |H_{10}(\tau)|^{\frac{1}{2}} d\tau}{J_{20}(\tau)} = 0, \quad (19)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} [1 - q_{10}(t)] \int_{t_0}^t \frac{J'_{20}(\tau) |H_{10}(\tau)|^{\frac{1}{2}} d\tau}{J_{20}(\tau)} = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\int_{t_0}^t \frac{J'_{20}(\tau) |H_{10}(\tau)|^{\frac{1}{2}} d\tau}{J_{20}(\tau)}}{|H_1(t)|^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad (20)$$

и

$$\lim_{t \uparrow \omega} |H_{10}(t)|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{t_0}^t \frac{J'_{20}(\tau) |H_{10}(\tau)|^{\frac{1}{2}} d\tau}{J_{20}(\tau)} \right) \frac{\left( \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)'}{\left| \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right|^2} \Bigg|_{y=\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)J(t))} = 0, \quad (21)$$

где  $t_0$  некоторое число из промежутка  $[a, \omega[$ , то уравнение (1) имеет по крайней мере одно  $P_\omega(Y_0, 1)$ -решение, допускающее при  $t \uparrow \omega$  асимптотические представления

$$y(t) = \Phi_1^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)J(t)) \left[ 1 + \left( H(t) \int_{t_0}^t \frac{J'_2(\tau) |H(\tau)|^{\frac{1}{2}} d\tau}{J_2(\tau)} \right)^{-1} o(1) \right], \quad (22)$$

$$y'(t) = J_{20}(t) \left[ \frac{1}{q_{10}(t)} + |H_1(t)|^{-\frac{1}{2}} \left( \int_{t_0}^t \frac{J'_2(\tau) |H_1(\tau)|^{\frac{1}{2}} d\tau}{J_2(\tau)} \right)^{-1} o(1) \right]. \quad (23)$$

**Доказательство.** В [2] при доказательстве теоремы 2.2 было установлено, что в случае существования конечного или равного  $\pm\infty$  второго из пределов (16) этим пределом может быть только ноль. Покажем, что первый из этих пределов также равен нулю. Действительно, если бы этот предел был отличен от нуля, то имели бы равенство

$$q'_{10}(t) = \frac{\gamma(t)J'_{20}(t)}{J_{20}(t)},$$

где функция  $\gamma$  непрерывна на некотором промежутке  $[t_0, \omega[ \subset ]a, \omega[$  и такова, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} \gamma(t) = \begin{cases} \text{либо } const \neq 0, \\ \text{либо } \pm\infty. \end{cases}$$

Интегрируя это равенство на промежутке от  $t_0$  до  $t$  и учитывая, что  $\int_{t_0}^t \frac{J'_{20}(\tau) d\tau}{J_{02}(\tau)} = \ln \left| \frac{J_{20}(t)}{J_{02}(t_0)} \right| \rightarrow \pm\infty$  при  $t \uparrow \omega$ , пришли бы к заключению, что

$$q_{10}(t) \rightarrow \pm\infty \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Однако, этого быть не может, так как выполняется первое из условий (12).

Значит,

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{q_{10}(t)J_{02}(t)}{J'_{02}(t)} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\left( \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)'}{\left( \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)^2} \sqrt{\left| \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right|} = 0. \quad (24)$$

Кроме того, в силу второго из неравенств (10), первого из условий (11) и (4), (5), (7) и (3) существует число  $t_0 \in [a, \omega[$  такое, что  $\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)) \in \Delta_{Y_0}$  при  $t \in [t_0, \omega[$ , и

$$\lim_{t \uparrow \omega} \Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} H_{10}(t) = \pm\infty.$$

Теперь с использованием функций  $H_{10}$ ,  $q_{10}$ ,  $J_{10}$  и  $J_{20}$  скорректируем схему доказательства теоремы 2.2 из работы [2] таким образом, чтобы снять наиболее жесткие из ее условий.

Сначала дифференциальное уравнение (1) с помощью преобразования

$$y(t) = \Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)) + \frac{\varphi(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))}{\varphi'(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))} y_1(t), \quad y'(t) = \alpha_0 J_{20}(t)[1 + y_2(t)], \quad (25)$$

точно также, как при доказательстве теоремы 2.2 из [2], сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = \frac{\nu_1 p_0^{\frac{1}{2}}(t) |\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}} \varphi'(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))}{\varphi^{\frac{1}{2}}(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))} [-1 + q_{10}(t) + h_{10}(t)y_1 + q_{10}(t)y_2], \\ y_2' = \frac{J_{20}'(t)}{J_{20}(t)} [r(t) + (1 + r(t))y_1 - y_2 + R(t, y_1)], \end{cases} \quad (26)$$

где

$$h_{10}(t) = q_{10}(t) \left. \frac{\left( \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)'}{\left( \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)^2} \right|_{y=\Phi^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))}$$

и функция  $R(t, y_1)$  такова, что для любого  $\varepsilon > 0$  существуют  $\delta \in ]0, 1[$  и  $t_1 \in [t_0, \omega[$  такие, что

$$|R(t, y_1)| \leq (1 + \varepsilon)|y_1|^2 \quad \text{при } t \in [t_1, \omega[ \text{ и } y_1 \in D_{1\delta} = \{y_1 : |y_1| \leq \delta\}. \quad (27)$$

Выбрав произвольным образом число  $\varepsilon > 0$ , далее систему уравнений (26) рассмотрим на множестве

$$\Omega = [t_1, \omega[ \times D_{1\delta} \times D_{2\delta}, \quad \text{где } D_{i\delta} = \{y_i : |y_i| \leq \delta\} \quad (i = 1, 2).$$

Чтобы доказать существование у дифференциального уравнения (1) решений, допускающих при  $t \uparrow \omega$  асимптотические представления (13), (14), достаточно в силу замен (25) и первого из условий (12) установить, что у системы дифференциальных уравнений (26) существуют решения, стремящиеся к нулю при  $t \uparrow \omega$ . Это можно осуществить, в частности, с использованием известных результатов, полученных в работах [3], [4]. Чтобы воспользоваться этими результатами требуется довести систему (26) с помощью дополнительных преобразований до вида, допускающего их применения. При этом следует позаботиться о возможности снятия указанных ранее жестких ограничений в теореме 2.2, установленной ранее в [2].

Сначала применим к системе (26), преобразование

$$y_1(t) = x_1(t), \quad y_2(t) = -1 + \frac{1}{q_{10}(t)} + x_2(t), \quad (28)$$

суть которого состоит в том, чтобы убрать в первом уравнении системы неоднородное слагаемое. В результате этого преобразования получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = \frac{\nu_1 p_0^{\frac{1}{2}}(t) |\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}} \varphi'(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))}{\varphi^{\frac{1}{2}}(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))} [h_{10}(t)x_1 + q_{10}(t)x_2], \\ x_2' = \frac{J_{20}'(t)}{J_{20}(t)} \left[ r(t) + \frac{q_{10}'(t)J_{20}(t)}{q_{10}^2(t)J_{10}'(t)} + (1 + r(t))y_1 - y_2 + R(t, y_1) \right], \end{cases}$$

Далее, применяя дополнительное преобразование

$$x_1(t) = v_1(t), \quad x_2(t) = |H_0(t)|^{-\frac{1}{2}} v_2(t), \quad (29)$$

приведем эту систему к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v_1' = \frac{\nu_1 J_{10}'(t) |\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}} \varphi'(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))}{\varphi^{\frac{1}{2}}(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))} |H_{10}(t)|^{-\frac{1}{2}} \left[ h_{10}(t) |H_{10}(t)|^{\frac{1}{2}} v_1 + q_{10}(t) v_2 \right], \\ v_2'(t) = \frac{J_{20}'(t)}{J_{20}(t)} |H_{10}(t)|^{\frac{1}{2}} \left[ r(t) + \frac{q_{10}'(t) J_{20}(t)}{q_{10}^2(t) J_{20}'(t)} + (1 + r(t)) v_1 + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{2} \frac{\nu_0 \mu_0 H_{10}'(t) J_{20}(t)}{J_{20}'(t) |H_{10}(t)|^{\frac{3}{2}}} - |H_{10}(t)|^{-\frac{1}{2}} \right) v_2 + R(t, v_1) \right]. \end{cases}$$

Обозначив через  $\beta_0(t)$  отношение множителей, которые стоят перед квадратными скобками в уравнениях этой системы и учитывая, что

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_1 p_0^{\frac{1}{2}}(t) |\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}} \varphi'(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))) J_{20}(t)}{\varphi^{\frac{1}{2}}(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))) J_{20}'(t)} = \\ & = \frac{\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)) \varphi'(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))}{\varphi(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))} \cdot \frac{\alpha_0 \nu_1 J_{20}(t)}{p_0^{\frac{1}{2}}(t) \nu_1 |\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}} \varphi^{\frac{1}{2}}(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))} = \\ & = H_{10}(t) q_{10}(t) \sim H_{10}(t) \longrightarrow \pm \infty \quad \text{при } t \uparrow \omega, \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} \beta_0(t) &= \frac{\nu_1 J_{10}'(t) |\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}} \varphi'(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))) J_{20}(t)}{\varphi^{\frac{1}{2}}(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))) J_{20}'(t)} |H_{10}(t)|^{-1} \sim \\ & \sim \text{sign } H_{10}(t) = \nu_0 \mu_0 \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned} \quad (30)$$

Кроме того, нетрудно проверить, что здесь

$$\frac{H_{10}'(t) J_{20}(t)}{J_{20}'(t) |H_{10}(t)|^{\frac{3}{2}}} = q_{10}(t) \left[ \mu_0 |H_{10}(t)|^{-\frac{1}{2}} + h_{10}(t) H_{10}^{\frac{1}{2}}(t) \right]. \quad (31)$$

Наконец, сделав в последней системе дифференциальных уравнений замену независимой переменной, полагая

$$x = \int_{t_1}^t \frac{J_{20}'(\tau) |H_{10}(\tau)|^{\frac{1}{2}} d\tau}{J_{20}(\tau)}, \quad v_1(t) = z_1(\tau), \quad v_2(t) = z_2(\tau), \quad (32)$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z_1' = c_{11}(x) z_1 + c_{12}(x) z_2, \\ z_2' = f(x) + c_{21}(x) z_1 + c_{22}(x) z_2 + Z(x, z_1), \end{cases} \quad (33)$$

в которой

$$f(x(t)) = \alpha_0 \nu_1 \left[ r(t) + \frac{q_{10}'(t) J_{20}(t)}{q_{10}^2(t) J_{20}'(t)} \right], \quad c_{11}(x(t)) = \alpha_0 \nu_1 \beta_0(t) h_{10}(t) |H_{10}(t)|^{\frac{1}{2}},$$

$$c_{12}(x(t)) = \alpha_0 \nu_1 \beta_0(t) q_{10}(t), \quad c_{21}(x) = \alpha_0 \nu_1 [1 + r(t)],$$

$$c_{22}(x(t)) = \alpha_0 \nu_1 \left( \frac{1}{2} \frac{\nu_0 \mu_0 H'_{10}(t) J_{20}(t)}{J'_{20}(t) |H_{10}(t)|^{\frac{3}{2}}} - |H_{10}(t)|^{-\frac{1}{2}} \right), \quad Z(x(t), z_1) = \alpha_0 \nu_1 R(t, \nu_1).$$

Так как  $x'(t) > 0$  при  $t \in [t_1, \omega[$  и  $x(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \uparrow \omega$ , то данная система заданна на множестве  $[0, +\infty[ \times D_{1\delta} \times D_{2\delta}$ , причем в ней в силу (3), (15), (24), (30), (31) и первых из условий (10), (12), а также (27)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c_{11}(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c_{12}(x) = \alpha_0 \nu_0 \nu_1 \mu_0 = \nu_1 \mu_0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} c_{21}(x) = \alpha_0 \nu_1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c_{22}(x) = 0,$$

$$|Z(x, z_1)| \leq (1 + \varepsilon) |z_1|^2 \quad \text{при} \quad x \in [0, +\infty[ \quad \text{и} \quad |z_1| \leq \delta.$$

Поэтому данная система уравнений допускает применения к ней результатов из работ [3], [4].

Характеристическое уравнение предельной матрицы коэффициентов

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 \mu_0 \\ \alpha_0 \nu_1 & 0 \end{pmatrix}$$

линейной части системы (33) имеет вид

$$\rho^2 - \alpha_0 \mu_0 = 0. \quad (34)$$

Если  $\alpha_0 \mu_0 > 0$ , то корнями алгебраического уравнение (34) являются вещественные числа разных знаков. В этом случае согласно 2.2 из работы [3] система дифференциальных уравнений (33) имеет однопараметрическое семейство решений  $(z_1, z_2) : [x_*, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $x_* \geq 0$ ), стремящихся к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ . Каждому из них в силу замен (25), (28), (29) и (32) соответствует решение  $y : [t_*, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  ( $t_* \in [a, \omega[$ ) дифференциального уравнения (1), допускающее асимптотические представления (13), (17). Следовательно, справедливо первое утверждение теоремы.

Если же  $\alpha_0 \mu_0 < 0$ , то алгебраическое уравнение (34) имеет чисто мнимые корни  $\rho_{1,2} = \pm i$ . В этом случае при выполнении условий (18) - (21) система дифференциальных уравнений (33) имеет на основании теоремы 2.2 из работы [4] хотя бы одно  $(z_1, z_2) : [x_0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $x_* \geq 0$ ), удовлетворяющее асимптотическим соотношениям

$$z_i(x) = o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (i = 1, 2) \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty.$$

Этому решению в силу замен (25), (28), (29) и (32) соответствует решение  $y : [t_*, \omega[ \rightarrow \mathbb{R}$  ( $t_* \in [a, \omega[$ ) дифференциального уравнения (1), допускающее при  $t \uparrow \omega$  асимптотические представления (22), (23).

Теорема полностью доказана.



**Теорема 3.** Пусть функция  $p$  представима в виде (15), выполняются условия (10), (11), второе из условий (12) и существуют конечные или равные  $\pm\infty$  пределы

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))}{p_0(t) \varphi(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))} \left( \frac{p_0^{\frac{1}{2}}(t) \varphi^{\frac{1}{2}}(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))}{|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}}} \right)', \quad (35)$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\left( \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)'}{\left( \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)^2} \sqrt{\left| \frac{y \varphi'(y)}{\varphi(y)} \right|}. \quad (36)$$

Тогда: 1) если  $\lambda_0 \mu_0 > 0$ , то дифференциальное уравнение (1) имеет однопараметрическое семейство  $P_\omega(Y_0, 1)$  – решений, допускающих асимптотические представления (13), (14), причем таких, производная которых удовлетворяет при  $t \uparrow \omega$  асимптотическому соотношению

$$y'(t) = \nu_1 p_0^{\frac{1}{2}}(t) \varphi^{\frac{1}{2}}(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))) |\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}} [1 + |H_{10}(t)|^{-\frac{1}{2}} o(1)]; \quad (37)$$

2) если  $\lambda_0 \mu_0 < 0$  и выполняются условия

$$\lim_{t \uparrow \omega} |H_{10}(t)|^{\frac{1}{2}} h_{20}(t) \int_{t_1}^t p_0^{\frac{1}{2}}(\tau) |\varphi'(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau)))|^{\frac{1}{2}} d\tau = 0, \quad (38)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} r(t) \int_{t_1}^t p_0^{\frac{1}{2}}(\tau) |\varphi'(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau)))|^{\frac{1}{2}} d\tau = 0, \quad (39)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\int_{t_1}^t p_0^{\frac{1}{2}}(\tau) |\varphi'(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau)))|^{\frac{1}{2}} d\tau}{|H_{10}(t)|^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad (40)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} [r(t) - h_{30}(t)] \left( \int_{t_1}^t p_0^{\frac{1}{2}}(\tau) |\varphi'(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau)))|^{\frac{1}{2}} d\tau \right)^2 = 0, \quad (41)$$

где  $t_1 \in [a, \omega]$ ,

$$h_{20}(t) = \frac{\left( \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)'}{\left( \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)^2} \Bigg|_{y=\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))},$$

$$h_{30}(t) = \frac{\nu_1 \Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))}{p_0(t) \varphi(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))} \left( \frac{p_0^{\frac{1}{2}}(t) \varphi^{\frac{1}{2}}(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))}{|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}}} \right)',$$

то дифференциальное уравнение (1) имеет по крайней мере одно  $P_\omega(Y_0, 1)$  – решение допускающее при  $t \uparrow \omega$  асимптотические представления

$$y(t) = \Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)) \left[ 1 + \left( \int_{t_1}^t p_0^{\frac{1}{2}}(\tau) |\varphi'(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau)))|^{\frac{1}{2}} d\tau \right)^{-1} \frac{o(1)}{H_{10}(t)} \right], \quad (42)$$

$$y'(t) = \nu_1 p_0^{\frac{1}{2}}(t) \varphi^{\frac{1}{2}}(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))) |\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left[ 1 + \left( \int_{t_1}^t p_0^{\frac{1}{2}}(\tau) |\varphi'(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau)))|^{\frac{1}{2}} d\tau \right)^{-1} |H_{10}(t)|^{-\frac{1}{2}} o(1) \right]. \quad (43)$$

**Доказательство.** В случае существования конечного или равного  $\pm\infty$  предела (36), как было уже ранее установлено, он может быть равен только нулю. С использованием второго из условий (12) нетрудно также показать, что предел (35) также равен нулю. Таким образом имеем

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))}{p_0(t) \varphi(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))} \left( \frac{p_0^{\frac{1}{2}}(t) \varphi^{\frac{1}{2}}(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))}{|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}}} \right)' = 0, \quad (44)$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\left( \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)'}{\left( \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)^2} \sqrt{\left| \frac{y \varphi'(y)}{\varphi(y)} \right|} = 0. \quad (45)$$

Теперь уравнение (1) с помощью преобразования

$$y(t) = \Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)) + \frac{\varphi(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))}{\varphi'(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))} y_1(t), \quad (46)$$

$$y'(t) = \nu_1 p_0^{\frac{1}{2}}(t) \varphi^{\frac{1}{2}}(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))) |\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}} [1 + y_2(t)]$$

сведем с учетом условий (2.9) к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = \frac{\nu_1 p_0^{\frac{1}{2}}(t) |\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}} \varphi'(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))}{\varphi^{\frac{1}{2}}(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))} [h_{20}(t) y_1 + y_2], \\ y_2' = \frac{\alpha_0 \nu_1 p_0^{\frac{1}{2}}(t) \varphi^{\frac{1}{2}}(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t)))}{|\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(t))|^{\frac{1}{2}}} [r(t) - h_{30}(t) + (1 + r(t)) y_1 - \\ - (1 + h_{30}(t)) y_2 + R(t, y_1)], \end{cases} \quad (47)$$

где функции  $h_{20}$ ,  $h_{30}$  определены в формулировке теоремы и функция  $R(t, y_1)$  такова, что для любого  $\varepsilon > 0$  существуют  $\delta \in ]0, 1[$  и  $t_1 \in [t_0, \omega[$  такие, что выполняется неравенство (27).

Выбрав произвольным образом число  $\varepsilon > 0$  далее систему (47) рассмотрим на множестве  $[t_1, \omega[ \times D_{1\delta} \times D_{2\delta}$ , где  $D_{i\delta} = \{y_i \in \mathbb{R} : |y_i| \leq \delta\}$  ( $i = 1, 2$ ).

Применяя к системе (47) последовательно два преобразования

$$y_1(t) = v_1(t), \quad y_2(t) = |H_{10}(t)|^{\frac{1}{2}} v_2(t) \quad (48)$$

$$x = \int_{t_1}^t p_0^{\frac{1}{2}}(\tau) |\varphi'(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau)))|^{\frac{1}{2}} d\tau, \quad v_1(t) = z_1(x), \quad v_2(t) = z_2(x), \quad (49)$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z_1' = c_{11}(x)z_1 + c_{12}(x)z_2, \\ z_2' = f(x) + c_{21}(x)z_1 + c_{22}(x)z_2 + Z(x, z_1), \end{cases} \quad (50)$$

в которой

$$\begin{aligned} f(x(t)) &= \alpha_0 \nu_1 [r(t) - h_{30}(t)], & Z(x(t), z_1) &= \alpha_0 \nu_1 R(t, z_1), \\ c_{11}(x(t)) &= \nu_1 \mu_0 |H_{10}(t)|^{\frac{1}{2}} h_{20}(t), & c_{12}(x(t)) &= \nu_1 \mu_0, \\ c_{21}(x(t)) &= \alpha_0 \nu_1 [1+r(t)], & c_{22}(x(t)) &= \alpha_0 \nu_1 |H_{10}(t)|^{-\frac{1}{2}} \left[ -\frac{1}{2} - h_{30}(t) + \frac{1}{2} h_{20}(t) H_{10}(t) \right]. \end{aligned}$$

Кроме того, с учетом второго из условий (12) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \omega} \int_{t_1}^t p_0^{\frac{1}{2}}(\tau) |\varphi'(\Phi_1^{-1}(\nu_1 J_{10}(\tau)))|^{\frac{1}{2}} d\tau &\geq \lim_{t \uparrow \omega} \int_{t_1}^t \frac{|H_{10}(\tau)|^{\frac{1}{2}} d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|} \geq \\ &\geq \lim_{t \uparrow \omega} \int_{t_1}^t \frac{d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|} = \lim_{t \uparrow \omega} \left| \ln \frac{\pi_\omega(t)}{\pi_\omega(t_1)} \right| = +\infty. \end{aligned}$$

Поэтому  $x(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \uparrow \omega$ ,  $x'(t) > 0$  при  $t \in ]t_1, \omega[$  и в силу условий (15), (44), (45), (27)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} c_{11}(x) &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} c_{12}(x) &= \nu_1 \mu_0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} c_{21}(x) &= \alpha_0 \nu_1, & \lim_{x \rightarrow +\infty} c_{22}(x) &= 0, \end{aligned}$$

$$|Z(x, z_1)| \leq \alpha_0 \nu_1 (1 + \varepsilon) |z_1|^2 \quad \text{при } x \in [0, +\infty[ \text{ и } |z_1| \leq \delta.$$

При этом характеристическое уравнение предельной матрицы коэффициентов линейной части системы (50) имеет вид (34).

Значит, система дифференциальных уравнений (50) является системой такого же типа, как и система (33), полученная при доказательстве предыдущей теоремы 2. Поэтому точно таким же образом, как при доказательстве теоремы 2, с использованием теорем из работ [3], [4] и преобразований (46), (48), (49) убеждаемся в справедливости всех утверждений теоремы 3.

**Замечание 1.** Если записать явный вид функции  $R(t, y_1)$  из доказательства теорем 2 и 3, то с использованием свойств быстроменяющихся функций нетрудно установить, что она удовлетворяет условию Липшица по переменной  $y_1$  на множестве  $[t_1, \omega[ \times D_{1\delta}$ . Ввиду этого факта решение уравнения (1) с асимптотиками (22) и (23) ( (42) и (43) ) из второго утверждения теоремы 2 ( соответственно, теоремы 3 ) является единственным.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** В настоящей работе при вполне естественных ограничениях на коэффициент  $p$  дифференциального уравнения (1) получены существенные дополнения к результатам работы [2] о существовании и асимптотическом поведении  $P_\omega(Y_0, 1)$ -решений этого уравнения. Установленные в данной работе теоремы являются новыми для изучаемого здесь класса дифференциальных уравнений с быстро меняющейся нелинейностью.

1. **Maric V.** Regular Variation and Differential Equations / V. Maric. – Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000. – 127 p.
2. **Черникова А. Г.** Асимптотика быстро изменяющихся решений дифференциальных уравнений второго порядка с быстроменяющейся нелинейностью / А. Г. Черникова // Дослідження в математиці і механіці. – 2015. – Т. 20, вип 2(26). – С. 52–68.
3. **Евтухов В.М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений / В.М. Евтухов, А.М. Самойленко // Укр. Мат. Ж. - 2010. - Т.62, №1. - С. 52 - 80.
4. **Евтухов В.М.** Об исчезающих на бесконечности решениях неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений / В.М. Евтухов // Дифференц. уравнения. – 2003. – т.39, № 4. – С. 441-452.

*Черникова А. Г.*

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ШВИДКО ЗМІННОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

*Резюме*

В роботі для двочленого неавтономного диференціального рівняння другого порядку з швидко змінною при  $y \rightarrow Y_0$  нелінійністю, де  $Y_0$  дорівнює або нулю, або  $\pm\infty$ , досліджується питання про існування та асимптотичну поведінку при  $t \uparrow \omega$  ( $\omega \leq +\infty$ )  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків у випадку, коли  $\lambda_0 = 1$ . У цьому випадку кожний такий розв'язок і його похідна першого порядку є швидко змінними функціями при  $t \uparrow \omega$ . Одержані нові результати про необхідні та достатні умови існування  $P_\omega(Y_0, 1)$ -розв'язків у розглядаємого класу істотно нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, а також про асимптотичну поведінку при  $t \uparrow \omega$  таких розв'язків та їх похідних першого порядку, що суттєво доповнюють попередні дослідження у цьому напрямку.

*Ключові слова:* правильно змінні функції, швидко змінні функції, функції з класу  $\Gamma$ , істотно нелінійні диференціальні рівняння,  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язки, умови існування, асимптотична поведінка.

*Chernikova A. G.*

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RAPID VARYING NONLINEARITIES

*Summary*

In the present paper the question of existence and asymptotic, as  $t \uparrow \omega$  ( $\omega \leq +\infty$ ), behaviour of  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -solutions of a binomial non-autonomous 2-nd order differential equation with rapidly varying nonlinearities, as  $y \rightarrow Y_0$ , where  $Y_0$  is equal either to zero or to  $\pm\infty$  in case, when  $\lambda_0 = 1$ , is investigated. In this case each of such solutions and its derivative of first order are rapidly varying functions, as  $t \uparrow \omega$ . There have been obtained new results of necessary and sufficient existence conditions of  $P_\omega(Y_0, 1)$ -solutions of the considered class of essentially nonlinear non-autonomous second order ordinary differential equations and asymptotic representations, as  $t \uparrow \omega$ , of such solutions and their first order derivatives. These results are essentially complement the research, conducted in this direction.

*Key words:* regularly varying functions, rapidly varying functions, de Haan class of functions, essentially nonlinear differential equations,  $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$  – solutions, conditions of existence, asymptotic behaviour.

## REFERENCES

1. Maric V. (2000) *Regular Variation and Differential Equations*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 127 p.
2. Chernikova A.G. (2015). *Asimptotika bistro ismenjaushikhsya rechenij differentsialnikh uravnenij vtorogo porjadka s bistro menjaushejcy nelinejnostju [Asymptotic of rapid varying solutions of second-order differential equations with rapid varying nonlinearities]*. *Researches in Mathematics and Mechanics*, Vol. 20, issue 2(26), P. 52-68.
3. Evtukhov V.M., Samojlenko A.M. (2010). *Usloviya sushestvovaniya ishesauchikh v osoboy tochke resheniy u vechestvenskh neavtonomnikh sistem kvasilinejnikh differentsialnikh uravneniy [Conditions for the existence of vanishing in the singular point solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations]*. *Ukr.Math.J.*, Vol.62, № 1, P. 52 – 80.
4. Evtukhov V.M. (2003). *Ob ischezajuchikh na beskonechnosti recheniyakh neavtonomnikh sistem kvasilinejnikh differentsialnikh uravnenij [On solutions vanishing at infinity of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations]*. *Differ. Uravn.*, Vol. 39, № 4, P. 441–452.

УДК 539.375

**І. П. Шацький, І. С. Курташ**

Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України  
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

## **ГРАНИЧНА РІВНОВАГА ПЛАСТИНИ ІЗ ЗАПОВНЕНОЮ ЩІЛИНОЮ ПІД ДІЄЮ РОЗТЯГУ ТА ЗГИНУ**

В рамках класичної двовимірної теорії пластин розглянуто задачу про розтяг та згин пружної пластини, послабленої вузькою прямолінійною щілиною, заповненою низькомодульним матеріалом. Для включення малої ширини прийнято гіпотезу пружного вінклерівського прошарку. Сформульовано крайову задачу для пари бігармонічних рівнянь з ускладненими крайовими умовами на розрізі. Побудовано аналітичний розв'язок сингулярних інтегродиференціальних рівнянь задачі для випадку еліптичної форми щілини та рівномірного комбінованого навантаження. Особлива увага приділяється питанню граничної рівноваги композиції. Розглянуто два механізми руйнування: розтріскування пластини біля вершин щілини та порушення цілісності заповнювача. Побудовано діаграми граничного стану пластини із заповненою щілиною за умов двопараметричного навантаження. Ключовими параметрами, які визначають успіх відновлення утримувальної здатності пластини з тріщиною для заданої траєкторії навантаження, є відносна жорсткість та відносна міцність включення.

*MSC: 74R10.*

*Ключові слова:* пластина, заповнена щілина, розтяг, згин, руйнування, гранична рівновага .

**Вступ.** Для сучасного матеріалознавства актуальною є проблема продовження терміну експлуатації відповідальних конструкцій. Продуктивним засобом відновлення пошкоджених виробів вважається ін'єкційна технологія заліковування тріщиноподібних дефектів [1]. Заповнення щілини іншим матеріалом може суттєво розвантажити області поблизу її вершин. Однак, заповнювач щілини, розвантажуючи її окіл, сам сприймає частину зовнішнього навантаження. Тому врахування концентрації напружень у підкріпленні є обов'язковим елементом прогнозування міцності відновлюваних композицій.

Рівновагу тіл із заповненими податливим матеріалом тріщинами часто розглядають в рамках моделі прошарку Вінклера і зводять задачу до розв'язання інтегродиференціальних рівнянь відносно стрибків переміщень на розрізах. У такій постановці досліджено багато плоских та просторових задач [1]– [4]. Модель тріщини, частково залікованої неконтрастним матеріалом запропоновано в публікаціях [5, 6]. Стосовно задач деформування тонкостінних конструкцій відомі праці, зокрема [7]– [15], в яких розглядалися тонкостінні включення з довільною жорсткістю. У цій статті розглядаємо задачу про пружну та граничну рівновагу пластини, послабленої прямолінійною щілиною, заповненою низькомодульним матеріалом, за умов одночасної дії розтягуювального та згинального навантажень. Мета дослідження полягає у докладному аналізі граничної рівноваги композиції

з урахуванням міцності усіх компонент.

### ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

**1. Постановка задачі.** Розглянемо безмежну пластину  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times [-h, h]$ , яка послаблена наскрізною щілиною завдовжки  $2l$  та завширшки  $2b(x)$ . Щілина повністю заповнена ін'єкційним матеріалом, який за припущенням набагато податливіший від матеріалу пластини:  $E_0/E \ll 1$ . Дана композиція перебуває під дією мембранних сил розтягу  $n$  та згинальних моментів  $m$ , рівномірно розподілених на безмежності. Досліджуємо вплив низькомодульного заповнювача на пружну та граничну рівновагу пластини з тріщиною.

Аналіз проведемо в рамках класичних теорій плоского напруженого стану та згину тонких пластин. Для моделювання прошарку заповнювача використаємо модель Вінклера, за якою нормальні напруження у включенні пропорційні до стрибка нормальних переміщень на його берегах.

Крайова задача за умов симетрії об'єкта та навантаженнями відносно осі абсцис буде такою:

рівняння рівноваги:

$$\Delta\Delta\phi = 0, \quad \Delta\Delta w = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L; \quad (1)$$

крайові умови на розрізі:

$$N_y = B_0 \frac{[u_y]}{2b(x)}, \quad M_y = -D_0 \frac{[\vartheta_y]}{2b(x)}, \quad y = 0, \quad x \in (-l, l); \quad (2)$$

умови на безмежності:

$$N_y = n, \quad N_x = N_{xy} = 0, \quad M_y = m, \quad M_x = M_{xy} = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тут  $\phi, w$  – функція напружень і прогин пластини,  $\Delta$  – двовимірний оператор Лапласа,  $N_x, N_y, N_{xy}$  – мембранні сили,  $M_x, M_y, M_{xy}$  – згинальні та крутний моменти,  $[u_y]$  – розкриття тріщини в серединній поверхні пластини,  $[\vartheta_y]$  – розрив кута повороту нормалі на розрізі;  $B_0 = 2E_0h, D_0 = 2E_0h^3/3, E_0$  – модуль Юнга матеріалу заповнювача.

**2. Інтегродиференціальне рівняння задачі.** Для розв'язання задачі (1)–(3) використали метод сингулярних інтегральних рівнянь. Інтегральні вирази сил та моментів через похідні від стрибків переміщень та кута повороту нормалі мають вигляд [10, 11]:

$$N_y(x, 0) = n + \frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{[u_y]'(\xi) d\xi}{\xi - x},$$

$$M_y(x, 0) = m - \frac{D(3 - 2\nu - \nu^2)}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{[\vartheta_y]'(\xi) d\xi}{\xi - x}, \quad (4)$$

де  $B = 2Eh, D = 2Eh^3/(3(1 - \nu^2)), E$  і  $\nu$  – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини.

Перші доданки у виразах (4) – відповідають напруженому станові бездефектної пластини, другі – показують вплив щілини.

Підставивши вираз (4) у відповідні умови (2), отримали сингулярні інтегро-диференціальні рівняння відносно розкриття тріщини та розриву кута повороту:

$$\frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{[u_y]'(\xi)d\xi}{\xi - x} - \frac{2E_0h}{2b(x)} [u_y](x) = -n,$$

$$\frac{D(3 - 2\nu - \nu^2)}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{[\vartheta_y]'(\xi)d\xi}{\xi - x} - \frac{2E_0h^3}{3 \cdot 2b(x)\vartheta_y}(x) = m, \quad x \in (-l, l). \quad (5)$$

Ці рівняння слід розв'язувати за додаткових умов на кінцях розрізу:

$$[u_y](\pm l) = 0, \quad [\vartheta_y](\pm l) = 0. \quad (6)$$

**3. Побудова розв'язку.** За довільної форми щілини  $b(x)$  розв'язок задачі (5)–(6) будується лише числовими методами. У цій статті скористаємось можливістю [17] знайти аналітичний розв'язок для випадку щілини спеціальної форми, а саме, еліптичної. Нехай

$$b(x) = \beta\sqrt{l^2 - x^2},$$

де  $\beta = b_0/l$ ,  $2b_0 = 2b(0)$  – максимальна ширина тріщини.

Тоді у разі рівномірних навантажень розв'язок задачі буде:

$$[u_y](x) = \frac{4}{B} \frac{n}{1 + \omega_1} \sqrt{l^2 - x^2},$$

$$[\vartheta_y](x) = -\frac{4}{D(3 - 2\nu - \nu^2)} \frac{m}{1 + \omega_3} \sqrt{l^2 - x^2}, \quad (7)$$

де  $\omega_1 = 2\varepsilon/\beta$ ,  $\omega_3 = 2\kappa\varepsilon/(3\beta)$  – ключові безрозмірні параметри задачі, а  $\varepsilon = E_0/E$ ,  $\kappa = 3(1 + \nu)/(3 + \nu)$ .

Коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів поблизу вершин щілини, нормовані як у праці [11], знайшли за формулами:

$$K_N = \frac{B}{4} \sqrt{l^2 - x^2} \lim_{x \rightarrow \pm l} \frac{[u_y](x)}{\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{n\sqrt{l}}{1 + \omega_1},$$

$$K_M = -\frac{D(3 - 2\nu - \nu^2)}{4} \sqrt{l^2 - x^2} \lim_{x \rightarrow \pm l} \frac{[\vartheta_y](x)}{\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{m\sqrt{l}}{1 + \omega_3}. \quad (8)$$

Підставляючи результат (7) в інтегральні подання (4), отримали також вирази для зусилля та моменту в заповнювачі:

$$N_y = \frac{n\omega_1}{1 + \omega_1}, \quad M_y = \frac{m\omega_3}{1 + \omega_3}. \quad (9)$$

Враховавши результати (8), (9), можна відновити розподіл характеристик напруженого стану по товщині пластини та включення відповідно:

$$k_1(z) = \frac{1}{2h} \left( K_N + \frac{3z}{h^2} K_M \right) = \frac{1}{2h} \left( \frac{n\sqrt{l}}{1 + \omega_1} + \frac{3z}{h^2} \frac{m\sqrt{l}}{1 + \omega_3} \right),$$



$$\sigma_y(z) = \frac{N_y}{2h} + \frac{3M_y}{2h^2}z = \frac{n\omega_1}{(1+\omega_1)}\frac{1}{2h} + \frac{m\omega_3}{(1+\omega_3)}\frac{3z}{2h^2}. \quad (10)$$

**4. Оцінка граничної рівноваги.** Розглядатимемо два механізми руйнування: розтріскування пластини у місцях високої концентрації напружень поблизу вершини тріщини та порушення цілісності ін'єкційного матеріалу, який бере на себе частину зовнішнього навантаження.

Для першого випадку скористаємось локальним силовим критерієм лінійної механіки руйнування [4]:

$$\max_z k_1(z) \leq \frac{K_{1c}}{\sqrt{\pi}}, \quad (11)$$

а для другого – застосуємо класичну теорію міцності заповнювача:

$$\max_z \sigma_y(z) \leq [\sigma_0]. \quad (12)$$

Тут  $K_{1c}$  – тріщиностійкість матеріалу пластини,  $[\sigma_0]$  – допустиме напруження для матеріалу заповнювача.

Знайдемо найбільші значення функцій у формулах (10):

$$\max_z k_1(z) = k_1(h \operatorname{sgn} m) = \frac{1}{2h} \left( K_N + \frac{3|K_M|}{h} \right) = \left( \frac{n}{1+\omega_1} + \frac{3|m|}{h(1+\omega_3)} \right) \frac{\sqrt{l}}{2h},$$

$$\max_z \sigma_y(z) = \sigma_y(h \operatorname{sgn} m) = \frac{1}{2h} \left( \frac{n\omega_1}{1+\omega_1} + \frac{3|m|\omega_3}{h(1+\omega_3)} \right),$$

і на підставі критеріїв (11), (12) дістанемо оцінки допустимих навантажень:

$$\frac{n}{2h} \frac{1}{1+\omega_1} + \frac{3|m|}{2h^2} \frac{1}{1+\omega_3} \leq \sigma^0,$$

$$\frac{n}{2h} \frac{\omega_1}{1+\omega_1} + \frac{3|m|}{2h^2} \frac{\omega_3}{1+\omega_3} \leq [\sigma_0], \quad (13)$$

за яких зберігається цілісність пластини та включення відповідно.

Тут  $\sigma^0 = K_{1c}/\sqrt{\pi l}$  – Гріффітсове напруження для розтягнутої пластини з наскрізною тріщиною завдовжки  $2l$ .

Запишемо нерівності (13) у безрозмірних змінних:

$$\frac{\sigma_t}{1+\omega_1} + \frac{|\sigma_b|}{1+\omega_3} \leq 1, \quad (14)$$

$$\frac{\sigma_t\omega_1}{1+\omega_1} + \frac{|\sigma_b|\omega_3}{1+\omega_3} \leq \eta, \quad (15)$$

де  $\sigma_t = n/(2h\sigma^0)$  – безрозмірне середнє напруження розтягу,  $\sigma_b = 3m/(2h^2\sigma^0)$  – безрозмірне напруження згину на лицьовій поверхні,  $\eta = [\sigma_0]/\sigma^0$  – відносний показник міцності заповнювача.

Таким чином, безпечна область обмежена прямими, що описуються рівняннями у канонічній формі:

$$\frac{\sigma_t}{1+\omega_1} + \frac{|\sigma_b|}{1+\omega_3} = 1, \quad (16)$$

$$\frac{\sigma_t}{\eta(1 + \omega_1^{-1})} + \frac{|\sigma_b|}{(1 + \omega_3^{-1})} = 1. \quad (17)$$

Для пластини з незаповненою тріщиною ( $\varepsilon = 0$ , а отже  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_3 = 0$ ) рівняння граничної прямої буде:

$$\sigma_t + |\sigma_b| = 1. \quad (18)$$

**5. Аналіз результатів.** Проаналізуємо взаємне розташування ліній (16), (17) та (18) залежно від значень параметрів  $\omega$  та  $\eta$ . Результати аналізу проілюстровані графіками (рис. 1), побудованими для  $\omega = 0,5$ ,  $\nu = 1/3$ ,  $\kappa = 1,2$ .

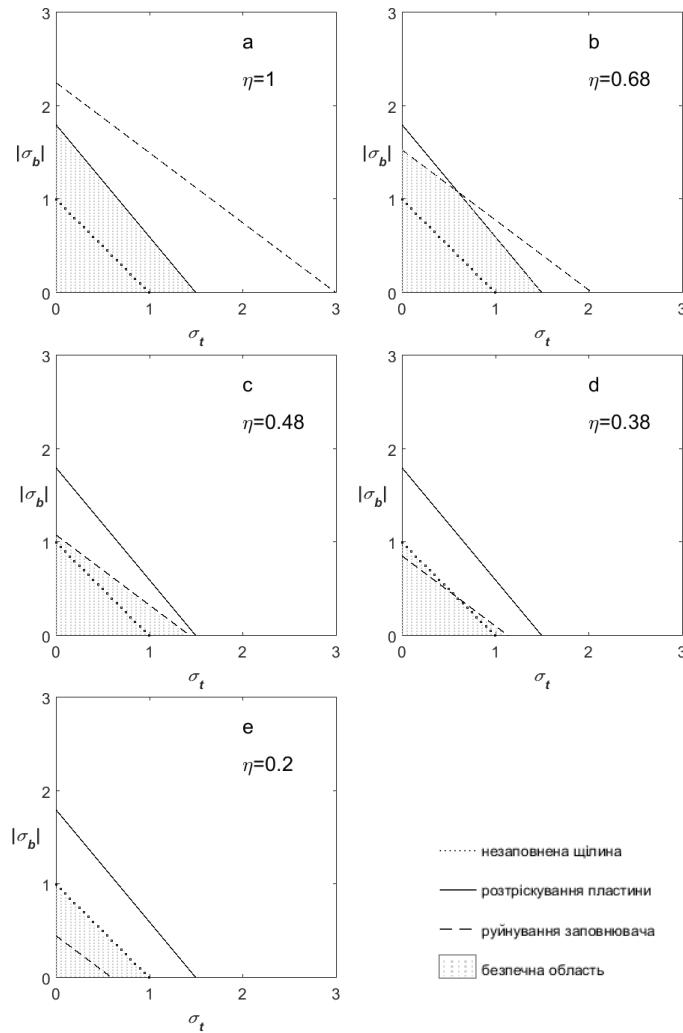


Рис. 1. Діаграми граничної рівноваги пластини із заповненою щілиною

При  $\eta > \omega_3$  лінія (17) розташована ззовні лінії (16) (рис. a), отже безпечна

область описується нерівністю (14). Це означає, що композиція руйнується шляхом розтріскування пластини.

При  $\eta < \omega_1$  пряма (17) лежить ближче до початку координат (рис. *c, d, e*) – спершу руйнується включення.

Проміжний варіант  $\omega_1 < \eta < \omega_3$  дає змішаний тип руйнування (рис. *b*), який залежить від параметра траєкторії простого навантаження  $\alpha = \sigma_b/\sigma_t$ .

Якщо переважає згин:

$$|\alpha| > \alpha_1 = \frac{1 + \omega_3 \eta - \omega_1}{1 + \omega_1 \omega_3 - \eta},$$

то спершу руйнується включення, якщо ж переважає розтяг:  $|\alpha| \leq \alpha_1$ , то розтріскується пластинка.

Розглянемо ще більш детально ситуацію  $\eta < \omega_1$  (рис. *c, d, e*). Якщо  $\omega_3/(1 + \omega_3) \leq \eta \leq \omega_1$ , то лінія (17) лежить ззовні лінії (18) (рис. *c*), і ефект підкріплення досягається для будь-яких  $\alpha$ .

У разі  $\omega_1/(1 + \omega_1) \leq \eta \leq \omega_3/(1 + \omega_3)$  (рис. *d*) для переважного згину, коли

$$|\alpha| \geq \alpha_2 = \frac{\eta - \omega_1/(1 + \omega_1)}{\omega_3/(1 + \omega_3) - \eta},$$

немає виграшу у підкріпленні (включення руйнується при менших навантаженнях, ніж пластинка з незаповненою тріщиною), а за переважного розтягу ( $|\alpha| \leq \alpha_2$ ) незначне підвищення несучої здатності присутнє.

Нарешті, для надто слабких заповнювачів, коли  $\eta < \omega_3/(1 + \omega_3)$ , лінія (17) лежить найближче до початку координат (рис. *e*), отже, ніякого позитивного ефекту від підкріплення не спостерігається за будь-якої траєкторії навантаження.

**Висновки.** Розглянута в статті модель заповненої щілини дозволяє аналітично оцінювати результати відновлення дефектних пластинчастих конструкцій за умов комбінованого розтягу та згину. Ключовими параметрами, які визначають ефективність підкріплення пластинки з тріщиною для заданої траєкторії навантаження, є показники відносної жорсткості  $\omega$  та відносної міцності  $\eta$  заповнювача.

1. **Marukha V. I.** Injection technologies for the repair of damaged concrete structures / V. I. Marukha, V. V. Panasyuk, V. P. Sylovanyuk. – New York: Springer, 2014. – 230 p.
2. **Куршин Л. М.** Напряжения в плоскости с заполненной щелью / Л. М. Куршин, И. Д. Суздальницкий // Прикл. механика. – 1973. – Т. 9, вып. 10. – С. 62–68.
3. **Соткилава О. В.** Некоторые задачи неоднородной теории упругости / О. В. Соткилава, Г. П. Черепанов // Прикл. математика и механика. – 1974. – Т. 38, вып. 3. – С. 537–550.
4. **Панасюк В. В.** Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями / В. В. Панасюк, М. М. Стадник, В. П. Силованюк – Киев: Наук. думка, 1986. – 215 с.

5. **Шацький І. П.** Задачі згину пластини з частково залікованою тріщиною / І. П. Шацький // Вісник Донец. нац. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2014. – № 1. – С. 91–93.
6. **Шацький І. П.** Гранична рівновага пластини з частково залікованою тріщиною / І. П. Шацький // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – Т. 51, № 3. – С. 25–31.
7. **Хачикян А. С.** Равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины / А. С. Хачикян // Изв. АН АрмССР. Механика. 1970. – Т. 23, № 3. – С. 14–21.
8. **Грилицкий Д. В.** Упругие напряжения в плоскости с тонкостенным включением / Д. В. Грилицкий, Г. Т. Сулим // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 41–48.
9. **Драган М. С.** Напряженное состояние полосы (балки) с прямолинейным тонкостенным включением / М. С. Драган, В. К. Опанасович // Прикл. математика и механика. – 1979. – Т. 43, № 2. – С. 342–348.
10. **Грилицкий Д. В.** Изгиб плиты с прямолинейным тонкостенным включением / Д. В. Грилицкий, М. С. Драган, В. К. Опанасович // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. – 1979. – № 3. – С. 83–88.
11. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 342 с.
12. **Александров В. М.** Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян – М.: Наука, 1983. – 488 с.
13. **Грилицкий Д. В.** Напряженное состояние пологой оболочки с тонким упругим включением / Д. В. Грилицкий, В. К. Опанасович, И. П. Шацкий // В кн.: XIII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Ч. II. – Таллин: Таллин. политехн. ин-т, 1983. – С. 23–28.
14. **Стаценко Л. И.** Напряженное состояние изотропной оболочки с упругим включением / Л. И. Стаценко, В. П. Шевченко // Теорет. и прикл. механика. – 1990. – Вып. 21. – С. 76–80.
15. **Сулим Г. Т.** Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Львів: Досл.-видавн. центр НТШ. – 2007. – 716 с.
16. **Саврук М. П.** Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
17. **Векуа Н. П.** Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи / Н. П. Векуа. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 252 с.
18. **Осадчук В. А.** Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами / В. А. Осадчук – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.

*Шацкий И. П., Курташ И. С.*

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИНЫ С ЗАПОЛНЕННОЙ ЩЕЛЬЮ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАСТЯЖЕНИЯ И ИЗГИБА

*Резюме*

В рамках классической двухмерной теории пластин рассмотрена задача о растяжении и изгибе упругой пластины, ослабленной узкой прямолинейной щелью, заполненной низкокомодульным материалом. Для включения малой ширины принята гипотеза упругой винклеровской прослойки. Сформулирована краевая задача для пары бигармонических

уравнений с усложненными краевыми условиями на разрезе. Построено аналитическое решение сингулярных интегродифференциальных уравнений задачи для случая эллиптической формы щели и равномерной комбинированной нагрузки. Особенное внимание уделяется вопросу предельного равновесия композиции. Рассмотрены два механизма разрушения: растрескивание пластины возле вершин щели и нарушение целостности заполнителя. Построены диаграммы предельного равновесия пластины с заполненной щелью в условиях двухпараметрического нагружения. Ключевыми параметрами, определяющими успех восстановления несущей способности пластины с трещиной для заданной траектории нагружения, являются относительная жесткость и относительная прочность включения.

*Ключевые слова:* пластина, заполненная щель, растяжение, изгиб, разрушение, предельное равновесие.

*Shatskyi I. P., Kurtash I. S.*

LIMITING EQUILIBRIUM OF PLATE WITH FILLED SLIT UNDER TENSION AND BENDING

*Summary*

The problem of tension and bending of an elastic plate weakened by narrow rectilinear slit filled with low-modulus material is considered within framework the classical two-dimensional plates theory. For the inclusion of narrow width the hypothesis of elastic Winkler's layer is accepted. The boundary problem for the pair of biharmonic equations with complicated boundary conditions on the cut is formulated. The analytical solution of singular integrodifferential equations of the problem is built for a case of elliptical form of slit and uniform combined load. Special attention is paid to the issue of limited equilibrium of composition. The two mechanisms of fracture are considered: cracking of the plate near the peak of a slit and breach of filler integrity. The diagrams of limiting equilibrium of plate with filled slit are built in conditions of two-parametric loading. The key parameters that determine the success of wearing the bearing capacity of the cracked plate for a given loading trajectory are the relative stiffness and relative strength of the filler.

*Key words:* plate, filled slit, tension, bending, fracture, limiting equilibrium.

## REFERENCES

1. Marukha, V. I., Panasyuk, V. V. and Sylovanyuk, V. P. (2014). *Injection technologies for the repair of damaged concrete structures*. Springer, New York, USA, 230 p.
2. Kurshin, L. M. and Suzdal'nitskii, I. D. (1973). Stresses in a plane with a filled crack. *Sov. Appl. Mech.*, Vol. 9, Issue 10, P. 1092–1097.
3. Sotkilava, O. V. and Cherepanov, G. P. (1974). Some problems of the nonhomogeneous elasticity theory. *J. Appl. Math. and Mech.*, Vol. 38, Issue 3, P. 499–511.
4. Panasyuk, V. V., Stadnik, M.M. and Silovanyuk V. P. (1986). *Kontsentratsiya napryazhenii v trekhmernykh telakh s tonkimi vklyuchenyami [Stress concentration in three-dimensional bodies with thin inclusion]*. Kiev: Nauk. dumka, 215 p.
5. Shatsky, I. P (2014). Zadachi zhynu plastyny z chastkovo zalikovanoju trishchynoyu [Problems of bending of plate with partially healed crack]. *Visnyk Donez. naz. un-tu. Ser. A. Pryrodnychi nauky*, № 1, P. 91–93.
6. Shats'kyi, I. P (2015). Limiting equilibrium of a plate with partially healed crack. *Mater. Sci.*, vol. 51, № 3, P. 322–330.

7. Khachikyan, A. S. (1970). Ravnovesie ploskosti s tonkostennym uprugim vklucheniem konechnoi dlinny [Equilibrium of plane with finite length thin-walled elastic inclusion]. *Izv. AN ArmSSR. Mekhanika*, Vol. 23, № 3, P. 14–21.
8. Grilitskii, D. V. and Sulim, G. T. (1975). Uprugie napryazhenia v ploskosti s tonkostennym vklyucheniem [Elastic stresses in a surface with thin-walled inclusion]. *Mathem. Methody i Phis.-Mekh. Polia*, Vol. 1, P. 41–48.
9. Dragan, M. S. and Opanasovich, V. K. (1979). State of stress of a strip (beam) with a rectilinear thin-walled inclusion. *J. of Appl Mathem. and Mekh.*, Vol. 43, Issue 2, P. 367–373.
10. Grilitskii, D. V., Dragan, M. S. and Opanasovich, V. K. (1979). Bending of a plate with a rectilinear thin-walled inclusion. *Isv. AN SSSR. Mekhanica. Tverd. Tela*, № 3, P. 83–88.
11. Popov, G. V. (1982). *Kontsentratsia uprugikh napryazhenii vozle shtampov, razrezov, tokikh vklyuchenii i podkrepleniï [Concentration of elastic stresses near stamps, cuts, thin inclusions and reinforcements]*. Moscow: Nauka, 342 p.
12. Aleksandrov, V. M. and Mkhitaryan, S. M. (1983). *Kontaktnye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiami i prosloikami [Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers]*. Moscow: Nauka, 488 p.
13. Grilitskii, D. V., Opanasovich, V. K. and Shatskii, I. P. (1983). Napryazhennoe sostoyanie pologoï obolochki s tonkim uprugim vklyucheniem [Stressed state of shallow shell with thin elastic inclusion]. *XIII Vses. conf. po teorii obolochek i plastin. Part II*. Tallin: Tallin TU, P. 23–28.
14. Statsenko, L. I. and Shevchenko, V. P. (1994). Stress state of an isotropic shell with an elastic inclusion. *J. Mathem. Sci.*, Vol. 68, Issue 5, P 690–692.
15. Sulym, H. T. (2007). *Osnovy matematychnoi teorii termopruznoi rivnovahy deformivnykh tverdykh til z tonkymy vkluchenniamy [Basis of mathematical theory of thermoelastic equilibrium of solids with thin inclusions]*. Lviv: Dosl.-vydavn. tsentr NTSh, 716 p.
16. Savruk, M. P. (1981). *Dvumernye zadachi uprugosti dlya tel s treshchinami [Two-dimensional problems of elasticity for cracked bodies]*. Kiev: Nauk. dumka, 324 p.
17. Vekua, N. P. (1950). *Sistemy singularnykh integralnykh uravnenii i nekotorye granichnye zadachi [Systems of singular integral equations and some boundary problems]*. Moscow: GITTL, 252 p.
18. Osadchuk, V. A. (1985). *Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie i predelnoe ravnovesie obolochek s rasresami [Stress-strain state and limit equilibrium of shells with the cuts]*. Kiev: Nauk. dumka, 224 p.

УДК 539.375

**А. Б. Щербій**

Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

## **ВПЛИВ ГНУЧКОГО ПОКРИТТЯ НА ГРАНИЧНУ РІВНОВАГУ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ТРІЩИНАМИ ВЗДОВЖ ТВІРНОЇ**

Досліджено задачу про розтяг циліндричної оболонки, що підкріплена гнучким покриттям та містить дві колінеарні тріщини, які напрямлені вздовж твірної. Покриття моделюється шарніром, що з'єднує береги розрізів в одній з лицьових поверхонь оболонки. Сформульована задача теорії пологих оболонок із взаємозв'язаними крайовими умовами на розрізах. Методом сингулярних інтегральних рівнянь визначено напружений стан поблизу вершин тріщин та розподіл шарнірної реакції в покритті. Граничний стан композиції проаналізовано з урахуванням критеріїв крихкого руйнування оболонки та обмеженої міцності покриття. Перший механізм реалізується для оболонок малої кривини (з короткими тріщинами), а другий – для оболонок великої кривини (з довгими тріщинами). Досліджено вплив параметрів кривини серединної поверхні оболонки та взаємного розташування дефектів на величину руйнівного навантаження.

*MSC: 74R10.*

*Ключові слова: циліндрична оболонка, гнучке покриття, колінеарні тріщини, гранична рівновага.*

**Вступ.** Поширеним способом ремонту тонкостінних конструкцій задля відтворення їх герметичності та подовження ресурсу роботи є нанесення різного роду захисних покриттів, які можуть сприймати частину зовнішнього навантаження і тим самим зменшити напруження поблизу наявних пошкоджень. Розрахунки граничного стану складених конструкцій необхідно проводити, застосовуючи критерії міцності і до основи, і до підкріплення. Раніше [1, 2] розроблено модель для оцінки впливу одностороннього гнучкого покриття на міцність пластини з наскрізною тріщиною. Гнучке покриття моделюється шарніром, який з'єднує береги розрізу на одній із лицьових поверхонь пластини. У працях [3–5] таку модель розвинуто для дослідження рівноваги тонких оболонок з тріщинами. Зокрема, для малих параметрів кривини побудовано аналітичні оцінки граничного навантаження вкритої необмежено міцним покриттям оболонки з тріщиною, орієнтованою в головному напрямку серединної поверхні. Числовий аналіз для циліндричної оболонки з ізольованою тріщиною проведено в роботах [6, 7]. Проблема взаємодії дефектів у вкритих оболонках дотепер не розглядалася.

Мета цього дослідження — вивчити вплив одностороннього гнучкого покриття на напружено-деформований стан та міцність пологої циліндричної оболонки, послабленої системою тріщин, розташованих уздовж твірної, з урахуванням обмеженої міцності підкріплення. Аналіз проведено в широкому діапазоні зміни параметрів кривини оболонки та віддалі між дефектами.

### **ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ**

*Надійшла 24.09.2017*

© Щербій А. Б., 2017

**1. Постановка та інтегральне рівняння задачі.** Розглянемо ізотропну циліндричну оболонку завтовшки  $2h$  з радіусом серединної поверхні  $R$ , послаблену двома наскрізними колінеарними розрізами завдовжки  $2l$ , які розташовані вздовж твірної на відстані  $2d$  між їхніми центрами (рис. 1). Нехай на одну із лицьових поверхонь оболонки нанесено гнучке покриття, яке деформується сумісно з підкладкою і здатне витримати доволі високі напруження. Оболонка зазнає рівномірного розтягу мембранними зусиллями  $p = \text{const}$ ; решту поверхонь об'єкта вважаємо вільними від навантаження. В рамках теорії пологих оболонок Кірхгофа—Лява досліджуємо напружений стан та граничну рівновагу композиції.

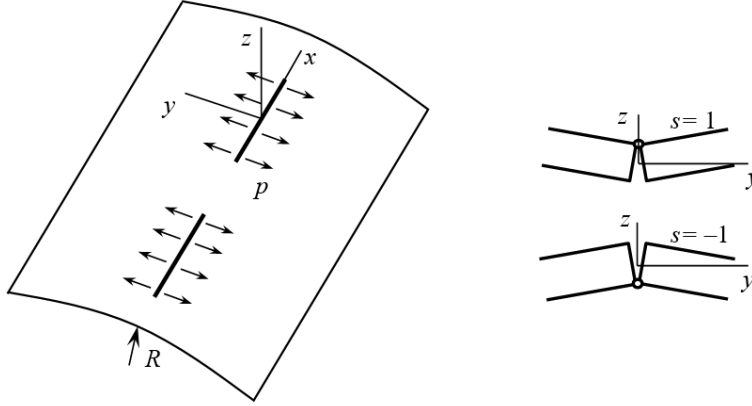


Рис. 1. Схема задачі та модель шарнірного з'єднання

Уважаючи оболонку в зоні збурення напруженого стану пологою, виберемо систему декартових координат  $Oxyz$  з центром посередині правого розрізу та віссю абсцис уздовж його лінії. Якщо прийняти гіпотезу Кірхгофа про пряму нормаль, то тріщини в оболонці з абсолютно гнучким покриттям доцільно моделювати математичними розрізами, береги яких з'єднані шарнірно в одній із лицьових поверхонь оболонки  $z = sh$  ( $s = +1$  для зовнішнього чи  $s = -1$  для внутрішнього підкріплення). Із урахуванням симетрії об'єкта та навантаження відносно осі абсцис такий підхід призводить до задачі теорії пологих оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах [3, 4]:

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \Delta\Delta w + \frac{1}{DR} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L; \quad (1)$$

$$[u_y] - sh[\vartheta_y] = 0, \quad M_y - sh(N_y + p) = 0, \quad x \in L; \quad (2)$$

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0, \quad M_x = M_{xy} = M_y = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тут  $\varphi$  – функція напружень,  $w$  – прогин оболонки,  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  – оператор Лапласа;  $[u_y]$  – розкриття тріщини в базовій поверхні оболонки,  $[\vartheta_y]$  – розрив кута повороту нормалі ( $\vartheta_y = \partial w/\partial y$ );  $N_x, N_{xy}, N_y$  – мембранні зусилля,  $M_x, M_{xy}, M_y$  – моменти;  $B = 2Eh, D = 2Eh^3/(3(1-\nu^2))$ ,  $E$  і  $\nu$  – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки;  $L = (-l - 2d, l - 2d) \cup (-l, l)$  – сукупність розрізів.



Сутність даної постановки задачі відображають крайові умови (2). Перша з них означає неперервність переміщень на з'єднаних берегах розрізів, друга описує реактивний момент, викликаний переносом контактної реакції з шарніра у базову поверхню оболонки.

Для побудови розв'язку задачі (1)–(3) скористалися методом сингулярних інтегральних рівнянь. Враховуючи, що дефекти перебувають в однакових умовах, зусилля та моменти на лінії правої тріщини виразимо через похідні від функції стрибка [8–11]:

$$N_y(x, 0) = \frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{11}(\xi, x) [u_y]'(\xi) - \tilde{K}_{13}(\xi, x) a [\vartheta_y]'(\xi) \right\} d\xi,$$

$$M_y(x, 0) = \frac{Ba}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{31}(\xi, x) [u_y]'(\xi) - \tilde{K}_{33}(\xi, x) a [\vartheta_y]'(\xi) \right\} d\xi. \quad (4)$$

Тут

$$\tilde{K}_{ij}(\xi, x) = K_{ij}(\xi - x) + K_{ij}(\xi + x + 2d), \quad i, j = 1, 3;$$

$$K_{11}(\zeta) = \gamma \operatorname{sgn} \zeta \left( B_1 \operatorname{kei}' \frac{\gamma|\zeta|}{2} - B_2 \operatorname{ker}' \frac{\gamma|\zeta|}{2} \right) - \frac{\sqrt{2}\gamma}{4} \times \left[ (B_3 + B_4) \left( \operatorname{ker}'' \frac{\gamma|\zeta|}{2} - \operatorname{kei} \frac{\gamma|\zeta|}{2} \right) + (B_4 - B_3) \left( \operatorname{kei}'' \frac{\gamma|\zeta|}{2} + \operatorname{ker} \frac{\gamma|\zeta|}{2} \right) \right],$$

$$K_{13}(\zeta) = K_{31}(\zeta) = -\nu\gamma \operatorname{sgn} \zeta \left( B_1 \operatorname{ker}' \frac{\gamma|\zeta|}{2} - B_2 \operatorname{kei}' \frac{\gamma|\zeta|}{2} \right) - \frac{\sqrt{2}(1-\nu)\gamma}{4} \left( (B_4 - B_3) \operatorname{ker}'' \frac{\gamma|\zeta|}{2} - (B_3 + B_4) \operatorname{kei}'' \frac{\gamma|\zeta|}{2} \right) - \frac{\sqrt{2}(1+\nu)\gamma}{4} \left( (B_3 + B_4) \operatorname{ker} \frac{\gamma|\zeta|}{2} + (B_4 - B_3) \operatorname{kei} \frac{\gamma|\zeta|}{2} \right),$$

$$K_{33}(\zeta) = (1 - \nu^2)\gamma \operatorname{sgn} \zeta \left( B_1 \operatorname{kei}' \frac{\gamma|\zeta|}{2} - B_2 \operatorname{ker}' \frac{\gamma|\zeta|}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}(1-\nu)^2\gamma}{4} \left( (B_3 + B_4) \operatorname{ker}'' \frac{\gamma|\zeta|}{2} + (B_4 - B_3) \operatorname{kei}'' \frac{\gamma|\zeta|}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}(1+\nu)^2\gamma}{4} \left( (B_4 - B_3) \operatorname{ker} \frac{\gamma|\zeta|}{2} - (B_3 + B_4) \operatorname{kei} \frac{\gamma|\zeta|}{2} \right);$$

$$B_1 = \sin \frac{\sqrt{2}\gamma\zeta}{4} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}\gamma\zeta}{4}, \quad B_2 = \cos \frac{\sqrt{2}\gamma\zeta}{4} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2}\gamma\zeta}{4},$$

$$B_3 = \sin \frac{\sqrt{2}\gamma\zeta}{4} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2}\gamma\zeta}{4}, \quad B_4 = \cos \frac{\sqrt{2}\gamma\zeta}{4} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}\gamma\zeta}{4};$$

$a = h/\sqrt{3(1-\nu^2)}$ ,  $\gamma^2 = 1/(Ra)$ ,  $\operatorname{ker}(\dots)$ ,  $\operatorname{kei}(\dots)$  – функції Томсона.

Підставимо вирази (4) в крайову умову (2) на правому розрізі. Виключаючи функцію  $[\vartheta_y]$ , дістаємо сингулярне інтегральне рівняння для знаходження розриву переміщень:

$$\frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l K(\xi, x) [u_y]'(\xi) d\xi = -p, \quad x \in (-l, l); \quad (5)$$

$$K(\xi, x) = \tilde{K}_{11}(\xi, x) - 2s\tilde{K}_{13}(\xi, x)/\sqrt{3(1-\nu^2)} + \tilde{K}_{33}(\xi, x)/(3(1-\nu^2)).$$

На кінцях розрізу розв'язок рівняння (5) повинен задовольняти умову:

$$[u_y](\pm l) = 0. \quad (6)$$

Якщо розглядати рівні колінеарні тріщини в оболонці без покриття, то, підставляючи інтегральні представлення (4) в класичні крайові умови  $N_y + p = 0$ ,  $M_y = 0$ ,  $x \in L$ , дістаємо систему інтегральних рівнянь для знаходження розриву переміщення і кута повороту на правому розрізі [7–9]:

$$\begin{aligned} \frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{11}(\xi, x) [\bar{u}_y]'(\xi) - \tilde{K}_{13}(\xi, x) a [\bar{\vartheta}_y]'(\xi) \right\} d\xi &= -p, \\ \frac{Ba}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{31}(\xi, x) [\bar{u}_y]'(\xi) - \tilde{K}_{33}(\xi, x) a [\bar{\vartheta}_y]'(\xi) \right\} d\xi &= 0, \quad x \in (-l, l), \end{aligned} \quad (7)$$

з додатковими умовами:

$$[\bar{u}_y](\pm l) = 0, \quad [\bar{\vartheta}_y](\pm l) = 0. \quad (8)$$

За знайденими функціями стрибка переміщення і кута повороту нормалі обчислюють коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів:

$$\begin{aligned} K_N^\pm &= \mp \frac{B}{4} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{2|x \mp l|} [u_y]'(x), \\ K_M^\pm &= \pm (3 - 2\nu - \nu^2) \frac{D}{4} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{2|x \mp l|} [\vartheta_y]'(x), \end{aligned} \quad (9)$$

а за виразами (4) – розподіл зусиль  $N(x)$  у покритті на лінії розрізів.

**2. Критерії руйнування.** Перейдемо до розгляду можливих сценаріїв руйнування надтріснутої оболонки з покриттям.

Вважаємо, що руйнування підкріпленої оболонки з тріщинами може відбуватися двома шляхами: розповсюдження тріщин без порушення цілісності покриття та втрата несучої здатності через розтріскування покриття. Перший механізм оцінюємо енергетичним критерієм лінійної механіки руйнування за комбінованого розтягу-згину [4, 5, 7, 11]:

$$\frac{\pi}{4h^2 E} \left[ (K_N^\pm)^2 + \frac{3(1+\nu)}{3+\nu} \left( \frac{K_M^\pm}{h} \right)^2 \right] = 2\gamma_*, \quad (10)$$

де  $\gamma_*$  – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу.

Після підстановки знайдених значень коефіцієнтів інтенсивності (9) у критерій (10) визначаємо граничне навантаження  $p_{1*}^\pm$ , при якому настане розвиток тріщини.

Для оцінки граничного стану покриття скористаємось класичною теорією міцності:

$$\max_{x \in [-l, l]} N(x) = N_*, \quad (11)$$

де  $N_*$  — критична сила, яку здатне витримати покриття. Використавши знайдені значення  $N(x)$ , отримаємо граничне навантаження  $p_{2*}$ , при якому відбудеться руйнування покриття. За руйнівне зусилля слід, вочевидь, прийняти з  $p_* = \min \{p_{1*}^+, p_{1*}^-, p_{2*}\}$ .

Нарешті, опрацювавши розв'язки класичної задачі (7, 8), з критерію (10) знаходимо  $p_{3*}^+$  та руйнівне зусилля для оболонки з тріщинами без покриття  $\bar{p}_* = \min \{p_{3*}^+, p_{3*}^-\}$ .

**3. Аналіз результатів.** Числовий розв'язок задач (5), (6) та (7), (8) побудували методом механічних квадратур [8, 9] при  $\nu = 0,3$ .

Графіки, подані на рис. 2, характеризують розподіл безрозмірних зусиль в покритті на лінії тріщин для різних значеннях безрозмірних параметрів кривини  $\lambda = \gamma l = (3(1 - \nu^2))^{1/4} l / \sqrt{Rh}$  та відносної віддалі між тріщинами  $\rho = l/d$ . При зростанні параметра  $\lambda$  спостерігаємо суттєве підвищення реактивного зусилля в шарнірі, особливо посередині розрізу. Залежність реакції від параметра  $\rho$  є немонотонна.

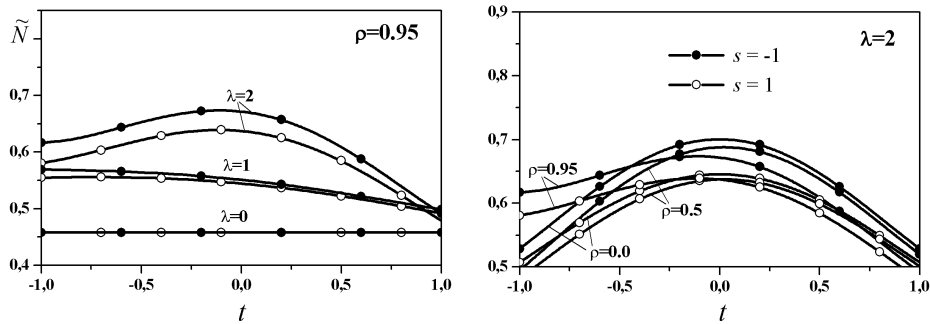


Рис. 2. Розподіл реакції в шарнірі  $\tilde{N} = N(t)/p$ ,  $t = x/l$ : зліва — залежність від параметра кривини  $\lambda$ , справа — від параметра взаємного розташування тріщин  $\rho$ ;  $s = 1$  — зовнішнє,  $s = -1$  — внутрішнє покриття.

Залежності безрозмірних значень коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів, від параметра відносної віддалі між тріщинами  $\rho$  будували при фіксованих значеннях параметра кривини  $\lambda$  (рис. 3). Вплив шарнірного з'єднання берегів тріщини за розтягу оболонки проявляється у суттєвому зменшенні коефіцієнтів інтенсивності зусиль та збільшенні коефіцієнтів інтенсивності моментів. У випадку з'єднання берегів у внутрішній поверхні ( $s = -1$ ) практично відсутня немонотонна залежність від параметра взаємного розташування дефектів  $\rho$ .

Результати дослідження граничної рівноваги вкритої циліндричної оболонки з двома тріщинами відображено на рис. 4. Граничні навантаження  $p_{1*}$ , отримані за критерієм розтріскування оболонки, можуть набувати значень як більших, так і менших порівняно з аналогічно навантаженою пластиною.

Для випадку покриття на внутрішній поверхні оболонки спостерігається немонотонна коливна залежність навантаження  $p_{1*}$  від параметра  $\rho$  для ближніх

вершин дефектів; у той же час за великих  $\lambda$  небезпечними виявляються дальні вершини тріщин (штрихові лінії лежать нижче від суцільних). Більш істотно такий ефект спостерігався при взаємодії тріщин у оболонці без покриття [11–13]. Натомість, у разі підкріплення зовнішньої поверхні завжди небезпечними є ближні вершини розрізів, а коливання граничного навантаження відсутні.

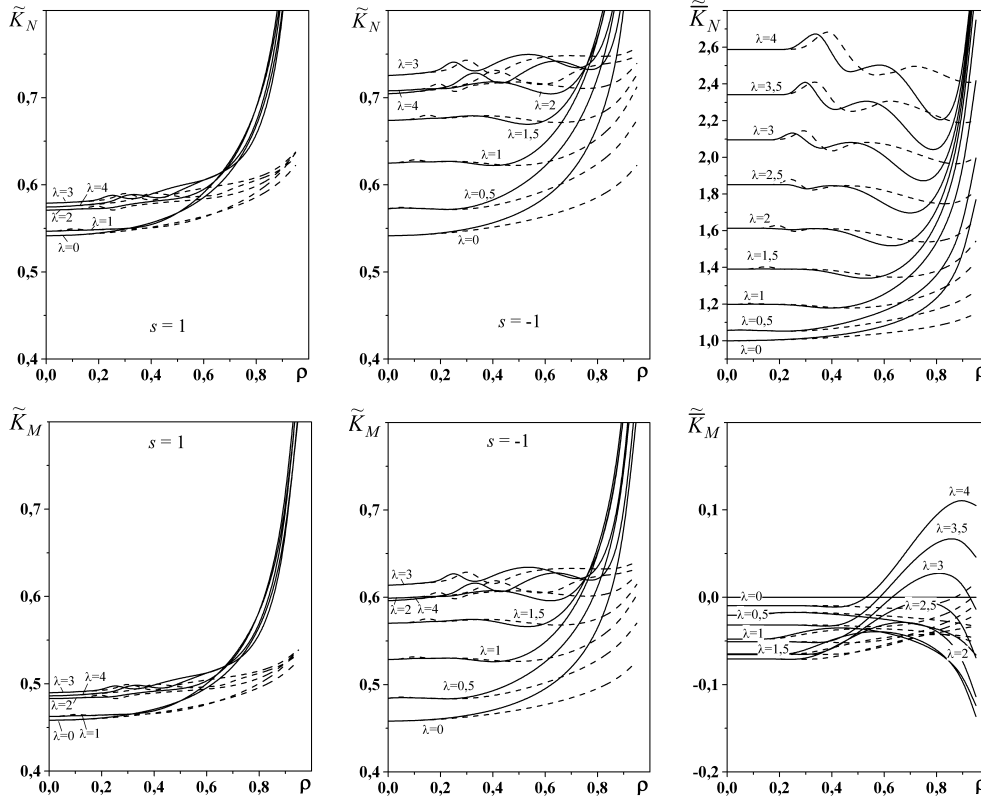


Рис. 3. Залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів від взаємного ротащування тріщин:  $\tilde{K}_N = K_N/(p\sqrt{l})$ ,  $\tilde{K}_M = K_M/(sph\sqrt{l})$  ( $s = 1$  – зовнішнє,  $s = -1$  – внутрішнє покриття);  $\tilde{\tilde{K}}_N = \tilde{K}_N/(p\sqrt{l})$ ,  $\tilde{\tilde{K}}_M = \tilde{K}_M/(ph\sqrt{l})$  – оболонка без покриття [11–13]; суцільні лінії відповідають ближнім, а штрихові – дальнім вершинам

Граничні навантаження  $p_{2*}$ , розраховані за міцністю покриття, отримано при  $N_*/p_0 = 1$ ,  $p_0 = 2h\sqrt{2E\gamma_*/(\pi l)}$ . Для слабших покриттів з меншим  $N_*$  ординати кривих  $p_{2*}$  закономірно зменшуються, усуваючи тим самим ефект підкріплення. Значення  $p_{2*}$  істотно знижуються при збільшенні параметра кривини  $\lambda$  і практично не залежать від параметра взаємного розташування дефектів  $\rho$ . При малих кривинах оболонки руйнівним є навантаження  $p_{1*} = \min\{p_{1*}, p_{2*}\}$ ; при більших кривинах –  $p_{2*} = \min\{p_{1*}, p_{2*}\}$ .

У часткових випадках  $\lambda = 0$  та  $\rho = 0$  отримаємо відомі результати для колінеарних тріщин у вкритій пластині [14] та для поодинокій поздовжньої тріщини у циліндричній оболонці з покриттям [7] відповідно.

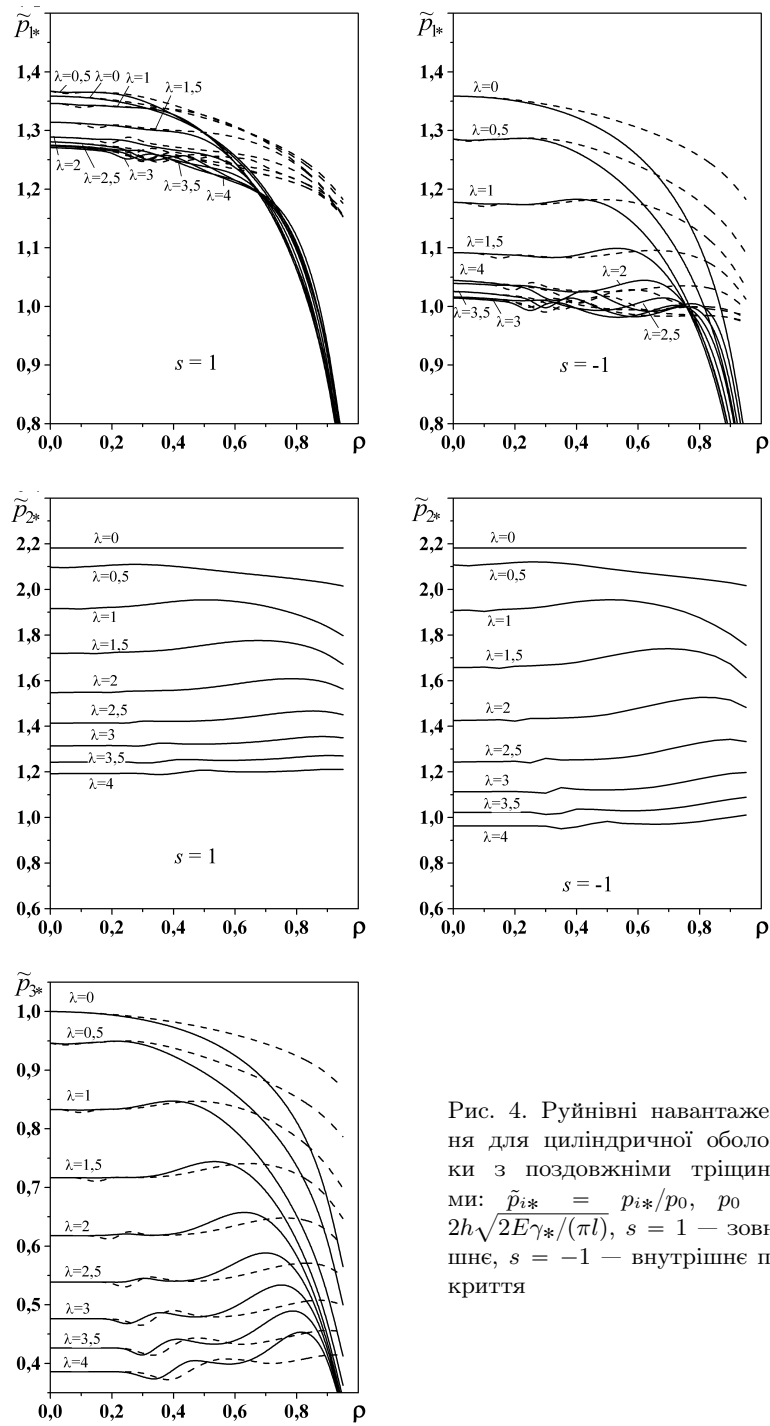


Рис. 4. Руйнівні навантаження для циліндричної оболонки з поздовжніми тріщинами:  $\tilde{p}_{i*} = p_{i*}/p_0$ ,  $p_0 = 2h\sqrt{2E\gamma_*/(\pi l)}$ ,  $s = 1$  — зовнішнє,  $s = -1$  — внутрішнє покриття

**Висновки.** Руйнівне навантаження розтягу для циліндричної оболонки з двома тріщинами з покриттям на внутрішній поверхні ( $s = -1$ ) немонотонно залежить від параметрів кривини та віддалі між дефектами, а небезпечними можуть бути зовнішні вершини дефектів. При малих кривинах оболонки руйнівним є навантаження, розраховані за міцністю болонки; при більших кривинах – за міцністю покриття. За будь-яким із критеріїв підкріплення оболонки ззовні є вигіднішим, аніж зсередини. Для оцінки міцності вкритих надтріснутих оболонок вирішальне значення має врахування обмеженої міцності гнучкого покриття. Неміцні підкріплення не дають відновлювального ефекту і не можуть визнаватися ефективними.

1. **Шацкий И. П.** Растяжение пластины, содержащей прямолинейный разрез с шарнирно соединенными кромками / И. П. Шацкий // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1989. – № 5. – С. 163–165.
2. **Шацкий И.** Модель тріщини в пластинці з гнучким покриттям / І. Шацкий // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 42–47.
3. Шацкий И. П. Интегральне рівняння задачі про тріщину в пологій оболонці з гнучким покриттям / І. П. Шацкий // Доп. АН України. – 1992. – № 1. – С. 46–48.
4. **Шацкий И. П.** Задача о трещине в пологой оболочке с гибким покрытием / И. П. Шацкий // Прикл. механика и техн. физика. – 1996. – Т. 37, № 2. – С. 131–138.
5. **Шацкий И. П.** Вплив гнучкого покриття на міцність пологої оболонки з тріщиною вздовж лінії кривини / І. П. Шацкий, А. Б. Щербій // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій (вип. 2): В 3-х т. / Під заг. ред. Панасюка В. В. – Львів: Каменяр, 1999. – Т. 2. – С. 333–335.
6. **Шацкий И. П.** Вплив гнучкого покриття на міцність пологої циліндричної оболонки з поперечною тріщиною / І. П. Шацкий, М. В. Маковійчук, А. Б. Щербій // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2015. – Вип. 24. – С. 248–257.
7. **Шацкий И. П.** Вплив гнучкого покриття на міцність пологої циліндричної оболонки з повздовжньою тріщиною / І. П. Шацкий, М. В. Маковійчук, А. Б. Щербій // Мат. мет. і фіз. мех. поля. Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017 (в друці).
8. **Панасюк В. В.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
9. **Хижняк В. К.** Смешанные задачи теории пластин и оболочек / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Донецк: Изд-во Донец. ун-та, 1980. – 126 с.
10. **Саврук М. П.** Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
11. **Осадчук В. А.** Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами / В. А. Осадчук. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
12. **Механика композитов.** В 12 т. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1993. – (Т. 7: Концентрация напряжений / А. Н. Гузь, А. С. Космодамианский, В. П. Шевченко и др. – К.: А. С. К., 1998. – 387 с.)

13. **Кушнір Р. М.** Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Р. М. Кушнір, М. М. Николишин, В. А. Осадчук. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
14. **Шацький І. П.** Взаємодія колінеарних розрізів з шарнірно з'єднаними берегами у розтягнутій пластинці / І. П. Шацький // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1992. – Вип. 36. – С. 93–97.

*Щербий А. Б.*

ВЛИЯНИЕ ГИБКОГО ПОКРЫТИЯ НА ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТРЕЩИНАМИ ВДОЛЬ ОБРАЗУЮЩЕЙ

*Резюме*

Исследована задача о растяжении усиленной покрытием цилиндрической оболочки с двумя коллинеарными дефектами, ориентированными вдоль образующей. Гибкое покрытие моделируется шарниром, соединяющим берега разрезов в одной из лицевых поверхностей оболочки. Сформулирована задача теории пологих оболочек с взаимосвязанными краевыми условиями на разрезах. Методом сингулярных интегральных уравнений определены напряженное состояние вблизи вершин трещин и распределение шарнирной реакции в покрытии. Предельное равновесие композиции проанализировано с учетом критериев хрупкого разрушения оболочки и ограниченной прочности покрытия. Первый механизм реализуется для оболочек малой кривизны (с короткими трещинами), второй – для оболочек большой кривизны (с длинными трещинами). Исследовано влияние параметров кривизны срединной поверхности оболочки и взаимного расположения дефектов на величину разрушающей нагрузки.

*Ключевые слова:* цилиндрическая оболочка, гибкое покрытие, коллинеарные трещины, предельное равновесие .

*Shcherbii A. B.*

INFLUENCE OF FLEXIBLE COATING ON LIMIT EQUILIBRIUM OF CYLINDRICAL SHELL WITH CRACKS ALONG A GENERATRIX

*Summary*

Elastic and limit equilibrium of tensioned shallow cylindrical shell weakened by two through the thickness longitudinal cracks and enhanced by coating on one of the face surfaces is studied in the two-dimensional formulation. The cracks in the shell with a flexible coating are simulated by cuts with eccentrically hingedly connected edges. The boundary problem for equations of classical shell theory with interrelated conditions of tension and bending along the cutting lines is formulated within the framework of such model. The singular integral equation for the unknown jump of normal displacement on the cracks edges has been elaborated.

Based on numerical solutions of integral equation dependences of forces and moments intensity factors in the vicinity of the defects tips and distribution of forces in the hinge joints on the parameter of shell curvature and mutual distance between cracks are investigated.

To estimate the influence of flexible coating on the limit state of the thin-walled elements of constructions with defects the combined fracture criterion which takes into account two mechanisms: propagation of the crack along the shell body and disintegration of the coating with limited strength were proposed. The first mechanism is implemented in the shell of small curvature (with short cracks), and the second one – in the shell of big curvature (with long cracks). It was discovered that enhancing of external surface of tensioned cylindrical shell by coating is more efficient than enhancing of internal one. In addition, the limiting load depends on distance between cuts nonmonotonically in case of strengthening of external

face of shell.

*Key words:* cylindrical shell, flexible covering, collinear cracks, limit equilibrium.

## REFERENCES

1. Shatskii, I. P. (1989). Tension of a plate containing a rectilinear cut with hinged rims. *J. Appl. Mech. and Techn. Phys.*, Vol. 30, №5. P. 828–830.
2. Shats'kyi, I. (2000). Model' trishchyny v plastyntsi z gnuchkym pokryttiam [A model of crack is in plate with flexible covering]. *Visnyk Lviv. un-tu. Ser. mech.-math.*, Vol. 57. P. 42–47.
3. Shatskyi, I. P. (1992). Integral'ne rivniannya zadachi pro trishchynu v pologii obolontsi z gnuchkym pokryttiam [Integral equation of problem about a crack in shallow shell with flexible covering]. *Dop. AN Ukraine.* №1. P. 46–48.
4. Shatskii, I. P. (1996). Crack problem for a shallow shell with a flexible coating. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 37, №2, P. 259–265.
5. Shatskyi, I. P. and Shcherbii, A. B. (1999). Vplyv gnuchkogo pokryttia na mitsnist' pologoi obolonki z trishchynoiu vzdovzh linii kryvyny [Influence of flexible covering on streng of shallow shell with crack along curvature line]. *Mehanika ruinuvannia materialiv i mitsnist konstruksii*, Issue 2, Vol. 2. P. 333–335. (In 3 V. ed. by Panasyuk V. V., Lviv: Kameniar).
6. Shatskyi, I. P., Makoviichuk, M. V. and Shcherbii, A. B. (2015). Vplyv gnuchkogo pokryttia na mitsnist' pologoi tsylindrychnoi obolonky z poperechnoiu trishchynoiu [Influence of flexible coating on strength of shallow cylindrical shell with a circumferential crack]. *Problemy obchysluvalnoi mehaniky i mitsnosti konstruksii*, Issue 24, P. 248–257.
7. Shatskyi, I. P., Makoviichuk, M. V. and Shcherbii, A. B. (2017). Vplyv gnuchkogo pokryttia na mitsnist' pologoi tsylindrychnoi obolonky z povzdovzhnoi trishchynoiu [Influence of flexible covering on strength of shallow cylindrical shell with a longitudinal crack]. *Mat. metody ta fiz.-mekh. polia* (in print).
8. Panasyuk, V. V., Savruk, M. P. and Datsyshyn, A. P. (1976). *Raspredelenie napryazheniy okolo treshchin v plastinach i obolochkach* [Stress distribution near cracks in plates and shells]. Kiev: Naukova dumka, 444 p.
9. Khyzhnyak, V. K. and Shevchenko, V. P. (1980). *Smeshannyye zadachi teorii plastin i obolochek* [Mixed problems of the plates and shells theory]. Donetsk: Izd-vo Donets. un-ta, 126 p.
10. Savruk M. P. (1981). *Dvumernyye zadachi uprugosti dlia tel s treshchinami* [Two-dimensional problems of elasticity for cracked bodies]. Kiev: Naukova dumka, 324 p.
11. Osadchuk V. A. (1985). *Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie i predel'noe ravnovesie obolochek s razrezami* [Stress-strain state and limit equilibrium of shells with the cuts]. Kiev: Naukova dumka, 224 p.
12. *Mekhanika kompozitov* [Mechanics of composites], Ed. Guz A. N. (1993). in 12 V. Kiev: Naukova dumka. (Guz, A. N., Kosmodamianskii, A. S., Shevchenko, V. P. et al. (1998). *Koncentratsiia napriazhenii* [Concentration of stresses], Vol. 7., Kiev: A. S. K., 387 p.)
13. Kushnir, R. M., Nykolyshyn, M. M. and Osadchuk, V. A. (2003). *Pruzhnnyi ta pruzhno-plastichnyi granichnyi stan obolonok z defektamy* [Elastic and elastoplastic limiting state of shells with defects]. Lviv: SPOLOM, 320 p.
14. Shats'kii, I. P. (1993). The interaction of collinear cuts with hinged rims in a plate under tension *J. Sov. Math.*, Vol. 67, №5, P. 3355–3358.



УДК 519.85

**Б. И. Юхименко, Н. П. Волкова**

Одесский национальный политехнический университет

## **ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О МНОГОМЕРНОМ РАНЦЕ**

Работа посвящена созданию комбинаторных алгоритмов решения многомерной задачи о ранце. Показана актуальность проблемы. Дан небольшой исторический анализ исследований и публикаций комбинаторных алгоритмов дискретной оптимизации. Обращено внимание на сложность вычислений при решении такого рода задач. Предположено использовать приближенные алгоритмы. В работе приведены три способа получения приближенных решений, разработанных на идеях жадного алгоритма, генетического алгоритма муравьиной колонии, а также некоторого комбинированного подхода. Сущность алгоритмов состоит в том, что конкретизация компонент вектора решений следует сформированной приоритетной очереди. Согласно ей присваивается значение «1» пока это допустимо. Получаемая последовательность зависит от использованной идеи. Значение целевой функции (рекорд) полученного решения является основой отсеивания вариантов при его улучшении. Само улучшение осуществляется через двойственный подход комбинаторных алгоритмов. Приведен числовой пример.

*MSC: 68W25, 90C59.*

*Ключевые слова: комбинаторные методы, приближенное решение, многомерная задача о ранце, жадный алгоритм, муравьиная колония, рекорд, отсеивание.*

**ВВЕДЕНИЕ.** Дискретные оптимизационные задачи находят широкое применение в различных областях, где используются математические методы для анализа происходящих там процессов. Необходимость решения таких задач предъявляет требования к разработке эффективных методов решения, позволяющих оперативно получить достаточно хорошее, а при возможности и оптимальное решение.

В настоящее время разработаны современные методы и алгоритмы решения задач дискретного программирования. Им посвящено множество научных разработок, их изучают в высших учебных заведениях. Разработаны пакеты прикладных программ, позволяющих решить ряд задач дискретного программирования. Наиболее удачные алгоритмы и программы решений задач целочисленного линейного программирования.

Современные методы точного или приближенного решения задач дискретной оптимизации достаточно сложные. В их основе лежат задачи из классов NP полных. Переход из класса NP полных к P полным – один из моментов, чему уделяется достойное внимание. Модификация существующих классических алгоритмов, улучшающих скорость сходимости, наиболее распространенный прием поиска быстродействующих алгоритмов.

Переход от алгоритмов поиска точного решения к алгоритмам поиска приближенного решения представляется очень важным приемом, поскольку не всегда поиск математически точного решения является необходимым в реальных

условиях. Понятие тонкостей вычислительной реализации комбинаторных алгоритмов позволяет их «направлять» на нужное русло при поиске особенностей решаемых задач. Однако трудности, связанные с перебором большого количества вариантов, остается на повестке дня при совершенствовании алгоритмов. Разработка правил отсеивания неперспективных подмножеств вариантов одна из основных проблем совершенствования комбинаторных алгоритмов.

Несмотря на большие возможности персональных компьютеров и сервиса программного обеспечения, вопрос оперативного получения достаточно хороших решений в дискретной оптимизации актуален. В данной статье предлагается ряд способов получения приближенных решений, основанных на идее жадных алгоритмов, алгоритмов муравьиной колонии, а также комбинированные подходы имеющихся алгоритмов. Основной целью является получение алгоритма, предопределяющего вариант решения близкого к оптимальному за приемлемое время и сложности вычислений.

Важным моментом в комбинаторных методах дискретной оптимизации является процесс отсеивания так называемых неперспективных вариантов. Чем меньше вариантов пересматривается, тем скорость получения хорошего решения больше. Неперспективными вариантами решения принято называть те, которые заведомо, по каким-то причинам, не являются оптимальными вариантами. Наличие рекордного значения близкого к оптимальному позволяет с ним сравнивать прогнозные значения целевой функции варианта и принимать решение о его неперспективности. Работа фактически и посвящена формированию рекордных значений целевой функции.

В работе также описан способ улучшения полученного приближенного решения, а в некоторых случаях и получения оптимального. Способ основывается на двойственных алгоритмах [12], когда формирование решения начинается не с нулевого вектора, как обычно, а с вектора, компоненты которого единичные. Замена единиц нулями начинается с наименьшего значения компонента целевой функции. В предполагаемой работе, эта замена не зависит непосредственно от структуры целевой функции, а от способа, согласно которому, она появилась в варианте решения.

Одним из основных комбинаторных алгоритмов, использующих конечность множества вариантов дискретной оптимизации, является метод ветвей и границ. Начало такого рода алгоритмов было предложено Лэнд и Дойг [1] для решения задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Однако главный толчок развития метода ветвей и границ дал метод Литла и др. [2] для решения задачи о коммивояжере. Структура метода такова, что выделяются моменты, которых можно модифицировать, учитывая особенности реальных задач. Метод вызвал живой интерес для разработки новых и новых подходов. К примеру [3,4].

Несколько другое направление в комбинаторной алгоритмизации дало появление алгоритма Балаша [5], который породил новое, так называемое одностороннее выявление при решении задач линейного программирования с булевыми переменными. На сегодняшний день есть алгоритмы, навеяны идеями Балаша (к примеру [6,7]). Смысл алгоритма с односторонним ветвлением состоит в том, что конкретизируются только единичные компоненты вектора решений. Невозможность поставить число «1» как компоненту вектора решений, предопределяет получение варианта решений. Полученный вариант либо совершенствуется с целью

получения лучшего, либо является оптимальным, либо получили приближенное решение.

Приближенные методы широко применяются при решении ЦЛП, так как для точного нахождения решения может понадобиться значительные вычислительные средства. Современные приближенные методы обычно являются комбинированными, содержащие элементы различных методов. В приближенных методах решение задачи проводится в два этапа: построение начального решения и его улучшения. На первом этапе широко используются различные эвристические приемы, построение на правдоподобиях о свойствах оптимального решения задачи.

Среди приближенных методов ведущее место занимают так называемые жадные методы, применяемые как самостоятельно, так и в сочетании с другими подходами. Их несомненное преимущество состоит в том, что применение, скажем к задаче о ранце, их трудоемкость в основном имеет линейный вид по отношению к числу искомых величин. Жадные методы не гарантируют получение оптимального решения, но позволяют получить оценки вариантов так, что отклонение приближенного решения от оптимального не велико. Согласно жадным алгоритмам предпочтение отдается предметам с наибольшей количественной их оценки. Обзор по самим алгоритмам приведен [8]. Жадный алгоритм для решения задачи о ранце описан в [9].

Новый перспективный подход к оптимизации базируется на имитации поведения колонии муравьев. Интенсивным результатом кооперативного поведения биологических муравьев является нахождение кратчайшего маршрута от источника пищи к гнезду. Алгоритмы оптимизации, имитирующие такое поведение муравьев, предложены в начале девяностых в Италии [10].

Популяризация алгоритмов муравьиной колонии происходило довольно быстро. Хорошие результаты получены для таких комбинаторных задач как задача о коммивояжере, раскраске графа, календарного планирования. Подробнее см. [11].

В сущности сама алгоритмизация производится через поведение муравьев при перемещении и передачи информации, через так называемые стигмержи. Биологически, стигмержи осуществляют через феромоны – специальный секрет, откладывается след при перемещении муравья. Чем выше концентрация феромонов по тропе, тем больше муравьев будет по ней двигаться.

В последнее время широко распространены приближенные алгоритмы, являющиеся модификациями точных методов, изначально ориентированы на поиск приближенного решения с оценкой отклонения от оптимального. В целом, приближенным методом посвящена обширная литература. В работе [12] приведены описания многих подходов к нахождению приближенных решений, а также дан список работ по данным вопросам.

**ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.** Многомерная задача о ранце имеет многочисленные приложения и является одной из основных модульных задач комбинаторной оптимизации. С точки зрения теории сложности эта задача NP-сложная. Поэтому в последнее время основное внимание уделяется приближенным методам решения данной задачи. Следует отметить, что эта тенденция характерна для комбинаторной оптимизации.

Известны различные подходы нахождения как точных, так и приближенных. При последовательном построении решения и компоновке варианта очередность

конкретизации компонент вектора решения значительной степени предопределяет эффективность работы алгоритма метода ветвей и границ. Экспериментально это было показано в [7]. Одностороннее выявление исключает выбор приоритетного подмножества вариантов, содержащего компоненту с единичным и подмножества с нулевым значением конкретизируемой переменной. В связи с этим, очередность конкретизации еще более важный момент. Ниже предлагаются некоторые способы выбора переменной, которой присваивается значение «1».

Итак, рассматривается задача ЦЛП в постановке

$$Z = \max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m};$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Алгоритм решения задачи состоит из трех этапов:

1. Формирование приоритетной последовательности конкретизации компонент вектора решений значением «1».
2. Формирование самого вектора решений.
3. Улучшение полученного решения.

Для формального описания перечисленных пунктов введем следующие обозначения:  $p_j$  - оценка  $j$ -ой компоненты вектора решений;  $I_x = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$  — последовательность индексов компонент вектора решений, предопределяющих порядок их конкретизации;  $s$  — шаг конкретизации;  $R$  — исходное значение целевой функции (рекорд),

$$K_x^s = \{j/x_j = 1\},$$

$$b_i^s = \left( b_i - \sum_{j \in K_x^s} a_{ij} \right),$$

$$V_j^s = \{j/b_i^s > 0, \quad i = \overline{1, m}\}.$$

Формирование приоритетной последовательности можно осуществить несколькими способами. От этого непосредственно зависит близость получаемого решения к оптимальному решению, а также получаемое значение целевой функции — рекорд. Наличие рекорда уменьшает количество пересматриваемых вариантов при улучшении приближенного решения. Отсеивание вариантов очень важный момент при работе любых комбинаторных алгоритмов. Ниже рассматриваются способы формирования последовательности приоритетов компонент вектора решений — претендентов на получение значения «1».

**Первый способ** формирования последовательности приоритетов следует идеи жадного алгоритма. Ранжируемые компоненты вектора целевой функции в

порядке невозрастания. Индексы компонент предопределяют приоритетную последовательность. Если  $c_{j_1} \geq c_{j_2} \geq \dots \geq c_{j_n}$ , то множество индексов компонент вектора решения имеет ту же лексикографическую последовательность, а именно  $I_x = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ , согласно которой, будут присваиваться значения «1» компонентам вектора решений.

**Второй способ** навеян идеями алгоритмов муравьиной колонии. Феноменами, предопределяющими правильное направление движения биологических существ, предполагается считать частоту появления положительных значений компонент в векторах решения одномерных нецелочисленных задач о ранце.

Многомерную задачу о ранце можно рассматривать как состоящую из  $m$ -одномерных, имеющих одну и ту же целевую функцию. Оптимальное решение каждой из них является локальным по отношению к многомерной. Процедура решения одномерных задач о ранце вычислительном смысле несложная, особенно если отказаться от требований целочисленности искомых величин. Метод решения нецелочисленной задачи о ранце был предложен Данцигом еще в шестидесятых годах прошлого столетия (см. напр. [12]). Частота появления положительных значений в решениях локальных задач может рассматриваться как оценка важности каждой компоненты в векторе решений. Следуя терминологии муравьиной колонии это наличие феноменов.

Итак, для каждой  $i$ -той задачи составляются соотношения

$$\lambda_j^i = \frac{c_j}{a_{ij}}, \quad j = \overline{1, n}; \quad i = \overline{1, m},$$

$\lambda_j^i$  упорядочиваются в порядке не возрастания для каждого  $i$  в отдельности. Места расположения индекса  $j$  предопределяют очередность присвоения положительных значений компонент вектора локальных решений. Первые  $(k-1)$  компонент принимают значения «1». Имеем

$$\begin{aligned} x_{j_1}^i &= x_{j_2}^i = \dots = x_{j_{k-1}}^i = 1, \\ x_{j_{k+2}}^i &= x_{j_{k+2}}^i = \dots = x_n^i = 0, \end{aligned}$$

$k$ -ая компонента определяется как дробное значение, вычисляемое по формуле

$$x_{j_1}^i = \frac{b_i - \sum_{l=1}^{k-1} a_{ij_l}}{a_{ik}}.$$

Следует отметить, что  $k$  различное для каждого  $i = \overline{1, m}$ . Приоритетная оценка каждой  $j$ -ой компоненты определяется величиной

$$p_j = \sum_{i=1}^m x_j^i.$$

Ранжированная последовательность  $p_j$  в порядке невозрастания определяет множество  $I_x = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ .

**Третий способ** предполагает комбинирование идеи жадного алгоритма с учетом возможностей присвоения значения «1» большему количеству компонент вектора решений. Другими словами, оценка определяется по формуле

$$p_j = c_j * \sum_{i=1}^m (b_i - a_{ij}), \quad j = \overline{1, n}.$$

Ранжировка в порядке невозрастания оценок  $p_j$  предопределяет  $I_x = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ .

Формирование варианта решения. Изначально берем вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , компоненты которого имеют значение «0». Согласно последовательности индексов  $I_x$  присваиваются значения

$$x_{j_1} = x_{j_2} = \dots + x_{j_{k-1}} = 1, \quad x_{j_k} = 0,$$

где  $k$  определяется из соотношения  $(b_i - \sum_{l=1}^{k-1} a_{ij_l}) \geq 0$  для  $i = \overline{1, m}$ .

Если существует такой  $j_r (r > k)$ , что  $(b_i^r - a_{ij_r}) \geq 0$  при  $i = \overline{1, m}$ , то  $x_{j_r} = 1$ . Следует отметить, что таких  $r$  может быть больше, чем один.

Улучшение полученного приближенного решения предлагается осуществить через способ двойственности при формировании решения [12]. В называемом прямом способе конкретизации переменных вектор решений  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  содержит все нулевые компоненты ( $x_j = 0, j = \overline{1, n}$ ). Конкретизируются значения «1» согласно приоритетной очереди  $I_x$ . В двойственном способе считается, что исходное положение вектора таково, что  $x_j = 1 (j = \overline{1, n})$ . Определяется, какие компоненты  $x_j$  следует сделать нулевыми, чтобы довести вектора до допустимого решения, удовлетворяющего системе ограничений.

В рассматриваемом случае имеется решение, в котором несколько компонент имеется со значением «1». Проверяется возможность улучшить имеющиеся решение, если «1» заменить на «0».

Пусть имеется приближенное решение  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , в котором  $x_q = 1$ . Принимается  $x_q = 0$ ; формируется  $K_x^{s-1}$ ; а также  $b_i^{s-1} = (b_i^s + a_{iq})$ ,  $i = \overline{1, m}$ ; определяется содержание  $V_j^s$ . Если  $V_j^{s-1} \neq \emptyset$ , то проверяется возможность улучшения имеющегося рекорда  $R$ . А именно, если

$$\left( \sum_{j \in K_x^{s-1}} c_j + \sum_{j \in V_x^{s-1}} c_j \right) > R,$$

то формируется новый вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_q = 0, \dots, x_n)$  на основе последовательности  $I_x$ . В противном случае улучшить решение нельзя, заменяя значение  $x_q$  на нулевое.

Возможны следующие случаи:

1. Получили решение лучше предыдущего, получаем новый рекорд.
2. Убедились, то улучшение быть не может.
3. Следует выбрать следующую компоненту со значением «1» в приближенном решении.

Таким образом, поочередно компоненты со значением «1» меняют значение «0» и каждый раз проверяются на возможность улучшения.

**Пример.** Дана задача о многомерном ранце

$$Z = \max(4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 6x_5 + x_6 + 7x_7)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 2x_5 + x_6 + 7x_7 \leq 10 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 + 6x_7 \leq 10 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 2x_6 + 4x_7 \leq 10 \end{cases}$$

$$x_j \in \{0,1\}, j = \overline{1,7}.$$

Согласно первому способу формирования приоритетов, имеем  $I_x = \{7, 5, 3, 1, 4, 2, 6\}$ . Последовательность соответствует ранжированной последовательности коэффициентов целевой функции.

Вариант решения согласно полученной последовательности определяется следующим образом

$$x_7 = 1; \quad 10 - 7 = 3; \quad 10 - 6 = 4; \quad 10 - 4 = 6; \quad R = 7;$$

$$x_5 = 1; \quad 3 - 2 = 1; \quad 4 - 1 = 3; \quad 6 - 5 = 1; \quad R = 7 + 6 = 13$$

Больше единичных значений присвоить нельзя. Вариант

$$x = \{0, 0, 0, 0, 1, 0, 1\}; \quad R = 13.$$

Определим вариант согласно второму способу формирования приоритетов.

$$\lambda_j^1 ::= \frac{4}{2}; \frac{2}{3}; \frac{5}{4}; \frac{3}{6}; \frac{6}{2}; \frac{1}{1}; \frac{7}{7};$$

Расположение индексов  $j$  согласно ранжировке  $\lambda_j^1$  следующее  $\{5, 1, 2, 4, 3, 7, 6\}$ ;  
 $x_5 = x_1 = x_2 = 1; x_3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{3}; Z_1 = 13,0;$

$$\lambda_j^2 ::= \frac{4}{4}; \frac{2}{6}; \frac{5}{3}; \frac{3}{2}; \frac{6}{1}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6};$$

Расположение индексов  $j$   $\{5, 3, 4, 7, 1, 6\}$ ;  $x_5 = x_3 = x_4 = 1; x_7 = 4/6 = 2/3;$   
 $Z_2 = 18,6;$

$$\lambda_j^3 ::= \frac{4}{6}; \frac{2}{2}; \frac{5}{4}; \frac{3}{3}; \frac{6}{5}; \frac{1}{2}; \frac{7}{4};$$

Расположение индексов  $j$  следующее:  $\{7, 5, 3, 2, 4, 1, 6\}$ ;  $x_7 = x_5 = 1; x_3 = 1/4;$   
 $Z_3 = 14,2;$

Локальные решения следующие:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Приоритетные оценки  $p_j$  для каждого  $j$  следующие:

$$P_1 = 1; \quad P_2 = 1; \quad P_3 = 1\frac{1}{4}; \quad P_4 = 1\frac{1}{3}; \quad P_5 = 3; \quad P_6 = 0; \quad P_7 = 1\frac{2}{3};$$

Ранжированная последовательность приоритетов  $I_x = \{5, 7, 4, 3, 1, 2, 6\}$ . Приближенное решение  $x = \{0, 0, 0, 0, 1, 0, 1\}$ ;  $R = 13;$

Согласно третьему — комбинированному способу — приоритетные оценки определяются с учетом суммарных невязок в системе ограничений.

$$P_1 = \{(10 - 2) + (10 - 4) + (10 - 6)\} \cdot 4 = 72; \quad P_2 = 19 \cdot 2 = 38;$$

$$P_3 = 19 \cdot 5 = 95; P_4 = 19 \cdot 3 = 57; P_5 = 22 \cdot 6 = 132; P_6 = 24 \cdot 1 = 24;$$

$$P_7 = 13 \cdot 7 = 91.$$

Последовательность приоритетов  $I_x = \{5, 3, 7, 1, 4, 2, 6\}$ . Приближенное решение  $x = \{0, 0, 1, 0, 1, 0, 0\}$ ;  $R = 11$ .

Проведем улучшение полученных приближенных решений. Для первого способа имеем

$$X = \{0, 0, 0, 0, 1, 0, 1\}; I_x = \{7, 5, 3, 1, 4, 2, 6\}; R = 13.$$

Предполагается  $x_5 = 0$ ;

$$b_i^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}; V_j^1 = \{1, 6\}; \sum_{j \in V_j^1} c_j = 5; 5 + 7 < 13.$$

Улучшения не может быть.

Предполагается  $x_7 = 0$ ;

$$b_i^1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}; V_j^1 = \{2, 3, 4, 6\}; \sum_{j \in V_j^1} c_j = 9 + 6 = 15.$$

Согласно последовательности  $I_x$  принимаем  $x_3 = 1$ ;

$$b_i^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ больше единичных значений нельзя поставить, т.е. } V_j^3 = \emptyset.$$

Имеем  $Z = 6 + 5 = 1 < 13$ . Улучшения нет.

Для второго способа имеем

$$X = \{0, 0, 0, 0, 1, 0, 1\}; I_x = \{5, 7, 4, 3, 1, 2, 6\}; R = 13.$$

Предполагаем  $x_5 = 0$ ;

$$b_i^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}; V_j^1 = \{1, 6\}; \sum_{j \in V_j^1} c_j = 5; 5 + 7 = 12 < 13;$$

Аналогично, как и в первом случае, улучшения не может быть.

Предполагаем  $x_7 = 0$ ;

$$b_i^1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}; V_j^1 = \{2, 3, 4, 6\}; \sum_{j \in V_j^1} c_j = 9; 9 + 6 = 15; 15 > R = 13;$$

Проверяем:  $x_4 = 1$ ;  $b_i^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ ;  $V_j^2 = \{6\}$ ;  $x_6 = 1$ ;  $b_i^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $V_j^3 = \emptyset$ ;

$Z = 6 + 3 + 1 = 10$ ;  $10 < 13$ ; Улучшения нет.



Для третьего способа имеем

$$X = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0); I_x = \{5, 3, 7, 1, 4, 2, 6\}.$$

Полагаем  $x_3 = 0$ ;

$$b_i^1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}; V_j^1 = \{2, 4, 6, 7\}; \sum_{j \in V_j^1} c_j = 13; Z = 13 + 6 = 19; \quad 19 > R = 11;$$

Проверяем:  $x_7 = 1$ ;  $b_i^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $V_j^3 = \emptyset$ ;  $Z = 13 > 11$ . Вариант решения  
 $X = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$ ;  $R = 13$ ; Полагаем  $x_5 = 0$ ;

$$b_i^1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}; V_j^2 = \{1, 2, 4, 6\}; \sum_{j \in V_j^2} c_j = 12; Z = 5 + 12 = 17 > 11;$$

Проверяем:  $x_1 = 1$ ;  $b_i^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $V_j^2 = \emptyset$ ;  $Z = 4 + 5 = 9 < 13$ . Приближенное решение

$$X = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1); R = 13.$$

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** В работе приведено построение двухэтапных алгоритмов решения многомерной задачи о ранце. На первом этапе рассматриваются способы построения ранжированных последовательностей индексов компонент вектора решений, согласно которым осуществляется конкретизация переменных  $x_j$  со значением «1». Используются эвристические подходы, основанные на правдоподобиях, но не имеющих строгих доказательств.

Предложены три способа построения последовательностей. Первый основан на идее жадного алгоритма, третий комбинированный способ, и именно, идея жадного с учетом величины суммарной невязки в системе ограничений, практически предопределяющих количество единичных компонент в векторе решений и, в какой-то степени, значение целевой функции. Второй алгоритм навеян идеями метаэвристических алгоритмов. Здесь используется поведение биологических существ в поиске пищи. Другими словами, в поиске оптимального варианта достижения цели — накормиться.

Существует множество алгоритмов оптимизации основанных на идее муравьиной колонии. В работе дан новый подход поиска определения компонент, претендующих на значение «1». На основе частоты появления положительных значений компонент в векторах, решения локальных одномерных нецелочисленных задач о ранце составляется последовательностью претендентов. Разделение многомерной задачи о ранце на множество одномерных давно используется для получения оценки множества вариантов в методе ветвей и границ при двухстороннем ветвлении [12].

Вторая часть алгоритмов предполагает улучшение полученного приближенного решения. Эта часть использует идею двойственности при формировании

самого решения. Проверяется возможность улучшить решение за счет поочередной замены компонент со значением «1» на значение «0». Есть случаи, что это удается. Однако главную роль играет построение приоритетной последовательности конкретизации. Приведенный пример как-то демонстрирует возможности алгоритмов. Проводится большой эксперимент. Более весомое слово будет сказано позже.

1. **Land A. H.** An automatic method of solving discrete programming problems / A. H. Land, A. G. Doig // *Econometrica*. – 1960. – V. 28, №3. – P. 497–520.
2. **Little J. D. C.** An algorithm for the traveling salesman problem / J. D. C. Little, K. G. Murty, C. Karel // *Operat. Res.* – 1963. – V. 11, №6. – P. 972–989.
3. **Меламед И. И.** Задача коммивояжера. Точные алгоритмы / И. И. Меламед, С. И. Сергеев, И. Х. Сигал // *Автоматика и телемеханика*. – 1989. – №10. – с. 3–29.
4. **Меламед И. И.** Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы / И. И. Меламед, С. И. Сергеев, И. Х. Сигал // *Автоматика и телемеханика*. – 1989. – №11. – с. 3–20.
5. **Balas E.** An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables // *Operat. Res.* – 1965. – V. 13, №4. – P. 517–546.
6. **Юхименко Б. И.** Ускоренный алгоритм метода ветвей и границ для решения задачи целочисленного линейного программирования // *Тр. Одес. политехн. ун-та*. – 2004. – Вып. 2. – с. 223–226.
7. **Юхименко Б. И.** Сравнительная характеристика алгоритмов метода ветвей и границ для решения задач целочисленного линейного программирования / Б. И. Юхименко, Ю. Ю. Козина // *Тр. Одес. политехн. ун-та*. – 2005. – Вып. 2. – с. 199–204.
8. **Karste V.** Kombinatorische Optimierung und algorithmische Principien // *Okonomische Prognose, Entscheidungs und Gleichgewichtsmodelle*. Weinheim : VCH Verlagsgesellschaft, 1986. – P. 286–341.
9. **Дюбин Г. Н.** Жадные алгоритмы для задачи о ранце: поведение в среднем / Г. Н. Дюбин, А. А. Корбут // *Сибирский журнал индустриальной математики*. Том II, №2(4). – 1999. – с. 68–93.
10. **Dorigo M.** Optimization, Learning and Natural Algorithms // PhD Thesis. Dipartimento di Elettronica, Politecnico Di Milano. Italy. – 1992. – 140 p.
11. **Штобва С. Д.** Муравьиные алгоритмы: Теория и применение // *Программирование*. – 2005, №4. – с. 1–16.
12. **Сигал И. Х.** Введение в прикладное дискретное программирование / И. Х. Сигал, А. П. Иванова. – М. : Физматлит, 2007. – с. 304.

*Юхименко Б. І., Волкова Н. П.*

НАБЛИЖЕНІ АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО БАГАТОВИМІРНІЙ РАНЕЦЬ

*Резюме*

Робота присвячена створенню комбінаторних алгоритмів розв'язання багатовимірної задачі про ранці. Показана актуальність проблеми. Дан невеликий історичний аналіз досліджень і публікацій комбінаторних алгоритмів дискретної оптимізації. Звернуто

увагу на складність обчислень при вирішенні такого роду завдань. Припущено використовувати наближені алгоритми. В роботі наведені три способи отримання наближених рішень, розроблених на ідеях жадібного алгоритму, генетичного алгоритму мурашиної колонії, а також деякого комбінованого підходу. Сутність алгоритмів полягає в тому, що конкретизація компонент вектора рішень слідує сформованій пріоритетній черзі. Відповідно до неї присвоюється значення «1» поки це допустимо. Отримана послідовність залежить від використаної ідеї. Значення цільової функції (рекорд) отриманого рішення є основою відсіювання варіантів при його поліпшенні. Саме поліпшення здійснюється через подвійний підхід комбінаторних алгоритмів. Наведено числовий приклад.

*Ключові слова:* комбінаторні методи, наближене рішення, багатовимірні задача про раці, жадібний алгоритм, мурашина колонія, рекорд, відсіювання.

*Yukhymenko B. I., Volkova N. P.*

APPROXIMATE ALGORITHMS FOR SOLVING THE MULTIDIMENSIONAL KNAPSACK PROBLEM

*Summary*

This paper is devoted to creating combinatorial algorithms for solving the multidimensional knapsack problem. The urgency of the problem is shown. A small historical analysis of researches and publications of the combinatorial algorithms for discrete optimization is given. Attention is drawn to the computational complexity in solving such kind of problems. It is expected to use approximation algorithms. The paper gives three ways of obtaining approximate solutions developed on the ideas of a greedy algorithm, the genetic algorithm of ant colony, and also some combined approach. The essence of algorithms is that the specification of the solution vector components follows the formed queue priority. It is assigned the value "1" as long as this is allowed. The obtained sequence depends from the used idea. The value of the objective function (record) of the obtained solution is the basis for screening out options as it improves. The improvement is realized through the dual approach of combinatorial algorithms. A numerical example is given.

*Key words:* combinatorial methods, approximate solution, multidimensional knapsack problem, greedy algorithm, ant colony, record, screening out.

## REFERENCES

1. Land, A. H. & Doig, A. G. (1960). An automatic method of solving discrete programming problems, *Econometrica*, vol. 28, №3, pp. 497–520.
2. Little, J. D. C., Murty & K. G., Karel, C. (1963). An algorithm for the traveling salesman problem, *Operat. Res.*, vol. 11, №6, pp. 972–989.
3. Melamed, I. I., Sergeev, S. I. & Sigal, I. H. (1989). Zadacha kommivoyazhera. Tochnyye algoritmy, *Avtomatika i telemehanika*, no. 10, pp. 3–29.
4. Melamed, I. I., Sergeev, S. I. & Sigal, I. H. (1989). Zadacha kommivoyazhera. Priblizhennyye algoritmy, *Avtomatika i telemehanika*, no. 11, pp. 3–20.
5. Balas, E. (1965). An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables, *Operat. Res.*, vol. 13, no. 4, pp. 517–546.
6. Yuhimenko, B. I. (2004). Uskorennyiy algoritm metoda vetvey i granits dlya resheniya zadachi tselochislennogo lineynogo programmirovaniya, *Tr. Odes. politehn. un-ta*, issue 2, pp. 223–226.

7. Yuhimenko, B. I. & Kozinam, Yu. Yu. (2005). Sravnitel'naya harakteristika algoritmov metoda vetvey i granits dlya resheniya zadach tselochislennogo, lineynogo programmirovaniya, *Tr. Odes. politehn. un-ta*, issue 2, pp. 199–204.
8. Karte, B. (1986). Kombinatorische Optimierung und algorithmische Principien, *Ökonomische Prognose-, Entscheidungs- und Gleichgewichtsmodelle*, Weinheim : VCH Verlagsgesellschaft, pp. 286–341.
9. Dyubin, G. N. & Korbut, A. A. (1999). Zhadnyie algoritmyi dlya zadachi o rantse: povedenie v srednem, *Sibirskiy zhurnal industrialnoy matematiki*, vol. II, no. 2(4), pp. 68–93.
10. Dorigo, M. (1992). *Optimization, Learning and Natural Algorithms*, PhD Thesis. Dipartimento di Elettronica, Politecnico Di Milano, Italy, 140 p.
11. Shtobva, S. D. (2005). Muravinyie algoritmyi: Teoriya i primeneniye, *Programmirovaniye*, no. 4, pp. 1–16.
12. Sigal, I. H. & Ivanova, A. P. (2007). *Vvedeniye v prikladnoye diskretnoe programmirovaniye*, Fizmatlit, Moscow, 304 p.

UDC 517.927.4

**N. Partsvania**

A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University  
International Black Sea University, Tbilisi, Georgia

**ON SOME NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR  
NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH  
DELAY**

The results of this paper were reported at International Workshop “Nonlinear Analysis and Nonautonomous Ordinary Differential Equations” (Odessa, Ukraine, June 23-27, 2017).

In the paper, nonlocal boundary value problems are studied for higher order nonlinear ordinary differential equations with delay. More precisely, on a finite interval  $[a, b]$ , the differential equation  $u^{(n)}(t) = f(t, u(\tau_1(t)), \dots, u^{(n-1)}(\tau_n(t)))$  is considered with the boundary conditions  $u^{(i-1)}(a) = c_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ),  $\ell(u) = c_n$ , where  $n \geq 2$ ,  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  is a continuous function having continuous partial derivatives in the last  $n$  arguments,  $\tau_i : [a, b] \rightarrow [a, b]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) are continuous functions satisfying the inequalities  $\tau_i(t) \leq t$  for  $a \leq t \leq b$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $\ell : C^{n-1}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  is a linear bounded functional, and  $c_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) are real constants. Sufficient conditions are established for the unique solvability of that problem. An analogue of Fredholm’s first theorem is obtained. The conditions of the main theorems guarantee also the well-posedness of that problem. An example is constructed showing the optimality of the obtained conditions.

*MSC: 34B10, 34B15.*

*Key words: nonlocal boundary value problem, ordinary differential equation, nonlinear, delay, unique solvability.*

**INTRODUCTION.** On a finite interval  $[a, b]$ , we consider the differential equation

$$u^{(n)}(t) = f(t, u(\tau_1(t)), \dots, u^{(n-1)}(\tau_n(t))) \quad (1)$$

with the boundary conditions

$$u^{(i-1)}(a) = c_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad \ell(u) = c_n. \quad (2)$$

Here,  $n \geq 2$ ,  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  is a continuous function having continuous partial derivatives in the last  $n$  arguments,  $\tau_i : [a, b] \rightarrow [a, b]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) are continuous functions satisfying the inequalities

$$\tau_i(t) \leq t \quad \text{for } a \leq t \leq b \quad (i = 1, \dots, n),$$

$\ell : C^{n-1}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  is a linear bounded functional, and  $c_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) are real constants.

Important particular cases of (2) are the multi-point boundary conditions

$$u^{(i-1)}(a) = c_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad u^{(m)}(b) = \sum_{k=0}^m \alpha_k u^{(k)}(a_k) + c_n \quad (3)$$

and

$$u^{(i-1)}(a) = c_i \quad (i = 1, \dots, n - 1), \quad \sum_{k=0}^n \beta_k u^{(k-1)}(b_k) = c_n, \quad (4)$$

where

$$m \in \{0, \dots, n - 2\}, \quad a \leq a_k < b \quad (k = 0, \dots, m), \quad \sum_{k=0}^m \frac{(b - a)^{m-k}}{(m - k)!} [\alpha_k]_+ \leq 1, \quad (5)$$

and

$$a < b_k \leq b, \quad \beta_k \geq 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad \sum_{k=1}^n \beta_k > 0. \quad (6)$$

For the differential equation without delay

$$u^{(n)}(t) = f(t, u(t), \dots, u^{(n-1)}(t)), \quad (7)$$

boundary value problems of the above mentioned type are subjects of numerous investigations (see, i.e., [1]– [10], [12]– [16], and the references therein).

Problems of the type (1), (2) are investigated by I. Kiguradze and Z. Sokhadze [11] in the case, where

$$f(t, x_1, \dots, x_n) x_1 \geq 0 \quad \text{for } a \leq t \leq b, \quad x_k \operatorname{sgn} x_1 \geq r \quad (k = 1, \dots, n), \quad (8)$$

where  $r$  is a sufficiently large positive constant.

I. T. Kiguradze and T. I. Kiguradze [8] have proved a Fredholm type theorem for problem (7), (2), and based on that theorem they have established efficient conditions guaranteeing the unique solvability of that problem. In the present paper, analogous results are obtained for problem (1), (2). These results contain also the case where condition (8) is violated.

**MAIN RESULTS.** Before formulating the main results we introduce notations and definitions used in the paper.

$$[x]_+ = \frac{|x| + x}{2}, \quad [x]_- = \frac{|x| - x}{2}.$$

$C([a, b])$  is the Banach space of continuous functions  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  with the norm

$$\|u\|_{C([a, b])} = \max \{|u(t)| : a \leq t \leq b\}.$$

$C^{n-1}([a, b])$  is the Banach space of  $(n - 1)$ -times continuously differentiable functions  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  with the norm

$$\|u\|_{C^{n-1}([a, b])} = \sum_{i=1}^n \|u^{(i-1)}\|_{C([a, b])}.$$

**Definition 1.** We say that a vector function  $(h_{11}, \dots, h_{1n}; h_{21}, \dots, h_{2n}) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  belongs to the set  $\mathcal{U}_\ell(\tau_1, \dots, \tau_n)$  if for any measurable functions  $h_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) satisfying almost everywhere on  $[a, b]$  the inequalities

$$h_{1i}(t) \leq h_i(t) \leq h_{2i}(t) \quad (i = 1, \dots, n),$$

the linear boundary value problem

$$v^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t)v^{(i-1)}(\tau_i(t)),$$

$$v^{(i-1)}(a) = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad \ell(v) = 0$$

has only a trivial solution.

**Definition 2.** A linear bounded functional  $\ell : C^{n-1}([a,b]) \rightarrow \mathbb{R}$  is said to be **positive** if for any function  $u \in C^{n-1}([a,b])$ , satisfying the conditions

$$u^{(i-1)}(t) > 0 \quad \text{for } a < t \leq b \quad (i = 1, \dots, n),$$

the inequality

$$\ell(u) > 0$$

holds.

**Theorem 1.** Let on the set  $[a,b] \times \mathbb{R}^n$  the inequalities

$$h_{1i}(t) \leq \frac{\partial f(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \leq h_{2i}(t) \quad (i = 1, \dots, n)$$

hold, where

$$(h_{11}, \dots, h_{1n}; h_{21}, \dots, h_{2n}) \in \mathcal{U}_\ell(\tau_1, \dots, \tau_n).$$

Then problem (1), (2) has one and only one solution.

This theorem is an analogue of Fredholm's first theorem for problem (1), (2).

Along with (1), (2) we consider the perturbed problem

$$v^{(n)}(t) = f(t, v(\tau_1(t)), \dots, v^{(n-1)}(\tau_n(t))) + q(t), \quad (9)$$

$$v^{(i-1)}(a) = \tilde{c}_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad \ell(v) = \tilde{c}_n. \quad (10)$$

The following theorem is valid.

**Theorem 2.** Let the conditions of Theorem 1 be fulfilled. Then there exists a positive constant  $r$  such that for any  $q \in C([a,b])$  and  $\tilde{c}_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) problem (9), (10) has one and only one solution  $v$  admitting the estimate

$$\|v - u\|_{C^{n-1}([a,b])} \leq r \left( \sum_{i=1}^n |\tilde{c}_i - c_i| + \|q\|_{C([a,b])} \right),$$

where  $u$  is a solution of problem (1), (2).

Consequently, the conditions of Theorem 1 guarantee not only the unique solvability but also the well-posedness of problem (1), (2).

**Theorem 3.** *Let on the set  $[a,b] \times \mathbb{R}^n$  the inequalities*

$$-h_i(t) \leq \frac{\partial f(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \leq h_0 \quad (i = 1, \dots, n) \tag{11}$$

*hold, where  $h_0$  is a positive constant, and  $h_i : [a,b] \rightarrow [0, +\infty)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) are continuous functions such that*

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-i)!} \int_a^b (\tau_i(t) - a)^{n-i} h_i(t) dt < 1. \tag{12}$$

*If, moreover,  $\ell$  is a positive functional, then problem (1), (2) has one and only one solution.*

For the linear equation

$$u^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n p_i(t) u^{(i-1)}(\tau_i(t)) + q(t), \tag{13}$$

where  $p_i \in C([a,b])$  ( $i = 1, \dots, n$ ) and  $q \in C([a,b])$ , Theorem 3 has the following form.

**Corollary 1.** *If*

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-i)!} \int_a^b (\tau_i(t) - a)^{n-i} [p_i(t)]_- dt < 1 \tag{14}$$

*and the functional  $\ell$  is positive, then problem (13), (2) has one and only one solution.*

It is easy to verify that the following lemma is true.

**Lemma.** *Let either*

$$\ell(u) = u^{(m)}(b) - \sum_{k=0}^m \alpha_k u^{(k)}(a_k)$$

*and conditions (5) hold, or*

$$\ell(u) = \sum_{k=0}^n \beta_k u^{(k-1)}(b_k)$$

*and conditions (6) hold. Then the functional  $\ell$  is positive.*

By virtue of the above formulated lemma, Theorem 3 and Corollary 1 result in the following propositions.

**Corollary 2.** *Let on the set  $[a,b] \times \mathbb{R}^n$  inequalities (11) be satisfied, where  $h_0$  is a positive constant, and  $h_i : [a,b] \rightarrow [0, +\infty)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) are continuous functions satisfying inequality (12). If, moreover, conditions (5) (conditions (6)) are fulfilled, then problem (1), (3) (problem (1), (4)) has one and only one solution.*

**Corollary 3.** *If along with (14) conditions (5) (conditions (6)) are fulfilled, then problem (13), (3) (problem (13), (4)) has one and only one solution.*



**Example.** Consider the problem

$$u^{(n)}(t) = -p(t)u^{(n-1)}(a) + q(t), \quad (15)$$

$$u^{(i-1)}(a) = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad u^{(n-1)}(b) = 0, \quad (16)$$

where  $p, q \in C([a, b])$ , and

$$p(t) \geq 0 \quad \text{for } a \leq t \leq b.$$

This problem can be obtained from problem (13), (2) in the case, where

$$p_i(t) \equiv 0 \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad p_n(t) \equiv -p(t), \quad \tau_n(t) \equiv a, \quad \ell(u) \equiv u^{(n-1)}(b).$$

If

$$\int_a^b p(t) dt < 1,$$

then according to Corollary 1, problem (15), (16) has a unique solution. Assume now that

$$\int_a^b p(t) dt = 1, \quad (17)$$

$$\int_a^b q(t) dt \neq 0, \quad (18)$$

and problem (15), (16) has a solution  $u$ . If we integrate both sides of equality (15) from  $a$  to  $b$ , then in view of (16) and (17) we find

$$-u^{(n-1)}(a) = -u^{(n-1)}(a) + \int_a^b q(t) dt,$$

which contradicts inequality (18). Consequently, if conditions (17) and (18) hold, then problem (15), (16) has no solution. On the other hand, in this case for problem (15), (16) all the conditions of Corollary 1 are satisfied except the strict inequality (14), instead of which we have

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-i)!} \int_a^b (\tau_i(t) - a)^{n-i} [p_i(t)]_- dt = 1.$$

The above constructed example shows that the strict inequality (12) in Theorem 3 (the strict inequality (14) in Corollary 1) cannot be replaced by non-strict one.

*Партцванія Н.*

ПРО ДЕЯКУ НЕЛОКАЛЬНУ КРАЙОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

*Резюме*

В статті вивчається нелокальна крайова задача для нелінійних диференціальних рівнянь вищого порядку із запізненням. А саме, на скінченному інтервалі  $[a, b]$  розглядається диференціальне рівняння  $u^{(n)}(t) = f(t, u(\tau_1(t)), \dots, u^{(n-1)}(\tau_n(t)))$  з крайовими умовами

$u^{(i-1)}(a) = c_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ),  $\ell(u) = c_n$ , де  $n \geq 2$ ,  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — неперервна функція, яка має неперервні частинні похідні за останніми  $n$  аргументами,  $\tau_i : [a, b] \rightarrow [a, b]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) є неперервними функціями, що задовольняють нерівностям  $\tau_i(t) \leq t$  для  $a \leq t \leq b$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $\ell : C^{n-1}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  є обмеженим лінійним функціоналом, а  $c_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — дійсні константи. Отримані достатні умови єдиності розв'язку такої задачі та аналог першої теореми Фредгольма. Умови основної теореми гарантують також коректність задачі. Сконструйований приклад, який демонструє оптимальність отриманих умов.

*Ключові слова:* нелокальна крайова задача, звичайне диференціальне рівняння, нелінійний, запізнення, єдиний розв'язок.

#### Партицванія Н.

О НЕКОТОРОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

#### Резюме

В статье изучается нелокальная краевая задача для нелинейных дифференциальных уравнений высшего порядка с запаздыванием. А именно, на конечном интервале  $[a, b]$  рассматривается дифференциальное уравнение  $u^{(n)}(t) = f(t, u(\tau_1(t)), \dots, u^{(n-1)}(\tau_n(t)))$  с краевыми условиями  $u^{(i-1)}(a) = c_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ),  $\ell(u) = c_n$ , где  $n \geq 2$ ,  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция, которая имеет непрерывные частные производные по последним  $n$  аргументам,  $\tau_i : [a, b] \rightarrow [a, b]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) являются непрерывными функциями, удовлетворяющими неравенствам  $\tau_i(t) \leq t$  для  $a \leq t \leq b$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $\ell : C^{n-1}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  — ограниченный линейный функционал, а  $c_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — вещественные константы. Получены достаточные условия единственности решения такой задачи и аналог первой теоремы Фредгольма. Условия основной теоремы гарантируют также корректность задачи. Сконструирован пример, демонстрирующий оптимальность полученных условий.

*Ключевые слова:* нелокальная краевая задача, обыкновенное дифференциальное уравнение, нелінійний, запаздывание, единственное решение.

#### REFERENCES

1. Agarwal, R. P., Kiguradze, I. (2004). On multi-point boundary value problems for linear ordinary differential equations with singularities. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 297, №1, P. 131–151.
2. Agarwal, R. P., O'Regan, D. (2003). *Singular differential and integral equations with applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
3. Kiguradze, I. T. (1975). *Some singular boundary value problems for ordinary differential equations* (in Russian). Tbilisi: Izdat. Tbilis. Univ.
4. Kiguradze, I. (2013). On nonlocal problems with nonlinear boundary conditions for singular ordinary differential equations. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.*, Vol. 59, P. 113–119.
5. Kiguradze, I., Kiguradze, T. (2011). Optimal conditions of solvability of nonlocal problems for second-order ordinary differential equations. *Nonlinear Anal.*, Vol. 74, №3, P. 757–767.
6. Kiguradze, I. T., Kiguradze, T. I. (2011). Conditions for the well-posedness of nonlocal problems for second-order linear differential equations. *Differ. Uravn.*, Vol. 47, №10, P. 1400–1411 (in Russian); translation in *Differ. Equ.*, Vol. 47, №10, P. 1414–1425.

7. Kiguradze, I., Kiguradze, T. (2011). Conditions for the well-posedness of nonlocal problems for higher order linear differential equations with singularities. *Georgian Math. J.*, Vol. 18, №4, P. 735–760.
8. Kiguradze, I. T., Kiguradze, T. I. (to appear). On one analogue of Fredholm's first theorem for higher order nonlinear differential equations. *Differ. Uravn.*, Vol. 53, №8 (in Russian).
9. Kiguradze, I., Lomtadze, A. (1984). On certain boundary value problems for second-order linear ordinary differential equations with singularities. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 101, №2, P. 325–347.
10. Kiguradze, I., Lomtadze, A. and Partsvania, N. (2012). Some multi-point boundary value problems for second order singular differential equations. *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.*, Vol. 56, P. 133–141.
11. Kiguradze, I., Sokhadze, Z. (2016). On nonlinear boundary value problems for higher order functional differential equations. *Georgian Math. J.*, Vol. 23, №4, P. 537–550.
12. Lomtadze, A. G. (1995). A nonlocal boundary value problem for second-order linear ordinary differential equations. *Differ. Uravn.*, Vol. 31, №3, P. 446–455 (in Russian); translation in *Differ. Equ.*, Vol. 31, №3, P. 411–420.
13. Lomtadze, A. (1995). On a nonlocal boundary value problem for second order linear ordinary differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 193, №3, P. 889–908.
14. Lomtadze, A., Malaguti, L. (2000). On a nonlocal boundary value problem for second order nonlinear singular differential equations. *Georgian Math. J.*, Vol. 7, №1, P. 133–154.
15. Rachůnková, I., Staněk, S. and Tvrdý, M. (2006). *Singularities and Laplacians in boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations*. Handbook of differential equations: ordinary differential equations. Vol. III, P. 607-722, Handb. Differ. Equ., Elsevier/North-Holland, Amsterdam.
16. Rachůnková, I., Staněk, S. and Tvrdý, M. (2008). *Solvability of nonlinear singular problems for ordinary differential equations*. Contemporary Mathematics and Its Applications, 5. Hindawi Publishing Corporation, New York.

## ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ (скорочений варіант)

Журнал «Дослідження в математиці і механіці» має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень, огляди з актуальних проблем за тематикою видання, а також повідомлення про ювілеї, знаменні дати та події.

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Електронну версію рукопису слід надсилати на e-mail журналу

rmm-journal@onu.edu.ua

або завантажувати через сайт журналу

www.rmm-journal.onu.edu.ua

Вона повинна складатися з

- 1) вихідного файлу  $\TeX$ -файлу,
- 2) PDF-файлу,
- 3) всіх допоміжних файлів (графіки, рисунки, ілюстрації тощо),
- 4) документу з анкетними даними авторів (прізвище, ім'я, по батькові, місце роботи, e-mail, адреса для листування та телефон).

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи  $\LaTeX$  відповідно до вимог та з використанням шаблону, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті. Також вимоги можна отримати в редакційній колегії журналу.

Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 25 сторінок.

Структура статті:

- УДК;
- список авторів;
- місце роботи авторів;
- назва статті;
- резюме мовою оригіналу обсягом не менш як 100 слів;
- Mathematical Subject Classification (2010);
- список ключових слів мовою оригіналу;
- основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України «Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України» від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано

розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується подана стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером у квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформлюється відповідно до державного стандарту України ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 «Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання» та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008);

— анотації двома іншими мовами, які повинні містити назву, список авторів, резюме обсягом не менш як 100 слів та список ключових слів;

— додатково, якщо стаття написана українською або російською мовами, після анотацій подається список літератури у транслітерації, оформлений у відповідності до міжнародного стандарту *Harvard* (зразок та правила оформлення можна знайти в шаблоні статті на сайті).

Усі надіслані статті проходять анонімне рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу «Дослідження в математиці і механіці».

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, зокрема і у співавторстві.

*Редакційна колегія журналу*  
*«Дослідження в математиці і механіці»*  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
вул. Дворянська, 2  
м. Одеса, 65082

*Українською, російською та англійською мовами*

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: серія КВ, № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

Затверджено до друку вченою радою  
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова  
Протокол № 2 від 31 жовтня 2017 р.

Відповідальний за випуск *О. П. Огуленко*  
Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*  
Технічний редактор *М. М. Бушин*

Тираж 100 прим. Зам. № ?????.

Адреса редколегії:  
65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2  
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Видавництво і друкарня «Астропринт»  
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21  
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855  
astro\_print@ukr.net

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Дослідження в математиці і механіці. – 2017. – Т. 22, вип. 2(30). – С. 1–126.