RM&M RM&M RM&M RM&M RM&M

ДОСЛІДЖЕННЯ в МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Том 22. Випуск 1(29).

Volume 22. Issue 1(29).

2017

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ДОСЛІДЖЕННЯ в МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

Науковий журнал

Виходить 2 рази на рік

Журнал заснований у січні 1997 р.

Том 22. Випуск 1(29). 2017

Одеса
«Астропринт»
2017

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації серія КВ № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

Журнал внесений до переліку наукових фахових видань наказом Міністерства освіти і науки України №693 від 10.05.2017

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Scientific journal

Published twice a year

Journal founded in January, 1997

Volume 22. Issue 1(29). 2017

Odesa
«Astroprint»
2017

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

The certificate of mass media state registration under the number № 21400—11200ПР issued on June 17, 2015.

The journal was included in the list of scientific specialized publications by the order №693 of Ministry of education and science of Ukraine issued on May 10, 2017.

ЗМІСТ

CONTENTS

Дослiдження в математицi i механiцi.– 2017.–Т.22, вип. 1(29).– С. 7–17

УДК 517.928

О. Д. Кичмаренко, А. А. Плотников
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ПОШАГОВОЕ УСРЕДНЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ПЕРЕМЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Теория дифференциальных включений начала свое развитие в начале тридцатых годов 20-го века с публикаций А. Маршо и С. Заремба. Однако бурное развитие данной теории началось с 60-х годов прошлого века благодаря работам Т. Важевского и А.Ф. Филиппова, которые обосновали ее тесную связь с теорией оптимального управленния и дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Математическое обоснование метода усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений берет начало с фундаментальной работы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. В 70-е годы В.А. Плотниковым была обоснована возможность применение различных схем метода усреднения для дифференциальных включений. В данной статье обосновывается возможность применения пошаговой схемы усреднения при исследовании линейных дифференциальных включений с переменной размерностью.
MSC: 34C29, 34A60.
Ключевые слова: дифференциальное включение, усреднение, линейная система .

Введение. Теория дифференциальных включений начала свое развитие в начале тридцатых годов 20-го века с публикаций А. Маршо и С. Заремба. Однако бурное развитие данной теории началось с 60-х годов прошлого века благодаря работам Т. Важевского и А.Ф. Филиппова, которые обосновали ее тесную связь с теорией оптимального управленния и дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Основные результаты теории дифференциальных включений изложены в работах [1–4] и ссылки в них.

Математическое обоснование метода усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений берет начало с фундаментальной работы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [5]. Большую роль в разработке метода усреднения для различных классов динамических систем сыграли работы Ю. А. Митропольского, В. И. Арнольда, В. М. Волосова, Н. Н. Моисеева, Н. А. Перестюка, В. А. Плотникова, А. М. Самойленко, А. Н. Филатова, О. П. Филатова, М. М. Хапаева, Т. Dontchev, M. Kisieliwicz, J. A. Sanders и др. (см. [2, 3, 6, 7] и ссылки в них).

В данной статье мы рассмотрим дифференциальные включения с переменной размерностью. Такие дифференциальные включения относятся к импульсным дифференциальным включениям [3]. Однако в отличие от ранее рассматриваемых импульсных дифференциальных включений, в данном случае в моменты импульсных воздействий меняется размерность системы, а сам импульс "связывает" разноразмерные решения в эти моменты времени. Также к таким системам сводятся, например, управляемые процессы возникновения и развития объектов, дифференцированных по моменту создания [8–10] и управляемые системы переменной размерности [11–13].

В этой статье обоснована возможность применения пошаговой схемы усреднения для исследования таких линеных систем.

Получена 11.04.2017

Основные результаты

1. Основные определения и обозначения. Пусть $\theta > 0$ произвольное действительное число, N - множество натуральных чисел, а $N_0 = N \bigcup 0$.

Обозначим через Σ_θ множество функций $n(\cdot) : R_+ \to N$, которые удовлетворяют следующим условиям

1) $n(\cdot)$ - кусочно-постоянные и кусочно-непрерывные справа;

2) если $n(t-0) - n(t) \neq 0$, то $n(\tau) - n(t) = 0$ для всех $\tau \in [t,t+\theta]$.

Очевидна справедливость следующей леммы:

Лемма 1. *Для любой функции $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ полупрямую R_+ можно разбить не более чем на счетное число множеств $I_i = [t_i,t_{i+1})$, $i = 0,1,...$ таких, что $R_+ = \bigcup_i I_i$ и $I_i \bigcap I_j = \emptyset$, если $i \neq j$, где $n(t) - n(t_i) = 0$ для всех $t \in I_i$.*

Обозначим через Φ_n множество функций $\varphi(t,x)$, соответствующих функции $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ таких, что

$$\varphi(t,x) = \begin{cases} x, & n(t-0) = n(t), \\ \psi(x), & n(t-0) \neq n(t), \end{cases}$$

где $\psi : R^{n(t-0)} \to R^{n(t)}$ - непрерывная функция.

Например, $\psi(x) = M(n(t),n(t-0))x$, где $M(n(t),n(t-0)) = (m_{ij})_{i=1,j=1}^{n(t),n(t-0)}$ матрица размерности $n(t) \times n(t-0)$ принадлежащая некоторому множеству $M = \{(m_{ij})_{i=1,j=1}^{k,l}\}_{k=1,l=1}^{\infty,\infty}$ матриц размерностей $(k \times l)$, $k = 1,2,...,l = 1,2,...$.

Возьмем произвольную функцию $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ и $\varphi(\cdot,\cdot) \in \Phi_n$.

Определение 1. *Функцию $x(\cdot,n)$ назовем функцией с переменной размерностью, если $x(t,n) \in R^{n(t)}$ для всех $t \geqslant 0$.*

Определение 2. *Будем говорить, что функция с переменной размерностью $x(\cdot,n)$ непрерывна на интервале $(t',t'') \subset R_+$, если она непрерывна в точках $t \in (t',t'')$, где $n(t) - n(t-0) = 0$ и непрерывна справа в точках $t \in (t',t'')$, где $n(t) - n(t-0) \neq 0$.*

Определение 3. *Будем говорить, что функция с переменной размерностью $x(\cdot,n)$ абсолютно непрерывна на сегменте $[t',t''] \subset R_+$, если она непрерывна на (t',t'') и абсолютно непрерывна на любом сегменте $[\tau',\tau''] \subset [t',t'']$, где $n(t) - n(t-0) = 0$ для всех $t \in [\tau',\tau'']$.*

Замечание 1. *Аналогично, можно ввести определение измеримости (дифференцируемости, интегрируемости, липшицевости и др.) функции $x(\cdot,n)$.*

Определение 4. *Многозначное отображение $F(\cdot,n)$ назовем отображением с переменной размерностью, если множество $F(t,n) \subset R^{n(t)}$ для всех $t \in R_+$.*

Определение 5. *Будем говорить, что многозначное отображение с переменной размерностью $F(\cdot,n)$ непрерывно на интервале $(t',t'') \subset R_+$, если оно непрерывно в точках $t \in (t',t'')$, где $n(t) - n(t-0) = 0$ и непрерывно справа в точках $t \in (t',t'')$, где $n(t) - n(t-0) \neq 0$.*

Рассмотрим следующую систему с переменной размерностью

$$\dot{x}(t,n,\varphi) \in A(t,n)x(t,n,\varphi) + F(t,n),\ \ x(0,n,\varphi) = x_0, \tag{1}$$

где $t \in R_+$ - время; $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$; $\varphi(\cdot,\cdot) \in \Phi_n$; $x(t,n,\varphi)$ - фазовый вектор; $A(t,n) : R_+ \to R^{n(t)\times n(t)}$ - матрично-значная функция с переменной размерностью; $F(t,n) : R_+ \to comp(R^{n(t)})$ - многозначное отображение с переменной размерностью.

Определение 6. *Абсолютно непрерывная функция с переменной размерностью $x(\cdot,n,\varphi)$ называется решением системы (1) на отрезке $[0,T]$, если*

1) $\dot{x}(t,n,\varphi) \in A(t,n)x(t,n,\varphi) + F(t,n)$ *для почти всех* $t \in (0,T)$,

2) $x(0,n,\varphi) = x_0$,

3) $x(t,n,\varphi) = \varphi(t,x(t-0,n,\varphi))$ *для всех* $t \in (0,T]$.

Замечание 2. *Если $n(t) \equiv n$, то система (1) будет обычным линейным дифференциальным включением.*

Предположение 1. Пусть функция $n(\cdot)$ ограничена постоянной $\overline{n} \geqslant 1$ для всех $t \geqslant 0$.

Предположение 2. Пусть справедливы следующие условия:

a) $A(\cdot,n)$ - измерима по t на R_+;

b) $F(\cdot,n)$ - измеримо по t на R_+;

c) существует такая постоянная $\kappa > 0$, что для всех $t \in R_+$

$$\|A(t,n)\|_{n(t)} \leqslant \kappa, \quad h_{n(t)}(F(t,n),\{0\}_{n(t)}) \leqslant \kappa$$

где $\{0\}_{n(t)}$ - нулевой вектор в пространстве $R^{n(t)}$, $\|x-y\|_{R^{n(t)}}$ - евклидова метрика в пространстве $R^{n(t)}$, $\|A(t,n)\|_{n(t)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n(t)}\sum_{j=1}^{n(t)} a_{ij}^2(t,n)}$, а $h_{n(t)}(A,B)$ - метрика Хаусдорфа в пространстве $comp(R^{n(t)})$.

Теорема 1. [11] *Если $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$, $\varphi(\cdot,\cdot) \in \Phi_n$, $A(\cdot,n)$ и $F(\cdot,n)$ удовлетворяют условиям предположений 1 и 2, то на любом отрезке $[0,T]$ у системы (1) существует решение $x(\cdot,n,\varphi)$.*

Обозначим через $X(t,n,\varphi)$ сечение множества решений системы (1) в момент времени $t \in [0,T]$.

Теорема 2. [11] *Если $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$, $\varphi(\cdot,\cdot) \in \Phi_n$, $A(\cdot,n)$ и $F(\cdot,n)$ удовлетворяют условиям предположений 1 и 2, то $X(t,n,M) \in conv(R^{n(t)})$ для всех $t \in [0,T]$.*

2. Метод пошагового усреднения. Пусть $G_i = \{(t,x) : t \in I_i, x \in M_i \subset R^{n(t)}\}$, где I_i соответствуют лемме, M_i - выпуклые множества, а $G = \bigcup_i G_i$.

Теперь рассмотрим следующую систему с малым параметром

$$\dot{x}(t,n,\varphi) \in \varepsilon[A(t,n)x(t,n,\varphi) + F(t,n)], \quad x(0,n,\varphi) = x_0, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $t \in R_+$ - время; $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$; $\varphi(\cdot,\cdot) \in \Phi_n$; $x(t,n,\varphi)$ - фазовый вектор; $A(t,n) : R_+ \to R^{n(t)\times n(t)}$ - матрично-значная функция с переменной размерностью; $F(t,n) : R_+ \to comp(R^{n(t)})$ - многозначное отображение с переменной размерностью.

Возьмем некоторое $\omega > 0$. Обозначим через Γ множество точек пространства R_+ таких, что $\gamma_i = i\omega$, $i = 0,1,...$, а через Υ множество точек τ_i таких, что $n(\tau_i - 0) - n(\tau_i + 0) \neq 0$.

Обозначим через Ξ множество точек $t_i, i = 0,1,...$ таких, что $\Xi = \Gamma \bigcup \Upsilon$.

Очевидно, что $t_{i+1} - t_i \leqslant \omega$ для всех $i = 0,1,...$.

Поставим в соответствие системе (2) следующую усредненную систему

$$\dot{y}(t,n,\varphi) \in \varepsilon[\bar{A}(t,n)y(t,n,\varphi) + \bar{F}(t,n)], \quad y(0,n,\varphi) = x_0, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} \overline{A}(t,n) &= \{A_i(n) : A_i(n) = \tfrac{1}{t_{i+1}-t_i}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s,n)ds,\ t \in [t_i,t_{i+1}),\ i = 0,1,...\},\\ \overline{F}(t,n) &= \{F_i(n) : F_i(n) = \tfrac{1}{t_{i+1}-t_i}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s,n)ds,\ t \in [t_i,t_{i+1}),\ i = 0,1,...\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть в области G выполняются следующие условия:*

1) *функция $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ ограничена константой $\overline{n} > 0$ для всех $t \geqslant 0$;*

2) *$A(\cdot,n)$ - измерима по t на R_+;*

3) *$F(\cdot,n)$ - измеримо по t на R_+;*

4) *существует такая постоянная $\kappa > 0$, что для всех $t \in R_+$*

$$\|A(t,n)\|_{n(t)} \leqslant \kappa, \quad h_{n(t)}(F(t,n),\{0\}_{n(t)}) \leqslant \kappa$$

5) *существует $\mu \in (0,1)$ такое, что для всех $\tau_i \in \Upsilon$ и любых $x,x_1,x_2 \in M_{i-1}$*

$$\|\varphi(\tau_i,x)\|_{R^{n(\tau_i)}} \leqslant \mu\|x\|_{R^{n(\tau_i-0)}},\ \|\varphi(\tau_i,x_1)-\varphi(\tau_i,x_2)\|_{R^{n(\tau_i)}} \leqslant \mu\|x_1-x_2\|_{R^{n(\tau_i-0)}};$$

6) *для всех $x_0 \in M_0' \subset M_0$ и $t > 0$ решения системы (2) с некоторой ρ-окрестностью принадлежат области G.*

Тогда для любого $L > 0$ существуют $\varepsilon_0(L) > 0$ и $C(L) > 0$ такие, что для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ и $t \in [0,L\varepsilon^{-1}]$ справедливы следующие утверждения:

1) *для любого решения $x(\cdot)$ системы (2) существует решение $y(\cdot)$ системы (3) такое, что*
$$\|x(t) - y(t)\|_{R^{n(t)}} < C\varepsilon; \tag{5}$$

2) *для любого решения $y(\cdot)$ системы (3) существует решение $x(\cdot)$ системы (2) такое, что выполняется неравенство (5).*

Доказательство. Очевидно, что из условий 2)-4) теоремы следует, что отображения $\bar{A}(\cdot,n)$ и $\overline{F}(\cdot,n)$ кусочно-постоянные и равномерно ограниченны константой $\kappa > 0$.

Теперь докажем выполнение первого утверждения. Обозначим через $\Xi_\varepsilon = [0,L\varepsilon^{-1}]\bigcap \Xi$ и $\Upsilon_\varepsilon = [0,L\varepsilon^{-1}]\bigcap \Upsilon$. Очевидно, что множества Ξ_ε и Υ_ε конечны и будем считать, что они содержат $k+1 \leqslant \left[\frac{L}{\varepsilon\omega}\right]+1$ элементов $t_0,t_1,...,t_k$ и $l \leqslant \left[\frac{L}{\varepsilon\theta}\right]$ элементов $\tau_1,...,\tau_l$, соответственно. Так же обозначим через $t_{k+1} = L\varepsilon^{-1}$.

Возьмем любое решение $x(\cdot,n,\varphi)$ системы (2). Тогда

$$x(t,n,\varphi) = x(t_i,n,\varphi) + \varepsilon \int\limits_{t_i}^{t} \left[A(s,n)x(s,n,\varphi) + f(s,n)\right] ds \tag{6}$$

для всех $t \in [t_i,t_{i+1})$, если $t_{i+1} \in \Upsilon$ и $t \in [t_i,t_{i+1}]$, если $t_{i+1} \notin \Upsilon$, $i = 0,1,...,k$, где $f(\cdot,n)$ - измеримая вектор-функция такая, что $f(t,n) \in F(t,n)$ почти для всех $t \in [0,L\varepsilon^{-1}]$. А так же $x(0,n,\varphi) = x_0$ и $x(t_i,n,\varphi) = \varphi(t_i,x(t_i-0,n,\varphi))$ для всех $t_i \in \Xi_\varepsilon \bigcap \Upsilon$.

Теперь рассмотрим функцию

$$y(t,n,\varphi) = y(t_i,n,\varphi) + \varepsilon \int\limits_{t_i}^{t} \left[\bar{A}(s,n)y(s,n,\varphi) + \bar{f}(s,n)\right] ds, \tag{7}$$

для всех $t \in [t_i,t_{i+1})$, если $t_{i+1} \in \Upsilon$ и $t \in [t_i,t_{i+1}]$, если $t_{i+1} /\in \Upsilon$, $i = 0,1,...,k$, где $\bar{f}(\cdot,n)$ - измеримая вектор-функция такая, что

$$\bar{f}(t,n) = \{f_i(n) \,:\, f_i(n) = \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,n)ds,\ t \in [t_i,t_{i+1}),\ i = 0,1,...\}$$

Очевидно, что $\bar{f}(t,n) \in \bar{F}(t,n)$ для всех $t \in [0,L\varepsilon^{-1}]$. А так же $y(0,n,\varphi) = x_0$ и $y(t_i,n,\varphi) = \varphi(t_i,y(t_i-0,n,\varphi))$ для всех $t_i \in \Xi_\varepsilon \bigcap \Upsilon$.

Возьмем произвольное $t \in (0,L\varepsilon^{-1})$. Тогда возможны следующие случаи:

1) $t \in (0,\tau_1)$, где $\tau_1 \in \Upsilon_\varepsilon$;
2) $t \in (\tau_j,\tau_{j+1})$, где $\tau_j,\tau_{j+1} \in \Upsilon_\varepsilon$, $j \in \{1,...,l-1\}$;
3) $t \in (\tau_l,t_{k+1})$, где $\tau_l \in \Upsilon_\varepsilon$;
4) $t = \tau_r$, где $\tau_r \in \Upsilon_\varepsilon, r \in \{1,...,l\}$.

Рассмотрим первый случай. Предположим, что $[0,\tau_1]\bigcap \Xi_\varepsilon = \{t_0,...,t_m\}$ и $t \in (t_{j-1},t_j)$, $j = 1,...,m$, где $t_0 = 0, t_m = \tau_1$. Из (10) и (7), имеем

$$\|x(t,n,\varphi)\| \leqslant M, \quad \|y(t,n,\varphi)\| \leqslant M, \tag{8}$$

где $M = (\|x_0\| + \kappa L)e^{\kappa L}$.

Теперь оценим разность

$$\|x(t,n,\varphi) - y(t,n,\varphi)\|_{R^{n(0)}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| x(t_{j-1},n,\varphi) + \varepsilon \int_{t_{j-1}}^{t} A(s,n)x(s,n,\varphi) + f(s,n)ds - \right.$$

$$\left. -y(t_{j-1},n,\varphi) - \varepsilon \int_{t_{j-1}}^{t} \bar{A}(s,n)y(s,n,\varphi) - \bar{f}(s,n)ds \right\|_{R^{n(0)}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| x(0,n,\varphi) + \varepsilon \sum_{i=1}^{j-1} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} A(s,n)x(s,n,\varphi) + f(s,n)ds \right) + \right.$$

$$+\varepsilon \int_{t_{j-1}}^{t} A(s,n)x(s,n,\varphi) + f(s,n)ds -$$

$$-y(0,n,\varphi) - \varepsilon \sum_{i=1}^{j-1} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{A}(s,n)y(s,n,\varphi) + \bar{f}(s,n)ds \right) -$$

$$\left. - \varepsilon \int_{t_{j-1}}^{t} \bar{A}(s,n)y(s,n,\varphi) + \bar{f}(s,n)ds \right\|_{R^{n(0)}} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{j-1} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(s,n)x(s,n,\varphi)ds - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{A}(s,n)x(s,n,\varphi)ds \right\|_{R^{n(0)}} +$$

$$+\varepsilon \left\| \int_{t_{j-1}}^{t} A(s,n)x(s,n,\varphi)ds - \int_{t_{j-1}}^{t} \bar{A}(s,n)x(s,n,\varphi)ds \right\|_{R^{n(0)}} +$$

$$+\varepsilon \left\| \int_{0}^{t} [\bar{A}(s,n)x(s,n,\varphi) - \bar{A}(s,n)y(s,n,\varphi)]ds \right\|_{R^{n(0)}} +$$

$$+\varepsilon \left\| \int_{t_{j-1}}^{t} [f(s,n) - \bar{f}(s,n)]ds \right\|_{R^{n(0)}}$$

Оценим каждое из слагаемых:

$$\left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(s,n)x(s,n,\varphi)ds - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{A}(s,n)x(s,n,\varphi)ds \right\|_{R^{n(0)}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(s,n)x(s,n,\varphi)ds - \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(s,n)x(t_{i-1},n,\varphi)ds \right\|_{R^{n(0)}} +$$

$$+ \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{A}(s,n)x(t_{i-1},n,\varphi)ds - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{A}(s,n)x(s,n,\varphi)ds \right\|_{R^{n(0)}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(s,n)[x(t_{i-1},n,\varphi) + \varepsilon \int_{t_{i-1}}^{s} A(\tau,n)x(\tau,n,\varphi) + f(\tau,n)d\tau]ds - \right.$$

$$\left. - \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(s,n)x(t_{i-1},n,\varphi)ds \right\|_{R^{n(0)}} + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{A}(s,n)x(t_{i-1},n,\varphi)ds - \right.$$

$$-\int_{t_{i-1}}^{t_i}\bar{A}(s,n)[x(t_{i-1},n,\varphi)+\varepsilon\int_{t_{i-1}}^{s}A(\tau,n)x(\tau,n,\varphi)+f(\tau,n)d\tau]ds\Bigg\|_{R^{n(0)}}\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i}A(s,n)\int_{t_{i-1}}^{s}A(\iota,n)x(\iota,n,\varphi)+f(\iota,n)d\iota]ds\right\|_{R^{n(0)}}+$$

$$+\varepsilon\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\bar{A}(s,n)\int_{t_{i-1}}^{s}A(\iota,n)x(\iota,n,\varphi)+f(\iota,n)d\iota]ds\right\|_{R^{n(0)}}\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon\int_{t_{i-1}}^{t_i}\kappa\int_{t_{i-1}}^{s}(\kappa M+\kappa)d\iota ds\leqslant\varepsilon\kappa(\kappa M+\kappa)\omega^2,$$

$$\left\|\int_{t_{j-1}}^{t}A(s,n)x(s,n,\varphi)ds-\int_{t_{j-1}}^{t}\bar{A}(s,n)x(s,n,\varphi)ds\right\|_{R^{n(0)}}\leqslant$$

$$\leq\int_{t_{j-1}}^{t}\left\|A(s,n)-\bar{A}(s,n)\right\|_{R^{n(0)}}\ \|x(s,n,\varphi)\|_{R^{n(0)}}\,ds\leqslant$$

$$\leqslant 2\kappa(\|x_0\|_{R^{n(0)}}+\varepsilon\kappa\tau_1)e^{\varepsilon k\tau_1}\int_{t_{j-1}}^{t}ds\leqslant 2\kappa M\omega,$$

$$\left\|\int_{0}^{t}[\bar{A}(s,n)x(s,n,\varphi)-\bar{A}(s,n)y(s,n,\varphi)]ds\right\|_{R^{n(0)}}\leqslant$$

$$\leqslant\kappa\int_{0}^{t}\|x(s,n,\varphi)-y(s,n,\varphi)\|_{R^{n(0)}}\,ds,$$

$$\left\|\int_{t_{j-1}}^{t}[f(s,n)-\bar{f}(s,n)]ds\right\|_{R^{n(0)}}\leq\int_{t_{j-1}}^{t}\left[\|f(s,n)\|_{R^{n(0)}}+\left\|\bar{f}(s,n)\right\|_{R^{n(0)}}\right]ds\leqslant 2\kappa\omega.$$

Тогда

$$\|x(t,n,\varphi)-y(t,n,\varphi)\|_{R^{n(0)}}\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon(j-1)\varepsilon\kappa(\kappa M+\kappa)\omega^2+\varepsilon 2\kappa\omega(M+1)+\varepsilon\kappa\int_{0}^{t}\|x(s,n,\varphi)-y(s,n,\varphi)\|_{R^{n(0)}}\,ds$$

Следовательно, для всех $t\in[0,\tau_1)$ имеем

$$\|x(t,n,\varphi)-y(t,n,\varphi)\|_{R^{n(0)}}\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\kappa\omega\,\|x_0\|_{R^{n(0)}}\,(L\kappa+2)e^{2\kappa L}+\varepsilon\omega\kappa(\kappa Le^{\kappa L}+1)(L\kappa+2)e^{\kappa L}\tag{9}$$

Если $t=\tau_1$, то из (8) и (9) имеем

$$\|x(\tau_1,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_1)}}\leqslant\mu(\|x_0\|_{R^{n(0)}}+\kappa L)e^{\kappa L},\ \|y(\tau_1,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_1)}}\leqslant\mu(\|x_0\|_{R^{n(0)}}+\kappa L)e^{\kappa L},$$

$$\|x(\tau_1,n,\varphi)-y(\tau_1,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_1)}}=$$

$$=\|\varphi(\tau_1,x(\tau_1-0,n,\varphi))-\varphi(\tau_1,y(\tau_1-0,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_1)}}\leqslant$$

$$\leqslant\mu\,\|x(\tau_1-0,n,\varphi)-y(\tau_1-0,n,\varphi)\|_{R^{n(0)}}\leqslant$$

$$\leqslant\mu\varepsilon\kappa\omega\{(\|x_0\|_{R^{n(0)}}+\kappa L)e^{\kappa L}+1\}(L\kappa+2)e^{\kappa L}.\tag{10}$$

Теперь, аналогично, рассмотрим случай, когда $t \in [\tau_1,\tau_2)$ и получим

$$\|x(t,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_1)}} \leqslant \mu \|x_0\|_{R^{n(0)}} e^{\kappa L} + (\mu+1)\kappa L\, e^{\kappa L},$$

$$\|y(t,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_1)}} \leqslant \mu \|x_0\|_{R^{n(0)}} e^{\kappa L} + (\mu+1)\kappa L\, e^{\kappa L},$$

$$\|x(t,n,\varphi) - y(t,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_1)}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon\mu\kappa\omega \|x_0\|_{R^{n(0)}} e^{2\kappa L}(L\kappa+2) + \varepsilon(\mu+1)\omega\kappa(\kappa L e^{\kappa L}+1)(L\kappa+2)e^{\kappa L}$$

Далее рассмотрим второй случай, когда $t \in (\tau_j,\tau_{j+1})$, где $\tau_j,\tau_{j+1} \in \Upsilon_\varepsilon$, $j \in \{1,...,l-1\}$. Тогда проведя аналогичные оценки и используя метод математической индукции получим:

$$\|x(t,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_j)}} \leqslant \mu^j \|x_0\|_{R^{n(0)}} e^{\kappa L} + (\mu^j+...+\mu+1)\kappa L\, e^{\kappa L},$$

$$\|y(t,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_j)}} \leqslant \mu^j \|x_0\|_{R^{n(0)}} e^{\kappa L} + (\mu^j+...+\mu+1)\kappa L\, e^{\kappa L}.$$

$$\|x(t,n,\varphi) - y(t,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_j)}} \leqslant$$

$$\leqslant j\varepsilon\mu^j\kappa\omega \|x_0\|_{R^{n(0)}} e^{2\kappa L}(L\kappa+2) + \varepsilon(\mu^j+...+\mu+1)\omega\kappa L(\kappa L e^{\kappa L}+1)(L\kappa+2)e^{\kappa L}$$

Следовательно, если $t \in (\tau_l,t_{k+1})$, то

$$\|x(t,n,\varphi) - y(t,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_l)}} \leqslant \varepsilon l\mu^l\kappa\omega \|x_0\|_{R^{n(0)}} e^{2\kappa L}(L\kappa+2)+$$

$$+\varepsilon(\mu^l+...+\mu+1)\omega\kappa L(\kappa L e^{\kappa L}+1)(L\kappa+2)e^{\kappa L}, \qquad (11)$$

то есть для всех $t \in [0,L\varepsilon^{-1})$,

$$\|x(t,n,\varphi) - y(t,n,\varphi)\|_{R^{n(t)}} \leqslant C\varepsilon,$$

где $C = \gamma(\mu)\kappa\omega \|x_0\|_{R^{n(0)}} e^{2\kappa L}(L\kappa+2)+(1-\mu)^{-1}\omega\kappa L(\kappa L e^{\kappa L}+1)(L\kappa+2)e^{\kappa L}$, $\gamma(\mu) = \max\{1,\mu,2\mu^2,...\}$. Тем самым первое утверждение теоремы доказано. Аналогично доказывается второе утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание 3. *Если в условии 3) теоремы $\mu \geqslant 1$, то утверждения теоремы остаются справедливыми, если множество Υ конечно.*

Заключение. Очевидно, что данная теорема обосновывает возможность применения пошагового усреднения для исследования линейных управляемых систем с переменной размерностью

$$\dot{x}(t,n,\varphi) = \varepsilon[A(t,n)x(t,n,\varphi) + B(t,n)u(t)], \quad x(0,n,\varphi) = x_0, \qquad (12)$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $t \in R_+$ - время; $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$; $\varphi(\cdot,\cdot) \in \Phi_n$; $x(t,n,\varphi)$ - фазовый вектор; $A(t,n) : R_+ \to R^{n(t)\times n(t)}, B(t,n) : R_+ \to R^{n(t)\times m}$ - матричнозначные функцим с переменной размерностью; $u(t) \in U \in conv(R^m)$ - вектор управления.

1. **Aubin J.-P.** Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory / J.-P. Aubin, A. Cellina. – Springer-Verlag, 1984.
2. **Плотников В.А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В.А. Плотников, А.В. Плотников, А.Н. Витюк. – Одесса: АстроПринт, 1999, 355 с.
3. **Perestyuk N.A.** Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities / N.A. Perestyuk, V.A. Plotnikov, A.M. Samoilenko, N.V. Skripnik. – de Gruyter Stud. Math. Vol. 40, Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH& Co, 2011, 309 p.
4. **Половинкин Е.С.** Многозначный анализ и дифференциальные включения / Е.С. Половинкин. – М.: Физматлит, 2014, 597 с.
5. **Крылов Н. М.** Введение в нелинейную механику / Н. М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. – Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
6. **Klymchuk S.** Overview of V.A. Plotnikov's research on averaging of differential inclusions / S. Klymchuk, A. Plotnikov, N. Skripnik. // Phys. D. – 2012. – V. 241, №22. – P. 1932–1947.
7. **Gama R.** Stability and optimality of solutions to differential inclusions via averaging method / R. Gama, G. Smirnov. // Set-Valued Var. Anal. – 2014. – V. 22, №2. – P. 349–374.
8. **Романенко А.В.** Оптимальное управление экономическими системами с возрастной структурой / А. В. Романенко, А. В. Федосеев. // Журнал вычислит. мат. и матем. физики. - 1993. - Т.33, №8. - С. 1155–1165.
9. **Федосеев А.В.** Исследование методами оптимального управления одной модели разработки группы месторождений полезного ископаемого с ограниченными запасами / А. В. Федосеев // Методы системного анализа и пробл. рационального использования ресурсов. М.:ВЦ АН СССР. - 1977. - С. 117–134.
10. **Хачатуров В.Р.** Имитационное моделирова-ние и задачи оптимального управления при долгосрочном планировании производства многолетних сельскохозяйственных культур / В. Р. Хачатуров, Р. Босолейль, А. В. Федосеев. – М.: ВЦ АН СССР, 1985.
11. **Кичмаренко О.Д.** Нелинейные дифференциальные включения с переменной размерностью и их свойства / О.Д. Кичмаренко, А.А. Плотников // Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех. – 2013. – Т. 18, вип. 2(18). – С. 29–34.
12. **Kichmarenko O.D.** The Averaging of Control Linear Differential Equations with Variable Dimension on Finite Interval / O. D. Kichmarenko, A. A. Plotnikov. // International Journal of Sensing, Computing and Control. – 2015. – V. 5, N 1. – P. 25–35.
13. **Плотников А.А.** Пошаговое усреднение дифференциальных включений переменной размерности на конечном интервале / А.А. Плотников // Математичнi Студiї – 2016. – Т. 46, № 1. – С. 81–88.

Кічмаренко О. Д., Плотніков А. А.
Покрокове усереднення лінійних диференціальних включень змінної розмірності

Резюме

Теорія диференціальних включень почала свій розвиток на початку тридцятих років 20-го століття з публікацій А. Маршо і С. Заремба. Однак бурхливий розвиток даної теорії почалося з 60-х років минулого століття завдяки роботам Т. Важевського і О.Ф. Філіппова, які обґрунтували її тісний зв'язок з теорією оптимального керування та диференціальними рівняннями з розривної правої частиною. Математичне обгрунтування методу усереднення для звичайних диференціальних рівнянь бере початок з фундаментальної роботи М. М. Крилова і М. М. Боголюбова. У 70-ті роки В.О. Плотніковим була обґрунтована можливість застосування різних схем методу усереднення для диференціальних включень. У даній статті обґрунтовується можливість застосування покрокової схеми усереднення при дослідженні лінійних диференціальних включень зі змінною розмірністю.
Ключові слова: диференціальне включення, усереднення, лінійна система .

Kichmarenko O. D., Plotnikov A. A.
Step average linear differential inclusions of variable dimension

Summary

The theory of differential inclusions began its development in the early thirties of the 20th century with the publication A. Marsh and S. Zaremba. However, the rapid development of this theory began with the 60s of the last century thanks to the work of T. Wazewski and A.F. Filippov, which justified its close relationship with the theory of optimal control and differential equations with discontinuous right-hand side. Mathematical justification of the averaging method for ordinary differential equations stems from the fundamental work of N.M. Krylov and N.N. Bogolyubov. In the 70s, V.A. Plotnikov was justified by the possibility of the application of various schemes of the averaging method for differential inclusions. In this article The possibility of the use of turn-averaging scheme in the study of linear differential inclusions with variable dimension.
Key words: differential inclusion, averaging, linear system.

References

1. Aubin, J.-P. and Cellina, A. (1984). *Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory.* – Springer-Verlag.
2. Plotnikov, V.A., Plotnikov, A.V. and Vityuk, A.N. (1999). *Differential equations with multivalued right-hand side. Asymptotic methods.* Odessa: AstroPrint, 355 p.
3. Perestyuk, N.A., Plotnikov, V.A., Samoilenko, A.M. and Skripnik, N.V. (2011). *Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities.* de Gruyter Stud. Math. Vol. 40, Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH& Co, 309 p.
4. Polovinkin, E.S. (2014) *Multivalued analysis and differential inclusions.* Moscow: Fizmatlit, 597 p.
5. Krylov, N.M. and Bogoliubov, N.N. (1947). *Introduction to nonlinear mechanics.* Princeton University Press, Princeton.

6. Klymchuk, S., Plotnikov, A. and Skripnik, N. (2012). Overview of V.A. Plotnikov's research on averaging of differential inclusions, *Phys. D.* Vol. 241, №22, pp. 1932–1947.
7. Gama, R. and Smirnov, G. (2014). Stability and optimality of solutions to differential inclusions via averaging method, *Set-Valued Var. Anal.* Vol. 22, №2, pp. 349–374.
8. Romanenko, A.V. and Fedoseev, A.V. (1993). Optimal control of economic systems with a growth structure, *Comput. Math. Math. Phys.* Vol. 33, № 8, pp. 1017–1026.
9. Fedoseev, A.V. (1977). Research methods of optimum control of one model of working out of group of deposits of a mineral with the limited stores, *Methods of the system analysis and problems of rational use of resources.* Moskva: Vychislitel'nyj Tsentr AN SSSR, pp. 117–134.
10. Khachaturov, V.R., Bosolejl, R.and Fedoseev, A.V. (1985). *Simulation modelling and optimum control problems at long-term planning of manufacture of long-term agricultural crops.* Vychislitel'nyj Tsentr AN SSSR, Moskva.
11. Kichmarenko, O.D. and Plotnikov, A.A. (2013). Nonlinear differential switching variable dimension and their properties, *Bulletin of the Odessa National University. Series Mathematics & Mechanics.* Vol. 18, № 2, P. 29–34.
12. Kichmarenko, O.D. and Plotnikov, A.A. (2015). The Averaging of Control Linear Differential Equations with Variable Dimension on Finite Interval, *International Journal of Sensing, Computing and Control*, Vol. 5, № 1, pp. 25–35.
13. Plotnikov, A.A. (2016). Step averaging differential inclusions with variable dimension on a finite interval, *Mat. Stud.*, Vol. 46, № 1, pp. 81–88.

Дослідження в математиці і механіці.– 2017.–Т.22, вип. 1(29).– С. 18–31

УДК 519.6

Ю. А. Музичук
Львівський національний університет імені Івана Франка

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОЇ ЗГОРТКОВОЇ СИСТЕМИ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

У тривимірних областях з ліпшицевою межею розглянуто крайову задачу Неймана для нескінченної згорткової системи еліптичних рівнянь, яка виникає в результаті застосування перетворення Лагера за часовою змінною до початково-крайових задач для еволюційних рівнянь. За допомогою q-згортки послідовностей побудовано інтегральне подання узагальненого розв'язку задачі і отримано еквівалентну систему граничних інтегральних рівнянь. Доведено існування і єдиність чисельного розв'язку, який шукають методом граничних елементів, а також досліджено його апріорну похибку. Наведено результати, обчислені при розв'язуванні модельних задач.
MSC: 35J25, 31B10, 65N38.
Ключові слова: метод граничних елементів, q-згортка, крайова умова Неймана, система елептичних рівнянь .

Вступ. Крайові задачі для нескінченних трикутних систем, які складаються з еліптичних рівнянь, виникають у різних підходах щодо врахування залежності від часової змінної в еволюційних задачах, зокрема, при застосуванні до таких задач інтегрального перетворення Лаґера за часом [1,2,5]. У праці [11] подано огляд робіт, у яких використовувалося таке перетворення при розв'язуванні початково-крайових задач для однорідних еволюційних рівнянь, насамперед хвильового, теплопровідності та телеграфного. Трикутна структура отриманих систем дає змогу побудувати інтегральне подання їхніх узагальнених розв'язків. Обґрунтуванню такого подання, а також дослідженню граничних інтегральних рівнянь (ГІР), які є еквівалентними вихідним крайовим задачам, присвячено праці [4,11,12].

Метою даної роботи є чисельне розв'язування задачі Неймана для досліджуваної системи. В першому розділі розглянуто формулювання крайової задачі, дано означення узагальненого розв'язку і отримано еквівалентну систему ГІР. Для цього використано інтегральне подання розв'язку у вигляді аналога потенціалу подвійного шару, з яким мають справу в еліптичних рівняннях. У другому розділі система ГІР перетворена до вигляду, який дає змогу ефективно застосувати до неї схему методу Бубнова-Гальоркіна і обґрунтувати збіжність наближеного розв'язку, а також розробити чисельну реалізацію відповідно до методу граничних елементів (МГЕ) і дослідити похибку апроксимації шуканого розв'язку. Третій розділ присвячений апробації розробленого методу на серії модельних задач. В заключній секції зроблено висновки стосовно запропонованого методу чисельного розв'язування задачі Неймана для нескінченних систем еліптичних рівнянь, які мають згорткову структуру.

Надійшла 12.04.2017

Основні результати

1. Узагальнений розв'язок крайової задачі. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – обмежена однозв'язна область з ліпшицевою межею Γ. Розглянемо в Ω нескінченну систему еліптичних рівнянь

$$\left\{\begin{array}{l} c_0u_0 - \Delta u_0 = 0, \\ c_1u_0 + c_0u_1 - \Delta u_1 = 0, \\ c_2u_0 + c_1u_1 + c_0u_2 - \Delta u_2 = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ c_ku_0 + c_{k-1}u_1 + ... + c_0u_k - \Delta u_k = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}\right. \tag{1}$$

де $u_0, u_1,\ ...,\ u_k,\ ...$ – невідомі функції, $c_0, c_1,\ ...,\ c_k,\ ...$ – задані сталі, $c_0 > 0$, $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{3} \partial^2/\partial x_i^2$ – оператор Лапласа. Будемо шукати розв'язок цієї системи, який задовольняє на поверхні Γ крайову умову

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}} u_k|_\Gamma = \tilde{g}_k,\ k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{2}$$

де $\tilde{g}_k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ – задані на Γ функції, $\partial_{\boldsymbol{\nu}}$ – оператор похідної за вектором нормалі $\boldsymbol{\nu}(x)$ у точках $x \in \Gamma$, яка є зовнішньою відносно Ω. Надалі задачу (1), (2) називатимемо задачею Неймана.

Нехай X – довільний лінійний простір над полем дійсних чисел, $\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел. Позначимо X^∞ лінійний простір відображень $\mathbf{u} : \mathbb{Z} \to X$, для яких $u(k) = 0$ при $k < 0$. Для довільного елемента $\mathbf{u} \in X^\infty$ маємо $u_k \equiv (\mathbf{u})_k := \mathbf{u}(k), k \in \mathbb{Z}$, і писатимемо $\mathbf{u} := (u_0, u_1,...,u_k,...)^\top$. Елементи простору X^∞ називатимемо послідовностями.

Нехай $\widetilde{\mathbf{E}}(x) = \big(\widetilde{E}_0(x), \widetilde{E}_1(x), ...\big)^\top$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, – фундаментальний розв'язок системи (1). Зазначимо, що

$$\widetilde{E}_0(x) = \frac{e^{-\sqrt{c_0}|x|}}{4\pi\,|x|},$$

а вигляд інших компонентів див., наприклад, [12]. Розглянемо в області Ω послідовність $\mathbf{W}\xi(x) = \big(W_0\xi(x), W_1\xi(x), ...\big)^\top$, компонентами якої є функції

$$W_j\xi(x) := \big(W_j\xi\big)(x) = \int\limits_\Gamma \xi(y)\,\partial_{\boldsymbol{\nu}(y)} E_j(x-y) d\Gamma_y, j \in \mathbb{N}_0,\ x \in \Omega, \tag{3}$$

де ξ – інтегровна з квадратом на Γ функція, а послідовність $\mathbf{E}(x) = \big(E_0(x), E_1(x), ...\big)^\top$ отримана з фундаментального розв'язку за формулою

$$E_i(x) := \widetilde{E}_i(x) - \widetilde{E}_{i-1}(x), i \in \mathbb{N},\ E_0(x) = \widetilde{E}_0(x),\ x \in \mathbb{R}^3. \tag{4}$$

Побудуємо послідовність $\mathbf{u}(x) = \big(u_0(x), u_1(x), ...\big)^\top$, де

$$u_k(x) = \sum_{j=0}^{k} W_j \lambda_{k-j}(x), k \in \mathbb{N}_0,\ x \in \Omega, \tag{5}$$

а $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, ...)^\top$ – довільна послідовність інтегровних з квадратом на Γ функцій. Відомо [12], що побудована послідовність є розв'язком системи (1) в області Ω. Щоб $\mathbf{u}$ була розв'язком задачі Неймана, достатньо знайти таку послідовність $\boldsymbol{\lambda}$, щоб $\mathbf{u}$ задовольняла і крайову умову (2).

Позначимо через $L^2(\Omega)$ і $H^1(\Omega)$ простори, відповідно, Лебега і Соболєва функцій, які набувають дійсних значень, а також $H^{1/2}(\Gamma)$ – простір слідів елементів $H^1(\Omega)$ та задамо в них звичайні скалярні добутки і породжені ними норми. У просторі $H^1(\Omega)$ розглядатимемо підпростір $H^1(\Omega,\Delta) := \left\{ v \in H^1(\Omega) \,|\, \Delta v \in L^2(\Omega)\right\}$ з нормою графіку

$$\|v\|_{H^1(\Omega,\Delta)} := \left(\|v\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\Delta v\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Як відомо [6], в $H^1(\Omega,\Delta)$ можна визначити лінійний неперервний оператор $\gamma_1 : H^1(\Omega,\Delta) \to H^{-1/2}(\Gamma)$, який на елементах $u \in H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega,\Delta)$ співпадає з $\partial_{\boldsymbol{\nu}}$, за що його також називають нормальною похідною. Тут $H^{-1/2}(\Gamma) := \left(H^{1/2}(\Gamma)\right)'$. Далі $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ означатиме відношення двоїстості для просторів $H^{-1/2}(\Gamma)$ і $H^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma_1\mathbf{u} := \left(\gamma_1 u_0, \gamma_1 u_1, ...\right)^\top$.

Нехай X – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і породженою ним нормою $||\cdot||_X$. Позначимо

$$l^2(X) := \left\{\mathbf{v} \in X^\infty \,|\quad \sum_{j=0}^{\infty} \|v_j\|^2_X < +\infty\right\}$$

гільбертів простір зі скалярним добутком $(\mathbf{v},\mathbf{w}) := \sum\limits_{j=0}^{\infty}(v_j, w_j)_X$, $\mathbf{v},\mathbf{w} \in l^2(X)$, і нормою $||\mathbf{v}||_{l^2(X)} := \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty}\|v_j\|^2_X\right)^{1/2}$, $\mathbf{v} \in l^2(X)$.

Означення 1. *Нехай* $\mathbf{g} \in l^2(H^{-1/2}(\Gamma))$. *Послідовність* $\mathbf{u} \in l^2(H^1(\Omega,\Delta))$ *називається узагальненим розв'язком задачі Неймана, якщо вона задовольняє систему* (1) *в сенсі розподілів і крайову умову*

$$\gamma_1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g} \text{ в } l^2(H^{-1/2}(\Gamma)). \tag{6}$$

Розглянемо послідовність $\mathbf{W} := \left(W_0,\ W_1,\ ...\ W_k,\ ...\right)^\top$, яка складається з операторів $W_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega,\Delta)$, $k \in \mathbb{N}_0$, що діють за правилом (3), а також послідовність $\mathbf{D} := \left(D_0,\ D_1,\ ...\ D_k,\ ...\right)^\top$ операторів $D_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ таких, що $D_k := \gamma_1 \circ W_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Тоді, підставляючи (5) у крайову умову (6), отримаємо нескінченну трикутну систему ГІР

$$\begin{cases} D_0\lambda_0 = g_0, \\ D_1\lambda_0 + D_0\lambda_1 = g_1, \\ D_2\lambda_0 + D_1\lambda_1 + D_0\lambda_2 = g_2, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_k\lambda_0 + D_{k-1}\lambda_1 + ... + D_0\lambda_k = g_k, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{7}$$

де кожну рівність трактуємо в сенсі простору $H^{-1/2}(\Gamma)$.

З метою компактного запису наведених вище виразів будемо використовувати поняття q-згортки послідовностей.

Означення 2 ([11])**.** *Нехай X, Y і Z – довільні множини і $q : X \times Y \to Z$ – деяке відображення. q-згорткою послідовностей $\boldsymbol{u} \in X^\infty$ і $\boldsymbol{v} \in Y^\infty$ називається послідовність $\boldsymbol{w} \in Z^\infty$, компоненти якої визначені за правилом*

$$w_i := \sum_{j=0}^{i} q\left(u_{i-j}, v_j\right), \ i \in \mathbb{N}_0; \tag{8}$$

q-згортку $\boldsymbol{u}$ і $\boldsymbol{v}$ коротко записують $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \underset{q}{\circ} \boldsymbol{v}$.

Нехай $X = \mathcal{L}(Y,Z)$ – простір лінійних операторів, які діють з простору Y у простір Z, і $q(A,v) := Av$, $A \in \mathcal{L}(Y,Z)$, $v \in Y$. Тоді для компонентів q-згортки довільних послідовностей $\mathbf{A} \in \big(\mathcal{L}(Y,Z)\big)^\infty$ і $\mathbf{v} \in Y^\infty$ матимемо формулу

$$w_j = \sum_{i=0}^{j} A_{j-i} v_i, \ \ j \in \mathbb{N}_0, \tag{9}$$

і писатимемо $\mathbf{w} := \mathbf{A} \underset{Z}{\circ} \mathbf{v}$.

З використанням поняття q-згортки послідовність, задану формулою (5), можна подати у вигляді

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{W} \underset{H^1(\Omega)}{\circ} \boldsymbol{\lambda}(x), \ \ x \in \Omega. \tag{10}$$

За аналогією з теорією еліптичних рівнянь, q-згортку (10) називатимемо *потенціалом подвійного шару* для системи (1).

Міркуючи аналогічно, систему ГІР (7) можна записати так

$$\mathbf{D} \underset{H^{-1/2}(\Gamma)}{\circ} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{g} \ \ \text{в } l^2(H^{-1/2}(\Gamma)). \tag{11}$$

Про системи виду (11), які можна подати за допомогою q-згортки, будемо говорити, що вони мають згорткову структуру і називатимемо їх *згортковими.* Легко бачити, що система еліптичних рівнянь (1) також є згортковою, оскільки в ній вирази лівої частини (що не відносяться до оператора Лапласа) є компонентами q-згортки послідовностей $\mathbf{c}$ і $\mathbf{u}$.

В праці [11] доведено еквівалентність задачі Неймана і системи ГІР (11).

Теорема 1 ([11])**.** *Для довільної послідовності $\mathbf{g} \in l^2(H^{-1/2}(\Gamma))$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі Неймана $\mathbf{u} \in l^2(H^1(\Omega,\Delta))$. Його можна подати за допомогою потенціалу подвійного шару* (10)*, густина якого $\boldsymbol{\lambda} \in l^2(H^{1/2}(\Gamma))$ є розв'язком системи ГІР* (11)*.*

Зауваження 1. *Запропонований підхід до розв'язування задачі Неймана відноситься до так званих непрямих [10] методів граничних інтегральних рівнянь. В [11] отримано також і інші форми подання розв'язку системи* (1)*, зокрема, аналог формули Гріна, яку використовують при розв'язуванні крайових задач для еліптичних рівнянь. Крім того, для побудови розв'язку задачі в* *областях з певним типом симетрії замість фундаментального розв'язку системи* (1) *можна використати відповідні функції Гріна. Такий підхід розглянуто в [3], він дає змогу ефективно розв'язувати задачі у випадках, коли гранична поверхня має необмежені фрагменти.*

2. Виведення основних співвідношень МГЕ. Трикутний вигляд системи ГІР (11) є наслідком згорткової структури системи (1) і використання q-згортки у визначенні потенціалу подвійного шару. Тепер скористаємося цією властивістю для побудови покрокового процесу чисельного розв'язування системи (11). Її можна подати у вигляді послідовності рівнянь

$$D_0\lambda_k = \tilde{g}_k \quad \text{в} \quad H^{-1/2}(\Gamma), \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{12}$$

де

$$\tilde{g}_0 := g_0; \quad \tilde{g}_k := g_k - \sum_{i=0}^{k-1} D_{k-i}\lambda_i, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Як бачимо, систему звели до послідовності рівнянь, що мають вигляд

$$D_0\eta = f \quad \text{в} \quad H^{-1/2}(\Gamma). \tag{14}$$

Вони володіють двома важливими для чисельного розв'язування властивостями. По-перше, при усіх значеннях індексу $k \in \mathbb{N}$ ліва частина інтегрального рівняння (12) задана тим самим граничним оператором D_0, а права залежить від даних з крайової умови, а також від розв'язків рівнянь з попередніми номерами $i = \overline{0, k-1}$. Врахування цих обставин під час реалізації методу дає змогу побудувати ефективні алгоритми для чисельного розв'язування як отриманої послідовності ГІР (12), так і обчислення розв'язків крайової задачі.

Другою властивістю отриманих систем є те, що граничні інтегральні оператори у лівій частині рівнянь відповідають еліптичному операторові $c_0 I - \Delta$, де I – тотожній оператор, і є добре дослідженими в теоретичному плані. У нашому випадку це дає змогу не лише обґрунтувати існування та єдиність розв'язків отриманої послідовності ГІР, а й отримати відповідні чисельні розв'язки за допомогою МГЕ, який тут розглядаємо як представник сім'ї методів Бубнова-Гальоркіна [9]. Велика кількість публікацій (див., наприклад, огляд літератури в [10, 13]) підтверджує ефективність та універсальність цього методу стосовно чисельного розв'язування крайових задач для різних видів еліптичних рівнянь.

Дослідження розв'язків ГІР (14) та апроксимації за схемою Бубнова-Гальоркіна спирається на еліптичність та обмеженість граничного оператора D_0:

$$\langle D_0\eta, \eta\rangle_\Gamma \geqslant c_1||\eta||^2_{H^{1/2}(\Gamma))}, \ \ ||D_0\eta||_{H^{-1/2}(\Gamma))} \leqslant c_2||\eta||_{H^{1/2}(\Gamma))} \ \ \forall \eta \in H^{1/2}(\Gamma)).$$

де $c_1 > 0$ і $c_2 > 0$ – деякі сталі.

Розглянемо в $H^{1/2}(\Gamma)$ послідовність скінченно-вимірних підпросторів $X^M \subset H^{1/2}(\Gamma)$, $M \in \mathbb{N}$, що є лінійними оболонками функцій $\{\phi_i\}_{i=1}^M$, які утворюють базис у X^M. Відповідно до методу Бубнова-Гальоркіна чисельний розв'язок рівняння (14) шукаємо у вигляді лінійної комбінації

$$\eta^M := \sum_{i=1}^{M} \eta_i \phi_i \in X^M \tag{15}$$

як розв'язок такого варіаційного рівняння

$$\langle D_0\eta^M, \eta\rangle_\Gamma = \langle f, \eta\rangle_\Gamma \quad \forall \eta \in X^M. \tag{16}$$

Якщо в ньому взяти у ролі тестових функцій елементи базису ϕ_j, то для знаходження вектора невідомих коефіцієнтів $\boldsymbol{\eta}^{[M]} := \{\eta_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{R}^M$ отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР)

$$D_0^{[M]}\boldsymbol{\eta}^{[M]} = \mathbf{f}^{[M]}, \tag{17}$$

де $D_0^{[M]}[j,i] := \langle D_0\phi_i, \phi_j\rangle_\Gamma$, $f_j^{[M]} := \langle f, \phi_j\rangle_\Gamma$, $i, j = \overline{1,M}$.

Відзначимо, що матриця отриманої системи є симетричною. Крім того, як наслідок $H^{1/2}(\Gamma)$-еліптичності оператора D_0, вона є додатньо-визначеною. Тому при довільній правій частині $\forall M \in \mathbb{N}$ система (17) матиме єдиний розв'язок і функція, знайдена за формулою (15), буде наближеним розв'язком рівняння (14). За лемою Cea (див., наприклад, [13, Теорема 8.1]) цей розв'язок задовольняє нерівність

$$||\eta^M||_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant c_1||f||_{H^{-1/2}(\Gamma))}, \tag{18}$$

і для його похибки справедлива оцінка

$$||\eta - \eta^M||_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant \frac{c_2}{c_1} \inf_{\xi \in X^M} ||\eta - \xi||_{H^{1/2}(\Gamma)}. \tag{19}$$

Звідси випливає збіжність в $H^{1/2}(\Gamma)$ наближеного розв'язку $\eta^M \to \eta \in H^{1/2}(\Gamma)$ при $M \to \infty$, де η – розв'язок відповідного ГІР у послідовності (12). Зазначимо, що достатньою умовою збіжності є вимога до скінченно-вимірного підпростору X^M бути апроксимуючим для простору $H^{1/2}(\Gamma)$.

Подану вище чисельну схему (17) конкретизуємо, застосовуючи МГЕ [9, 13]. Нехай $\Gamma_{\widetilde{M}} = \bigcup_{l=1}^{\widetilde{M}} \overline{\tau}_l$ – деяке наближення поверхні Γ, утворене з трикутних граничних елементів $\{\tau_l\}_{l=1}^{\widetilde{M}}$ з вершинами $\{x^{[l_1]}, x^{[l_2]}, x^{[l_3]}\}$. Вважаємо також, що усі вершини трикутників мають глобальну нумерацію $\{x_k\}_{k=1}^{M^*}$ і з кожною точкою x_k пов'язана множина $\mathcal{I}(k)$ номерів тих трикутників, в яких ця точка є вершиною. Величину $h := \max\limits_{l=\overline{1,\widetilde{M}}} \left(\int_{\tau_l} \mathrm{d}s\right)^{1/2}$ розглядаємо як параметр апроксимації.

Зазначимо, що з використанням даних про вершини кожен трикутник можна відобразити на "стандартний" трикутник

$$\tau := \{\xi := (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < \xi_1 < 1, \ 0 < \xi_2 < 1 - \xi_1\}.$$

Використовуючи функції $\phi_1^1(\xi) := 1 - \xi_1 - \xi_2$, $\phi_2^1(\xi) := \xi_1$ і $\phi_3^1(\xi) := \xi_2$, задані локально на трикутнику τ, утворимо множину $\left\{\varphi_i^1\right\}_{i=1}^M$, $M = M^*$, яка містить лінійно-незалежні на $\Gamma_{\widetilde{M}}$ функції. Для побудови кожної з функцій φ_i^1 будемо використовувати по одній відповідній функції ϕ_j^1 на кожному з трикутників, номери яких входять до множини $\mathcal{I}(i)$ так, щоб отримати "шапочки" Куранта. В результаті матимемо базис з кусково-лінійних і глобально-неперервних функцій, причому $\operatorname{supp}\varphi_i^1 = \bigcup_{l\in\mathcal{I}(i)} \overline{\tau}_l =: \tau_i^*$.

Розглянемо тепер послідовність ГІР (12). Компоненти λ_k^h ($k \in \mathbb{N}_0$) її чисельного розв'язку $\boldsymbol{\lambda}^h := \left(\lambda_0^h, \lambda_1^h, ...\right)^\top$ будемо шукати у вигляді лінійної комбінації неперервних кусково-лінійних функцій

$$\lambda_k^h = \sum_{l=1}^{M} \lambda_{k,l}^h \varphi_l^1 \ \in S_h^1(\Gamma),\, k \in \mathbb{N}_0, \tag{20}$$

де $\left\{\lambda_{k,l}^h\right\}_{l=1}^M$ – невідомі коефіцієнти, $S_h^1(\Gamma)$ – лінійна оболонка функцій $\left\{\varphi_i^1\right\}_{i=1}^M$. Тоді СЛАР (17) для знаходження вектора $\boldsymbol{\lambda}_k^h := \left\{\lambda_{k,l}^h\right\}_{l=1}^M \in \mathbb{R}^M$ набуде такого вигляду:

$$\mathbf{D}_0^h \boldsymbol{\lambda}_k^h = \mathbf{g}_k^h - \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{D}_{k-i}^h \boldsymbol{\lambda}_i^h, \ \ k \in \mathbb{N}_0. \tag{21}$$

Тут $\mathbf{D}_j^h$ – матриця, що відповідає граничному оператору $D_j,\ j = \overline{0,k}$, її елементи визначені так:

$$D_j^h[i,l] = \int_{\tau_i^*} \varphi_i^1(x) \partial_{\boldsymbol{\nu}(x)} \int_{\tau_l^*} \varphi_l^1(y) \partial_{\boldsymbol{\nu}(y)} E_j(x-y) \mathrm{d}s_y \mathrm{d}s_x, \ \ i,l = \overline{1,M}, \tag{22}$$

а елементи вектора правої частини мають вигляд

$$g_k^h[i] = \int_{\tau_i^*} \varphi_i^1(x) \tilde{g}_k(x) \mathrm{d}s_x. \tag{23}$$

Відзначимо, що усі умови леми Сеа виконуються стосовно отриманої системи (21) для усіх значень $k \in \mathbb{N}_0$, тому на кожному кроці розв'язок $\boldsymbol{\lambda}_k^h$ існує та є єдиним, а побудована з його використанням апроксимація відповідного компонента розв'язку ГІР задовольняє нерівності (18) та (19).

Після знаходження чергового вектора $\boldsymbol{\lambda}_k^h$ можна обчислювати (беручи до уваги формулу (20)) відповідний компонент чисельного розв'язку $\mathbf{u}^h := \left(u_0^h, u_1^h, ...\right)^\top$ задачі Неймана в довільній точці $x \in \Omega$

$$u_k^h(x) = \sum_{j=0}^{k} W_j \lambda_{k-j}^h(x),\, k \in \mathbb{N}_0,\, x \in \Omega. \tag{24}$$

Виведемо апріорну оцінку похибки чисельного розв'язку, ввівши попередньо, слідуючи [10], необхідні простори Соболєва для функцій, заданих на межі Γ. Нехай Γ можна подати як об'єднання $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\widetilde{N}} \overline{\Gamma}_i$ поверхонь Γ_i ($\Gamma_i \cap \Gamma_j = \oslash$ при $i \neq j$), кожна з яких має достатньо гладку параметризацію

$$\Gamma_i := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = \widetilde{\chi}_i(\xi),\ \xi \in \widetilde{\tau}_i \subset \mathbb{R}^2\right\}.$$

Тоді, використовуючи множину невід'ємних функцій $\phi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ таких, що

$$\sum_{i=1}^{\widetilde{N}} \phi_i(x) = 1 \ \ \forall x \in \Gamma, \quad \phi_i(x) = 0 \ \ \forall x \in \Gamma \setminus \Gamma_i,$$

довільну задану на межі Γ функцію v можна подати у вигляді

$$v(x)=\sum_{i=1}^{\widetilde{N}}\phi_i(x)v(x)=\sum_{i=1}^{\widetilde{N}}v_i(x)\ \ \forall x\in\Gamma, \tag{25}$$

де $v_i(x):=\phi_i(x)v(x)\ \ \forall x\in\Gamma_i$. Враховуючи параметризацію фрагментів Γ_i, будемо розглядати при $m\in\mathbb{N}_0$ простори Соболєва $H^m(\widetilde{\tau}_i)$, елементами яких є функції $\widetilde{v}_i(\xi):=v_i(\widetilde{\chi}_i(\xi))$ при $\xi\in\widetilde{\tau}_i$, з нормою і півнормою

$$||\widetilde{v}_i||_{H^m(\widetilde{\tau}_i)}:=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}||\partial^\alpha\widetilde{v}_i||^2_{L^2(\widetilde{\tau}_i)}\right)^{1/2};\ \ |\widetilde{v}_i|_{H^m(\widetilde{\tau}_i)}:=\left(\sum_{|\alpha|=m}|\partial^\alpha\widetilde{v}_i|^2_{L^2(\widetilde{\tau}_i)}\right)^{1/2}. \tag{26}$$

Тут ∂^α – позначення частинної похідної з мультиіндексом $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$. Тоді для функцій, які задані на усій поверхні Γ, використовуватимемо простори Соболєва $H^m(\Gamma)$ з нормою

$$||v||_{H^m(\Gamma)}:=\left(\sum_{i=1}^{\widetilde{N}}||\widetilde{v}_i||^2_{H^m(\widetilde{\tau}_i)}\right)^{1/2};\ \ |v|_{H^m(\Gamma)}:=\left(\sum_{i=1}^{\widetilde{N}}|\widetilde{v}_i|^2_{H^m(\widetilde{\tau}_i)}\right)^{1/2}. \tag{27}$$

Для нецілих значень індексів $s=m+\sigma,\ \ m\in\mathbb{N}_0,\ \sigma\in(0,1)$, використовуватимемо простори Соболєва-Слободецького $H^s(\widetilde{\tau}_i)$ і $H^s(\Gamma)$ з відповідними півнормами і нормами

$$|\widetilde{v}_i|_{H^s(\widetilde{\tau}_i)}:=\left(\sum_{|\alpha|=m}\int_{\widetilde{\tau}_i}\int_{\widetilde{\tau}_i}\frac{|\partial^\alpha\widetilde{v}_i(\xi)-\partial^\alpha\widetilde{v}_i(\eta)|^2}{|\xi-\eta|^{2+2\sigma}}ds_\xi ds_\eta\right)^{1/2},$$

$$||\widetilde{v}_i||_{H^s(\widetilde{\tau}_i)}:=\left(||\widetilde{v}_i||^2_{H^m(\widetilde{\tau}_i)}+|\widetilde{v}_i|^2_{H^s(\widetilde{\tau}_i)}\right)^{1/2}, \tag{28}$$

$$|v|_{H^s(\Gamma)}:=\left(\sum_{i=1}^{\widetilde{N}}|\widetilde{v}_i|^2_{H^s(\widetilde{\tau}_i)}\right)^{1/2},\ \ ||v||_{H^s(\Gamma)}:=\left(||v||^2_{H^m(\Gamma)}+|v|^2_{H^s(\Gamma)}\right)^{1/2}.$$

Лема 1. *Нехай $\boldsymbol{\lambda}\in\left(H^s(\Gamma)\right)^\infty$ – розв'язок системи* (12) *при деякому $s\in\left[\frac{1}{2},2\right]$, який задовольняє нерівність*

$$\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|_{H^s(\Gamma)}<+\infty. \tag{29}$$

Тоді для отриманих за допомогою МГЕ (з неперервними кусково-лінійними базисними функціями) компонентів чисельних розв'язків системи ГІР (12) *та задач Неймана виконуються асимптотичні оцінки*

$$\left\|\lambda_k-\lambda_k^h\right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\leqslant c_k h^{s-1/2}|\lambda_k|_{H^s(\Gamma)},\ k\in\mathbb{N}_0, \tag{30}$$

$$|u_k(x)-u_k^h(x)|\leqslant\tilde{c}_k h^{s-1/2}\sum_{j=0}^{k}|\lambda_j|_{H^s(\Gamma)},\ \ x\in\Omega,\ \ k\in\mathbb{N}_0, \tag{31}$$

де c_k і $\tilde{c}_k$ – величини, які не залежать від параметра h.

Доведення. Справедливість твердження щодо нерівності (30) випливає з теореми 12.8 в [13]. Для довільного $k \in \mathbb{N}_0$ апріорну похибку k-того компонента чисельного розв'язку в довільній точці $x \in \Omega$ можна визначити так:

$$|u_k(x) - u_k^h(x)| = |\sum_{i=0}^{k} W_{k-i}\big(\lambda_i - \lambda_i^h\big)(x)| = \Big|\sum_{i=0}^{k} \langle \partial_{\boldsymbol{\nu}(\cdot)} E_{k-i}(x-\cdot), \big(\lambda_i - \lambda_i^h\big)\ \rangle_\Gamma\Big|.$$

Справедливою є така оцінка

$$\begin{aligned}|u_k(x) - u_k^h(x)| &\leqslant \sum_{i=0}^{k} \big|\langle \partial_{\boldsymbol{\nu}(\cdot)} E_{k-i}(x-\cdot), \big(\lambda_i - \lambda_i^h\big)\ \rangle_\Gamma\big| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k} \big\|\partial_{\boldsymbol{\nu}(\cdot)} E_{k-i}(x-\cdot)\big\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \big\|\lambda_i - \lambda_i^h\big\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.\end{aligned}$$

Оскільки для довільної точки $x \in \Omega$ усі функції $E_j(x-y)$ є нескінченно-диференційовними і обмеженими разом з усіма частинними похідними на Γ, то $\big\|\partial_{\boldsymbol{\nu}(\cdot)} E_j(x-\cdot)\big\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant c_j^* = const$ у випадку достатньо гладкої граничної поверхні. Враховуючи (30), матимемо

$$|u_k(x) - u_k^h(x)| \leqslant h^{s-1/2} \sum_{i=0}^{k} c_{k-i}^* c_i |\lambda_i|_{H^s(\Gamma)} \leqslant \tilde{c}_k h^{s-1/2} \sum_{i=0}^{k} |\lambda_i|_{H^s(\Gamma)},$$

де $\tilde{c}_k = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant k} \{c_{k-i}^* c_i\}$ – величини, які не залежать від параметра h.

Розглянемо тепер обчислення елементів матриці (21), яка відповідає граничному оператору D_0. Зауважимо, що поява гіперсингулярності не дає змогу безпосередньо внести зовнішню нормальну похідну під внутрішній інтеграл. Для практичної реалізації методу ефективним виявився підхід, описаний у [7, гл.XI, §2], в основі якого лежить перехід до похідних у дотичних до Γ площинах, в яких, зокрема, лежать граничні елементи:

$$\begin{aligned}D_0^h[i,l] = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau_i^*} \int_{\tau_l^*} \frac{e^{-\kappa|x-y|}}{|x-y|} \big(\mathbf{rot}_\Gamma \varphi_i^1(x), \mathbf{rot}_\Gamma \varphi_l^1(y)\big)\, ds_y\, ds_x + \\ + \frac{\kappa^2}{4\pi} \int_{\tau_i^*} \varphi_i^1(x) \int_{\tau_l^*} \frac{e^{-\kappa|x-y|}}{|x-y|} \varphi_l^1(y) \big(\boldsymbol{\nu}(x), \boldsymbol{\nu}(y)\big)\, ds_y\, ds_x, \quad i,l = \overline{1,M}.\end{aligned} \tag{32}$$

Тут позначено

$$\mathbf{rot}_\Gamma \varphi^1(y) := \boldsymbol{\nu}(y) \times \nabla \tilde{\varphi}^1(y), \ \ y \in \Gamma. \tag{33}$$

Це вектори в дотичній площині, які ставлять у відповідність заданій на Γ функції φ^1, а $\tilde{\varphi}^1$– формальне продовження функції φ^1 вздовж нормалі $\boldsymbol{\nu}$ у приграничну область сталим значенням. Оскільки на кожному трикутнику нормаль, а також частинні похідні лінійних функцій $\tilde{\varphi}^1$ є сталими, то вираз $\big(\mathbf{rot}_\Gamma \varphi_i^1(x), \mathbf{rot}_\Gamma \varphi_l^1(y)\big)$ можна винести з-під інтегралів у першому доданку (32) і отримати інтеграли зі слабкою особливістю.

Внутрішній інтеграл у другому доданку в (32) також зі слабкою особливістю в ядрі. Його вигляд можна спростити, якщо винести з-під інтегралу вираз

$\big(\boldsymbol{\nu}(x), \boldsymbol{\nu}(y)\big)$, оскільки нормалі є незмінними на кожному граничному елементі. Тоді отримаємо інтеграли

$$\widetilde{J}_l(x) = \int_{\tau_l^*} \frac{e^{-\kappa|x-y|}\varphi_l^1(y)}{|x-y|} ds_y, \quad l = \overline{1,M}, \tag{34}$$

з яких адитивно виокремлюємо інтеграли по граничних елементах, що входять до носія функцій φ_l^1, які аналітично інтегруємо. До решти інтегралів, у тому числі тих, що відповідають граничному оператору D_k, $k \in \mathbb{N}$, застосовуємо квадратурні формули Гауса.

Зауваження 2. *Усі отримані вище результати щодо побудови узагальненого розв'язку задачі Неймана в області* Ω *та його наближення за допомогою методу граничних елементів можна перенести без суттєвих змін на випадок, коли задачу розглядають в нескінченній області* $\Omega^+ := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. *Зазначимо, що тоді за нормаль братимемо вектор* $\boldsymbol{\nu}^+ = -\boldsymbol{\nu}$. *Далі задачі в області* Ω *називатимемо внутрішніми, а в* Ω^+ *– зовнішніми.*

3. Результати обчислювального експерименту. Продемонструємо застосування запропонованого методу для знаходження чисельних розв'язків деяких модельних задач Неймана. Вважаємо, що в системі (1) $c_k = (k+1)\kappa$, де κ – деякий параметр, $k \in \mathbb{N}_0$, а в крайовій умові (2) компоненти $\tilde{g}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$ мають вигляд $\tilde{g}_k = \partial_{\boldsymbol{\nu}} v_k$ для внутрішніх задач і $\tilde{g}_k = -\partial_{\boldsymbol{\nu}} v_k$ – для зовнішніх, де

$$\begin{aligned} v_k(x) =& \frac{e^{-\kappa(|x-x^*|-1)}\big(L_k(\kappa(|x-x^*|) - L_{k-1}(\kappa(|x-x^*|)\big)}{|x-x^*|}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ v_0(x) =& \frac{e^{-\kappa(|x-x^*|-1)}}{|x-x^*|}, \ x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{35}$$

Тут L_k ($k \in \mathbb{N}_0$) – поліноми Лаґера [8], а точка x^* є параметром. Прикладами областей при моделюванні будуть куб $\Omega := (-1,1) \times (-1,1) \times (-1,1)$ і його зовнішність $\Omega^+ := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. Зазначимо, що з точністю до множника послідовність $\mathbf{v}$ співпадає з фундаментальним розв'язком системи (1), тому використовуватимемо її для побудови аналітичного розв'язку крайових задач, причому братимемо $x^* = (0,0,0)$ для зовнішньої задачі і $x^* = (2,0,0)$ – для внутрішньої.

Розглянемо спочатку модельні крайові задачі для першого рівняння системи (1).

Приклад 1. *Знайти чисельний розв'язок* u_0^h *зовнішньої і внутрішньої задач Неймана при* $\kappa = 2$.

У таблиці **??** подано результати обчислень розв'язку, отримані з використанням МГЕ для послідовності розбиттів поверхні куба. Вони демонструють збіжність чисельного розв'язку до аналітичного при збільшенні кількості граничних елементів, тобто при зменшенні значення параметра h.

Щоб з'ясувати залежність похибки чисельного розв'язку задачі від параметра h, який характеризує розбиття граничної поверхні на елементи, будемо розглядати величини $\delta^h := ||u_0^h - u_0||_{L^2(a,b)}$ і $\epsilon^h := \frac{\delta^h}{||u_0||_{L^2(a,b)}} \cdot 100\%$, де (a,b) – відрізок,

x_1	Кількість граничних елементів			Аналітичний
	588	1200	1728	розв'язок
1.2	4.97567×10^{-1}	5.16241×10^{-1}	5.23443×10^{-1}	5.58600×10^{-1}
1.5	2.19226×10^{-1}	2.26607×10^{-1}	2.29583×10^{-1}	2.45252×10^{-1}
2.0	6.07058×10^{-2}	6.25240×10^{-2}	6.32929×10^{-2}	6.76676×10^{-2}
3.0	5.50191×10^{-3}	5.64833×10^{-3}	5.71311×10^{-3}	6.10521×10^{-3}
4.0	5.59834×10^{-4}	5.73967×10^{-4}	5.80360×10^{-4}	6.19688×10^{-4}

Таблиця 1. Розв'язки $u_0^h(x)$ зовнішньої задачі Неймана (приклад 1), отримані за допомогою МГЕ на різних розбиттях.

на якому беруть точки спостереження $x = (x_1, 0, 0)$. Також будемо обчислювати величину передбачуваного порядку збіжності

$$eoc := \frac{\ln \delta^{h_j} - \ln \delta^{h_{j+1}}}{\ln h_j - \ln h_{j+1}}, \tag{36}$$

де h_j і h_{j+1} параметри двох послідовних розбиттів граничної поверхні на граничні елементи. Похибки розв'язків та значення величини *eoc* наведені в таблиці **??**. Зазначимо, що результати обчислень свідчать про однакові порядки похибок чисельних розв'язків зовнішніх і внутрішніх задач.

	Зовнішня задача			Внутрішня задача		
$\overline{M}$	δ^h	eoc	$\epsilon^h(\%)$	δ^h	eoc	$\epsilon^h(\%)$
300	0.03539		8.34	0.02959		8.28
588	0.02565	0.957	5.92	0.02076	1.053	7.41
768	0.02254	0.967	5.16	0.01788	1.117	4.81
972	0.02011	0.969	4.58	0.01560	1.156	4.16
1200	0.01815	0.985	4.11	0.01376	1.164	3.65
1728	0.01518	0.992	3.32	0.01095	1.201	2.88

Таблиця 2. Аналіз похибок чисельних розв'язків $u_0^h(x)$ внутрішньої та зовнішньої задач Неймана (приклад 1).

Тепер продемонструємо знаходження розробленим методом компонентів чисельного розв'язку задачі Неймана з іншими значеннями індексів.

Приклад 2. *Знайти N компонентів чисельного розв'язку u_i^h, $i = \overline{0,N}$, зовнішньої задачі Неймана при $\kappa = 2$.*

Отримані для $N = 20$ значення компонентів чисельного розв'язку задачі є добре узгодженими з аналітичним розв'язком і свідчать про швидке заникання функцій $u_i^h(x)$ з ростом значення індексу i. В таблиці **??** наведено компоненти чисельного розв'язку при $i = 10$ та $i = 20$, які отримані при розбитті поверхні куба на $\overline{M} = 1200$ граничних елементів. Також в таблиці подано поточкову відносну похибку компонентів чисельних розв'язків. Зазначимо, що для компонентів $u_i^h(x)$ при $i = \overline{1,20}$ такі похибки є співрозмірними з відповідною похибкою $u_0^h(x)$.

x_1	$u_{10}(x)$	$u_{10}^h(x)$	$\epsilon(\%)$
1.5	8.8570×10^{-2}	9.1204×10^{-2}	2.97
2.0	5.6502×10^{-2}	5.6438×10^{-2}	0.11
3.0	-1.9676×10^{-2}	-1.9356×10^{-2}	1.63
4.0	4.3413×10^{-3}	4.1735×10^{-3}	3.97
x_1	$u_{20}(x)$	$u_{20}^h(x)$	$\epsilon(\%)$
1.5	-7.6672×10^{-2}	-7.5437×10^{-2}	0.93
2.0	4.0784×10^{-2}	4.1496×10^{-2}	1.61
3.0	-1.0549×10^{-2}	-1.0756×10^{-2}	1.96
4.0	2.9939×10^{-3}	3.0127×10^{-3}	0.63

Таблиця 3. Порівняння аналітичного $u_i(x)$ і чисельного $u_i^h(x)$, $i = 10{,}20$, розв'язків зовнішньої задачі Неймана (приклад 2) при $\overline{M} = 1200$.

Висновки. Побудоване на основі q-згортки функційних послідовностей інтегральне подання узагальненого розв'язку крайової задачі Неймана для нескінченної згорткової системи еліптичних рівнянь (1) дає змогу звести таку задачу до послідовності ГІР, в якій кожне з рівнянь має один і той самий граничний оператор у лівій частині і рекурентні праві частини. Такий підхід дає змогу скористатися відомими перевагами [10] граничних інтегральних рівнянь при розв'язуванні крайових задач для еліптичних рівнянь. Отримані результати для модельних задач підтверджують ефективність розроблених чисельних методів для знаходження розв'язків як отриманих ГІР, так і вихідної крайової задачі Неймана.

1. **Галазюк В.А.** Метод інтегральних рівнянь у нестаціонарних задачах дифракції / В.А. Галазюк, Й.В. Людкевич, А.О. Музичук // Львів. ун-т. – 1984. – Деп. в УкрНІІНТІ, № 601Ук-85Деп. – 16 с.
2. **Літинський С.**Розв'язування мішаних задач для хвильового рівняння з використанням запізнюючих поверхневих потенціалів та перетворення Лаґера / С.Літинський, А.Музичук //Matematychni Studii. – 2015. – V.44, №2. – P. 185–203.
3. **Музичук Ю.** Про метод граничних інтегральних рівнянь розв'язування крайових задач для систем еліптичних рівнянь спеціального виду у частково-необмежених областях / Музичук Ю., Хапко Р. // Доповіді НАН України. – 2012. – 11. – С.20-27.
4. **Музичук Ю.** Метод граничних інтегральних рівнянь в крайових задачах Робіна, отриманих у результаті перетворення Лагера мішаних задач для еволюційних рівнянь / Ю. Музичук // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2013. – Т. 18, Вип. 4(20). – С. 38-49.
5. **Chapko R.** On the numerical solution of initial boundary value problems by the Laguerre transformation and boundary integral equations / Chapko R., Kress R. // Integral and Integrodifferential Equations: Theory, Methods and Applications. Series in Mathematical Analysis and Applications. – 2000. – 2. – P.55-69.
6. **Costabel M.** Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results // SIAM J.Math.Anal. – 1988. – 19. – 613-626.

7. **Dautray R.** Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Volume 4 Integral Equations and Numerical Methods / R. Dautray, J.L. Lions. – Berlin : Springer-Verlag, 1992. – 493 p.
8. **Funaro D.** Polynomial Approximations of Differential Equations // Springer-Verlag. – 1992.
9. **Hsiao G.C.** Boundary element methods: foundation and error analysis / G.C. Hsiao, W.L. Wendland // Encyclopaedia of Computational Mechanics. – Chichester : John Wiley and Sons Publ., 2004. – Vol. 1. – P. 339–373.
10. **Hsiao G.C.** Boundary Integral Equations. / Hsiao G.C., Wendland W.L. // Springer-Verlag, Berlin. – 2008. – 640 p.
11. **Muzychuk Yu. A.** On variational formulations of inner boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind / Muzychuk Yu. A., Chapko R. S. // Matematychni Studii. – 2012. – 38(1). – P.12-34.
12. **Muzychuk Yu.** On the boundary integral equation method for exterior boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind / Yu. Muzychuk // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2014. – № 2 (116). – P. 96-116.
13. **Steinbah O.** Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems. // Springer Science. – 2008. – 396 p.

Музычук Ю. А.
Численное решение задачи Неймана для бесконечной сверточной системы эллиптических уравнений методом граничных элементов

Резюме

В трехмерных областях с липшицевой границей рассмотрена краевая задача Неймана для бесконечной сверточной системы эллиптических уравнений, получаемой в результате применения преобразования Лагерра по времени к начально-краевым задачам для эволюционных уравнений. С помощью q-свертки последовательностей построено интегральное представление обобщенного решения задачи и получено эквивалентную систему граничных интегральных уравнений. Доказано существование и единственность численного решения, получаемого методом граничных элементов, а также исследовано его априорную погрешность. Приведены результаты, вычисленные при решении модельных задач.
Ключевые слова: метод граничных елементов, q-свертка, краевое условие Неймана, система эллиптических уравнений .

Muzychuk Yu. A.
Numerical solution of the Neumann boundary value problem for an infinite convolutional system of elliptic equation via the boundary elements method

Summary

We consider a Neumann boundary value problem for an infinite convolutional system of elliptic equations obtained as a result of the application of the Laguerre transform in the time domain to initial-boundary value problems for evolution equations in 3d Lipschitz domains. With help of q-convolution of sequences the integral representation of the generalized solution of the problem is built and an equivalent system of boundary integral equations is obtained. The existence and uniqueness of the numerical solution obtained by the boundary elements method are proven. A priory error estimates are investigated. Numerical results obtained for the modal problems are given.

Key words: boundary elements method, q-convolution, Neumann condition, system of elliptic equations.

References

1. Halaziuk, V. A., Liudkevych, Y. V. & Muzychuk, A. O. (1984). Metod intehralnykh rivnian u nestatsionarnykh zadachakh dyfraktsii, Lviv. un-t, Dep. v UkrNIINTI, № 601Uk-85Dep, 16 p.
2. Litynskyi, S. & Muzychuk, A. (2015). Rozviazuvannia mishanykh zadach dlia khvyl'ovoho rivniannia z vykorystanniam zapizniuiuchykh poverkhnevykh potentsialiv ta peretvorennia Lagera, *Matematychni Studii*, vol. 44, no. 2, pp. 185–203.
3. Muzychuk, Yu. & Khapko, R. (2012). Pro metod hranychnykh intehralnykh rivnian rozviazuvannia kraiovykh zadach dlia system eliptychnykh rivnian spetsialnoho vydu u chastkovo-neobmezhenykh oblastiakh, *Dopovidi NAN Ukrainy*, vol. 11, pp. 20–27.
4. Muzychuk, Yu. (2013) Metod hranychnykh intehralnykh rivnian v kraiovykh zadachakh Robina, otrymanykh u rezultati peretvorennia Lahera mishanykh zadach dlia evoliutsiinykh rivnian, *Visnyk Od. nats. un-tu. Mat. i mekh.*, vol. 18, issue 4(20), pp. 38–49.
5. Chapko, R. & Kress, R. (2000). On the numerical solution of initial boundary value problems by the Laguerre transformation and boundary integral equations, *Integral and Integrodifferential Equations: Theory, Methods and Applications. Series in Mathematical Analysis and Applications*, vol. 2, pp. 55–69.
6. Costabel, M. (1988). Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 19, pp. 613–626.
7. Dautray, R. & Lions, J. L. (1992). *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Volume 4 Integral Equations and Numerical Methods*, Berlin : Springer-Verlag, 493 p.
8. Funaro, D. (1992). *Polynomial Approximations of Differential Equations*, Springer-Verlag.
9. Hsiao, G. C. & Wendland, W. L. (2004). Boundary element methods: foundation and error analysis *Encyclopaedia of Computational Mechanics*, vol. 1, pp. 339–373.
10. Hsiao, G. C. & Wendland, W. L. (2008). *Boundary Integral Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 640 p.
11. Muzychuk, Yu. A. & Chapko, R. S. (2012). On variational formulations of inner boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind, *Matematychni Studii*, vol. 38(1), pp. 12–34.
12. Muzychuk, Yu. (2014). On the boundary integral equation method for exterior boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, № 2 (116), pp. 96–116.
13. Steinbah, O. (2008). *Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems*, Springer Science, 396 p.

Дослідження в математиці і механіці.– 2017.–Т.22, вип. 1(29).– С. 32–45

УДК 517.9

А. П. Огуленко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ЧАСТИЧНОЕ УСРЕДНЕНИЕ СИСТЕМ НА ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

В работе рассмотрена схема частичного усреднения системы уравнений на временной шкале с малым параметром в правой части. При весьма общих условиях доказана близость решения исходной системы и решения частично усредненной системы, причем частично усредненная система определяется на той же временной шкале. Этот результат, в частности, расширяет область применения численно–асимптотического метода решения задач оптимального управления на временных шкалах, развитого в предыдущих работах.
MSC: 34N05.
Ключевые слова: временная шкала, метод усреднения, функция зернистости .

Введение. Метод усреднения является важным инструментом в асимптотической теории динамических систем. Он зародился во второй половине XVIII века в работах А. Клеро, Ж. Лагранжа и С. Лапласа по небесной механике. В начале XX века Б. Ван-Дер-Поль применил метод усреднения к дифференциальным уравнениям, описывающим колебания в системах с одной степенью свободы. Однако вопросы строго обоснования метода усреднения оставались открытыми.

Систематическая теория метода усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений была создана в работах Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова [1] и далее развита Н. Н. Боголюбовым и его учениками [2].

В дальнейшем метод усреднения был обоснован для большого числа различных классов динамических систем: дифференциальных уравнений с разрывной и многозначной правой частью, уравнений с производной Хукухары, динамических систем с запаздыванием и проч. Обзор полученных результатов можно найти, например, в [3]. Основное направление этих исследований заключалось в расширении понятия динамической системы и, соответственно, понятия решения такой системы.

С другой стороны, во многом изменился подход к пониманию природы времени в динамических системах. Понятие временной шкалы, впервые введенное С. Хильгером в 1988 году, позволило построить общую теорию динамических систем, одним языком описывающую и непрерывные системы, и дискретные, и — что особенно важно — смешанные случаи. Подробное изложение теории динамических систем на временных шкалах можно найти в [5, 6].

Насколько нам известно, впервые задача усреднения применительно к системам на временных шкалах была рассмотрена A. Slavík в 2012 году [7]. В частности, изучались вопросы близости решения исходной системы на временной шкале и решения усредненного обобщенного дифференциального уравнения. Таким образом, операция усреднения не обеспечивала замкнутости множества решений.

В работе [9] была обоснована схема общего усреднения динамических систем на временных шкалах, в которой усредненная система имела ту же природу,

Получена 23.03.2017

что и исходная. На основании этих результатов был далее развит численно–асимптотический метод решения задач оптимального управления [10, 11].

Предварительные результаты. Приведем основные сведения о временных шкалах, которые необходимы для изложения полученных результатов.

Временная шкала — непустое замкнутое подмножество множества вещественных чисел, обозначается символом $\mathbb{T}$. Свойства временной шкалы определяются тремя функциями:

1) оператором перехода вперед $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$;
2) оператором перехода назад $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$, (при этом полагается $\inf \varnothing = \sup \mathbb{T}$ и $\sup \varnothing = \inf \mathbb{T}$);
3) функцией зернистости $\mu(t) = \sigma(t) - t$.

Поведение операторов перехода вперед и назад в конкретной точке временной шкалы определяет ее тип. Так, при $t < \sigma(t)$ $(\rho(t) < t)$ точка $t \in \mathbb{T}$ называется справа (слева) рассеянной, при $t = \sigma(t)$ $(\rho(t) = t)$ она называется справа (слева) плотной. Плотной называется точка t, для которой $\rho(t) = t = \sigma(t)$, изолированной называется одновременно слева и справа рассеянная точка, т. е. $\rho(t) < t < \sigma(t)$.

Определим множество $\mathbb{T}^\kappa$ следующим образом:

$$\mathbb{T}^\kappa = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus \{M\}, & \text{если } \exists \text{ справа рассеянная точка } M \in \mathbb{T} : M = \sup \mathbb{T}, \\ & \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее полагаем $[a, b] = \{t \in \mathbb{T} : a \leqslant t \leqslant b\}$.

Определение 1 (Bohner, Peterson [5]). *Пусть $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Число $f^\Delta(t)$ называется Δ-производной функции f в точке t, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U точки t (то есть, $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}, \delta < 0$), что*

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leqslant \varepsilon |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U.$$

Определение 2 (Bohner, Peterson [5]). *Если $f^\Delta(t)$ существует $\forall t \in \mathbb{T}^\kappa$, то $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется Δ-дифференцируемой на $\mathbb{T}^\kappa$. Функция $f^\Delta(t) : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}$ называется дельта-производной функции f на $\mathbb{T}^\kappa$.*

Если f дифференцируемая в t, то

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^\Delta(t).$$

Определение 3 (Bohner, Peterson [5]). *Функция $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется регулярной, если во всех плотных справа точках временной шкалы $\mathbb{T}$ она имеет конечные правосторонние пределы, а во всех слева плотных точках она имеет конечные левосторонние пределы.*

Определение 4 (Bohner, Peterson [5]). *Функция $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ называется rd-непрерывной, если в справа плотных точках она непрерывна, а в слева плотных точках имеет конечные левосторонние пределы. Множество таких функций обозначается $C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T})$, а множество дифференцируемых функций, производная которых rd-непрерывна, обозначается как $C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T})$.*

Определение 5 (Bohner, Peterson [5]). *Для любой регулярной функции $f(t)$ существует функция F, дифференцируемая в области D такая, что для всех $t \in D$ выполняется равенство $F^{\Delta}(t) = f(t)$. Эта функция называется пред-первообразной для $f(t)$ и определяется неоднозначно.*

Неопределенный интеграл имеет вид $\int f(t)\Delta t = F(t) + C$, где C — произвольная константа интегрирования, а $F(t)$ — пред-первообразная для $f(t)$. Далее, если для всех $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ выполняется $F^{\Delta}(t) = f(t)$, где $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ — rd-непрерывная функция, то $F(t)$ называется первообразной функции $f(t)$. Если $t_0 \in \mathbb{T}$, то $F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\Delta s$ для всех t. Определенный Δ-интеграл для любых $r,s \in \mathbb{T}$ определяется как $\int\limits_{r}^{s} f(t)\Delta t = F(s) - F(r)$.

Сформулируем задачу Коши на временной шкале. Пусть задано уравнение

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Функция $x(t)$ называется решением этого дифференциального уравнения, если $x(t) \in C^1_{rd}\left([t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}\right)$ и при подстановке ее в уравнение последнее превращается в тождество. Если, кроме того, функция $x(t)$ удовлетворяет заданному начальному условию

$$x(t_0) = x_0,$$

то она называется решением соответствующей начальной задачи или задачи Коши.

В дальнейшем нам понадобится аналог экспоненциальной функции, построенный для произвольной временной шкалы. Вначале выделим важный класс функций:

Определение 6 (Bohner, Peterson [5]). *Функцию $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ будем называть регрессивной, если $1 + \mu(t)p(t) \neq 0, t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. Множество регрессивных и rd-непрерывных функций обозначается $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T})$.*

Можно показать, что, если $p(t) \in \mathcal{R}$ и $t_0 \in \mathbb{T}$, то задача Коши

$$y^{\Delta} = p(t)y, \quad y(t_0) = 1$$

имеет единственное решение на $\mathbb{T}$. Это решение и будет экспоненциальной функцией, которую обозначают через $e_p(t,t_0)$, указывая на зависимость от функции $p(t)$.

Сформулируем условия существования и единственности решения задачи Коши на произвольной временной шкале.

Определение 7 (Bohner, Peterson [5]). *Пусть $\mathbb{T}$ — временная шкала и X — банахово пространство. Функцию $f : \mathbb{T} \times X \to X$ будем называть:*

1) *rd-непрерывной, если функция $g(t) = f(t,x(t))$ rd-непрерывна для любой непрерывной функции $x : \mathbb{T} \to X$;*
2) *ограниченной в области $Q \subset \mathbb{T} \times X$, если существует константа $M > 0$ такая, что $\|f(t,x)\| \leq M$ для любой точки $(t, x) \in Q$;*

3) липшицевой в области $Q \subset \mathbb{T} \times X$, если существует константа $\lambda > 0$ такая, что

$$\left\| f\left(t,x_1\right) - f\left(t,x_2\right) \right\| \leqslant \lambda \left\| x_1 - x_2 \right\| \qquad \forall \left(t,x_1\right), \left(t,x_2\right) \in Q\ .$$

Теорема 1 (существование и единственность решения, [5]). *Пусть $\mathbb{T}$ — временная шкала, X — банахово пространство, $t_0 \in \mathbb{T}$, $x_0 \in X$, $a > 0 : \inf \mathbb{T} \leqslant t_0 - a$ и $\sup \mathbb{T} \geqslant t_0 + a$. Положим*

$$I_a = \left(t_0 - a, t_0 + a\right), \qquad U_b = \left\{x \in X : \|x - x_0\| < b\right\}\ .$$

Если функция $f : I_a \times U_b \to X$ rd-непрерывная, ограниченная с константой $M > 0$, липшицева с константой $L > 0$, то решение задачи Коши

$$x^{\Delta} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

существует и единственно на интервале $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, где $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1-\varepsilon}{L}\right\}$. Если t_0 — справа рассеянная точка и $\alpha < \mu(t_0)$, то существует единственное решение на интервале $[t_0 - \alpha, \sigma(t_0)]$.

В дальнейшем понадобиться также неравенство Гронуолла, которое мы сформулируем в виде следующей леммы

Лемма (неравенство Гронуолла, [5]). *Пусть y — rd-непрерывная на $\mathbb{T}$ функция, $p \in \mathcal{R}^+, p \geqslant 0$, и $\alpha \in \mathbb{R}$. Если справедливо неравенство*

$$y(t) \leqslant \alpha + \int\limits_{t_0}^{t} y(\tau)p(\tau)\Delta\tau, \qquad \tau \in \mathbb{T}$$

то

$$y(t) \leqslant \alpha e_p\left(t, t_0\right), \qquad \tau \in \mathbb{T}\ .$$

Доказательство теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши на временной шкале и леммы Гронуолла можно найти в [5].

Основные результаты. Рассмотрим динамическую систему вида

$$x^{\Delta} = \varepsilon X(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $X(t,x)$ — n-мерная вектор-функция, $t \in \mathbb{T}$ — время, заданное временной шкалой. Поставим ей в соответствие следующую систему:

$$\xi^{\Delta} = \varepsilon \widetilde{X}\left(t, \xi\right) \quad \xi(t_0) = x_0 \tag{2}$$

где

$$\lim_{\substack{T \to \infty \\ T \in \mathbb{T}}} \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{T} \left\| X(t,x) - \widetilde{X}(t,x) \right\| \Delta t = 0. \tag{3}$$

Эту последнюю систему (2) мы будем называть частично усредненной, соответствующей исходной системе (1).

Теорема 2 (о частичном усреднении на временной шкале)**.** *Пусть в области $Q = \{t \in \mathbb{T}, x \in D\}$ выполнены следующие условия:*

1) *функции $X(t,x)$ и $\widetilde{X}(t,x)$ rd-непрерывны по t, ограничены константой $M > 0$ и удовлетворяют условию Липшица по x с константой $\lambda > 0$;*
2) *предел (3) существует равномерно относительно $x \in D$;*
3) *решение $\xi(t)$ частично усредненной системы (2) с начальным условием $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ определено для всех $t \in \mathbb{T}$ и лежит вместе с ρ-окрестностью в области D;*
4) *существует такое число $\mu_0 > 0$, что для любого $t \in \mathbb{T}$ либо $\mu(t) = 0$, либо $\mu(t) > \mu_0$.*

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ найдется такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ справедливо

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \eta \ , \tag{4}$$

где $x(t)$ и $\xi(t)$ — решения задач Коши (1) и (2) соответственно.

Доказательство. Из условий 1) и 2) следует, что и исходная, и частично усредненная системы будут иметь единственные решения, продолжимые по времени до тех пор, пока $x(t) \in D$ (соответственно, $\xi(t) \in D$).

Запишем эти системы в интегральной форме:

$$\begin{aligned} x(t) = &\quad x_0 + \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} X(s, x(s))\Delta s, \\ \xi(t) = &\quad x_0 + \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \widetilde{X}(t, \xi(s))\Delta s. \end{aligned}$$

Оценим норму разности решений исходной и усредненной систем:

$$\begin{aligned} &\|x(t) - \xi(t)\| = \left\| \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s, x(s)) - \widetilde{X}(s, \xi(s)) \right] \Delta s \right\| = \\ = &\quad \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s, x(s)) - X(s, \xi(s)) \right] \Delta s + \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s, \xi(s)) - \widetilde{X}(s, \xi(s)) \right] \Delta s \right\| \leqslant \\ \leqslant &\quad \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \|X(s, x(s)) - X(s, \xi(s))\| \, \Delta s + \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s, \xi(s)) - \widetilde{X}(s, \xi(s)) \right] \Delta s \right\| \leqslant \\ \leqslant &\quad \lambda\varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \|x(s) - \xi(s)\| \, \Delta s + \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s, \xi(s)) - \widetilde{X}(s, \xi(s)) \right] \Delta s \right\| \ . \qquad (*) \end{aligned}$$

Обозначим последнее слагаемое

$$J = \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s, \xi(s) - \widetilde{X}(s, \xi(s)) \right] \Delta s \right\|$$

и оценим его на промежутке временной шкалы $\left[t_0, L\varepsilon^{-1}\right]$.

Построим разбиение промежутка следующим образом: зададимся диаметром разбиения δ, положим первую точку разбиения равной t_0, а дальнейшие точки определим по формуле

$$t_i = \begin{cases} \sup\,(t_{i-1}, t_{i-1} + \delta], & \text{если} \quad t_{i-1} + \delta \in \mathbb{T}, \\ \sigma(t_{i-1}), & \text{если} \quad t_{i-1} + \delta \notin \mathbb{T}. \end{cases}$$

Можно показать ([6], с. 120) , что построенное таким образом разбиение обладает следующим свойством: для любого i либо $t_i - t_{i-1} \leqslant \delta$ (будем считать, что в этом случае $i \in I_\delta$), либо $t_i - t_{i-1} > \delta$ и $\sigma(t_{i-1}) = t_i$ (тогда $i \in I_\sigma$). Пусть $N = |I_\delta| + |I_\sigma|$.

По свойствам интегралов имеем

$$\begin{gathered} J = \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t_k} \left[X(s, \xi(s) - \widetilde{X}(s, \xi(s)) \right] \Delta s + \int\limits_{t_k}^{t} \left[X(s, \xi(s) - \widetilde{X}(s, \xi(s)) \right] \Delta s \right\| = \\ = \varepsilon \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X(s, \xi(s) - X(s, \xi_i) \right] \Delta s - \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\widetilde{X}(s, \xi(s)) - \widetilde{X}(s, \xi_i) \right] \Delta s + \right. \\ + \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left[X(s, \xi_i) - \widetilde{X}(s, \xi_i) \right] \Delta s + \int\limits_{t_k}^{t} \left[X(s, \xi(s)) - X(s, \xi_k) \right] \Delta s - \\ - \int\limits_{t_k}^{t} \left[\widetilde{X}(s, \xi(s)) - \widetilde{X}(s, \xi_k) \right] \Delta s + \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s, \xi_k) - \widetilde{X}(s, \xi_k) \right] \Delta s - \\ \left. - \int\limits_{t_0}^{t_k} \left[X(s, \xi_k) - \widetilde{X}(s, \xi_k) \right] \Delta s \right\|. \end{gathered}$$

Перегруппировывая однотипные слагаемые в последнем выражении и пользуясь свойствами норм и интегралов, получаем далее

$$\begin{gathered} J \leqslant \varepsilon \left(\sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \| X(s, \xi(s) - X(s, \xi_i) \| \, \Delta s + \int\limits_{t_k}^{t} \| X(s, \xi(s)) - X(s, \xi_k) \| \, \Delta s \right) + \\ + \varepsilon \left(\sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \widetilde{X}(s, \xi(s) - \widetilde{X}(s, \xi_i) \right\| \Delta s + \int\limits_{t_k}^{t} \left\| \widetilde{X}(s, \xi(s)) - \widetilde{X}(s, \xi_k) \right\| \Delta s \right) + \end{gathered}$$

$$+\left(\varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}\left\|\int\limits_{t_0}^{t_{i+1}}\left[X(s,\xi_i)-\widetilde{X}(s,\xi_i)\right]\Delta s-\int\limits_{t_0}^{t_i}\left[X(s,\xi_i)-\widetilde{X}(s,\xi_i)\right]\Delta s\right\|+\right.$$

$$\left.+\varepsilon\left\|\int\limits_{t_0}^{t_k}\left[X(s,\xi_k)-\widetilde{X}(s,\xi_k)\right]\Delta s\right\|\right)+\varepsilon\left\|\int\limits_{t_0}^{t}\left[X(s,\xi_k)-\widetilde{X}(s,\xi_k)\right]\Delta s\right\|.$$

Мажорируем каждое из трех выражений в круглых скобках, увеличивая количество слагаемых в суммах до максимально возможного на отрезке $t \in \left[t_0, L\varepsilon^{-1}\right]$:

$$J\leqslant\varepsilon\sum_{i=0}^{N-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\|X(s,\xi(s))-X(s,\xi_i)\|\,\Delta s+\varepsilon\sum_{i=0}^{N-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|\widetilde{X}(s,\xi(s))-\widetilde{X}(s,\xi_i)\right\|\Delta s+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=0}^{N-1}\left\|\int\limits_{t_0}^{t_{i+1}}\left[X(s,\xi_i)-\widetilde{X}(s,\xi_i)\right]\Delta s\right\|+\varepsilon\sum_{i=0}^{N-1}\left\|\int\limits_{t_0}^{t_i}\left[X(s,\xi_i)-\widetilde{X}(s,\xi_i)\right]\Delta s\right\|+$$

$$+\varepsilon\left\|\int\limits_{t_0}^{t}\left[X(s,\xi_k)-\widetilde{X}(s,\xi_k)\right]\Delta s\right\|. \tag{5}$$

Первые две суммы в последнем выражении оценим, воспользовавшись условием Липшица. Вначале оценим приращение траектории $\xi(s)$:

$$\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\|\xi(s)-\xi_i\|\Delta s=\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|x_0+\varepsilon\int\limits_{t_0}^{s}\widetilde{X}(\tau,\xi(\tau))\Delta\tau-x_0-\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t_i}\widetilde{X}(\tau,\xi(\tau))\Delta\tau\right\|\Delta s=$$

$$=\varepsilon^2\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|\int\limits_{t_i}^{s}\widetilde{X}(\tau,\xi(\tau))\Delta\tau\right\|\Delta s\leqslant\varepsilon^2\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}M\int\limits_{t_i}^{s}\Delta\tau\Delta s=$$

$$=\varepsilon^2M\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}(s-t_i)\,\Delta s\ .$$

Получаем для первой оцениваемой суммы

$$\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\|X(s,\xi(s)-X(s,\xi_i)\|\,\Delta s\leqslant\lambda\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\|\xi(s)-\xi_i\|\,\Delta s\leqslant\lambda\varepsilon^2M\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}(s-t_i)\,\Delta s.$$

Пусть $i \in I_\sigma$. Тогда

$$\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\|X(s,\xi(s)-X(s,\xi_i)\|\,\Delta s\leqslant\lambda\varepsilon^2M\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}(s-t_i)\,\Delta s=$$

$$=\lambda\varepsilon^2M\int\limits_{t_i}^{\sigma(t_i)}(s-t_i)\,\Delta s=\lambda\varepsilon^2M\mu(t_i)\,(t_i-t_i)=0.$$

Пусть теперь $i \in I_\delta$. Тогда

$$\varepsilon \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(s,\xi(s) - X(s,\xi_i)\| \,\Delta s \leqslant \lambda\varepsilon^2 M \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (s - t_i)\,\Delta s =$$

$$= \lambda\varepsilon^2 M \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \delta \Delta s \leqslant \lambda\varepsilon^2 M \delta^2.$$

Итак, получаем для первой суммы

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(s,\xi(s)) - X(s,\xi_i)\|\,\Delta s \leqslant \sum_{i\in I_\delta} \lambda\varepsilon^2 M\delta^2.$$

Воспользуемся условием теоремы 4). Именно, положим $\delta < \mu_0$. Легко видеть, что тогда $|I_\delta| < \dfrac{L}{\varepsilon\delta}$. Пусть теперь $N_0 = \dfrac{L}{\varepsilon\mu_0}$. Значит, для всех $N > N_0$ и $\delta = \dfrac{L}{N\varepsilon}$ имеем $\delta < \mu_0$ и оценка примет вид

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(s,\xi(s)) - X(s,\xi_i)\|\,\Delta s \leqslant \sum_{i\in I_\delta} \lambda\varepsilon^2 M \frac{L^2}{\varepsilon^2 N^2} = \sum_{i\in I_\delta} \frac{\lambda M L^2}{N^2} < \frac{\lambda M L^2}{N}\ .$$

Аналогичным образом получаем оценку и второй суммы в (5):

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left\|\widetilde{X}(s,\xi(s)) - \widetilde{X}(s,\xi_i)\right\|\Delta s < \frac{\lambda M L^2}{N}\ .$$

Далее, в силу условия 2) теоремы существует монотонно убывающая при $t \to \infty$ функция $f(t)$ такая, что

$$\varepsilon \cdot \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s,x) - \widetilde{X}(s,x)\right] \Delta s \right\| < \varepsilon \cdot t f(t) \leqslant F(\varepsilon),$$

где $F(\varepsilon) = \sup\limits_{\tau\in[t_0, L\varepsilon^{-1}]} \left[\tau f\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}\right)\right]$, $F(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, в оценке (5) последние три выражения мажорируются выражением $2NF(\varepsilon)$.

Итак, окончательно получаем оценку сверху для (5):

$$\varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s,\xi(s)) - \widetilde{X}(s,\xi(s))\right] \Delta s \right\| \leqslant \frac{2\lambda M L^2}{N} + 2NF(\varepsilon).$$

Вернемся к оценке разности решений исходной и частично усредненной систем $(*)$:

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \lambda\varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \|x(s) - \xi(s)\|\,\Delta s + \frac{2\lambda M L^2}{N} + 2NF(\varepsilon).$$

Тогда, вследствие неравенства Гронуолла имеем

$$\|x(t)-\xi(t)\| \leqslant \left(\frac{2\lambda ML^2}{N}+2NF(\varepsilon)\right)\cdot e_{\lambda\varepsilon}(t,t_0)\ .$$

Очевидно, что $e_{\lambda\varepsilon}(t,t_0) < e_{\lambda\varepsilon}\left(\frac{L}{\varepsilon},t_0\right)$. Далее, так как $1+\lambda\varepsilon\mu(t)>0$, то по определению экспоненты имеем

$$e_{\lambda\varepsilon}\left(\frac{L}{\varepsilon},t_0\right)=\exp\left(\int\limits_{t_0}^{\frac{L}{\varepsilon}}\frac{\ln(1+\lambda\varepsilon\mu(\tau))}{\mu(\tau)}\Delta\tau\right)<\exp\left(\int\limits_{t_0}^{\frac{L}{\varepsilon}}\frac{\lambda\varepsilon\mu(\tau)}{\mu(\tau)}\Delta\tau\right)<e^{\lambda L}\ .$$

Выберем теперь N достаточно большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{2\lambda ML^2}{N}e^{\lambda L}\leqslant\frac{\eta}{2}\ .$$

Зафиксируем это значение и выберем ε_0 достаточно малым, чтобы при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ выполнялось

$$2NF(\varepsilon)e^{\lambda L}\leqslant\frac{\eta}{2}\ .$$

Тогда

$$\|x(t)-\xi(t)\|\leqslant\eta,\qquad t\in\left[t_0,\frac{L}{\varepsilon}\right],$$

что и требовалось доказать. ■

Легко показать, что аналог теоремы Боголюбова на временных шкалах, доказанный в [9], является частным случаем теоремы 2 при специальном выборе правой части частично усредненной системы (если соответствующий предел существует):

$$\widetilde{X}(t,x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T X(t,x)\Delta t\equiv\overline{X}(x).$$

Условия доказанной теоремы можно ослабить, исключив требование липшицевости правой части исходной системы (1). При этом теряется единственность решения исходной системы и следующая теорема устанавливает близость к $\xi(t)$ всего пучка решений системы (1), начинающихся в точке $x(0)$.

Теорема 3. *Пусть в области $Q=\{t\in\mathbb{T},x\in D\}$ выполнены следующие условия:*

1) *функция $X(t{,}x)$ rd-непрерывна по t, ограничена константой $M>0$ и равномерно непрерывна по x относительно t;*

2) *функция $\widetilde{X}(t{,}x)$ rd-непрерывна по t, ограничена константой $M>0$ и удовлетворяет условию Липшица по x с константой $\lambda>0$;*

3) *предел (3) существует равномерно относительно $x\in D$;*

4) *решение $\xi(t)$ частично усредненной системы (2) с начальным условие $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ определено для всех $t \in \mathbb{T}$ и лежит вместе с ρ-окрестностью в области D;*

5) *существует такое число $\mu_0 > 0$, что для любого $t \in \mathbb{T}$ либо $\mu(t) = 0$, либо $\mu(t) > \mu_0$.*

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ найдется такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ справедливо

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \eta \ ,$$

где $x(t)$ и $\xi(t)$ — решения задач Коши (1) и (2) соответственно.

Доказательство. Пользуясь условием 2) теоремы, получаем оценку

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \lambda\varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \|x(s) - \xi(s)\| \, \Delta s + \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s, x(s)) - \widetilde{X}(s, x(s)) \right] \Delta s \right\|.$$

Обозначим последнее слагаемое через J. Чтобы оценить максимальное значение J на промежутке $I = \left[t_0, L\varepsilon^{-1}\right]$, воспользуемся δ-разбиением аналогично доказательству предыдущей теореме. Обозначая $x(t_i) = x_i$, $i = \overline{0,N}$ и повторяя выкладки, имеем

$$J \leqslant \varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(s, x(s) - X(s, x_i)\| \, \Delta s + \varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \widetilde{X}(s, x(s)) - \widetilde{X}(s, x_i) \right\| \Delta s +$$
$$+ \varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \left\| \int\limits_{t_0}^{t_{i+1}} \left[X(s, x_i) - \widetilde{X}(s, x_i) \right] \Delta s \right\| + \varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \left\| \int\limits_{t_0}^{t_i} \left[X(s, x_i) - \widetilde{X}(s, x_i) \right] \Delta s \right\| +$$
$$+ \varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s, x_k) - \widetilde{X}(s, x_k) \right] \Delta s \right\|. \tag{6}$$

В силу условия 1) теоремы для любого $\gamma > 0$ существует $\gamma_1 > 0$ такое, что $\|X(s, x(s)) - X(s, x_i)\| \leqslant \gamma$ как только $\|x(s) - x_i\| \leqslant \gamma_1$. Оценим приращение траектории $x(s)$ на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$:

$$\|x(s) - x_i\| = \left\| x_0 + \varepsilon \int\limits_{t_0}^{s} X(\tau, x(\tau)) \Delta\tau - x_0 - \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t_i} X(\tau, x(\tau)) \Delta\tau \right\| =$$
$$= \varepsilon \left\| \int\limits_{t_i}^{s} X(\tau, x(\tau)) \Delta\tau \right\| \leqslant \varepsilon M \int\limits_{t_i}^{s} \Delta\tau = \varepsilon M (s - t_i).$$

Пусть $i \in I_\delta$. Тогда $\|x(s) - x_i\| \leqslant \varepsilon M \delta$ и выбрав достаточно малое δ, можно добиться выполнения неравенства $\|x(s) - x_i\| \leqslant \gamma_1$, откуда следует оценка

$$\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(s, x(s) - X(s, x_i)\| \, \Delta s \leqslant \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma \Delta s \leqslant \gamma\delta, \quad i \in I_\delta.$$

Если же $i \in I_\sigma$, то по определению множества индексов I_σ и свойствам Δ-интегралов получаем, что

$$\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(s,x(s)-X(s,x_i)\|\,\Delta s = \int\limits_{t_i}^{\sigma(t_i)} \|X(s,x(s)-X(s,x_i)\|\,\Delta s =$$
$$= \mu(t_i)\,\|X(t_i,x(t_i)-X(t_i,x_i)\| = 0, \quad i \in I_\sigma.$$

В итоге для первой суммы в (6) имеем

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(s,x(s))-X(s,x_i)\|\,\Delta s \leqslant \varepsilon \sum_{i \in I_\delta} \gamma\delta.$$

Воспользуемся условием теоремы 5). Если предположить, что $\delta < \mu_0$, то $|I_\delta| < \dfrac{L}{\varepsilon\delta}$. Пусть теперь $N_0 = \dfrac{L}{\varepsilon\mu_0}$. Тогда для всех $N > N_0$ и $\delta = \min\left\{\dfrac{L}{N\varepsilon}, \dfrac{\gamma_1}{\varepsilon M}\right\}$ имеем одновременно $\delta < \mu_0$ и $\varepsilon M\delta \leqslant \gamma_1$, что позволяет оценить сумму:

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(s,x(s))-X(s,x_i)\|\,\Delta s \leqslant \varepsilon \sum_{i \in I_\delta} \gamma\delta \leqslant \varepsilon N\gamma \frac{L}{N\varepsilon} = L\gamma.$$

Оценку второй суммы в (6) проделаем точно так же, как это было сделано при доказательстве теоремы 1, используя условие Липшица. В итоге получаем

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left\|\widetilde{X}(s,x(s))-\widetilde{X}(s,x_i)\right\|\Delta s < \frac{\lambda ML^2}{N}\ .$$

Далее, в силу условия 3) теоремы существует монотонно убывающая при $t \to \infty$ функция $f(t)$ такая, что

$$\varepsilon \cdot \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s,x)-\widetilde{X}(s,x)\right]\Delta s \right\| < \varepsilon \cdot t f(t) \leqslant F(\varepsilon),$$

где $F(\varepsilon) = \sup\limits_{\tau \in [t_0, L\varepsilon^{-1}]} \left[\tau f\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}\right)\right]$, $F(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, в оценке (6) последние три слагаемых в совокупности мажорируются выражением $2NF(\varepsilon)$.

Собирая вместе все последние оценки, получаем окончательно

$$\varepsilon \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[X(s,x(s))-\widetilde{X}(s,x(s))\right]\Delta s \right\| \leqslant L\gamma + \frac{\lambda ML^2}{N} + 2NF(\varepsilon).$$

Дальнейшее доказательство проводится аналогично последней части доказательства теоремы 2 с использованием неравенства Гроноулла. ■

Следуя схеме доказательства, приведенного в [8], можно ослабить условие равномерной сходимости предела (3). Доказательство использует лишь свойства функций $X(t,x)$ и $\widetilde{X}(t,x)$, относящиеся к переменной x и перенос его на системы, заданные на временной шкале, не представляет сложности. Приведем формулировку теоремы.

Теорема 4. *Пусть в области $Q = \{t \in \mathbb{T}, x \in D\}$, где D замкнуто, выполнены следующие условия:*

1) *функция $X(t,x)$ rd-непрерывна по t, ограничена константой $M > 0$ и равномерно непрерывна по x относительно t;*
2) *функция $\widetilde{X}(t,x)$ rd-непрерывна по t, ограничена константой $M > 0$ и удовлетворяет локальному условию Липшица по x с константой $\lambda > 0$;*
3) *предел (3) существует в каждой точке $x \in D$;*
4) *решение $\xi(t)$ частично усредненной системы (2) с начальным условие $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ определено для всех $t \in \mathbb{T}$ и лежит вместе с ρ-окрестностью в области D;*
5) *существует такое число $\mu_0 > 0$, что для любого $t \in \mathbb{T}$ либо $\mu(t) = 0$, либо $\mu(t) > \mu_0$.*

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ найдется такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ справедливо

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant \eta \ ,$$

где $x(t)$ и $\xi(t)$ — решения задач Коши (1) и (2) соответственно.

Доказательство. Идентично приведенному в [8]. Упомянем лишь, что идея доказательства сводится к демонстрации выполнения всех условий теоремы 3. ■

Заключение. В работе рассмотрена система уравнений на временной шкале с малым параметром в правой части. При весьма общих условиях доказана близость решения исходной системы и решения частично усредненной системы, поставленной ей в соответствие, причем частично усредненная система определяется на той же временной шкале. Этот результат, в частности, расширяет область применения численно–асимптотического метода решения задач оптимального управления, представленного ранее в [10, 11].

1. **Крылов Н. М.** Введение в нелинейную механику / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов – Киев : Изд-во АН СССР, 1937. — 363 с.
2. **Боголюбов Н. Н.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский – М. : Наука, 1974. — 503 с.
3. **Плотников В. А.** Метод усреднения в задачах управления / В. А. Плотников – Изд-во Лыбидь, Киев-Одесса, 1992. — 188 с.

4. **Hilger S.** Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, Ph.D. thesis, Universität Würzburg, 1988.
5. **Bohner M.** Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications / M. Bohner, A. Peterson – Birkhäuser Basel, 2001. — 358 p.
6. **Advances** in Dynamic Equations on Time Scales / M. Bohner, A. Peterson et al. – Springer, 2002. — 368 p.
7. **Slavík A.** Averaging dynamic equations on time scales / Antonín Slavík // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 2012. - Vol. 388, No. 2. - p. 996-1012.
8. **Плотников В. А.** Обоснование одной схемы усреднения для систем стандартного вида / В. А. Плотников, А. Т. Яровой // Укр. мат. журн. – 1979. – №2. – С. 166–171.
9. **Огуленко А. П.** Схема полного усреднения на временных шкалах / А. П. Огуленко, О. Д. Кичмаренко // Вестник Одесск. нац. ун-та. Матем. и мех. – 2012. – Т.17, вып. 4 (16). – С. 67–77.
10. **Ogulenko A. P.** Averaging of the Problem of Optimal Control on Time Scales / A. P. Ogulenko, O. D. Kichmarenko // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 212, No. 3. – P. 290–304.
11. **Kichmarenko O. D.** Averaging of multicriteria control problems of systems on time scales / O. D. Kichmarenko, A. P. Ogulenko // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2017. – Vol. 56, No. 1. – pp. 33–43.

Огуленко О. П.
Часткове усереднення систем на часових шкалах

Резюме

В роботі розглянута схема часткового усереднення системи рівнянь на часовій шкалі з малим параметром в правій частині. При досить загальних умовах доведено близькість розв'язку вихідної системи та розв'язку частково усередненної системи, причому частково усереденена система визначається на тій самій часовій шкалі. Цей результат, зокрема, розширює область застосування чисельно–асимптотичного методу розв'язання задач оптимального керування на часових шкалах, розвиненого в попередніх роботах.
Ключові слова: часова шкала, метод усереднення, функція зернистості .

Ogulenko A. P.
Partial averaging of the systems on time scales

Summary

The scheme of partial averaging of systems with small parameter on time scales was established. A proximity of solutions of given and partially averaged system of equations was proved under sufficiently general conditions. Obtained results extend an application area for previously developed numerically–asymptotic method of solution for optimal control problems on time scales.
Key words: time scale, averaging method, graininess function.

References

1. Krylov, N. M. & Boholiubov, N. N. (1937). *Vvedenye v nelyneinuiu mekhanyku*, Izd-vo AN SSSR, 363 p.

2. Boholiubov, N. N. & Mitropolskyi, Yu. A. (1974). *Asymptotycheskye metody v teoryy nelyneinykh kolebanyi*, Moscow: Nauka, 503 p.
3. Plotnikov, V. A. (1992). *Metod usrednenyia v zadachakh upravlenyia*, Izd-vo Lybid, Kyev-Odessa, 188 p.
4. Hilger, S. (1988). *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*, Ph.D. thesis, Universität Würzburg.
5. Bohner, M. & Peterson, A. (2001). *Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications*, Birkhäuser Basel, 358 p.
6. Bohner, M. Peterson, A. et al. (2002). *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Springer, 368 p.
7. Slavík, A. (2012). Averaging dynamic equations on time scales, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 388, no. 2., pp. 996–1012.
8. Plotnikov, V. A. & Yarovoi, A. T. (1979). Obosnovanye odnoi skhemy usrednenyia dlia system standartnoho vida, *Ukr. mat. zhurn.*, no. 2, pp. 166–171.
9. Ohulenko, A. P. & Kichmarenko, O. D. (2012). Skhema polnoho usrednenyia na vremennыkh shkalakh, *Vestnyk Odessk. nats. un-ta. Matem. y mekh.*, vol. 17, issue 4(16), pp. 67–77.
10. Ogulenko, A. P. & Kichmarenko, O. D. (2016). Averaging of the Problem of Optimal Control on Time Scalesi, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 212, no. 3, pp. 290–304.
11. Kichmarenko, O. D. & Ogulenko, A. P. (2017). Averaging of multicriteria control problems of systems on time scales, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, vol. 56, no. 1, pp. 33–43.

Дослідження в математиці і механіці.– 2017.–Т.22, вип. 1(29).– С. 46–61

УДК 517.5

Н. В. Парфінович
Дніпропетровський національный університет ім. Олеся Гончара

ОЦІНКИ НОРМ ПОХІДНИХ ЗА РІССОМ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Нехай $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_m}$ – оператор Лапласа. Позначимо через $L_s(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leqslant s \leqslant \infty)$ простори вимірних функцій $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ зі скінченою нормою $\|f\|_s$. Нехай F і E – ідеальні решітки на $\mathbb{R}^m$ зі скінченими нормами $\|\cdot\|_F$ і $\|\cdot\|_E$. Через $L^{\Delta}_{F,E}(\mathbb{R}^m)$ позначимо простір функцій $f \in F$ таких, що $\Delta f \in E$. Якщо $F = L_s(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leqslant s \leqslant \infty)$, то будемо використовувати позначення $L^{\Delta}_{s,E}$, або $L^{\Delta}_{s,s}$ якщо, крім цього, $E = L_s(\mathbb{R}^m)$. В роботі отримано нові нерівності типу Колмогорова для норм похідних за Ріссом $D^{\alpha}f$ функцій $f \in L^{\Delta}_{\infty,E}(\mathbb{R}^m)$. Як наслідок, отримані такі нерівності для функцій $f \in L^{\Delta}_{s,s}(\mathbb{R}^m)$. Розв'язано задачу про наближення необмеженого оператора D^{α} обмеженими на класі функцій f таких, що $\|\Delta f\|_E \leqslant 1$.
MSC: 26D10, 35A23, 41A17, 41A35, 41A65.
Ключові слова: дробова похідна, нерівності для похідних, наближення необмежених операторів обмеженими, ідеальні решітки .

Вступ. Нерівності типу Ландау—Колмогорова відіграють важливу роль в багатьох галузях математики і її застосувань. На теперішній час відомо багато точних нерівностей такого типу для функцій однієї змінної (див. [1], а також [2]–[4] і монографії [5, 6]). Значно менше точних нерівностей отримано для функцій багатьох змінних (див., напр., [7]– [12]), а також для похідних нецілого порядку (див., напр., [13]– [22], [23, гл. 2] і відповідну бібліографію).

Задача про точні нерівності типу Колмогорова тісно пов'язана із задачею Стєчкіна про наближення необмеженого оператора на класі Q обмеженими (див. [3, 4], а також [5, § 7.1]).

В даній роботі розглядаються вказані задачі для функцій, заданих на $\mathbb{R}^m$, у випадках, коли лапласіани вказаних функцій (або і самі функції також) належать ідеальним решіткам. При цьому оцінюються норми похідних Рісса цих функцій. Представлені в роботі результати є продовженням досліджень, розпочатих в [20]–[22].

Основні результати

1. Означення. Нехай $\mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ — евклідів простір точок $x = (x_1, \dots, x_m)$, $|x| = \big(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2\big)^{1/2}$, $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$ — простір вимірних функцій $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Через $L_s = L_s(\mathbb{R}^m)$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, позначимо простори функцій $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_s = \|f\|_{L_s(\mathbb{R}^m)} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(t)|^s \, dt\right)^{1/s}, & 1 \leqslant s < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}^m\}, & s = \infty, \end{cases}$$

Надійшла 18.04.2017

а через $C = C(\mathbb{R}^m)$ – простір неперервних, обмежених функцій $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ з нормою

$$\|f\|_C = \|f\|_{C(\mathbb{R}^m)} := \sup\{|f(t)| : \ t \in \mathbb{R}^m\}.$$

Нехай

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$$

– оператор Лапласа. Для локально інтегровних на $\mathbb{R}^m$ функцій f і g будемо писати

$$\Delta f = g,$$

якщо для будь-якої фінітної нескінченно диференційовної функції φ

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \Delta\varphi(x) f(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) g(x)\, dx.$$

Через $L^{\Delta}_{p,s} = L^{\Delta}_{p,s}(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leqslant p,s \leqslant \infty)$позначимо сукупність функцій $f \in L_p$ таких, що $\Delta f \in L_s$. Через $W^{\Delta}_{p,s} = W^{\Delta}_{p,s}(\mathbb{R}^m)$ позначимо клас функцій f із $L^{\Delta}_{p,s}$ таких, що $\|\Delta f\|_s \leqslant 1$.

Похідна Рісса порядку α $(0 < \alpha < 2)$ функції $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ означається рівністю (див. [24, с. 367–368])

$$(D^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt,$$

де

$$d_{m,2}(\alpha) = \frac{2^{1-\alpha} \pi^{1+\frac{m}{2}}}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+\alpha}{2}\right)}$$

- нормуючий множник [24, с. 373]. Відзначимо, що похідна Рісса D^{α} реалізує [24, с. 368] дробовий степеінь $(-\triangle)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа.

Для $h > 0$ зрізаною похідною Рісса порядку $\alpha \in (0{,}2)$ функції $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ називається

$$(D^{\alpha}_h f)(x) := \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt$$

(тут і скрізь нижче $B_h = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leqslant h\}$ – куля радіуса h з центром в початку координат).

Лінійний простір $E = \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$ з нормою $\|\cdot\|_E$ називається ідеальною решіткою на $\mathbb{R}^m$ (див. [25, розд. 2, §2]), якщо для кожної функції $f \in E$ і $g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$ таких, що $|g(x)| \leqslant |f(x)|$ майже скрізь на $\mathbb{R}^m$, випливає, що $g \in E$ і $\|g\|_E \leqslant \|f\|_E$.

Множина $A(E) \subset \mathbb{R}^m$ називається носієм ідеальної решітки E, якщо $f(x) = 0$ для всіх $f \in E$ і $x \notin A(E)$.

Через E^1 позначимо асоційований підпростір до E (див. [25, розд. 2, §3]), тобто простір функцій $g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$, такий що supp$g \subset A(E)$ і

$$\|g\|_{E^1} := \sup_{\substack{f \in E \\ \|f\|_E \leqslant 1}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) g(x)\, dx < \infty.$$

Зрозуміло, що E^1 є ідеальною решіткою на $\mathbb{R}^m$ і підпростором в просторі, спряженому до E.

Ідеальні решітки утворюють багато важливих просторів, таких як простір $L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, простір Орліча [26], простір Лоренца [25], простір Марцинкевича [25] та ін.

В подальшому ми будемо також говорити, що ідеальна решітка E є напівінваріантною відносно зсуву, якщо для кожної $f \in E$ і $x \in \mathbb{R}^m$ виконується $f(\cdot + x) \in E$, а також $\|f(\cdot + x)\|_E = \|f\|_E$.

Нехай F і E – ідеальні решітки. Через $L^{\Delta}_{F,E} = L^{\Delta}_{F,E}(\mathbb{R}^m)$ позначимо простір функцій $f \in F$ таких, що $\Delta f \in E$. Через $W^{\Delta}_{F,E}$ позначимо клас функцій f із $L^{\Delta}_{F,E}$, для яких $\|\Delta\|_E \leqslant 1$.

Якщо $F = L_p(\mathbb{R}^m)$, то будемо використовувати позначення $L^{\Delta}_{p,E}$ і $W^{\Delta}_{p,E}$ відповідно.

Нехай X і Y – банахові простори, $A : X \to Y$ – оператор (не обов'язково лінійний) з областю визначення $D_A \subset X$, $Q \subset D_A$ – деяка множина. Через $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X,Y)$ будемо позначати простір лінійних обмежених операторів $S : X \to Y$. Для $N > 0$ покладаємо

$$E_N(A,Q) = \inf_{\substack{S\in\mathcal{L}(X,Y)\\ \|S\|\leqslant N}} \sup_{f\in Q} \|Af - Sf\|_Y. \tag{1}$$

Задача С.Б. Стєчкіна про найкраще наближення оператора A на множині Q лінійними обмеженими операторами полягає в тому, щоб при довільному $N > 0$ знайти величину (1), а також вказати екстремальний оператор, тобто оператор, що реалізує точну нижню межу в правій частині (1). Постановка цієї задачі і її розв'язання для диференціальних операторів малих порядків представлені в [27]. Огляд подальших результатів і відповідні посилання можна знайти в [3, 4].

2. Оцінка норми і відхилення від D^{α} оператора U^{α}_h на класі $W^{\Delta}_{\infty,E}$. Нехай $h > 0$. Через $\widetilde{G}_h(x,y)$ будемо позначати функцію Гріна кулі B_h (див., [28, с. 265]), тобто для $x, y \in B_h$, $x \neq y$, у випадку $m \geqslant 3$

$$\tilde{G}_h(x,y) = \frac{1}{\sigma_{m-1}(m-2)}\left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}} - \frac{h^{m-2}|y|^{m-2}}{|x|y|^2 - h^2 y|^{m-2}}\right),$$

і у випадку $m = 2$

$$\widetilde{G}_h(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{h^2 - xy}{h(x-y)}\right|$$

(тут і скрізь нижче σ_{m-1} – площа поверхні одиничної сфери S^{m-1} простору $\mathbb{R}^m$).

Для $\rho > 0$ покладемо

$$G_h(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_{m-1}(m-2)}\left(\frac{1}{\rho^{m-2}} - \frac{1}{h^{m-2}}\right)_+, & m \geqslant 3,\\ \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{h}{\rho}\right)_+, & m = 2,\end{cases}$$

($a_+ := \max\{a,0\}$).

Відзначимо, що для $y \in B_h$, $y \neq 0$,

$$\widetilde{G}_h(0,y) = G_h(|y|).$$

Усередненням функції f в точці x по сфері радіуса h назвемо величину

$$\widetilde{f}(x,h) = \frac{1}{\sigma_{m-1}} \int\limits_{S^{m-1}} f(x+hy)ds_y$$

де ds_y – елемент площі поверхні сфери S^{m-1}.

Відомо (див., напр., [28, с. 289]), що для будь-якої двічі неперервно диференційовної функції f справедливе зображення

$$f(x) = \widetilde{f}(x,h) + \int\limits_{B_h} \widetilde{G}_h(x,y)(-\Delta f(y))\, dy. \tag{2}$$

В [22] показано, що для довільної двічі неперервно диференційовної функції f:

$$f(x) = \widetilde{f}(x,h) + \int\limits_{B_h} G_h(|y|)(-\Delta f(x \pm y))\, dy.$$

Для будь-якої функції $f \in L^{\Delta}_{\infty,E}$ і будь-якої фінітної нескінченно диференційовної функції φ маємо:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) f(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) \left[\widetilde{\varphi}(x,h) + \int\limits_{B_h} G_h(|y|)(-\Delta\varphi(x \mp y))\, dy\right] dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \left[\widetilde{f}(x,h) + \int\limits_{B_h} G_h(|y|)(-\Delta f(x \pm y))\, dy\right] dx.$$

Тобто для $f \in L^{\Delta}_{\infty,E}$ і майже всіх $x \in \mathbb{R}^m$ буде

$$f(x) = \widetilde{f}(x,h) + \int\limits_{B_h} G_h(|y|)(-\Delta f(x \pm y))\, dy. \tag{3}$$

Введемо також функцію

$$F_h(t) = \begin{cases} \int\limits_t^h G_\rho(t) \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}}, & t \in (0,h], \\ 0, & t > h. \end{cases}$$

Неважко бачити, що для функцій $G_h(|y|)$ и $F_h(|y|)$ мають місце співвідношення (див. [22])

$$G_h(|y|) = h^{2-m} G_1(|y|/h)$$

і

$$F_h(|y|) = h^{2-\alpha-m} F_1(|y|/h).$$

Для $t > 0$ покладемо

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{m+\alpha-2}}, & m \geqslant 3 \\ \frac{\ln t}{t^\alpha}, & m = 2 \end{cases}$$

Скрізь нижче ми припускаємо, що

$$G(|t|)\chi_{[-1,1]} \in E^1 \tag{4}$$

і

$$\lim_{h\to 0^+} \|G(|t|)\chi_{[-h,h]}\|_{E^1} = 0. \tag{5}$$

Зазначимо, що при виконанні цих умов при будь-якому $c \in \mathbb{R}$ функція $F_h(|y|) - cG_h(|y|)$ належить простору E^1.

Оберемо $c = c_h$ з умови

$$\int\limits_{B_h} (F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy = 0. \tag{6}$$

Як неважко зрозуміти, для будь-якого $h > 0$ буде

$$c_h = h^{-\alpha} c_1. \tag{7}$$

Нехай $h > 0$ і $\widetilde{\psi}_h(\rho)$ – деяка функція однієї змінної з $\operatorname{supp}\widetilde{\psi}_h = [0,h]$, в середньому рівна нулю. Припустимо, що існує функція $\psi_h \in E$ ($\operatorname{supp}\psi_h = B_h$, $\psi_h(y) = \widetilde{\psi}_h(|y|)$, $\|\psi\|_E = 1$) така, що справджується рівність:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} (F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\widetilde{\psi}_h(|y|)\, dy = \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}. \tag{8}$$

Означимо функцію $\widetilde{\varphi}_{h,2}(\rho)$ в такий спосіб. Для $\rho \in (0,h]$ покладемо

$$\widetilde{\varphi}_{h,2}(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^\rho - \int\limits_\rho^h\right)\int\limits_t^h u^{m-1}\widetilde{\psi}_h(u)\, du \frac{dt}{t^{m-1}}, & \rho \in [0,h] \\ \frac{1}{2}\int\limits_0^h \int\limits_t^h u^{m-1}\widetilde{\psi}_h(u)\, du \frac{dt}{t^{m-1}}, & \rho > h. \end{cases} \tag{9}$$

Для $y \in \mathbb{R}^m$ покладемо

$$\varphi_{h,2}(y) = \widetilde{\varphi}_{h,2}(|y|). \tag{10}$$

Враховуючи зображення оператора Лапласа для радіальних функцій

$$\Delta\varphi(\rho) = \varphi''(\rho) + \frac{m-1}{\rho}\varphi'(\rho),$$

неважко перевірити, що $\varphi_{h,2} \in W^{\Delta}_{\infty,E} \cap C(\mathbb{R}^m)$ і $\Delta\varphi_{h,2}(y) = \psi_h(y)$. Крім того,

$$\max_{y\in\mathbb{R}^m} \varphi_{h,2}(y) = -\min_{y\in\mathbb{R}^m} \varphi_{h,2}(y).$$

Для заданого $h > 0$ розглянемо оператор

$$U_h^\alpha f(x) = D_h^\alpha f(x) + \frac{2c_h\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}(f(x) - \widetilde{f}(x,h)), \tag{11}$$

де c_h обрано з умови (6). Так само, як в [22] доводиться твердження

Лема 1. *Нехай $0 < \alpha < 2$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву решітка на $\mathbb{R}^m$, що задовольняє умови (4) і (5), E^1 – асоційований підпростір до E. Тоді при виконанні умов (8)–(10) для довільного $h > 0$*

$$\|U_h^\alpha\| = \frac{4\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}\left(\frac{h^{-\alpha}}{\alpha} + c_h\right) = \frac{\|U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty}{\|\varphi_{h,2}\|_\infty} = h^{-\alpha}\frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}.$$

Тепер для функцій $f \in L^\Delta_{\infty,E}$ ми отримаємо оцінку величини $\|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty$.

В [22] показано, що для довільної фінітної нескінченно диференційовної функції φ і довільного $x \in \mathbb{R}^m$

$$D^\alpha\varphi(x) - U_h^\alpha\varphi(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\int\limits_{B_h}(-\Delta\varphi(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\,dy. \tag{12}$$

Враховуючи (8), легко бачити, що для будь-якої функції $f \in L^\Delta_{\infty,E}$ і довільної фінітної нескінченно диференційовної функції φ

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)(D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x))\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)(D^\alpha\varphi(x) - U_h^\alpha\varphi(x))\,dx.$$

Звідси і із (8) виводимо, що для $f \in L^\Delta_{\infty,E}$ при майже всіх $x \in \mathbb{R}^m$ має місце зображення

$$D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\int\limits_{B_h}(-\Delta f(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\,dy. \tag{13}$$

Використовуючи (13) і нерівність Гельдера, отримаємо, що для майже всіх $x \in \mathbb{R}^m$

$$|D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x)| \leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\|\Delta f\|_E \, \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}$$

і, значить,

$$\|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty \leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\|\Delta f\|_E \, \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}. \tag{14}$$

В силу (14) маємо

$$\|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty \leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}. \tag{15}$$

Враховуючи, що для функції $\varphi_{h,2}$ зображення (3) має місце в кожній точці $x \in \mathbb{R}^m$, аналогічно (8), встановлюємо, що для $\varphi_{h,2}$ при всіх $x \in \mathbb{R}^m$ справедлива рівність

$$D^\alpha\varphi_{h,2}(x) - U_h^\alpha\varphi_{h,2}(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\int\limits_{B_h}(-\Delta\varphi_{h,2}(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\,dy.$$

Як згортка функцій $\Delta\varphi_{h,2} \in E$ і $F_h(|y|) - c_h G_h(|y|) \in E^1$ функція $D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}$ неперервна в будь-якій точці $x \in \mathbb{R}^m$. Функція $U_h^\alpha\varphi_{h,2}(x)$ також буде неперервною в кожній точці $x \in \mathbb{R}^m$. Значить, неперервною буде і $D^\alpha\varphi_{h,2}(x)$.

Враховуючи неперервність функції $D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}$ і означення функції ψ_h, отримаємо

$$\|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty \geqslant |D^\alpha\varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)| =$$

$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left| \int\limits_{B_h} \psi_h(|y|)(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\,dy \right| = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}.$$

Звідси і із (15)отримаємо

$$\|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty = |D^\alpha\varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)| =$$

$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)\|_{E^1}. \tag{16}$$

Відзначимо, що при виконанні умови (5) $\|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty \to 0$, $h \to 0$. Зіставляючи (14) і (16), бачимо, що справедлива

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми 1. Тоді при виконанні умов (8)–(10) для довільного $h > 0$ і для будь-якої функції $f \in L^\Delta_{\infty,E}$*

$$\|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty \leqslant \|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty \|\Delta f\|_E. \tag{17}$$

Нерівність (17) перетворюється на рівність для $f(t) = \varphi_{h,2}(t)$.

Із лем 1 і 2 випливає

Лема 3. *Нехай виконуються умови леми 1 і для $N > 0$*

$$h_N = \left(\frac{\|U_1^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty N} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Тоді при виконанні умов (8)–(10) $\|U_{h_N}^\alpha\| = N$ і

$$E_N(D^\alpha, W^\Delta_{\infty,E}) \leqslant \sup_{f \in W^\Delta_{\infty,E}} \|D^\alpha f - U_{h_N}^\alpha f\|_\infty = \|D^\alpha\varphi_{h_N,2} - U_{h_N}^\alpha\varphi_{h_N,2}\|_\infty.$$

3. Нерівності Колмогорова: оцінка рівномірної норми похідної Рісса. Припустимо, що виконуються умови (8)–(10). Із лем 1 і 2 для $f \in L^\Delta_{\infty,E}$ при умовах (4) і (5) випливає, що для будь-якого $h > 0$

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leqslant \|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty + \|U_h^\alpha f\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty \|\Delta f\|_E + \frac{\|U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty}{\|\varphi_{h,2}\|_\infty} \|f\|_\infty. \tag{18}$$

Покажемо, що нерівність (18) перетворюється на рівність для функції $\varphi_{h,2}(y)$. Оскільки функція $D^\alpha\varphi_{h,2}(y)$ неперервна в точці 0, маємо:

$$\|D^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty \geqslant |D^\alpha\varphi_{h,2}(0)| = |D^\alpha\varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0) + U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)|.$$

Оскільки $D^\alpha\varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)$ і $U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)$ одного знаку, можемо написати, використовуючи (16):

$$\|D^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty \geq |D^\alpha\varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)| + |U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)| =$$

$$= \|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty + h^{-\alpha}\frac{\|U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty}{\|\varphi_{h,2}\|_\infty}\|\varphi_{h,2}\|_\infty.$$

Отже, нерівність (18) точна, і нами доведена

Теорема 1. *Нехай $0 < \alpha < 2$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву решітка на $\mathbb{R}^m$, що задовольняє умови (4) і (5), E^1 – асоційований підпростір до E. Тоді, якщо виконуються умови (8)–(10), то для довільної $f \in L^\Delta_{\infty,E}$ і $h > 0$*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leqslant h^{-\alpha}\frac{\|U_1^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}\cdot\|f\|_\infty + \|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty\cdot\|\Delta f\|_E. \qquad (19)$$

Нерівність (19) є точною і перетворюється на рівність для функції $\varphi_{h,2}(y)$.

Припустимо тепер, що умови (8)–(10) не виконуються. В цьому випадку оцінку для $\|D^\alpha f\|_\infty$ запишемо у вигляді (див. (14) і (2.6) із [22]):

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leqslant \|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty + \|U_h^\alpha f\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\|F_h(|\cdot|) - c_hG_h(|\cdot|)\|_{E^1}\|\Delta f\|_E + \frac{4\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}h^{-\alpha}(1/\alpha + c_1)\|f\|_\infty =$$

$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}(2h^{-\alpha}\sigma_{m-1}(1/\alpha + c_1)\|f\|_\infty + \|F_h(|\cdot|) - c_hG_h(|\cdot|)\|_{E^1}\|\Delta f\|_E).$$

Для кожного $\varepsilon > 0$ існує функція $\psi_{h,\varepsilon} \in E$, $\|\psi_{h,\varepsilon}\|_E \leqslant 1$, така що

$$\int\limits_{B_h}(F_h(|y|) - c_hG_h(|y|))\psi_{h,\varepsilon}(y)\,dy > \|F_h(|y|) - c_hG_h(|y|)\|_{E^1} - \varepsilon.$$

і

$$\psi_{h,\varepsilon}(y) = \widetilde{\psi}_{h,\varepsilon}(|y|), \;\; y \in \mathbb{R}^m,$$

де $\widetilde{\psi}_{h,\varepsilon}(\rho)$ в середньому дорівнює нулю і $\operatorname{supp}\widetilde{\psi}_{h,\varepsilon}(\cdot) = [0,h]$.

Далі ми означимо $\widetilde{\varphi}_{h,2}(\rho)$ формулою (9) з функцією $\widetilde{\psi}_{h,\varepsilon}$ замість $\widetilde{\psi}_h$ і покладемо:

$$\varphi_{h,\varepsilon,2}(y) = \widetilde{\varphi}_{h,\varepsilon,2}(|y|), \;\; y \in \mathbb{R}^m.$$

Зрозуміло, що $\varphi_{h,\varepsilon,2} \in W^\Delta_{\infty,E}(\mathbb{R}^m)$,

$$\max_{y\in\mathbb{R}^m}\varphi_{h,\varepsilon,2}(y) = -\min_{y\in\mathbb{R}^m}\varphi_{h,\varepsilon,2}(y)$$

і

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}(F_h(|y|) - c_hG_h(|y|))\Delta\varphi_{h,\varepsilon,2}(y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{B_h} (F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\psi_{h,\varepsilon}(y)\, dy > \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} - \varepsilon.$$

Міркуючи, як і в попередньому випадку, в силу неперервності функції $D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(y)$ в точці 0 маємо:

$$\|D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty \geqslant |D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)| = |D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0) - U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0) + U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)|.$$

$$= |D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0) - U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)| + |U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)| =$$

$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left| \int\limits_{B_h} \psi_{h,\varepsilon}(y)(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy \right| + |U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)| >$$

$$> \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} - \varepsilon + \|U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty =$$

$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} - \varepsilon + \frac{4\sigma_{m-1} h^{-\alpha}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1\right) \|\varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty.$$

Рівність

$$\frac{\|U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty}{\|\varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty} = \frac{4\sigma_{m-1} h^{-\alpha}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1\right)$$

встановлюється аналогічно до відповідної рівності в лемі 1. Отже, можемо сформулювати теорему

Теорема 2. *Нехай* $0 < \alpha < 2$, E *– ідеальна напівінваріантна відносно зсуву решітка на* $\mathbb{R}^m$, *що задовольняє умови (4) і (5),* E^1 *– асоційований підпростір до* E. *Тоді для довільних* $f \in L^\Delta_{\infty,E}$ *і* $h > 0$ *виконується точна нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{2\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1\right) h^{-\alpha} \cdot \|f\|_\infty + \right.$$

$$\left. + \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} \cdot \|\Delta f\|_E \right). \tag{20}$$

Відзначимо, що у випадку $E = L_s(\mathbb{R}^m)$, $\dfrac{m}{2} < s < \infty$, результати теорем 1 і 2 отримані в [22].

4. Найкраще наближення оператора D^α обмеженими операторами. Нехай виконуються умови (8) – (10). Покладемо $h_N = \left(\frac{4\sigma_{m-1}\left(\frac{1}{\alpha}+c_1\right)}{d_{m,2}(\alpha)N}\right)^{1/\alpha} = \left(\frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty N}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ для $N > 0$. Із леми 3 випливає, що

$$E_N(D^\alpha, W^\Delta_{\infty,E}) \leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} = \|D^\alpha \varphi_{h_N,2} - U_1^\alpha \varphi_{h_N,2}\|_\infty,$$

а із точності нерівності (19) випливає, що для оператора D^α виконується умова (7.1.12) теореми 7.1.1 із [5] з оператором $T = U^\alpha_{h_N}$ і функцією $f(t) = \varphi_{h_N,2}$. Отже справедлива

Теорема 3. *Нехай $0 < \alpha < 2$, $N > 0$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву решітка на $\mathbb{R}^m$, що задовольняє умови (4) і (5), E^1 – асоційований підпростір до E. Тоді при виконанні умов (8) – (10) справджується рівність:*

$$E_N(D^\alpha, W^\Delta_{\infty,E}) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} = \|D^\alpha \varphi_{h_N,2} - U_1^\alpha \varphi_{h_N,2}\|_\infty.$$

При цьому оператор U_h^α з $h = h_N$ є екстремальним оператором.

5. Нерівності Колмогорова: оцінка норми похідної Рісса в ідеальній структурі. В цьому розділі ми узагальнимо результат теореми 1 із [21].

Для $h > 0$ і функції $f \in L^\Delta_{E,E}$ розглянемо оператор (11). Застосовуючи узагальнену нерівність Мінковського, маємо:

$$\|U_h^\alpha\|_E = \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{2f(\cdot) - f(\cdot + t) - f(\cdot - t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt + 2c_h \sigma_{m-1}(f(\cdot) - \widetilde{f}(\cdot,h)) \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \cdot 4\|f\|_E \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{dt}{|t|^{m+\alpha}} + c_h \sigma_{m-1} \right\} = \frac{4\|f\|_E \sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{h^{-\alpha}}{\alpha} + c_h \right).$$

Тепер для функції $f \in L^\Delta_{E,E}$ отримаємо оцінку величини $\|D^\alpha f(\cdot) - U_h^\alpha f(\cdot)\|_E$. По-перше покажемо, що для $f \in L^\Delta_{E,E}$ має місце зображення

$$D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int\limits_{B_h} (-\Delta f(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy. \tag{21}$$

Дійсно, оскільки $\Delta f \in E$, то використовуючи нерівність Гельдера, з урахуванням умови (4), відзначимо, що

$$\left| \int\limits_{B_h} (-\Delta f)(x+y)(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy \right| \leqslant \|\Delta f\|_E \|F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)\|_{E^1}. \tag{22}$$

Як в [21], встановлюємо, що для довільної фінітної нескінченно диференційовної функції φ і для $f \in L^\Delta_{E,E}$ має місце зображення

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)(D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x))\, dx =$$

$$= \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \int\limits_{B_h} (-\Delta f(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy\, dx,$$

звідки з урахуванням (22), маємо (21).

Використовуючи (21) і узагальнену нерівність Мінковського, одержимо оцінку:

$$\|D^\alpha f(\cdot) - U_h^\alpha f(\cdot)\|_E \leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|\Delta f\|_E \int\limits_{B_h} |F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)|\, dy.$$

Тепер для $\|D^\alpha f\|_E$ можемо написати

$$\|D^\alpha f\|_E \leqslant \|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_E + \|U_h^\alpha f\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\|\Delta f\|_E \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{L_1} + \frac{4\|f\|_E \sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}\left(\frac{h^{-\alpha}}{2} + c_h\right) =$$

$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\left(2\sigma_{m-1}\left(\frac{1}{\alpha}+c_1\right)h^{-\alpha}\cdot\|f\|_E + \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{L_1}\cdot\|\Delta f\|_E\right).$$

Таким чином, нами доведена

Теорема 4. *Нехай $0<\alpha<2$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву решітка на $\mathbb{R}^m$, що задовольняє умови (4) і (5), E^1 – асоційований підпростір до E. Тоді для довільних $f\in L^\Delta_{E,E}$ і $h>0$ виконується нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_E \leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\left(2\sigma_{m-1}\left(\frac{1}{\alpha}+c_1\right)h^{-\alpha}\cdot\|f\|_E + \right.$$

$$\left. + \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{L_1}\cdot\|\Delta f\|_E\right).$$

Із теореми 4 одразу випливає

Наслідок 1. *Нехай $m/2<s<\infty$ і $0<\alpha<2-m/s$ або $s=\infty$ і $0<\alpha<2$. Тоді для довільних функції $f\in L^\Delta_{s,s}$ і $h>0$ виконується нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_{L_s} \leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\left(2\sigma_{m-1}\left(\frac{1}{\alpha}+c_1\right)h^{-\alpha}\cdot\|f\|_{L_s} + \right.$$

$$\left. + \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{L_1}\cdot\|\Delta f\|_{L_s}\right). \tag{23}$$

При $s=\infty$ нерівність є точною.

Відзначимо, що нерівність (23) можна переписати у вигляді

$$\|D^\alpha f\|_{L_s} \leqslant \frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty} h^{-\alpha}\|f\|_{L_s} + \|D^\alpha \varphi_{1,2} - c_1 U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty h^{2-\alpha}\|\Delta f\|_{L_s}. \tag{24}$$

Після мінімізації по h остання нерівність набуває вигляду

$$\|D^\alpha f\|_{L_s} \leqslant \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}}\|\Delta f\|_{L_s}^{\frac{\alpha}{2}}\|f\|_{L_s}^{1-\frac{\alpha}{2}}. \tag{25}$$

В (24) і (25) функція $\varphi_{1,2}$ означена в такий спосіб (див. [21]). Нехай для $\rho\geqslant 0$ і $\delta=\sqrt[m]{2}$

$$\psi(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2m}(\rho^2 - 1/\delta^2 - \sigma G_1(1/\delta) + 1/2), & 0\leqslant\rho\leqslant 1/\delta \\ \frac{1}{2m}(-\rho^2 - 2\sigma_{m-1}G_1(\rho) + 1/\delta^2 + \sigma_{m-1}G_1(1/\delta) + 1/2), & 1/\delta<\rho\leqslant 1 \\ \psi(1), & \rho>1. \end{cases}$$

Для $h>0$ і $x\in\mathbb{R}^m$ покладемо

$$\varphi_{h,2}(x) = h^{-2}\psi(h|x|).$$

Отже, маємо

Наслідок 2. *Нехай $m/2 < s < \infty$ і $0 < \alpha < 2 - m/s$ або $s = \infty$ і $0 < \alpha < 2$. Тоді для довільних функції $f \in L^{\Delta}_{s,s}$ і $h > 0$ виконується нерівність*

$$\|D^{\alpha} f\|_s \leqslant \frac{\|D^{\alpha}\varphi_{1,2}\|_{\infty}}{\|\varphi_{1,2}\|_{\infty}^{1-\alpha/2}} \|\Delta f\|_{L_s}^{\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{L_s}^{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

При $s = \infty$ нерівність є точною.

Відзначимо, що у випадку $s = \infty$ результати наслідків 1 і 2 отримані в [21].

Висновки. В роботі отримані нові нерівності типу Колмогорова для норм дробових похідних за Ріссом порядку $0 < \alpha < 2$ функцій багатьох змінних з лапласіаном, обмеженим за нормою в ідеальній структурі.

1. **Колмогоров А. Н.** О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале / А. Н. Колмогоров // Избр. тр.: Математика, механика. М.: Наука. – 1985. –С. 252–263.
2. **Тихомиров В. М.** Неравенства для производных: Комментарии к избранным трудам А. Н. Колмогорова / В. М. Тихомиров, Г. Г. Магарил-Ильяев // М. : Наука, 1985. – С. 387–390.
3. **Арестов В. В.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными / В. В. Арестов, В. Н. Габушин // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 42–63.
4. **Арестов В. В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи / В. В. Арестов // Успехи мат. наук. – 1996. – Т. 51, № 6. – С. 88–124.
5. **Бабенко В. Ф.** Неравенства для производных и их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов. – Киев : Наук. думка, 2003. — 590 с.
6. **Mitrinović D. S.** Inequalities involving functions and their integrals and derivatives / D. S. Mitrinović, J. E. Peĉarić, A. M. Fink. – Dordrecht; Boston; London: Kluver Acad. Publ, 1991. — 587 p.
7. **Коновалов В. Н.** Точные неравенства для норм функций, третьих частных и вторых смешанных производных / В. Н. Коновалов // Мат. заметки. –1978. – Т. 23, вып. 1. – С. 67–78.
8. **Буслаев А. П.** О неравенствах для производных в многомерном случае / А. П. Буслаев, В. М. Тихомиров // Мат. заметки. – 1979. – Т. 25, вып. 1. – С. 59–74.
9. **Тимошин О. А.** Точные неравенства между нормами производных второго и третьего порядков / О. А. Тимошин // Докл. РАН. – 1995. – Т. 344, № 1. – С. 20–22.
10. **Тимофеев В. Г.** Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных / В. Г. Тимофеев // Мат. заметки. – 1985. – Т. 37, вып. 5. – С. 676–689.
11. **Babenko V. F.** Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications / V. F. Babenko, V. A. Kofanov, S. A. Pichugov // Multivariate approximation and splines / Eds. G. Nërberger, J.W. Schmidt, G. Walz. Basel: Birkhuser Verlag. – 1997. – P. 1–12.
12. **Бабенко В. Ф.** О точных неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных / В. Ф. Бабенко // Докл. НАН Украины. – 2000. – № 5. – С. 7–11.

13. **Гейсберг С. П.** Обобщение неравенства Адамара / С. П. Гейсберг // Исследование по некоторым проблемам конструктивной теории функций: сб. науч. тр. ЛОМИ, Ленинград. – 1965. – Т. 50. – С. 42–54.

14. **Arestov V. V.** Inequalities for fractional derivatives on the half-line / V. V. Arestov // Approximation theory: proc. conf. Warsaw: PWN-Pol. Sci. Publ. – 1979. – P. 19–34.

15. **Magaril-Il'jaev G. G.** On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line / G. G. Magaril-Il'jaev, V. M. Tihomirov // Anal. Math. – 1981. – Vol. 7, № 1. – P. 37–47.

16. **Бабенко В. Ф.** Точные оценки для норм дробных производных функций многих переменных, удовлетворяющих условию Гельдера / В. Ф. Бабенко, С. А. Пичугов // Мат. заметки. – 2010. – Т. 87, вып. 1. – С. 26–34.

17. **Бабенко В. Ф.** О неравенствах типа Колмогорова для производных дробного порядка / В. Ф.Бабенко, М. С. Чурилова // Вiсн. Днiпропетровського ун-ту. Математика. – 2001. – Т. 6. – С. 16–20.

18. **Babenko V. F.** Kolmogorov type inequalities for hypersingular integrals with homogeneous characteristic / V. F. Babenko, M. S. Churilova // Banach J. Math. – 2007. – Vol. 1. – P. 66–77.

19. **Babenko V. F.** Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions / V. F. Babenko, N. V. Parfinovych, S. A. Pichugov // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, № 3. – С. 301–314.

20. **Бабенко В. Ф.** Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения/ В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Труды УроРАН. – 2011. – Т. 17, № 3 – С. 60–70.

21. **Бабенко В. Ф.** Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных с ограниченным в L_∞ лапласианом и смежные задачи/ В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, С. А. Пичугов// Мат. заметки. – 2014. – Т. 95, вып. 1. – С. 3–17.

22. **Бабенко В. Ф.** Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения/ В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Укр. мат. вiсн. – 2012. – Т. 9, № 2 – С. 157–174.

23. **Моторный В. П.** Теория аппроксимации и гармонический анализ /В. П. Моторный, В. Ф. Бабенко, А. А. Довгошей, О. И. Кузнецова. – Киев : Наук. думка, 2010. – 302 с.

24. **Самко С. Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко , А. А. Килбас , О. И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

25. **Крейн С.Г.** Интерполяция линейных операторов/ С.Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М. Семенов. – М., Наука, 1978. – 400 с.

26. **Красносельский М. А.** Выпуклые функции и пространства Орлича/ М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий. – М., Физматгиз, 1958. – 271 с.

27. **Стечкин С. Б.** Наилучшее приближение ограниченных операторов /С. Б. Стечкин // Мат. заметки. —1967. — Т. 1, вып. 2. — С. 137–148.

28. **Курант Р.** Уравнения с частными проoизводными / Р. Курант. – М.: Мир, 1964. – 843 с.

Парфинович Н. В.

Оценки норм производных по Риссу функций многих переменных

Резюме

Пусть $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_m}$ – оператор Лапласа. Обозначим через $L_s(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leqslant s \leqslant \infty)$ пространства измеримых функций $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ с конечной нормой $\|f\|_s$. Пусть F і E – идеальные решетки на $\mathbb{R}^m$ с конечными нормами $\|\cdot\|_F$, $\|\cdot\|_E$. Через $L^{\Delta}_{F,E}(\mathbb{R}^m)$ обозначим пространство функций $f \in F$ таких, что $\Delta f \in E$. Если $F = L_s(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leqslant s \leqslant \infty)$, то будем использовать обозначения $L^{\Delta}_{s,E}$, или $L^{\Delta}_{s,s}$ если, кроме этого, $E = L_s(\mathbb{R}^m)$. В работе получены новые неравенства типа Колмогорова для норм производных по Риссу $D^{\alpha} f$ функций $f \in L^{\Delta}_{\infty,E}(\mathbb{R}^m)$. В качестве следствия получены такие неравенства для функций $f \in L^{\Delta}_{s,s}(\mathbb{R}^m)$. Решена задача о приближении неограниченного оператора D^{α} ограниченными на классе функций f таких, что $\|\Delta f\|_E \leqslant 1$.

Ключевые слова: дробная производная, неравенства для производных, приближения неограниченных операторов ограниченными, идеальные решетки .

Parfinovych N. V.

Estimates of the norms of Riesz derivatives of multivariate functions

Summary

Let $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_m}$ be the Laplace operator. We denote by $L_s(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leqslant s \leqslant \infty)$ the spaces of measurable functions $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ with a finite norm $\|f\|_s$. Let F and E be ideal lattices on $\mathbb{R}^m$ with finite norms $\|\cdot\|_F$ and $\|\cdot\|_E$. By $L^{\Delta}_{F,E}(\mathbb{R}^m)$ we denote the space of functions $f \in F$ such that $\Delta f \in E$. If $F = L_s(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leqslant s \leqslant \infty)$, then we use the notation $L^{\Delta}_{s,E}$, or $L^{\Delta}_{s,s}$ if, in addition, $E = L_s(\mathbb{R}^m)$. We obtain new Kolmogorov-type inequalities for the norms of the Riesz derivatives $D^{\alpha} f$ of functions $f \in L^{\Delta}_{\infty,E}(\mathbb{R}^m)$. As a corollary, we obtain inequalities for the functions $f \in L^{\Delta}_{s,s}(\mathbb{R}^m)$. The problem on approximation an unbounded operator D^{α} by bounded ones on a class of functions f such that $\|\Delta f\|_E \leqslant 1$ is solved.

Key words: fractional derivative, inequalities for derivatives, approximation of unbounded operator by bounded, ideal latties.

References

1. Kolmogorov, A. N. (1985). O neravenstvah mezhdu verhnimi granyami posledovatel'nyh proizvodnyh funkcii na beskonechnom intervale [On inequalities between the upper bounds of the successive derivatives of a function on an infinite interval]. *Izbr. tr.: Matematika, mekhanika. M.: Nauka.*, Vol. 52, P. 252–263.
2. Tikhomirov, V. M., Magaril-Il'yaev, G. G. (1985). Neravenstva dlya proizvodnyh: Kommentarii k izbrannym trudam A. N. Kolmogorova [Inequalities for derivatives: Comments on selected works of A. N. Kolmogorov]. M. : Nauka, P. 387–390.
3. Arestov, V. V., Gabushin, V. N. (1995). Nailuchsheye priblizheniye neogranichennykh operatorov ogranichennymi [Best approximation of unbounded operators by bounded ones]. *Izv. vuzov. Matematika*, № 11, P. 42–63.
4. Arestov, V. V.(1996). Priblizheniye neogranichennykh operatorov ogranichennymi i rodstvennyye ekstremal'nyye zadachi [Approximation of unbounded operators by bounded ones and related extremal problems]. *Успехи мат. наук*, V. 51, № 6, P. 88–124.
5. Babenko, V. F., Korneychuk, N. P., Kofanov, V. A., Pichugov, S. A. (2003). *Neravenstva dlya proizvodnykh i ikh prilozheniya [Inequalities for derivatives and their applications].* Kiyev : Nauk. dumka, 590 p.

6. Mitrinović, D. S., Peĉarić, J. E., Fink, A. M. (1991). *Inequalities involving functions and their integrals and derivatives.* Dordrecht; Boston; London: Kluver Acad. Publ, 1991. — 587 p.
7. Konovalov, V. N. (1978). Tochnyye neravenstva dlya norm funktsiy, tret'ikh chastnykh i vtorykh smeshannykh proizvodnykh [Exact inequalities for norms of functions, third partial and second mixed derivatives]. *Mat. zametki*, V. 23, №. 1, P. 67–78.
8. Buslayev, A. P., Tikhomirov, V. M. (1979). O neravenstvah dlya proizvodnykh v mnogomernom sluchaye [On inequalities for derivatives in the multidimensional case]. *Mat. zametki*, V. 25, № 1, P. 59–74.
9. Timoshin, O. A. (1995). Tochnyye neravenstva mezhdu normami proizvodnykh vtorogo i tret'yego poryadkov [Exact inequalities between the norms of the derivatives of second and third orders] *Dokl. RAN*, V. 344, № 1, P. 20–22.
10. Timofeyev, V. G. (1985). Neravenstva tipa Landau dlya funktsiy neskol'kikh peremennykh [Landau type inequalities for functions of several variables]. *Mat. zametki*, V 37, № 5, P. 676–689.
11. Babenko, V. F., Kofanov, V. A., Pichugov, S. A. (1997). Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications. *Multivariate approximation and splines / Eds. G. Nërberger, J.W. Schmidt, G. Walz. Basel: Birkhuser Verlag*, P. 1–12.
12. Babenko, V. F. (2000). O tochnykh neravenstvakh tipa Kolmogorova dlya funktsiy dvukh peremennykh [On exact inequalities of Kolmogorov type for functions of two variables]. *Dokl. NAN Ukrainy*, № 5, P. 7–11.
13. Geysberg, S. P. (1965). Obobshcheniye neravenstva Adamara [A generalization of the Hadamard inequality]. *Issledovaniye po nekotorym problemam konstruktivnoy teorii funktsiy: sb. nauch. tr. LOMI, Leningrad*, V 50, P. 42–54.
14. Arestov, V. V. (1979). Inequalities for fractional derivatives on the half-line.*Approximation theory: proc. conf. Warsaw: PWN-Pol. Sci. Publ*, P. 19–34.
15. Magaril-Il'jaev G. G., Tihomirov, V. M. (1981). On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line. *Anal. Math*, V. 7, № 1, P. 37–47.
16. Babenko, V. F., Pichugov, S. A. (2010). Tochnyye otsenki dlya norm drobnykh proizvodnykh funktsiy mnogikh peremennykh, udovletvoryayushchikh usloviyu Gel'dera [Exact estimates for the norms of fractional derivatives of functions of several variables that satisfy the Holder condition]. *Mat. zametki*, V. 87, № 1, P. 26–34.
17. Babenko, V. F., Churilova, M. S. (2001). O neravenstvakh tipa Kolmogorova dlya proizvodnykh drobnogo poryadka [On the Kolmogorov type inequalities for derivatives of fractional order]. *Visn. Dnipropetrovs'kogo un-tu. Matematyka*, V. 6, P. 16–20.
18. Babenko, V. F., Churilova, M. S. (2007). Kolmogorov type inequalities for hypersingular integrals with homogeneous characteristic. *Banach J. Math*, V. 1, P. 66–77.
19. Babenko, V. F., Parfinovych, N. V., Pichugov, S. A. (2010). Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions. *Ukr. mat. zhurn*, V. 62, № 3, P. 301–314.
20. Babenko, V. F., Parfinovich, N. V. (2011). Neravenstva tipa Kolmogorova dlya norm proizvodnykh Rissa funktsiy mnogikh peremennykh i nekotoryye ikh prilozheniya [Kolmogorov type inequalities for the norms of Riesz derivatives of functions of several variables and some of their applications]. *Trudy Uro RAN*, V. 17, № 3, P. 60–70.
21. Babenko, V. F., Parfinovich, N. V., Pichugov, S. O. (2014). Neravenstva tipa Kolmogorova dlya norm proizvodnykh Rissa funktsiy mnogikh peremennykh s ogranichennym v L_∞ laplasianom i smezhnyye zadachi [Kolmogorov type inequalities for the

norms of Riesz derivatives of functions of several variables with bounded in L_∞ Laplacian and related problems]. *Mat. zametki*, V. 95, №. 1, P. 3–17.

22. Babenko V. F., Parfinovich, N. V. (2012). Neravenstva tipa Kolmogorova dlya norm proizvodnykh Rissa funktsiy mnogikh peremennykh i nekotoryye ikh prilozheniya[Kolmogorov type inequalities for the norms of Riesz derivatives of functions of several variables and some of their applications] *Ukr. mat. visn*, V. 9, № 2, P. 157–174.
23. Motornyy, V. P., Babenko, V. F, Dovgoshey, A. A., Kuznetsova, O. I. (2010). *Teoriya approksimatsii i garmonicheskiy analiz [Approximation theory and harmonic analysis]*. Kiyev : Nauk. dumka, 302 p.
24. Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I. (1987). *Integraly i proizvodnye drobnoho poryadka i nekotorye ih prilozheniya [Fractional integrals and derivatives with some applications]*. Minsk: Nauka i tekhnika, 688 p.
25. Kreyn, S. G., Petunin, YU. I, Semenov, Ye. M. (1978). *Interpolyatsiya lineynykh operatorov [Interpolation of linear operators]*. M., Nauka, 400 p.
26. Krasnosel'skiy M. A., Rutitskiy YA. B. (1958). *Vypuklyye funktsii i prostranstva Orlicha [Convex functions and Orlicz spaces]*. M., Fizmatgiz, 271 p.
27. Stechkin, S. B. (1967). Nailuchsheye priblizheniye ogranichennykh operatorov [the best approximation of bounded operators]. *Mat. zametki*, V. 1, №. 2, P 137–148.
28. Kurant, R. (1964). *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi[Partial differential equations]*. M.: Mir, 843 p.

Дослідження в математиці і механіці.– 2017.– Т.22, вип. 1(29).– С. 62–69

УДК 517.928

В. В. Платонов[1], Е. В. Платонова[2]
[1] ТОВ НЕТКРЕКЕР, Одеса
[2] Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

УСРЕДНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СУДОВОГО КОМПЛЕКСА ПРИ ПРЯМОМ КУРСЕ СУДНА

В статье рассматривается возможность применения схемы полного усреднения к задаче управления судовым комплексом. Впервые модель этой задачи была описана Небесновым В. И., Плотниковым В. А. и Кузюшиным Ф. Я для судна с винтом регулируемого шага, позволяющим управлять движением судна только с помощью изменения степени разворота лопасти, не изменяя работы двигателя. В статье применена схема полного усреднения для задачи управления судовым комплексом при прямом движении судна с некоторой угловой и линейной скоростью в условиях регулярного волнения. Построено множество оптимальных управлений усреднённой задачи. Применяя схему усреднения, удалось аппроксимировать множество допустимых управлений усреднённой системы множеством меньшей размерности с описанием его в явном виде, что значительно уменьшает объем вычислений.

MSC:34C29, 34A60 .
Ключевые слова: усреднение, дифференциальные включения, ВРШ, множество допустимых управлений .

Введение. При исследовании динамики механических систем часто получают модели, содержащие системы дифференциальных уравнений с малыми параметрами. Для их решения используются различные асимптотические методы, в частности, метод усреднений. Метод усреднения связан с существованием некоторой замены переменных, позволяющей исключить время t из правых частей рассматриваемых уравнений с наперед заданной степенью точности относительно малого параметра. Метод усреднений значительно сокращает объем вычислений, необходимый для решения задач. Поэтому метод часто используется для решения прикладных задач управления [3].

В статье приведены результаты применения одной из схем метода усреднения к дифференциальным уравнениям движения комплекса при прямом курсе судна.

Основные результаты

1. Общая постановка задачи и необходимые теоретические сведения. Пусть движение объекта описывается системой вида:

$$\dot{x} = \varepsilon \left[f\left(t,x\right) + A\left(x\right) \phi\left(t,u\right) \right], \, x\left(0\right) = x_0 \qquad (1)$$

где x-n-мерный фазовый вектор, ε-малый параметр, $f\left(t,x\right)$ и $\phi\left(t,x\right)$-вектор функции, 2π-периодические по времени t, $t \in \left[0,L\varepsilon^{-1}\right]$, $A\left(x\right) - n \times m$ матрица; $u \in U$-вектор управления, $U \subset comp(R^m)$. Все функции измеримы, ограничены и удовлетворяют условию Липшица по x и u.

Получена 27.04.2017

Применим схему полного усреднение [2] к системе (1). Системе (1) поставим в соответствие следующую усреднённую систему

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau} = \bar{f}\,(\bar{x}) + A\,(\bar{x})\,\varsigma\,(z)\,, \quad \bar{x}\,(0) = x_0 \tag{2}$$

где $z \in R^m$- новый вектор управления, $\|z\| = 1$, $\varsigma\,(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \phi\,(t,y\,(t,z))dt$ — функция, которая ставит в соответствие новому единичному вектору управления точку на границе множества

$V = \left\{ \varsigma \in R^m | \varsigma = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \phi(t,u(t))dt, u(t) \in U \right\}$ функция $y(t,z)$ опредеялется из условия $(\phi(t,y(t,z)),z) = \underset{u\in U}{max}(\phi(t,u),z)$

Уравнения (1) и (2) можно переписать в виде дифференциальных включений:

$$\dot{x} = f(t,x,u), u \in U, x(t_0) = x_0$$

$$\dot{x} \in f(t,x,U)$$

$$\dot{x} \in F(t,x) \tag{3}$$

$$\dot{\bar{x}} \in \bar{F}(t,\bar{x}) \tag{4}$$

где

$$F(t,x) = \{f(t,x,u)|u(t) \in U\}$$

$$\bar{F}(t,x) = \left\{ \bar{f}(x) \in R^n | \bar{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t,x,u(t))dt, u(t) \in U \right\}$$

Теорема [2]. Пусть в области $Q\{t \geqslant 0, x \in D \subset R^n\}$ выполнены следующие условия:

1) отображение $F(t,x)$ является непустым компактои при всех допустимых значениях аргументов, непрерывно, равномерно ограничено, удовлетворяет условия Липшица по x с постоянной λ;

2) отображение $F(t,x)$ 2π-периодично по t;

3) для всех $x_0 \in D' \in D$ и $t \geqslant 0$ решения включения (4) вместе с некоторой ρ-окрестностью лежат в области D.

Тогда для любого $L > 0$ найдутся такие $\varepsilon^0(L) > 0$ и $L > 0$, что при $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$ и $t \in \left[0, L\varepsilon^{-1}\right]$ справедлива оценка

$$h(\dot{R}(t), R^1(t)) \leqslant C\varepsilon$$

где $\dot{R}(t)$ — сечение семейства решений усреднённого включения (4), $R^1(t)$-замыкание семейства решений исходного включения (3).

Рассмотрим применение этой схемы усреднений для задачи управления судовым комплексом.

2. Построение моделей движения судна. Пусть судно движется прямым курсом, и все его главные двигатели работают на одинаковых режимах на гребные винты непосредственно или через зубчатые редукторы. Тогда, получим:

$$\begin{aligned} \tfrac{d\bar{v}}{dT} &= \bar{P} - \bar{R} \\ \tfrac{d\bar{\omega}}{dT} &= N\left(\bar{M}_D - \bar{M}_C\right), \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$v = \frac{v}{v_0}, T = \frac{z_B P_0}{m v_0} t, \bar{P} = \frac{P}{P_0}, \bar{R} = \frac{R}{R_0}, \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$N = \frac{m v_0 M_{C0}}{\bar{I} \omega_0 z_B P_0}, \bar{M}_D = \frac{M_D}{M_{D0}}, M_C = \frac{M_C}{M_{C0}};$$

v, P, R, ω, M_D и M_C — текущие значения соответственно скорости движения судна, тяги винта, силы сопротивления корпуса, угловой скорости винта, эффективного движущего момента, приведенного к гребному валу, и момента сопротивления винта; индекс «0» означает, что взято начальное значение параметра, соответствующее некоторому установившемуся режиму; z_B — число винтов; m — масса судна, включая присоединенную массу; t — время; z_B — число винтов; $\bar{I}$ — приведенный к гребному валу момент инерции движущихся частей, включая массу воды.

Для случая движения в спокойной воде судна с винтами регулируемого шага уравнения (5) приводится к виду [1]:

$$\begin{gathered}
\frac{d\bar{v}}{d\tau} = \left[\bar{\varphi}\left(a_1\bar{\omega}^2 + b_1\frac{\lambda_0}{\lambda_{1\max}}\bar{v}\bar{\omega} + c_1\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2}\bar{v}^2\right) + e_1\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2}\bar{v}^2\right] - \\
-\chi\left[\frac{\varphi_0}{\varphi_{\max}}\left(a_1^0 + b_1^0\frac{\lambda_0}{\lambda_{1\max}} + c_1^0\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2}\right) + e_1^0\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2}\right]\bar{v}^2; \\
\frac{d\bar{\omega}}{d\tau} = N\left\{\begin{array}{l}
\frac{\varphi_0}{\varphi_{\max}}\left[\frac{\varphi_0}{\varphi_{\max}}\left(a_2^0 + b_2^0\frac{\lambda_0}{\lambda_{2\max}} + c_2^0\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2}\right) + e_2^0\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2}\right]M^0 - \\
-\bar{\varphi}\left[\bar{\varphi}\left(a_2\bar{\omega}^2 + b_2\frac{\lambda_0}{\lambda_{2\max}}\bar{v}\bar{\omega} + c_2\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2}\bar{v}^2\right) + e_2\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2}\bar{v}^2\right]
\end{array}\right\}.
\end{gathered} \tag{6}$$

здесь

$$\tau = z_B K_{1\max}^0 \frac{\rho D^4}{(2\pi)^2}\frac{\omega_0^2}{m v_0} t;$$

$$\chi = \left\{\begin{array}{ll} \chi_1, & \text{если } \bar{v} \geqslant 0 \\ -1.35\chi_1, & \text{если } \bar{v} < 0 \end{array}\right. ; \tag{7}$$

$$N = \frac{m v_0 K_{2\max}^0 D}{\bar{I}\omega_0 z_B K_{1\max}^0};$$

a_1^0, b_1^0, c_1^0, e_1^0, a_2^0, b_2^0, c_2^0, e_2^0,χ_1 — значение соответствующих коэффициентов на исходном режиме; D — диаметр гребного винта; ρ — плотность воды; φ_i — текущее значение шагового отношения; λ_i — присоединенный момент инерции i-го винта; λ_0 — относительная поступь винта на исходном режиме; K_{10} - начальное значения коэффициентов гидромеханических сил, действующих на корпус судна.

Для различных комбинаций знака $\bar{\phi}$ и $\bar{v}$ коэффициенты a_1, b_1, c_1, e_1, a_2, b_2, c_2 и e_2 имеют различные значения. В частности:

Случай 1. $\bar{\phi} \geqslant 0$ и $\bar{v} \geqslant 0$ задано $a_1 = 1$, $b_1 = -0.60$, $c_1 = 1.20$, $e_1 = -1.6$, $a_2 = 1$, $b_2 = -0.65$, $c_2 = 1.45$, $e_2 = -1.8$.

Случай 2. $\bar{\phi} \leqslant 0$ и $\bar{v} \geqslant 0$ задано $a_1 = 0.75$, $b_1 = -1.40$, $c_1 = 2.05$, $e_1 = -1.6$, $a_2 = 0.90$, $b_2 = -1.60$, $c_2 = 2.30$, $e_2 = -1.8$.

Случай 3. $\bar{\phi} \leqslant 0$ и $\bar{v} \leqslant 0$ задано $a_1 = 0.75$, $b_1 = 0.32$, $c_1 = 1.6$, $e_1 = 2.5$, $a_2 = 0.90$, $b_2 = 0.34$, $c_2 = 1.8$, $e_2 = 2.7$.

В статье рассматривается случай 1, т. е. когда судно движется вперёд с некоторой угловой и линейной скоростью. Здесь

$$P_{e0}=\frac{\varphi_0}{\varphi_{\max}}\left(a_1^0+b_1^0\frac{\lambda_0}{\lambda_{1\max}}+c_1^0\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2}\right)+e_1^0\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2};$$
$$M_{C0}=\frac{\varphi_0}{\varphi_{\max}}\left[\frac{\varphi_0}{\varphi_{\max}}\left(a_2^0+b_2^0\frac{\lambda_0}{\lambda_{2\max}}+c_2^0\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2}\right)+e_2^0\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2}\right], \tag{8}$$

Тогда получим

$$\frac{d\bar{v}}{d\tau}=\left[\bar{\varphi}\left(a_1\bar{\omega}^2+b_1\frac{\lambda_0}{\lambda_{1\max}}\bar{v}\bar{\omega}+c_1\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2}\bar{v}^2\right)+e_1\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2}\bar{v}^2\right]-\chi P_{e0}\bar{v}^2;$$
$$\frac{d\bar{\omega}}{d\tau}=N\left\{M_{C0}M^0-\bar{\varphi}\left[\bar{\varphi}\left(a_2\bar{\omega}^2+b_2\frac{\lambda_0}{\lambda_{2\max}}\bar{v}\bar{\omega}+c_2\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2}\bar{v}^2\right)+e_2\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2}\bar{v}^2\right]\right\} \tag{9}$$

При движении судна с винтами регулируемого шага в условиях регулярного волнения уравнения движения (5) имеют вид[1]:

$$\frac{d\bar{v}}{d\tau}=\frac{1}{A}\left\{\left[\bar{\varphi}\left(a_1\bar{\omega}^2+b_1\frac{\lambda_0}{\lambda_{1\max}}\bar{v}\bar{\omega}+c_1\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2}\bar{v}^2\right)+e_1\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2}\bar{v}^2\right]c_1(\tau)-\chi P_{e0}c_{10}\bar{v}^2\right\};$$
$$\frac{d\bar{\omega}}{d\tau}=\frac{N}{A}\left\{M_{C0}c_{20}M^0-\bar{\varphi}\left[\bar{\varphi}\left(a_2\bar{\omega}^2+b_2\frac{\lambda_0}{\lambda_{2\max}}\bar{v}\bar{\omega}+c_2\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2}\bar{v}^2\right)+e_2\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2}\bar{v}^2\right]c_2(\tau)\right\}, \tag{10}$$

где

$$c_1(\tau)=\begin{cases}0.4+1.2\alpha(\tau) & \text{при } \alpha(\tau)\leqslant 0{,}5\\ 1 & \text{при } \alpha(\tau)>0{,}5\end{cases};$$
$$c_2(\tau)=\begin{cases}0.5+\alpha(\tau) & \text{при } \alpha(\tau)\leqslant 0{,}5\\ 1 & \text{при } \alpha(\tau)>0{,}5\end{cases} \tag{11}$$

$$\alpha(\tau)=\frac{h_0}{2.4R}-\frac{e\psi_0}{2.4R}\sin\tau; \tag{12}$$

$\tau=pt$, P- частота качки,

$$A=\frac{mv_0P}{z_BK_{1max}^0\frac{\rho D^4}{(2\pi)^2}\omega_0^2}$$

h_0 - погружение винта при $\psi=0$; R - радиус винта; $e\psi_0$ - амплитуда колебаний винта в вертикальной плоскости.

Рассмотрим случай, когда $\alpha(\tau)=0.5-0.4\sin(\tau)$. В этом случае функции $c_1(\tau)>0$ и $c_2(\tau)>0$, для любого τ.

3. Применение схемы усреднения к зачаде управления судовым комплексом. Построим усреднённуя систему к системе (10)

$$\frac{dv}{d\tau}=\frac{1}{A}\left\{e_1\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2}v^2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}c_1(\tau)d\tau-\chi P_{e0}c_{10}v^2+\left(a_1\omega^2+b_1\frac{\lambda_0}{\lambda_{1\max}}v\omega+c_1\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{1\max}^2}v^2\right)x_1(z)\right\}$$
$$\frac{d\omega}{d\tau}=\frac{N}{A}\left\{M_{C0}c_{20}M^0-\left(a_2\omega^2+b_2\frac{\lambda_0}{\lambda_{2\max}}v\omega+c_2\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2}v^2\right)x_2(z)-\right.$$
$$\left.-e_2\frac{\lambda_0^2}{\lambda_{2\max}^2}v^2x_3(z)\right\} \tag{13}$$

где

$$\varsigma(z)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(\tau,z)c_1(\tau)d\tau;\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(\tau,z)c_2(\tau)d\tau;\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(\tau,z)^2c_2(\tau)d\tau\right)^T \tag{14}$$

$z(\tau) \in R^3$ - новый вектор управления, $\|z\| = 1, \varsigma(z)$ - функция, ставящая в соответствие вектору z, некоторую точку граничного множества V. Функцию $p(\tau,z)$ ищем из условия максимума функции Гамильтона:

$$H(\tau,p(\tau,z),z) = \max_{u \in U} H(\tau,u,z) = \max_{u \in U}(c_1(\tau)uz_1 + c_2(\tau)uz_2 + c_2(\tau)u^2 z_3).$$

Тогда из условия $\frac{dH(\tau,u,z)}{du} = 0$ и $\frac{d^2H(\tau,u,z)}{du^2} < 0$ получим

$$p(\tau,z) = \begin{cases} \frac{c_1(\tau)}{c_2(\tau)}\left(-\frac{z_1}{2z_3}\right) + \left(-\frac{z_2}{2z_3}\right), & \text{если } c_2(\tau)z_3 < 0 \\ sign(c_1(\tau)z_1 + c_2(\tau)z_2), & \text{если } c_2(\tau)z_3 \geqslant 0 \end{cases} \tag{15}$$

Рассмотрим случай, когда коэффициенты в функции $c_2(\tau)$ таковы, что $c_2(\tau) > 0$, для любогоτ.

Тогда

$$p(\tau,z) = \begin{cases} \frac{c_1(\tau)}{c_2(\tau)}\left(-\frac{z_1}{2z_3}\right) + \left(-\frac{z_2}{2z_3}\right), & \text{если } z_3 < 0 \\ sign(c_1(\tau)z_1 + c_2(\tau)z_2), & \text{если } z_3 \geqslant 0 \end{cases} \tag{16}$$

Вектор $\varsigma(z)$ находим по формуле (14). Зададим

$$z = (z_1,z_2,z_3)^T = (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2, \sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \sin\varphi_2)^T \tag{17}$$

где $\varphi_1 \in [0,2\pi]$, $\varphi_2 \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos\varphi_1 ctg\varphi_2, \qquad \frac{z_2}{z_3} = \sin\varphi_1 ctg\varphi_2$$

В случае $z_3 < 0$ $\left(\varphi_2 \in \left[-\frac{\pi}{2},0\right)\right)$, учитывая (17), координаты точек множества $V = \{\varsigma = \varsigma(z) | \; \|z\| = 1\}$ будут заданы формулами:

$$\varsigma_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{c_1^2(t)}{c_2(t)}dt\,(-0.5\cos\varphi_1 ctg\varphi_2) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(t)dt\,(-0.5\sin\varphi_1 ctg\varphi_2) \tag{18}$$

$$\varsigma_2(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_2(t)dt\,(-0.5\cos\varphi_1 ctg\varphi_2) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_2(t)dt\,(-0.5\sin\varphi_1 ctg\varphi_2) \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\varsigma_3(z) = {} & \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_0^{2\pi} \tfrac{c_1^2(t)}{c_2(t)}dt\,(-0.5\cos\varphi_1 ctg\varphi_2)^2 + \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_0^{2\pi} c_1(t)dt\,\left(0.5\cos\varphi\sin\varphi_1 ctg^2\varphi_2\right) + \\ & + \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_0^{2\pi} c_2(t)dt\,(-0.5\sin\varphi_1 ctg\varphi_2)^2\end{aligned} \tag{20}$$

В случае $z_3 \geqslant 0$ $\left(\varphi_2 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$, учитывая (17), координаты точек множества $V = \{\varsigma = \varsigma(z) | \; \|z\| = 1\}$ будут заданы формулами:

$$\varsigma_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(t) sign(2c_2(t)\cos\varphi_1 ctg\varphi_2 + 2c_2(t)\sin\varphi_1 ctg\varphi_2)dt \tag{21}$$

$$\varsigma_2(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_2(t) sign(c_1(t)\cos\varphi_1 ctg\varphi_2 + c_2(t)\sin\varphi_2 ctg\varphi_2)dt \tag{22}$$

$$\varsigma_3(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_2(t)dt \qquad (23)$$

4. Построение множества управлений усреднённой задачи. Множество V, построенное по формулам (18)–(23), имеет вид, представленный на рисунке 1.

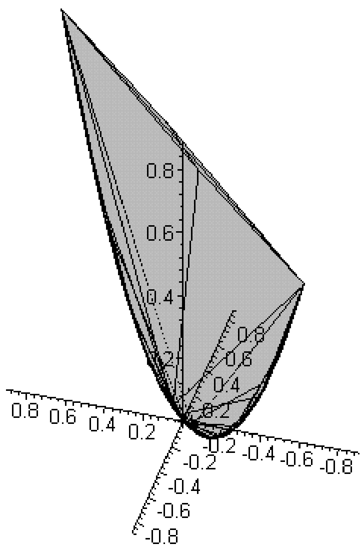

Рис 1. Множество V при $\alpha(\tau) = 0.5 - 0.4\sin(\tau)$, $\varepsilon = 0.1$.

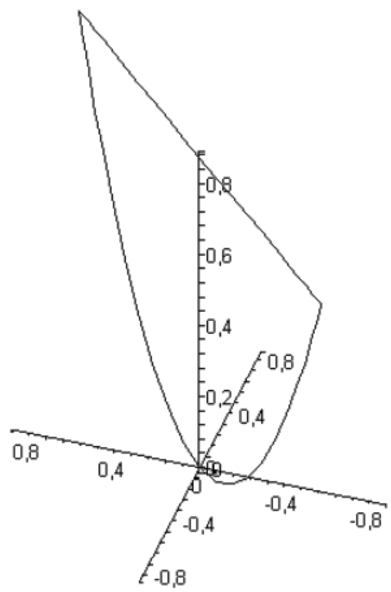

Рис 2. Множество Y.

Множество V является множеством допустимых управлений усреднённой задачи. Было получено задание точек множества V явном виде. Из выражений задающих множество V и изображения множества видно, что с некоторой погрешностью V можно приблизить некоторым множеством Y плоским в пространстве R^3, что позволяет осуществить переход к новому двумерному управлению. Граница множества Y может быть задана в виде:

$$\partial Y = \left\{ \begin{array}{r} y = (y_1,y_2,y_3) \ | \, y_1 = \beta_1 t, y_2 = \beta_2 t, y_3 = \beta_3 t^2, \text{ при } t \in (-1,1) \\ y_1 \in [-1,1], y_2 = y_1 \, , y = \beta_3, \text{ при } t = 1 \, , \, t = -1 \end{array} \right\} \qquad (24)$$

где

$$\beta_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{c_1^2(t)}{c_2(t)}dt = 0.82419, \qquad \beta_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(t)dt = 0\ .8472,$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_2(t)dt = 0.8727.$$

График множества Y представлен на рисунке 2.

Заключение. Таким образом, в статье применён метод усреднения для задачи управления движения судном с винтом регулируемого шага. Так как в задаче управление входит линейно, то принцип максимума Понтрягина является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности управления. Поэтому построенное множество управлений V усреднённой задачи будет множеством оптимальных допустимых управлений. Метод усреднения позволил также уменьшить размерность пространства управлений и уменьшить объем вычислений.

1. **Небеснов В .И.**, Плотников В. А., Кузюшин Ф. Я. Оптимальное управление ВРШ на волнении. – М.: Пищевая промышленность, 1974. – 87 с.
2. **Плотников В. А.**, Плотников А. В., Витюк О. Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. – Одесса: Астропринт, 1999. – 356 с.
3. **Салмин В. В.**, Ишков С. А., Старинова О. Л. Методы решения вариационных задач механики космичес кого полета с малой тягой. – Изд-во СНЦ, 2006.

Платонов В. В., Платонова Є. В.
Усереднення диференційних рівнянь руху суднового комплексу при прямому курсі судна

Резюме

У статті розглядається можливість застосування схеми повного усереднення до задачі керування судновим комплексом. Вперше модель цього типу була описана Небесновим В. І., Плотніковим В. А. і Кузюшіним Ф. Я. для судна з гвинтом регульованого кроку, що дозволяє управляти рухом судна тільки за допомогою зміни ступеня розвороту лопаті, не змінюючи режим роботи двигуна. У статті застосована схема повного усереднення для задачі управління судновим комплексом при прямому русі судна з деякою кутовою та лінійною швидкістю в умовах регулярного хвилювання. Побудовано множина оптимальних керувань усередненої задачі. Застосовуючи схему усереднення, вдалося апроксимувати множину допустимих керувань усередненої системи множиною меншої розмірності з описом його в явному вигляді, що значно зменшує обсяг обчислень
Ключові слова: усереднення, диференціальні включення, ГРК, множина допустимих керуваньъ .

Platonov V. V., Platonova E. V.
Averaging of differential equations of movement for the ship on the direct course

Summary

The possibility of applying the full averaging scheme to the ship complex control problem is considered in the article. The model of this problem was first described by V. I. Nebesnov and V. A. Plotnikov and F. Y. Kuzyushin. In the paper we considered a full averaging scheme for the problem of controlling a ship complex in the direct movement with a certain angular and linear velocity under conditions of regular waves. A set of optimal controls for the averaged problem is constructed. By applying the averaging scheme it is possible to approximate the set of admissible controls of the averaged system by a set of smaller dimension with an

explicit description of it, which significantly reduces the amount of computation.

Key words: Averaging, differential inclusions, VPP, the set of admissible controls.

References

1. Nebesnov, V. I., Plotnikov, V. A. & Kuzyushin, F. Ya. (1974). *Optimalnoe upravlenie VRSh na volnenii*, Moscow: Pischevaya promyishlennost, 87 p.
2. Plotnikov, V. A., Plotnikov, A. V. & Vityuk, O. N. (1999). *Differentsialnyie uravneniya s mnogoznachnoy pravoy chastyu*, Odessa: Astroprint, 356 p.
3. Salmin, V. V., Ishkov, S. A. & Starinova, O. L. (2006). *Metodyi resheniya variatsionnyih zadach mehaniki kosmicheskogo poleta s maloy tyagoy*, Moscow: Izd-vo SNTs.

Дослідження в математиці і механіці.– 2017.– Т.22, вип. 1(29).– С. 70–80

УДК 519.853.6

Є. М. Страхов, А. Т. Яровий
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

АНАЛІЗ P-КРОКОВИХ МЕТОДІВ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Розглядається задача багатовимірної мінімізації неперервно диференційовної функції при відсутності обмежень. Ітераційний алгоритм розв'язування такої задачі називається багатокроковим, якщо для знаходження наступного наближення до точки мінімуму використовуються значення функції або її градієнта у двох або більше попередніх точках. Так, алгоритм методу спряжених градієнтів належить до двокрокових. Описується узагальнений p-кроковий алгоритм, встановлені його властивості у випадку квадратичної цільової функції. Показано, що даний метод належить до методів спряжених напрямків. Метою обчислювального експерименту було порівняння результатів мінімізації у залежності від кількості доданків (кроків) p та виявлення «оптимального» значення для p. Наводяться результати обчислень для деяких відомих тестових функцій.
MSC: 90C30, 49M20.
Ключові слова: p-кроковий алгоритм, спряжені напрямки, задача безумовної оптимізації .

Вступ. Розглянемо задачу нелінійного програмування

$$\varphi(x) \to \min, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

де $\varphi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ є неперервно диференційовною функцією. Позначимо її градієнт через $\varphi'(x)$.

Одним із класичних підходів до розв'язування задачі (1) є метод спряжених градієнтів. Його алгоритм має такий загальний вигляд:

$$\begin{gathered} x^{k+1} = x^k + \beta_k s^k, \quad k = 0, 1, \dots, \\ s^0 = -\varphi'(x^0), \quad s^k = -\varphi'(x^k) + \gamma_{k-1} s^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{gathered} \tag{2}$$

де x^0, x^1, …,x^k, … — послідовні наближення, s^0, s^1, …,s^k, … — напрямки спуску, β_k — величина кроку вздовж напрямку спуску, γ_{k-1} — числовий параметр.

Для обчислення напрямку спуску s^{k+1} у алгоритмі (2) використовується не лише інформація поточного k-го, але й попереднього, $(k-1)$-го кроку. Отже, метод (2) належить до двокрокових методів.

Одним із можливих варіантів вибору кроку β_k є розв'язування задачі одновимірної мінімізації:

$$\beta_k : \min_{\beta \geqslant 0} \varphi\left(x^k + \beta s^k\right). \tag{3}$$

Так як розв'язування задачі (3) ускладнює процес пошуку точки мінімуму, можна піти іншим шляхом: ітеративно підбирати величину кроку так, щоб ця величина задовольняла певну умову. Однією із поширених є умова Вольфе:

$$\begin{gathered} \varphi\left(x^k + \beta_k s^k\right) - \varphi\left(x^k\right) \leqslant \delta \beta_k \left[\varphi'\left(x^k\right)\right]^\top s^k, \\ \left[\varphi'\left(x^k + \beta_k s^k\right)\right]^\top s^k \geqslant \sigma \left[\varphi'\left(x^k\right)\right]^\top s^k, \end{gathered} \tag{4}$$

Надійшла 16.02.2017

де $0 < \delta \leqslant \sigma < 1$ — деякі константи.

Різновиди методу (2) визначаються способом обчислення параметру γ_{k-1}, зокрема

- $\gamma_{k-1} = \frac{\left\|\varphi'\left(x^k\right)\right\|^2}{\|\varphi'(x^{k-1})\|^2}$ (метод Флетчера — Рівза);
- $\gamma_{k-1} = \frac{\left(\varphi'\left(x^k\right), \varphi'\left(x^k\right) - \varphi'\left(x^{k-1}\right)\right)}{\|\varphi'(x^{k-1})\|^2}$ (метод Полака — Ріб'єра — Поляка)

та інші. Тут і далі $\|\cdot\|$ означає евклідову норму вектора, а $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток векторів.

Метод спряжених градієнтів вважається досить ефективним для задач великого виміру. Він у більшій мірі порівняно із однокроковими методами враховує геометричні властивості цільової функції. Недоліком методу є чутливість до похибок обчислень, особливо при великій кількості змінних.

У статті [4] нами було розглянуто трикроковий метод

$$x^{k+1} = x^k + \beta_k s^k, \quad k = 0,1,\ldots,$$
$$s^k = \begin{cases} -\varphi'\left(x^k\right), & k = 0, \\ -\varphi'\left(x^k\right) + \xi_{k-1}s^{k-1}, & k = 1, \\ -\varphi'\left(x^k\right) + \xi_{k-1}s^{k-1} + \gamma_{k-2}s^{k-2}, & k = 2,3,\ldots \end{cases} \tag{5}$$

та показано його переваги у порівнянні з методом спряжених градієнтів на тестових функціях переважно із невеликою кількістю змінних ($n \leqslant 20$). Також слід відзначити, що використання ще одного доданку при визначенні напрямку спуску не збільшує кількість обчислень функції та її градієнта на одній ітерації.

Метою даної роботи є узагальнення алгоритму (5) на будь-яку кількість доданків p.

Основні результати

1. Теоретичні положення методу.

Отже, повернемося до задачі нелінійного програмування (1). Розглянемо узагальнений p-кроковий метод з таким алгоритмом:

$$x^{k+1} = x^k + \beta_k s^k, \; k = 0,1,\ldots,$$
$$s^k = \begin{cases} -\varphi'\left(x^k\right), & k = 0, \\ -\varphi'\left(x^k\right) + \gamma_{k-1}s^{k-1} + \ldots + \gamma_{k-(p-1)}s^{k-(p-1)}, & k = 1,2,\ldots, \end{cases} \tag{6}$$

де, як і раніше, $x^0, \ldots, x^k, \ldots$ — послідовні наближення, $s^0, \ldots, s^k, \ldots$ — напрямки спуску, β_k, $\gamma_{k-1}, \ldots, \gamma_{k-(p-1)}$ — числові параметри. Крок β_k будемо визначати з умови (3) або (4). Зазначимо, що при $p = 2$ отримаємо класичний метод спряжених градієнтів, а при $p = 3$ — метод (5).

Означення 1. [5] *Вектори s' і s'' називаються спряженими (відносно матриці A), якщо вони відмінні від нуля і $(As', s'') = 0$. Вектори $s^0, s^1, \ldots, s^k$ називаються взаємно спряженими (відносно матриці A), якщо всі вони відмінні від нуля і $\left(As^i, s^j\right) = 0$, $i \neq j$, $0 \leqslant i,j \leqslant k$. Матриця A вважається симетричною і додатно означеною ($A > 0$).*

Розглянемо деякі властивості методу (6) за умови, що функція $\varphi(x)$ є квадратичною, тобто

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c. \tag{7}$$

Побудуємо систему взаємно спряжених напрямків за правилом (6).

$$0 = \left(s^k, As^{k-1}\right) = -\left(\varphi'\left(x^k\right), As^{k-1}\right) +$$
$$+\gamma_{k-1}\left(s^{k-1}, As^{k-1}\right) + \ldots + \gamma_{k-(p-1)}\left(s^{k-(p-1)}, As^{k-1}\right).$$

Звідси

$$\gamma_{k-1} = \frac{\left(\varphi'\left(x^k\right), As^{k-1}\right)}{\left(s^{k-1}, As^{k-1}\right)}. \tag{8}$$

Знаменник у (8) не дорівнює нулеві, так як матриця A додатно означена.

Далі отримаємо

$$0 = \left(s^k, As^{k-2}\right) = -\left(\varphi'\left(x^k\right), As^{k-2}\right) + \gamma_{k-1}\left(s^{k-1}, As^{k-2}\right) +$$
$$+\gamma_{k-2}\left(s^{k-2}, As^{k-2}\right) + \ldots + \gamma_{k-(p-1)}\left(s^{k-(p-1)}, As^{k-2}\right).$$

Враховуючи взаємну спряженість векторів s^j, отримаємо

$$\gamma_{k-2} = \frac{\left(\varphi'\left(x^k\right), As^{k-2}\right)}{\left(s^{k-2}, As^{k-2}\right)}. \tag{9}$$

Аналогічно можна отримати, що

$$\gamma_{k-i} = \frac{\left(\varphi'\left(x^k\right), As^{k-i}\right)}{\left(s^{k-i}, As^{k-i}\right)}, \quad i = 3, 4, \ldots, p-1. \tag{10}$$

Теорема 1. *Для квадратичної функції $\varphi(x)$ послідовність $\left\{x^k\right\}$, що побудована за алгоритмом (6), (3), (8), (9), (10), є такою, що*

$$\left(\varphi'\left(x^{k+1}\right), s^k\right) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{11}$$

Доведення. Враховуючи (6), отримаємо

$$Ax^{k+1} = Ax^k + \beta_k As^k.$$

Так як $\varphi'(x) = Ax + b$, то остаточно маємо

$$\varphi'\left(x^{k+1}\right) = \varphi'\left(x^k\right) + \beta_k As^k. \tag{12}$$

З (3) отримаємо, що при $\beta_k > 0$

$$\left.\frac{d}{d\beta}\varphi\left(x^k + \beta s^k\right)\right|_{\beta=\beta_k} = 0,$$

а при $\beta_k = 0$

$$\left.\frac{d}{d\beta}\varphi\left(x^k + \beta s^k\right)\right|_{\beta=0} \geqslant 0.$$

Якщо $\beta_k > 0$, то

$$0 = \frac{d}{d\beta}\varphi\left(x^k + \beta s^k\right)\Big|_{\beta=\beta_k} = \left(\varphi'\left(x^k + \beta_k s^k\right), s^k\right) = \left(\varphi'\left(x^{k+1}\right), s^k\right).$$

Отже, отримали, що $\left(\varphi'\left(x^{k+1}\right), s^k\right) = 0$, $k = 0, 1, \ldots$

Доведення того, що співвідношення (11) справедливе і при $\beta_k = 0$, проводимо за індукцією.

$$0 \leqslant \frac{d}{d\beta}\varphi\left(x^0 + \beta s^0\right)\Big|_{\beta=0} = \left(\varphi'\left(x^1\right), s^0\right) = \left(\varphi'\left(x^0\right), -\varphi'\left(x^0\right)\right) = -\left\|\varphi'\left(x^0\right)\right\|^2,$$

звідки отримаємо рівність

$$\left(\varphi'\left(x^1\right), s^0\right) = 0.$$

Нехай $\left(\varphi'\left(x^k\right), s^{k-1}\right) = 0$. Доведемо, що $\left(\varphi'\left(x^{k+1}\right), s^k\right) = 0$ при $\beta_k = 0$. Так як $x^{k+1} = x^k$ ($\beta_k = 0$), то, враховуючи (6), отримаємо

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{d}{d\beta}\varphi\left(x^k + \beta s^k\right)\Big|_{\beta=0} &= \left(\varphi'\left(x^{k+1}\right), s^k\right) = \left(\varphi'\left(x^k\right), s^k\right) = \\ &= \left(\varphi'\left(x^k\right), -\varphi'\left(x^k\right) + \gamma_{k-1}s^{k-1} + \ldots + \gamma_{k-(p-1)}s^{k-(p-1)}\right) = \\ &= -\left\|\varphi'\left(x^k\right)\right\|^2 + \gamma_{k-1}\left(\varphi'\left(x^k\right), s^{k-1}\right) + \ldots + \gamma_{k-i}\left(\varphi'\left(x^k\right), s^{k-i}\right) + \\ &\quad + \ldots + \gamma_{k-(p-1)}\left(\varphi'\left(x^k\right), s^{k-(p-1)}\right). \end{aligned}$$

Враховуючи (12) і припущення індукції, маємо

$$\begin{aligned} \left(\varphi'\left(x^k\right), s^{k-i}\right) &= \left(\varphi'\left(x^{k-1}\right) + \beta_{k-1}As^{k-1}, s^{k-i}\right) = \\ &= \left(\varphi'\left(x^{k-1}\right), s^{k-i}\right) + \beta_{k-1}\left(As^{k-1}, s^{k-i}\right) = \\ &= \left(\varphi'\left(x^{k-1}\right), s^{k-i}\right) = \ldots = \left(\varphi'\left(x^{k-i+1}\right), s^{k-i}\right) = 0. \end{aligned}$$

Отже, ми отримали

$$0 \leqslant \left(\varphi'\left(x^{k+1}\right), s^k\right) = -\left\|\varphi'\left(x^k\right)\right\|^2 \leqslant 0.$$

Звідси маємо, що $\left(\varphi'\left(x^{k+1}\right), s^k\right) = 0$. Теорему доведено.

Теорема 2. *Вектори $\varphi'\left(x^k\right)$ і $\varphi'\left(x^{k+1}\right)$ ортогональні, $k = 0, 1, \ldots$.*

Доведення. Відомо [3], що квадратична функція (7) досягає мінімального значення при

$$\beta_k = -\frac{\left(\varphi'\left(x^k\right), s^k\right)}{\left(As^k, s^k\right)}. \tag{13}$$

Тоді, враховуючи (12) і (13), отримаємо

$$\begin{aligned} \left(\varphi'\left(x^{k+1}\right), \varphi'\left(x^k\right)\right) &= \left(\varphi'\left(x^k\right) + \beta_k As^k, \varphi'\left(x^k\right)\right) = \\ &= \left(\varphi'\left(x^k\right) - \frac{\left(\varphi'\left(x^k\right), s^k\right)}{\left(As^k, s^k\right)}As^k, \varphi'\left(x^k\right)\right) = \\ &= \left(\varphi'\left(x^k\right), \varphi'\left(x^k\right)\right) - \frac{\left(\varphi'\left(x^k\right), s^k\right)}{\left(As^k, s^k\right)}\left(As^k, \varphi'\left(x^k\right)\right). \end{aligned}$$

Розглянемо $\left(\varphi'\left(x^k\right), s^k\right)$. У попередній теоремі ми довели, що

$$\left(\varphi'\left(x^k\right), s^k\right) = -\left(\varphi'\left(x^k\right), \varphi'\left(x^k\right)\right). \tag{14}$$

Далі,

$$\begin{gathered}\left(As^k, s^k\right) = \left(As^k, -\varphi'\left(x^k\right) + \gamma_{k-1}s^{k-1} + \ldots + \gamma_{k-(p-1)}s^{k-(p-1)}\right) = \\ = -\left(As^k, \varphi'\left(x^k\right)\right) + \gamma_{k-1}\left(As^k, s^{k-1}\right) + \ldots + \gamma_{k-(p-1)}\left(As^k, s^{k-(p-1)}\right) = \\ = -\left(As^k, \varphi'\left(x^k\right)\right).\end{gathered} \tag{15}$$

З урахуванням (14) і (15), отримаємо

$$\begin{gathered}\left(\varphi'\left(x^{k+1}\right), \varphi'\left(x^k\right)\right) = \left(\varphi'\left(x^k\right), \varphi'\left(x^k\right)\right) - \\ - \frac{-\left(\varphi'\left(x^k\right), \varphi'\left(x^k\right)\right)}{-\left(As^k, \varphi'\left(x^k\right)\right)}\left(As^k, \varphi'\left(x^k\right)\right) = 0.\end{gathered}$$

Теорему доведено.

Теорема 3. *Нехай $x^0 \in \mathbb{R}^n$, точки $x^1, \ldots, x^{n-1}$ і вектори $s^0, s^1, \ldots, s^{n-1}$ отримані за формулами (6), (3), (8), (9), (10) і $\varphi'\left(x^k\right) \neq 0$ $(i = 0, \ldots, n-1)$. Тоді вектори $s^0, s^1, \ldots, s^{n-1}$ взаємно спряжені, а градієнти $\varphi'\left(x^0\right)$, $\varphi'\left(x^1\right)$, …, $\varphi'\left(x^{n-1}\right)$ взаємно ортогональні.*

Доведення. Теорему доведемо методом математичної індукції. Ортогональність векторів $\varphi'\left(x^0\right)$ і $\varphi'\left(x^1\right)$ отримаємо за теоремою 2. Вектор $s^0 \neq 0$ за умовою теореми; вектор s^1 теж не дорівнює нулеві, так як $s^1 = -\varphi'\left(x^1\right) - \gamma_0\varphi'\left(x^0\right) = 0$, а це неможливо, враховуючи ортогональність $\varphi'\left(x^0\right)$ і $\varphi'\left(x^1\right)$. Спряженість s^0 і s^1 отримаємо з (8) і (9).

Припустимо, що $k \leqslant n-1$, вектори $s^0, s^1, \ldots, s^{k-1}$ взаємно спряжені, а градієнти $\varphi'\left(x^0\right)$, $\varphi'\left(x^1\right)$, …, $\varphi'\left(x^{k-1}\right)$ взаємно ортогональні. Тоді за теоремою 2 $\left(\varphi'\left(x^k\right), \varphi'\left(x^{k-1}\right)\right) = 0$. При $i \leqslant k-2$ маємо, використовуючи (12), індукцію та (6),

$$\begin{gathered}\left(\varphi'\left(x^k\right), \varphi'\left(x^i\right)\right) = \left(\varphi'\left(x^{k-1}\right), \varphi'\left(x^i\right)\right) + \beta_{k-1}\left(As^{k-1}, \varphi'\left(x^i\right)\right) = \\ = \beta_{k-1}\left(As^{k-1}, -s^i + \gamma_{i-1}s^{i-1} + \ldots + \gamma_{i-(p-1)}s^{i-(p-1)}\right) = 0.\end{gathered}$$

Отже, доведена взаємна ортогональність векторів $\varphi'\left(x^0\right)$, …, $\varphi'\left(x^{n-1}\right)$.

Вектор $s^k \neq 0$, інакше з (6) отримали б, що вектори $\varphi'\left(x^0\right), \varphi'\left(x^1\right), \ldots, \varphi'\left(x^k\right)$ лінійно залежні, що суперечить їх взаємній ортогональності.

Доведемо, що вектори $s^0, \ldots, s^k$ взаємно спряжені. Дійсно, $\left(s^k, As^{k-1}\right) = 0$ за (8). Враховуючи (13), отримаємо

$$\begin{gathered}\beta_i = -\frac{\left(\varphi'\left(x^i\right), s^i\right)}{\left(As^i, s^i\right)} = -\frac{\left(\varphi'\left(x^i\right), -\varphi'\left(x^i\right) - \gamma_{i-1}\varphi'\left(x^{i-1}\right) - \ldots\right)}{\left(As^i, s^i\right)} = \\ = \frac{\left(\varphi'\left(x^i\right), \varphi'\left(x^i\right)\right)}{\left(As^i, s^i\right)},\end{gathered}$$

і тому $\beta_i \neq 0$, $i \leqslant k$. Тоді з (12) отримаємо

$$As^i = \frac{\varphi'\left(x^{i+1}\right) - \varphi'\left(x^i\right)}{\beta_i}. \tag{16}$$

При $i \leqslant k-2$, використовуючи (6), індукцію, (16) та доведену взаємну ортогональність градієнтів, отримаємо

$$\left(s^k, As^i\right) = \left(-\varphi'\left(x^k\right) + \gamma_{k-1}s^{k-1} + \ldots + \gamma_{k-(p-1)}s^{k-(p-1)}, As^i\right) =$$
$$= -\left(\varphi'\left(x^k\right), As^i\right) = -\left(\varphi'\left(x^k\right), \frac{\varphi'\left(x^{i+1}\right) - \varphi'\left(x^i\right)}{\beta_i}\right) = 0.$$

Теорему доведено.

Отже, розглянутий p-кроковий метод належить до методів спряжених напрямків.

Сформулюємо тепер p-кроковий метод для мінімізації неквадратичних функцій. Для цього перетворимо формулу (10) так, щоб до неї не входила матриця A:

$$\gamma_{k-i} = \frac{\left(\varphi'\left(x^k\right), As^{k-i}\right)}{\left(s^{k-i}, As^{k-i}\right)} = \frac{\left(\varphi'\left(x^k\right), \varphi'\left(x^{k-i+1}\right) - \varphi'\left(x^{k-i}\right)\right)}{\left(s^{k-i}, \varphi'\left(x^{k-i+1}\right) - \varphi'\left(x^{k-i}\right)\right)} =$$
$$= \frac{\left(\varphi'\left(x^k\right), \varphi'\left(x^{k-i+1}\right) - \varphi'\left(x^{k-i}\right)\right)}{-\left(\varphi'\left(x^{k-i}\right) - \gamma_{k-i-1}\varphi'\left(x^{k-i-1}\right) - \ldots, \varphi'\left(x^{k-i+1}\right) - \varphi'\left(x^{k-i}\right)\right)} = \tag{17}$$
$$= \frac{\left(\varphi'\left(x^k\right), \varphi'\left(x^{k-i+1}\right) - \varphi'\left(x^{k-i}\right)\right)}{\left\|\varphi'\left(x^{k-i}\right)\right\|^2}.$$

2. Обчислювальний експеримент.

Зробимо аналіз роботи описаного p-крокового методу при різних значеннях p. Для порівняння використаємо такі показники, як точність отриманого розв'язку та кількість проведених ітерацій. Під кількістю ітерацій будемо розуміти кількість отриманих послідовних наближень до розв'язку задачі. Зауважимо, що кількість обчислень значень функції та її градієнту у p-кроковому методі не змінюється порівняно із класичним двокроковим методом спряжених градієнтів.

Обчислення проводилися на тестових функціях із точністю $\varepsilon = 10^{-6}$. Критерієм зупинки обох алгоритмів було одночасне виконання трьох умов:

$$\left|\varphi\left(x^{k-1}\right) - \varphi\left(x^k\right)\right| \leqslant \varepsilon\left(1 + \left|\varphi\left(x^k\right)\right|\right),$$
$$\left\|x^{k-1} - x^k\right\| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\left(1 + \left\|x^k\right\|\right),$$
$$\left\|\varphi'\left(x^{k+1}\right)\right\| \leqslant \sqrt[3]{\varepsilon}\left(1 + \left|\varphi\left(x^k\right)\right|\right).$$

Розрахунки проводилися за допомогою відкритої системи комп'ютерної математики Sage [2].

Задача 1. Функція [6, стор. 476], кількість змінних $n = 3$:

$$\varphi(x) = 100\left[x_3 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2\right]^2 + \left(1 - x_1\right)^2 + \left(1 - x_2\right)^2,$$

початкові точки $x_0^1 = (-1.2, 2, 0)^\top$, $\varphi(x_0^1) = 8.40$ та $x_0^2 = (-2, 2, 4)^\top$, $\varphi(x_0^2) = 1610$; точний розв'язок задачі $x^* = (1, 1, 1)^\top$, $\varphi(x^*) = 0$.

Початкова точка	Вибір β_k	Кількість доданків p	$\varphi(x^*)$	$\|\varphi'(x^*)\|$	Кількість ітерацій
x_0^1	умова min	2	2.70e-5	0.0097	148
		3	9.86e-8	0.0042	34
		4	2.52e-5	0.0074	33
		5	2.28e-7	0.0084	56
		7	1.23e-9	0.0004	82
		10	1.23e-9	0.0004	115
x_0^1	умова Вольфе	2	8.16e-6	0.0046	26
		3	6.97e-8	0.0082	20
		4	9.02e-8	0.0010	40
		5	1.87e-6	0.0022	37
		7	4.81e-7	0.0014	69
		10	3.63e-6	0.0042	77
x_0^2	умова min	2	3.11e-5	0.0095	93
		3	2.79e-7	0.0011	35
		4	6.78e-7	0.0017	44
		5	2.96e-6	0.0029	45
		7	4.23e-6	0.0028	61
		10	4.28e-6	0.0028	85
x_0^2	умова Вольфе	2	5.94e-8	0.0030	27
		3	3.49e-8	0.0026	41
		4	6.28e-6	0.0031	32
		5	1.84e-7	0.0049	56
		7	1.75e-5	0.0054	64
		10	9.75e-8	0.0037	131

Задача 2. Функція Пауелла [6, стор. 475], кількість змінних $n = 4$:

$$\varphi(x) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4,$$

початкові точки $x_0^1 = (3, -1, 0, 1)^\top$, $\varphi(x_0^1) = 215$ та $x_0^2 = (1, 1, 1, 1)^\top$, $\varphi(x_0^1) = 125$; точний розв'язок задачі $x^* = (0, 0, 0, 0)^\top$, $\varphi(x^*) = 0$.

Початкова точка	Вибір β_k	Кількість доданків p	$\varphi(x^*)$	$\|\varphi'(x^*)\|$	Кількість ітерацій
x_0^1	умова min	2	1.25e-5	0.0053	46
		3	6.07e-7	0.0005	28
		4	2.92e-5	0.0067	34
		5	1.14e-5	0.0024	20
		7	1.11e-6	0.0005	45
		10	6.15e-6	0.0048	75

Початкова точка	Вибір β_k	Кількість доданків p	$\varphi(x^*)$	$\|\varphi'(x^*)\|$	Кількість ітерацій
x_0^2	умова min	2	8.11e-6	0.0021	25
		3	5.47e-7	0.0007	21
		4	1.99e-6	0.0010	33
		5	4.05e-6	0.0043	32
		7	3.62e-7	0.0065	46
		10	1.27e-5	0.0066	51

Задача 3. Узагальнена функція Розенброка, кількість змінних $n = 8$:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{4} \left[(1 - x_{2i-1})^2 + 100 \left(x_{2i} - x_{2i-1}^2 \right)^2 \right],$$

початкова точка $x^0 = (2, 4, 2, 4, \ldots)^\top$, $\varphi(x^0) = 58831$; точний розв'язок задачі $x^* = (1, 1, \ldots)^\top$, $\varphi(x^*) = 0$.

Початкова точка	Вибір β_k	Кількість доданків p	$\varphi(x^*)$	$\|\varphi'(x^*)\|$	Кількість ітерацій
x^0	умова min	2	2.47e-6	0.0098	152
		3	2.34e-6	0.0056	60
x^0	умова Вольфе	2	2.53e-7	0.0072	98
		3	1.49e-5	0.0052	77

Задача 4. Узагальнена функція Розенброка, кількість змінних $n = 20$:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{10} \left[(1 - x_{2i-1})^2 + 100 \left(x_{2i} - x_{2i-1}^2 \right)^2 \right],$$

початкові точки $x_0^1 = (-1.2, 1, -1.2, 1, \ldots)^\top$, $\varphi(x_0^1) = 4598$; $x_0^2 = (0, 0, \ldots)^\top$, $\varphi(x_0^2) = 19$; точний розв'язок задачі $x^* = (1, 1, \ldots)^\top$, $\varphi(x^*) = 0$.

Початкова точка	Вибір β_k	Кількість доданків p	$\varphi(x^*)$	$\|\varphi'(x^*)\|$	Кількість ітерацій
x_0^1	умова min	2	1.70e-6	0.0098	283
		3	2.07e-6	0.0098	268
x_0^2	умова min	2	4.67e-6	0.0094	105
		3	1.76e-6	0.0085	93

Задача 5. Узагальнена функція Біла (Beale) [1], $n = 100$:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n/2} \Big[\left(1.5 - x_{2i-1}\left(1 - x_{2i}\right)\right)^2 + \left(2.25 - x_{2i-1}\left(1 - x_{2i}^2\right)\right)^2 + \\ + \left(2.625 - x_{2i-1}\left(1 - x_{2i}^3\right)\right)^2\Big],$$

початкова точка $x^0 = (1, 0.8 \ldots, 1, 0.8)^\top$.

Початкова точка	Вибір β_k	Кількість доданків p	$\varphi(x^*)$	$\|\varphi'(x^*)\|$	Кількість ітерацій
x^0	умова	2	4.85e-8	0.0020	11
	min	3	4.85e-8	0.0020	8

Задача 6. Узагальнена функція Манєвича (Manevich) [1], $n = 200$:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - x_i)^2}{2^i}$$

початкова точка $x^0 = (0, \ldots, 0)^\top$.

Початкова точка	Вибір β_k	Кількість доданків p	$\varphi(x^*)$	$\|\varphi'(x^*)\|$	Кількість ітерацій
x^0	умова	2	9.78e-4	0.0020	9
	min	3	9.78e-4	0.0020	9

В задачах 3–6 дані експериментів при $p > 3$ не наводяться, тому що вони подібні або гірші за результати при $p = 3$.

Висновки. У роботі розглянуто узагальнений p-кроковий метод для задач безумовної мінімізації, обґрунтована його належність до методів спряжених напрямків. Метою обчислювального експерименту було виявлення «оптимальної» кількості кроків (доданків) p для обчислення нового напрямку спуску.

1. Результати в цілому вказують на переваги методу при $p = 3$ у порівнянні з класичним методом спряжених градієнтів ($p = 2$).

2. Для тестових функцій із кількістю змінних $n \leqslant 20$ бачимо досить вагомі переваги трикрокового методу: алгоритм дає більш точний розв'язок при суттєво меншій кількості кроків.

3. Збільшення кількості доданків p у більшості випадків призводило до погіршення результатів: кількість ітерацій росте, точність зменшується.

4. Для задач великої розмірності ($n = 100$, 200) вказані переваги трикрокового методу спостерігаються в меншій мірі.

1. **Neculai Andrei.** An Unconstrained Optimization Test Functions Collection / Neculai Andrei // Advanced Modeling and Optimization. — Vol. 10, No. 1. — 2008. — pp. 147–161.
2. **SageMath**, the Sage Mathematics Software System (Version 7.5), The Sage Developers, 2017, http://www.sagemath.org.
3. **Карманов В. Г.** Математическое программирование / В. Г. Карманов. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 264 с.
4. **Страхов Є. М.** Трикроковий метод для задачі багатовимірної оптимізації / Страхов Є. М., Яровий А. Т. // Вісник Київського національного університету. Серія фізико-математичні науки. — 2015. — Вип. 3 — С. 121–126.
5. **Сухарев А. Г.** Курс методов оптимизации / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 368 с.
6. **Химмельблау Д.** Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. — М. : Мир, 1975. — 536 с.

Страхов Е. М., Яровой А. Т.
Анализ p-шаговых методов минимизации функций многих переменных

Резюме

Рассматривается задача многомерной минимизации непрерывно дифференцируемой функции при отсутствии ограничений. Итерационный алгоритм решения такой задачи называется многошаговым, если для нахождения следующего приближения к точке минимума используются значения функции или ее градиента в двух или более предыдущих точках. Так, алгоритм метода сопряженных градиентов относится к двухшаговым. Описывается обобщенный p-шаговый алгоритм, установлены его свойства в случае квадратичной целевой функции. Показано, что данный метод относится к методам сопряженных направлений. Целью вычислительного эксперимента было сравнение результатов минимизации в зависимости от количества слагаемых (шагов) p и выявления «оптимального» значения для p. Приводятся результаты вычислений для некоторых известных тестовых функций.
Ключевые слова: p-шаговый алгоритм, сопряженные направления, задача безусловной оптимизации .

Strakhov Ye. M., Yaroviy A. T.
The analysis of p-term algorithms for unconstrained optimization

Summary

Consider the multidimensional unconstrained minimization problem in a case of continuously differentiable function. An iterative algorithm for solving such a problem is called a multi-term if in order to find the next approximation to the optimal point we need to compute values of the function or its gradient in two or more previous points. So that, conjugate gradient algorithm is a two-term algorithm. The aim of this paper is to study a generalized p-term method for unconstrained optimization. One substantiates the properties of this algorithm for quadratic functions and proves that it relates to conjugate direction methods. The goal of computational experiment was to compare the results of minimization with different number of terms p and find the “optimal” value for the p. The numerical results for some well-known test functions are given.
Key words: p-term algorithm, conjugate directions, unconstrained optimization.

References

1. Neculai Andrei (2008). An unconstrained optimization test functions collection. *Advanced Modeling and Optimization*, Vol. 10, № 1, P. 147–161.
2. SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 7.5), The Sage Developers, 2017, http://www.sagemath.org.
3. Karmanov, V. G. (2004). *Matematicheskoe programmirovanie [Mathematical programming]*. Moscow: Fizmatlit, 264 p.
4. Strakhov, Ye. M., Yaroviy, A. T. (2015). Trikrokoviy metod dlya zadachi bagatovimirnoyi optimizatsiyi [A three-term method for unconstrained optimization]. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*, № 3, P. 121–126.
5. Sukharev, A. G., Timokhov, A. V., Ferorov, V. V. (2005). *Kurs metodov optimizatsii [A course of optimization methods]*. Moscow: Fizmatlit, 368 p.
6. Himmelblau, D. (1975). *Prikladnoe nelineynoe programmirovanie [Applied nonlinear programming]*. Moscow: Mir, 536 p.

Дослідження в математиці і механіці.– 2017.–Т.22, вип. 1(29).– С. 81–96

УДК 517.9

М. І. Яременко
Міжнародний математичний центр ім. Ю. О. Митропольського НАН України

ГІПЕРБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ З СИНГУЛЯРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Робота присвячена доведенню існування слабкого розв'язку квазілінійних диференціальних рівнянь з частковими похідними в просторах W_1^p з вимірними коефіцієнтами. Дослідження проводиться з використанням методу Гальоркіна та методу форм і нелінійних монотонних операторів. Умови на коефіцієнти уточнюються в процесі дослідження властивостей нелінійних операторів, що породжені формою, яка складена за лівими частинами заданого рівняння.
MSC: 35L81.
Ключові слова: гіперболічне рівняння, сингулярні коефіцієнти, метод форм .

Вступ.

Хвильовий процес — це складна модель руху реальних систем, що властива всім без винятку об'єктам матеріального світу, стан яких залежить як від часової так і від просторових змінних, тому, як правило, його описують за допомогою рівнянь гіперболічного типу.

В теорії хвиль важливе значення має рівняння вигляду:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} - \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}u\right) + b(x,u,\nabla u) = f(x,t),$$

частинний випадок цього рівняння має вигляд

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2u(t)}{dt^2} - \Delta u - b(x,u,\nabla u) = f(x,t),$$

де функція $f(x,t)$ характеризує зовнішній вплив на систему, що досліджується. В середовищах, підчас розповсюдження хвилі, відбуваються процеси передачі енергії хвилі частинкам середовища, також можливий випадок коли швидкість розповсюдження хвилі є функцією частоти. Як правило, в залежності від певних механізмів взаємодії хвилі з середовищем, подібні явища враховуються за допомогою структурного вигляду нелінійної функції $b(x,u,\nabla u)$

Робота присвячена дослідженню слабкої розв'язуваності квазілінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу з гладкими та вимірними коефіцієнтами, дослідження базується на методах теорії напівгруп із застосуванням методу диференційних форм. Вивчення задачі проводиться за такою схемою: спочатку від гіперболічного рівняння, за допомогою певної заміни, здійснюється перехід до системи параболічних рівнянь спеціального вигляду і далі досліджується розв'язуваність цієї системи, при цьому виникає потреба в дослідженні рівнянь еліптичного типу. Рівняння еліптичного типу розглядаються за допомогою аналогу метода монотонних слабко компактних операторів в

Надійшла 08.09.2016

роботі отримано аналог теореми типу Мінті—Браудера. При цьому розглядається новий тип операторів $A_{\lambda}^{p}: W_{1}^{p} \to W_{-1}^{p}$.

Основні результати

1. Випадок задачі із гладкими коефіцієнтами в просторах $L^p(R^l,d^l x)$. Розглянемо випадок коли коефіцієнти є нескінченно гладкими функціями своїх аргументів. За цих умов доведемо наступну теорему.

Теорема 1. *Для довільних елементів* $\{\gamma,\eta\} \subset W_1^p\left(R^l,d^l x\right)$ *існує таке дійсне число* $\tilde{\mu} > 0$ *, що для всіх* $0 < \mu < \tilde{\mu}$ *система рівнянь:*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$$

має єдиний розв'язок $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Доведення. Для доведення існування розв'язку перепишемо систему у вигляді:

$$u = \gamma + \mu v,$$

$$v - \mu \mathrm{A} u = \eta,$$

і підставимо $u = \gamma + \mu v$ в $v - \mu \mathrm{A} u = \eta$, тоді маємо:

$$v - \mu \mathrm{A} \left(\gamma + \mu v\right) = \eta.$$

Або в розгорнутому вигляді:

$$v - \mu \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\gamma + \mu v\right) \right) + \mu b(x, \left(\gamma + \mu v\right), \nabla \left(\gamma + \mu v\right)) = \eta$$

Розпишемо лінійний доданок:

$$\sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\gamma - \mu v\right) \right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma \right) + \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \mu v \right),$$

тоді останнє рівняння набуде вигляду:

$$v - \mu^2 \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v \right) + \mu b(x, \left(\gamma + \mu v\right), \nabla \left(\gamma + \mu v\right)) =$$

$$= \eta + \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma \right).$$

Далі зауважимо, що доданок елементу γ в нелінійній складові рівняння $b(x, (\gamma + \mu v),$ $\nabla\left(\gamma + \mu v\right))$ не впливає на характер умов тобто умови на не лінійність матимуть той самий вигляд (з іншими функціями $\mu_i(x)$, а отже з іншою форм – граню), а саме:

$$|b(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v))| \leqslant \mu\left(\mu_1(x)|\nabla u| + \mu_2(x)|u| + \mu_3(x)\right),$$

$$|b(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)) - b(x,(\gamma+\mu w),\nabla(\gamma+\mu w))| \leqslant$$

$$\leqslant \mu\left(\mu_4(x)|v-w| + \mu_5(x)|\nabla(v-w)|\right).$$

Поділимо його на $\mu^2,$ при цьому $\frac{1}{\mu^2}$ позначимо через λ, оскільки $\mu^2>0$, а праву частину через $\psi,$ при цьому зміняться лише позначення, а рівняння залишиться тим же, в спрощеному записі зміняться лише числові сталі форм – грані, що не суттєво, оскільки $\mu^2 \to 0$ залежить лише від початкових даних. Отже маємо рівняння:

$$\lambda v - \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v\right) + \frac{1}{\mu}b(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)) = \psi.$$

Це квазілінійне еліптичне диференційне рівняння в частинних з гладкими повільно зростаючими коефіцієнтами. Дослідимо його за допомогою аналога методу монотонних слабко компактних операторів із застосуванням форм.

Схема метода. За рівнянням складається спеціальна форма та досліджуються її властивості, доводиться її обмеженість, після цього *встановлюється, що ця форма породжує оператор, який діє за правилом* $A_\lambda^p : W_1^p(R^l,d^lx) \to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$ *і досліджуються властивості цього оператора за допомогою форми, що його породжує, встановлюється обмеженість, коерцитивність, акретивність та хеміneперервність цього оператора. Далі доводиться теорема про існування розв'язку рівняння за яким складена форма, що породжує оператор, який має властивості обмеженості, коерцитивності, акретивності та хемінеперервності. При доведенні теореми існування використовується схема Гальоркіна, аналог леми про гострий кут, за допомогою якого будується послідовність наближення Гальоркіна та показується, що ця послідовність збігається до розв'язку рівняння.*

За рівнянням складемо форму $h_\lambda^p(v,w)$:

$$h_\lambda^p(v,w) \equiv \lambda\langle v,w\rangle + \langle dw\circ a\circ dv\rangle + \left\langle \frac{1}{\mu}b(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)),w\right\rangle,$$

де $v\in W^p(R^l,d^lx),\quad w\in W_{1,0}^q(R^l,d^lx)$. Справедлива лема.

Лема 1. *Форма* $h_\lambda^p(v,w)$ *є обмеженою.*

Як наслідок леми 1 маємо, що форма $h_\lambda^p(v,w)$ породжує оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l,d^lx) \to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$, який також є обмеженим, а отже $h_\lambda^p(v,w) = \langle \mathrm{A}_\lambda^p(v),w\rangle$ де $v\in W_1^p(R^l,d^lx),\quad w\in W_{1,0}^q(R^l,d^lx)$.

Означення. Оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l,d^lx) \to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$ *коерцитивний*, якщо форма $h_\lambda^p(v,w) = \langle \mathrm{A}_\lambda^p(v),w\rangle$ задовольняє умову

$$\lim_{||v||_{W_1^p}\to\infty} \frac{h_\lambda^p\left(v,v\,|v|^{p-2}\right)}{||v||_{W_1^p}} = \infty.$$

Лема 2. *Оператор* $A_\lambda^p : W_1^p(R^l,d^lx) \to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$ *визначає коерцитивне відображення.*

Доведення. Оцінимо форму $h_\lambda^p(v,w) = \langle \mathrm{A}_\lambda^p(v),w\rangle$, де елементи $v \in W_1^p(R^l,d^lx)$, $w \in W_{1,0}^q(R^l,d^lx)$:

$$h_\lambda^p\left(v,v\,|v|^{p-2}\right) = \left\langle \mathrm{A}_\lambda^p(v),v\,|v|^{p-2}\right\rangle =$$

$$= \left\langle \lambda v - \sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v\right) + \frac{1}{\mu}b(x,(\gamma+\mu v),\nabla(\gamma+\mu v)),v\,|v|^{p-2}\right\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \left\langle \lambda v - \sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v\right) - |\mu_1(x)|\nabla v| + \mu_2(x)|v| + \mu_3(x)|\,,v\,|v|^{p-2}\right\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \lambda||v||_p^p + \frac{4(p-1)}{p^2}\left\langle d(v_n\,|v_n|^{\frac{p-1}{2}})\circ a\circ d(v_n\,|v_n|^{\frac{p-1}{2}})\right\rangle -$$

$$-\left\langle |\mu_1(x)|\nabla v| + \mu_2(x)|v| + \mu_3(x)|\,,v\,|v|^{p-2}\right\rangle.$$

Позначимо $W = v\,|v|^{\frac{p-2}{2}}$ і оцінимо останній доданок:

$$\begin{aligned}
&\left\langle |\mu_1(x)|\nabla v| + \mu_2(x)|v| + \mu_3(x)|\,,v\,|v|^{p-2}\right\rangle \leqslant\\
&\leqslant \tfrac{2}{p}||\nabla W||_2||\mu_1 W||_2 + ||\mu_2 W||_2||W||_2 + \|\mu_3\|_p\left\|v\,|v|^{p-2}\right\|_q \leqslant\\
&\leqslant \tfrac{1}{p}\left(\varepsilon^2||\nabla W||_2^2 + \tfrac{1}{\varepsilon^2}\left(\beta||\nabla W||_2^2 + c(\beta)\,||W||_2^2\right)\right) +\\
&+\tfrac{1}{2}\left(\varepsilon^2||W||_2^2 + \tfrac{1}{\varepsilon^2}\left(\beta||\nabla W||_2^2 + c(\beta)\,||W||_2^2\right)\right) + \tfrac{1}{p\sigma^p}\,\|\mu_3\|_p^p + \tfrac{\sigma^q}{q}\left\|v\,|v|^{p-2}\right\|_q^q \leqslant
\end{aligned}$$

$$\leqslant \left(\sqrt{\beta}\left(\frac{2}{p}+\frac{1}{2}\right)\right)|\nabla W||_2^2 + \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2} + \frac{c(\beta)}{p\sqrt{\beta}} + \frac{c(\beta)}{2\sqrt{\beta}} + \frac{\sigma^q}{q}\right)||W||_2^2 + \frac{1}{p\sigma^p}\,\|\mu_3\|_p^p.$$

Далі групуємо відповідні доданки, отримуємо твердження леми.

Означення. Оператор $h_\lambda^p(v,w) = \langle \mathrm{A}_\lambda^p(v),w\rangle$ є акретивним в $L^p\left(R^l,d^lx\right)$, якщо виконується нерівність

$$\left\langle A_\lambda^p(v) - A_\lambda^p(w)\,,(v-w)\,|v-w|^{p-2}\right\rangle \geqslant 0,\_\forall v,\, w \in W_{1,0}^p\left(R^l,d^lx\right).$$

Лема 3. *Оператор* $A_\lambda^p : W_1^p(R^l,d^lx) \to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$ *визначає акретивне відображення в* $L^p\left(R^l,d^lx\right)$.

Доведення. Дійсно, згідно з означенням акретивності, враховуючи умови, маємо:

$$\left\langle \mathrm{A}_\lambda^p(u) - \mathrm{A}_\lambda^p(v),(u-v)\,|u-v|^{p-2}\right\rangle =$$

$$= \left\langle \lambda v - \sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v\right) + \frac{1}{\mu}b(x,\gamma+\mu v,\nabla(\gamma+\mu v)),(v-w)\,|v-w|^{p-2}\right\rangle -$$

$$-\left\langle \lambda w - \sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}w\right) + \frac{1}{\mu}b(x,\gamma+\mu w,\nabla(\gamma+\mu w)),(v-w)\,|v-w|^{p-2}\right\rangle =$$

$$= \lambda||u-v||_p^p + + \tfrac{4(p-1)}{p^2}\left\langle d(u_n\,|u_n|^{\frac{p-1}{2}}) \circ a \circ d(u_n\,|u_n|^{\frac{p-1}{2}})\right\rangle +$$
$$+\left\langle \tfrac{1}{\mu}b(x,\gamma+\mu v,\nabla(\gamma+\mu v)) - \tfrac{1}{\mu}b(x,\gamma+\mu w,\nabla(\gamma+\mu w)),(v-w)\,|v-w|^{p-2}\right\rangle,$$

оцінимо останній доданок використовуючи початкові умови, форм обмеженість коефіцієнтів і оцінку Гельдера, покладаючи $W=(v-w)\,|v-w|^{\frac{p-2}{2}}$, маємо:

$$\left|\left\langle \frac{1}{\mu}b(x,\gamma+\mu v,\nabla(\gamma+\mu v)) - \frac{1}{\mu}b(x,\gamma+\mu w,\nabla(\gamma+\mu w)),(v-w)\,|v-w|^{p-2}\right\rangle\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left\langle \mu_4(x)|u-v| + \mu_5(x)|\nabla(u-v)|,(v-w)\,|v-w|^{p-2}\right\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \left\langle \mu_4(x)\,(v-w)\,,(v-w)\,|v-w|^{p-2}\right\rangle + \left\langle \mu_5(x)|\nabla\,(u-v)\,|,(u-v)\,|u-v|^{p-2}\right\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{p}||\nabla W||_2||\mu_5 W||_2 + ||\mu_4 W||_2||W||_2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{p}||\nabla W||\left(\beta||\nabla W||_2^2 + c(\beta)||W||_2^2\right)^{\frac{1}{2}} + ||W||_2\left(\beta||\nabla W||_2^2 + c(\beta)||W||_2^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$\leqslant \frac{1}{p}\left(\varepsilon_1^2||\nabla W||_2^2 + \frac{1}{\varepsilon_1^2}\left(\beta\,||\nabla W||_2^2 + c(\beta)\,||W||_2^2\right)\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\sigma^2||W||_2^2 + \frac{1}{\sigma^2}\left(\beta\,||\nabla W||_2^2 + c(\beta)\,||W||_2^2\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{2}{p}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\beta}||\nabla W||_2^2 + \left(\frac{1}{p}\frac{c(\beta)}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{2} + \frac{1}{2}\frac{c(\beta)}{\sqrt{\beta}}\right)||W||_2^2.$$

Використовуючи ці оцінки доводимо лему.

Означення. Оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l,d^l x) \to W_{-1}^p(R^l,d^l x)$ визначає хемінеперервне відображення, якщо справджується властивість:

$\omega - \lim\limits_{t\to 0} \mathrm{A}_\lambda^p\,(v+tw) = \mathrm{A}_\lambda^p\,(v)$, $\forall v,w \in W_{1,0}^p\left(R^l,d^l x\right)$ в нормі $W_{-1}^p\left(R^l,d^l x\right)$.

Лема 4. *Нелінійний оператор* $A_\lambda^p : W_1^p(R^l,d^l x) \to W_{-1}^p(R^l,d^l x)$ *визначає хемінеперервне відображення.*

У випадку просторів $L^p(R^l,d^l x), p \geqslant 2, l \geqslant 3$ потрібно застосовувати аналог леми 3, а саме:

Лема 5 (про гострий кут). *Нехай на сфері* $S_R = \left(\bar{C} : |\,\bar{C}\,| = R\right)$, *де* $R > 0$ – *деяке відповідним чином вибране число, задано неперервне відображення* $\vec{B} : R^n \to R^n$ *для якого виконується аналог умови про гострий кут, тобто* $\left\langle \bar{B}\left(\bar{C}\right), \bar{C}^*\right\rangle \geqslant 0$. *Тоді існує принаймні одна така точка* $\vec{C}:\quad |\vec{C}\,| \leqslant R$, *що* $\vec{B}\left(\vec{C}\right) = 0$. Ця лема доводиться від супротивного.

Для того щоб показати, що еліптичне рівняння має розв'язок використаємо модифікацію метода Гальоркіна. Нехай $\{w_i\}$ і $\{w_i^*\}$ – гладкі базиси просторів $W_{1,0}^p(R^l,d^l x)$, $\quad W_{1,0}^q(R^l,d^l x)$, відповідно, і нехай $[w_1,...w_k]$ – лінійна оболонка базисних елементів, така що виконується властивість: $\langle v_k,v_k^*\rangle = \|v_k\|_p^p$. Покладемо за визначенням $v_k = \sum_{i=1}^{k} c_i w_i$, $v_k^* = \sum_{i=1}^{k} c_i^* w_i^*$. Для знаходження послідовності Гальоркіна складемо систему рівнянь:

$$\langle \mathrm{A}_\lambda^p (w_k) - \psi, w_i^* \rangle = 0, i = 1,...,k.$$

Ця система визначає неперервне відображення $\overrightarrow{B} : R^k \to R^k$, а отже має місце аналог леми про гострий кут.

Скористаємося аналогом методу Гальоркіна. Покажемо, що система ця має розв'язок в лінійній оболонці перших k елементів базису $\{w_i\}$. Дійсно, відображення $\overrightarrow{B}\left(\overrightarrow{C}\right) : 0 \subset B_i\left(\overrightarrow{C}\right) = \langle \mathrm{A}_\lambda^p (v_k) - \psi, w_i^* \rangle$, $i = 1,...,k$, внаслідок коерцитивності оператора $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p \left(R^l, d^l x\right) \to W_{-1}^p \left(R^l, d^l x\right)$, задовольняє умови аналога леми про гострий кут:

$$\left\langle \overrightarrow{B}\left(\overrightarrow{C}\right), \overrightarrow{C}^* \right\rangle = \left\langle \mathrm{A}_\lambda^p \left(\sum_{i=1}^{k} c_i w_i \right) - \psi, \sum_{i=1}^{k} c_i^* w_i^* \right\rangle = \left\langle \mathrm{A}_\lambda^p (v_k) - \psi, v_k |v_k|^{p-2} \right\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{h_\lambda^p \left(v_k, v_k |v_k|^{p-2}\right)}{||v_k |v_k|^{p-2}||_{W_1^q}} - ||\psi||_{W_{-1}^p} \right) ||v_k |v_k|^{p-2}||_{W_1^q} \geqslant 0.$$

Оскільки $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p \left(R^l, d^l x\right) \to W_{-1}^p \left(R^l, d^l x\right)$ – неперервне відображення на скінчених підпросторах простору $W_{1,0}^p$, то внаслідок аналога леми про гострий кут для достатньо великих значень $R > 0$ існує такий елемент $\overrightarrow{C}, |\overrightarrow{C}| = R$, що $\overrightarrow{B}\left(\overrightarrow{C}\right) = 0$.

Отже, вище вказано спосіб побудови послідовності $\{v_k(x)\}$, елементи якої є розв'язками рівняння. Далі покажемо, що послідовність $\{v_k(x)\}$ збігається до розв'язку даного рівняння.

Використавши коерцитивність оператора $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p \left(R^l, d^l x\right) \to W_{-1}^p \left(R^l, d^l x\right)$, одержимо нерівність $||\mathrm{A}_\lambda^p (v_k)||_{W_{-1}^p} \leqslant ||\psi||_{W_1^p}$.

Якщо доведемо нерівність $||v_k||_{W_1^p} < C$, де стала C залежить лише від функцій μ (структури рівняння), то тоді внаслідок слабкої компактності простору $W_1^p (R^l, d^l x)$ отримаємо, що існує така підпослідовність $\{v_{k'}(x)\}$, що має місце властивість: $v_{k'} \underset{W_1^p}{\longrightarrow} v_0$ слабко і $\mathrm{A}_\lambda^p (v_{k'}) \underset{W_1^p}{\longrightarrow} y$ слабко.

Покажемо, що $y = \mathrm{A}_\lambda^p (v_0) = \psi$. Звідси випливатиме, що відображення $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p \left(R^l, d^l x\right) \to W_{-1}^p \left(R^l, d^l x\right)$ є сюр'єктивним відображенням, тобто відображенням «на». Складемо інтегральні тотожності:

$$\langle \mathrm{A}_\lambda^p (v_{k'}), w_i^* \rangle = \langle \psi, v_i^* \rangle, i = 1,...,k',$$

і перейдемо до границі при $k' \to +\infty$. Тоді одержимо:

$$\lim_{k' \to \infty} \mathrm{A}_\lambda^p (v_{k'}) = y = \psi,$$

де границя береться за нормою простору $W_{-1}^p (R^l, d^l x)$.

Оскільки оператор $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p \left(R^l, d^l x\right) \to W_{-1}^p \left(R^l, d^l x\right)$ є акретивним в $L^p (R^l, d^l x)$, то має місце нерівність:

$$\left\langle \mathrm{A}_\lambda^p (v_{k'}) - \mathrm{A}_\lambda^p (w), (v_{k'} - w) |v_{k'} - w|^{p-2} \right\rangle \geqslant 0.$$

Переходячи в останній нерівності до границі при $k' \to \infty$,одержимо нерівність:

$$\left\langle y - \mathrm{A}_\lambda^p\left(w\right),\left(v_0 - w\right)\left|v_0 - w\right|^{p-2}\right\rangle \geqslant 0.$$

Поклавши $w = v_0 - tz, t > 0, \quad z \in W_{1,0}^p(R^l,d^lx)$, і скоротивши обидві частини одержаної нерівності на t^{p-1}, отримаємо:

$$\left\langle y - \mathrm{A}_\lambda^p\left(v_0 - tz\right),z|z|^{p-2}\right\rangle \geqslant 0.$$

З хемінеперервності оператора $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p\left(R^l,d^lx\right) \to W_{-1}^p\left(R^l,d^lx\right)$, враховуючи довільність елемента $z \in W_{1,0}^p(R^l,d^lx)$, одержимо $y = \mathrm{A}_\lambda^p\left(v_0\right) = \psi$, тобто для заданих початкових даних побудовано послідовність $\{v_{k'}\}$ і доведено її збіжність до елементу $v_0 \in W_1^p(R^l,d^lx)$, що реалізує розв'язок рівняння за даних умов.

Єдиність цього розв'язку випливає з властивості акретивності оператора $A_\lambda^p(\cdot)$. Отже, функції $u = \gamma + \mu v$ і $v = \eta + \mu \mathrm{A}u$ є шуканими і такими, що задовольняють систему $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$.

Зауваження. *Має місце оцінка для*$\{u,v\} \subset W_1^p\left(R^l,d^lx\right)\bigcap C^\infty\left(R^l\right)$ *, які задовольняють наступну нерівність:*

$$\left\langle u - \lambda_0 \mathrm{A}u,u\left|u\right|^{p-2}\right\rangle + \lambda_0\left\|v\right\|_p^p \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + o\left(\mu\right)\right)\left(\left\langle \gamma - \lambda_0 \mathrm{A}\gamma,\gamma\left|\gamma\right|^{p-2}\right\rangle + \lambda_0\left\|\eta\right\|_p^p\right),$$

причому додання стала λ_0 не залежать від числа μ і елементів $\{\gamma,\eta\}$.

Доведемо оцінку. Оскільки :

$\mathrm{A}u = \frac{1}{\mu}\left(v - \eta\right)$, то $\mathrm{A}v = \mathrm{A}\frac{(u-\gamma)}{\mu}$,
а отже для $\{u,v\} \subset W_1^p\left(R^l,d^lx\right)\bigcap C^\infty\left(R^l\right)$:

$$\left\langle \gamma - \lambda_0 \mathrm{A}\gamma,\gamma\left|\gamma\right|^{p-2}\right\rangle + \lambda_0\left\|\eta\right\|_p^p$$

$$= \left\langle \gamma - \lambda_0\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\gamma\right) + \lambda_0 b(x,\gamma,\nabla\gamma),\gamma\left|\gamma\right|^{p-2}\right\rangle =$$

$$= \left(\left\langle u - \lambda_0\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\right)\right) + \lambda_0 b(x,\left(u\right),\nabla\left(u\right)),u\left|u\right|^{p-2}\right\rangle + \lambda_0\left\|v\right\|_p^p\right) +$$

$$+\left(\left\langle u - \mu v - \lambda_0\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u - \mu v\right)\right) + \right.\right.$$

$$\left. + \ \lambda_0 b(x,\left(u - \mu v\right),\nabla\left(u - \mu v\right)),\left(u - \mu v\right)\left|u - \mu v\right|^{p-2}\right\rangle -$$

$$\left.-\left\langle u - \lambda_0\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u\right)\right) + \lambda_0 b(x,\left(u\right),\nabla\left(u\right)),u\left|u\right|^{p-2}\right\rangle\right) +$$

$$+\lambda_0\left(\left\langle v-\mu \mathrm{A}u,(v-\mu \mathrm{A}u)\left|v-\mu \mathrm{A}u\right|^{p-2}\right\rangle-\left\langle v,v\left|v\right|^{p-2}\right\rangle\right).$$

$$\left\langle \gamma-\lambda_0\mathrm{A}\gamma,\gamma\left|\gamma\right|^{p-2}\right\rangle+\lambda_0\left\|\eta\right\|_p^p=$$

$$\left\langle \gamma-\lambda_0\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\gamma\right)+\lambda_0 b(x,\gamma,\nabla\gamma),\gamma\left|\gamma\right|^{p-2}\right\rangle=$$

$$=\left(\left\langle u-\lambda_0 Au,u\left|u\right|^{p-2}\right\rangle+\lambda_0\left\|v\right\|_p^p\right)+$$

$$+\left(\left\langle u-\mu v-\lambda_0 A(u-\mu v),(u-\mu v)\left|u-\mu v\right|^{p-2}\right\rangle-\left\langle u-\lambda_0 Au,u\left|u\right|^{p-2}\right\rangle\right)+$$

$$+\lambda_0\left(\left\langle v-\mu \mathrm{A}u,(v-\mu \mathrm{A}u)\left|v-\mu \mathrm{A}u\right|^{p-2}\right\rangle-\left\langle v,v\left|v\right|^{p-2}\right\rangle\right)=$$

$$=\left(\left\langle u-\lambda_0 Au,u\left|u\right|^{p-2}\right\rangle+\lambda_0\left\|v\right\|_p^p\right)+$$

$$+\left\langle u,(u-\mu v)\left|u-\mu v\right|^{p-2}-u\left|u\right|^{p-2}\right\rangle-$$

$$+\left\langle v,\lambda_0\left(v-\mu \mathrm{A}u\right)\left|v-\mu \mathrm{A}u\right|^{p-2}-\lambda_0 v\left|v\right|^{p-2}-\mu\left(u-\mu v\right)\left|u-\mu v\right|^{p-2}\right\rangle+$$

$$+\lambda_0\left(\left\langle \mathrm{A}u,u\left|u\right|^{p-2}-\mu\left(v-\mu \mathrm{A}u\right)\left|v-\mu \mathrm{A}u\right|^{p-2}\right\rangle-\right.$$

$$\left.-\left\langle A(u-\mu v),(u-\mu v)\left|u-\mu v\right|^{p-2}\right\rangle\right).$$

Звідси випливає наведена вище нерівність.

Зауваження. Для $\{u,v\}\subset W_1^p\left(R^l,d^l x\right)\bigcap C^\infty\left(R^l\right)$можна використати наступні міркування:

$$\left|\left\langle v-\mu \mathrm{A}u,(v-\mu \mathrm{A}u)\left|v-\mu \mathrm{A}u\right|^{p-2}\right\rangle-\left\langle v,v\left|v\right|^{p-2}\right\rangle\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int_{R^l}\left|\left|v-\mu \mathrm{A}u\right|^p-\left|v\right|^p\right|dx^l=\int_{R^l}\left|v\right|^p\left|\left|1-\mu\tfrac{\mathrm{A}u}{\left|v\right|^p}\right|^p-\left|1\right|\right|dx^l\leqslant\mu p\left\|\mathrm{A}u\right\|_{L^1}+o(\mu^2).$$

Теорема 2. *Гіперболічне рівняння* $\frac{d^2u(t)}{dt^2}\in \mathrm{A}u(t)$, *за початкових умов* $t\in[0,T],\quad u(0)=u_0\in D(\mathrm{A}),\quad \frac{du(0)}{dt}=v_0\in D(\mathrm{A})$, *має розв'язок.*

Доведення. Для доведення цього розглянемо прямий добуток просторів $W_1^p\times L^p$ елементами якого є вектори

$$\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix},\quad u\in W_1^p(R^l,d^l x),v\in L^p(R^l,d^l x).$$

В цьому просторі можна ввести функцію, що буде норму за наступним правилом:

$$\left\|\begin{matrix} u\\ v\end{matrix}\right\|=\left(\left\langle u-\lambda_0\mathrm{A}u,u\left|u\right|^{p-2}\right\rangle+\lambda_0\left\langle v,v\left|v\right|^{p-2}\right\rangle\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Область визначення оператора $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}\\ \mathrm{A} & 0\end{pmatrix}$ є множина таких елементів $\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix},\quad u\in W_1^p(R^l,d^l x),v\in L^p(R^l,d^l x)$, , що елементи u,v задаються формулами $u=\gamma+\mu v$ і $v=\eta+\mu \mathrm{A}u$ і є такими, що задовольняють систему:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0\\ 0 & \mathrm{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}-\mu\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}\\ \mathrm{A} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma\\ \eta\end{pmatrix}.$$

Тоді коли додатне число μ достатньо мале область значень оператора $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$ містить всі елементи $\begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$, $\gamma,\eta \in \hat{W}_1^p(R^l,d^lx)$, отже для мінімального замкнутого розширення оператора $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$ в просторі $W_1^p(R^l,d^lx) \times L^p(R^l,d^lx)$, оператор $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$ має розв'язний, якій всюди визначений на добутку просторів $W_1^p(R^l,d^lx) \times L^p(R^l,d^lx)$.

А отже, випливає, що відповідне розширення оператора $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$ є локальним генератором деякої напівгрупи T_t в $W_1^p(R^l,d^lx) \times L^p(R^l,d^lx)$ і $W_1^p(R^l,d^lx) \subset L^p(R^l,d^lx)$. Звідси слідує твердження теореми 1.

2. Випадок вимірних коефіцієнтів в просторах $L^p(R^l,d^lx)$, $\quad p \geqslant 2, \quad l \geqslant 3$. Розглянемо випадок коли коефіцієнти в хвильовому рівнянні вигляду: $\frac{d^2u(t)}{dt^2} \in \mathrm{A}u(t)$ є вимірними, взагалі кажучи, не гладкими функціями.

В цьому випадку дослідження проводиться наступним чином: від гіперболічного рівняння перейдемо до системи параболічних рівнянь за допомогою наступної підстановки: $v = \frac{du}{dt}$.

Тоді задача набуде вигляду:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, t \in [0,T], \quad u(0) = u_0 \in D(\mathrm{A}),$$

$$v(0) = v_0 \in D(\mathrm{A}).$$

Отже, як і у випадку дослідження рівняння з гладкими коефіцієнтами хвильове рівняння звилося до еволюційної системи рівнянь .

Досліджуємо розв'язуваніcть наступної системи і доводимо, що для довільних елементів $\{\gamma,\eta\} \subset W_1^p$ існує таке дійсне число $\tilde{\mu} > 0$, що для всіх малих $0 < \mu < \tilde{\mu}$ система нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$$

має єдиний розв'язок $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Доведення. Для доведення існування розв'язку перепишемо цю систему у наступному вигляді:

$$u = \gamma + \mu v,$$

$$v - \mu \mathrm{A} u = \eta,$$

і підставимо $u = \gamma + \mu v$ в $v - \mu \mathrm{A} u = \eta$, тоді маємо:

$$v - \mu \mathrm{A}\left(\gamma + \mu v\right) = \eta.$$

Або в розгорнутому вигляді:

$$v - \mu \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\gamma + \mu v\right)\right) + \mu b(x,\left(\gamma + \mu v\right),\nabla\left(\gamma + \mu v\right)) = \eta$$

Розпишемо лінійний доданок:

$$\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\gamma-\mu v\right)\right)=\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\gamma\right)+\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\mu v\right),$$

тоді останнє рівняння набуде вигляду:

$$v-\mu^2\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v\right)+\mu b(x,\left(\gamma+\mu v\right),\nabla\left(\gamma+\mu v\right))=$$

$$=\eta+\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\gamma\right).$$

Далі зауважимо, що доданок елементу γ в нелінійній складові рівняння $b(x,(\gamma+\mu v),$ $\nabla\left(\gamma+\mu v\right))$ не впливає на характер умов тобто умови на не лінійність матимуть той самий вигляд (з іншими функціями $\mu_i(x)$, а отже з іншою форм — гранью), а саме:

$$|b(x,\left(\gamma+\mu v\right),\nabla\left(\gamma+\mu v\right))|\leqslant\mu\left(\mu_1(x)|\nabla u|+\mu_2(x)|u|+\mu_3(x)\right),$$

$$|b(x,\left(\gamma+\mu v\right),\nabla\left(\gamma+\mu v\right))-b(x,\left(\gamma+\mu w\right),\nabla\left(\gamma+\mu w\right))|\leqslant$$

$$\leqslant\mu\left(\mu_4(x)|v-w|+\mu_5(x)|\nabla(v-w)|\right).$$

Поділимо його на μ^2, при цьому $\frac{1}{\mu^2}$ позначимо через λ, оскільки $\mu^2>0$, а праву частину через ψ, при цьому зміняться лише позначення, а рівняння залишиться тим же, в спрощеному записі зміняться лише числові сталі форм – грані, що не суттєво, оскільки $\mu^2\to 0$ залежить лише від початкових даних. Отже маємо рівняння:

$$\lambda v-\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v\right)+\frac{1}{\mu}b(x,\left(\gamma+\mu v\right),\nabla\left(\gamma+\mu v\right))=\psi.$$

Це квазілінійне еліптичне диференційне рівняння в частинних з повільно зростаючими вимірними коефіцієнтами. Досліджуємо його за допомогою методу акретивних слабко компактних операторів із застосуванням $L^p(R^l,d^lx)$ – форм. Еліптичне рівняння з вимірними повільно зростаючими коефіцієнтами наближається (апроксимується) рівняннями з обмеженими (зрізаними) вимірними коефіцієнтами, наступним чином.

Означення. *Нехай $f(x)$ – вимірна за Лебегом функція на R^l. Тоді, визначимо зрізку f_n функції f за правилом:*

$$f_n=\begin{cases} n, & f>n,\\ f, & |f|\leqslant n,\\ -n, & f<-n;\end{cases}$$

Наступним кроком є згладжування уже обмежених коефіцієнтів еліптичного рівняння.

Означення. *Нехай $f(x)$ – вимірна за Лебегом функція на R^l. Тоді, функція $f^m(x)$ є* "гладкою"апроксимацію функції $f(x)$, за аргументом x:

$$f^m(x) = \int_{R^l} \rho_m(x-t)f(t)dt = \rho_m * f,$$

де $\rho_n(t)$ – гладка невід'ємна апроксимація 1 в R^l.

Тобто, отримано множину еліптичних рівнянь, що залежать від двох натуральних параметрів, які виникають під час «зрізання» та «згладжування». Зауважимо, що послідовність проведення операцій «зрізання» та «згладжування» важлива, тобто спочатку отримуємо коефіцієнти у вигляді обмежених функцій, а вже потім їх наближаємо гладкими функціями.

Далі досліджуємо множину рівнянь з гладкими коефіцієнтами за допомогою методів, що були розроблені вище. Доведення проводяться дослівно аналогічно, з урахуванням того моменту, що замість одного рівняння розглядається сукупність при двох фіксованих натуральних параметрах, так наприклад, форма буде визначатися наступним чином:

$$h_\lambda^{p,mn}(v,w) \equiv \lambda \langle v,w\rangle +$$

$$+ \langle dw \circ a^{m,n} \circ dv\rangle + \left\langle \frac{1}{\mu} b^{m,n}(x, (\gamma + \mu v), \nabla(\gamma+\mu v)),w \right\rangle,$$

де $w \in W_{1,0}^q(R^l,d^l x)$. При цьому оцінки при доведенні лем не зміняться, оскільки там використовувались лише норми функцій коефіцієнтів та властивість форм – обмеженості. Отже отримана множина розв'язків $v^{m,n}$, що залежить від двох натуральних параметрів згладжування m і зрізання n, далі потрібно зняти обмеження на згладжування та зрізання, тобто перейти до границі по цим натуральним параметрам. Важливим моментом доведення є те, що спочатку знімаються обмеження на згладжування, перехід до границі за параметром mа потім, обмеженість коефіцієнтів, перехід до границі за параметром n.

Переходимо до границі за параметром m. Переходимо до границі за параметром n. А отже, існують функції u і v є шуканими і такими, що задовольняють систему:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Зауваження. *Якщо елементи $\{u,v\} \subset W_1^p\left(R^l,d^l x\right) \bigcap C^\infty\left(R^l\right)$, тоді є вірною наступна оцінка:*

$$\left\langle u - \lambda_0 \mathrm{A} u, u\,|u|^{p-2} \right\rangle + \lambda_0 \left\|v\right\|_p^p \leqslant (1 + o(\mu)) \left(\left\langle \gamma - \lambda_0 \mathrm{A}\gamma, \gamma\,|\gamma|^{p-2} \right\rangle + \lambda_0 \left\|\eta\right\|_p^p \right),$$

причому додання стала λ_0 не залежать від числа μ і елементів $\{\gamma,\eta\}$.

1. Область визначення оператора $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$ є множина таких елементів $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $u \in W_1^p(R^l,d^l x), v \in L^p(R^l,d^l x)$, що елементи u,v є розв'язками системи:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Тоді, коли додатне число μ достатньо мале область значень оператора $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$ містить всі елементи $\begin{pmatrix} \gamma \\ \eta \end{pmatrix}$, $\gamma,\eta \in \hat{W}_1^p(R^l,d^l x) \subset L^p(R^l,d^l x)$, отже для мінімального замкнутого розширення оператора $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$ в просторі $W_1^p(R^l,d^l x) \times L^p(R^l,d^l x)$, оператор $\begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$ має розв'язний, якій всюди визначений на добутку просторів $W_1^p(R^l,d^l x) \times L^p(R^l,d^l x)$.

А отже, випливає, що відповідне розширення оператора $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$ є локальним генератором деякої нелінійної напівгрупи T_t в $W_1^p(R^l,d^l x) \times L^p(R^l,d^l x)$ і $W_1^p(R^l,d^l x) \subset L^p(R^l,d^l x)$.

3. Дослідження гладкості розв'язку рівняння гіперболічного типу у випадку коли коефіцієнти не залежать від часової змінної. Досліджується гладкість розв'язків рівняння:

$$\frac{d^2}{dt^2}u - \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u\right) + \sum_{i=1}^{l} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u + c(x)u + u|u|^{\rho} = f(x,t),$$

де коефіцієнти $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ - гладкі не залежні від часу функції.
Теорема 4.

1. *Якщо* $u_0 \in W_1^2(R^l,d^l x)$, $v_0 \in L^2(R^l,d^l x)$, $f \in L^2\left(0,T;L^2(R^l,d^l x)\right)$, $\rho \leqslant \frac{2}{l-2}$, $l \geqslant 3$, *і*

$u \in L^2\left(0,T;W_1^2(R^l,d^l x)\right)$ $u' \in L^2\left(0,T;L^2(R^l,d^l x)\right)$,
$u'' \in L^2\left(0,T;W_{-1}^2(R^l,d^l x)\right)$ *де функція* u *є слабкий розв'язок Задачі Коші:*

$$\frac{d^2}{dt^2}u - \sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u\right) + \sum_{i=1}^{l} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u + c(x)u + u|u|^{\rho} = f(x,t),$$

$$u(0) = u_0, \quad \frac{d}{dt}u(0) = v_0.$$

Тоді $u \in L^\infty\left(0,T;W_1^2(R^l,d^l x)\right)$, $u' \in L^\infty\left(0,T;L^2(R^l,d^l x)\right)$ *і є вірною оцінка:*

$$\begin{aligned} &ess\sup_{t\in[0,T]}\left(\|u'(t)\|_{L^2(R^l,d_l x)} + \|u(t)\|_{W_1^2(R^l,d_l x)}\right) \leqslant \\ &\leqslant C\left(\|u_0\|_{W_1^2(R^l,d_l x)} + \|v_0\|_{L^2(R^l,d_l x)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(R^l,d_l x))}\right). \end{aligned}$$

1. *Якщо* $u_0 \in W_2^2(R^l,d^l x)$, $v_0 \in W_1^2(R^l,d^l x)$, $f' \in L^2\left(0,T;L^2(R^l,d^l x)\right)$, $\rho \leqslant \frac{2}{l-2}$, $l \geqslant 3$,

тоді $u \in L^\infty\left(0,T;W_2^2(R^l,d^l x)\right)$,$u' \in L^\infty\left(0,T;W_1^2(R^l,d^l x)\right)$,
$u'' \in L^\infty\left(0,T;L^2(R^l,d^l x)\right)$,

$u''' \in L^{\infty}\left(0,T;W^2_{-1}(R^l,d^lx)\right)$ *і є вірною оцінка:*

$$ess\sup_{t\in[0,T]}\Big(\|u(t)\|_{W_2^2(R^l,d_lx)}+\|u'(t)\|_{W_1^2(R^l,d_lx)}+$$

$$\|u''(t)\|_{L^2(R^l,d_lx)}+\|u'''(t)\|_{L^2(0,T;W^2_{-1}(R^l,d_lx))}\Big)\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\|u_0\|_{W_2^2(R^l,d_lx)}+\|v_0\|_{W_1^2(R^l,d_lx)}+\|f\|_{W_1^2(0,T;L^2(R^l,d_lx))}\right).$$

Доведення. Перше твердження випливає з оцінки «енергії», якщо спрямувати індекс послідовності до нескінченності і перейти до границі у підпослідовності, тобто

$$\limsup_{k\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\left(\|u_k'(t)\|_{L^2(R^l,d_lx)}+\|u_k(t)\|_{W_1^2(R^l,d_lx)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\|u_0\|_{W_1^2(R^l,d_lx)}+\|v_0\|_{L^2(R^l,d_lx)}+\|f\|_{L^2(0,T;L^2(R^l,d_lx))}\right).$$

Перше твердження доведено.
Нехай множина $\{w_i\}$є послідовність власних елементів оператора $-\Delta$ в просторі $W_{1,0}^2(R^l,d^lx)$. Складемо інтегральні тотожності $u_k=\sum_{i=1}^k c_i\,(t)\,w_i$ $i=1,k$:

$$\left\langle\frac{d^2}{dt^2}u_k-\sum_{r,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{rj}\,(x)\,\frac{\partial}{\partial x_r}u_k\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{l}b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u_k+c\,(x)\,u_k+u_k\,|u_k|^{\rho}\,,w_i\right\rangle=$$

$$=\langle f(x,t),w_i\rangle\,,$$

і про диференціюємо останню рівність за змінною t, маємо:

$$\left\langle\frac{d^3}{dt^3}u_k,w_i\right\rangle-\left\langle\sum_{r,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{rj}\,(x)\,\frac{\partial}{\partial x_r}u_k'\right),w_i\right\rangle+$$

$$+\left\langle\sum_{j=1}^{l}b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u_k',w_i\right\rangle+$$

$$+\left\langle c\,(x)\,u_k',w_i\right\rangle+\left\langle(\rho+1)\,|u_k|^{\rho}\,u_k',w_i\right\rangle=\left\langle f'(x,t),w_i\right\rangle,\quad i=1,k.$$

Множимо на $c_i''\,(t)$ і сумуємо за індексом $i=1,k$, маємо:

$$\left\langle\frac{d^3}{dt^3}u_k,u_k''\right\rangle-\left\langle\sum_{r,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{rj}\,(x)\,\frac{\partial}{\partial x_r}u_k'\right),u_k''\right\rangle+$$

$$+\left\langle\sum_{j=1}^{l}b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u_k',u_k''\right\rangle+$$

$$+\left\langle c\left(x\right)u'_k,u''_k\right\rangle+\left(\rho+1\right)\left\langle\left|u_k\right|^{\rho}u'_k,u''_k\right\rangle=\left\langle f'(x,t),u''_k\right\rangle.$$

Позначимо $v_k = u'_k$, отже, в нових позначеннях, за виключенням не лінійного доданку останнє рівняння має той самий вигляд, для якого була доведена оцінка «енергії» і для нього справедлива оцінка:

$$\frac{d}{dt}\left(\|v'_k\|_2^2+\langle dv_k\circ a\circ dv_k\rangle+\|v_k\|_q^q\right)\leqslant$$

$$\leqslant const\left(\|v'_{kk}\|_2^2+\langle dv_k\circ a\circ dv_k\rangle+\|v_k\|_q^q+\|f\|_2^2\right),t\in[0,T].$$

Отже, потрібно оцінити нелінійний доданок, використовуючи нерівність Гельдера, маємо:

$$\left|\left\langle\left|u_k\right|^{\rho}u'_k,u''_{kk}\right\rangle\right|\leqslant\left\|\left|u_k\right|^{\rho}\right\|_r\left\|u'_k\right\|_q\left\|u''_k\right\|_2,\ \frac{1}{r}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}=1.$$

Оскільки $\rho l=(p-2)l\leqslant q$, то маємо $\left\|\left|u_k\right|^{\rho}\right\|_r\leqslant\left\|u_k\right\|^{\rho}\leqslant const$, а отже:

$$\left|\left\langle\left|u_k\right|^{\rho}u'_k,u''_{kk}\right\rangle\right|\leqslant const\left\|u'_k\right\|_q\left\|u''_k\right\|_2,$$

тобто можна застосовувати нерівність Гронуола.
Далі запишемо:

$$\begin{aligned}&-\left\langle\sum\nolimits_{r,j=1}^{l}\tfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{rj}\left(x\right)\tfrac{\partial}{\partial x_r}u_k\right),w_i\right\rangle+\left\langle\sum\nolimits_{j=1}^{l}b_j(x)\tfrac{\partial}{\partial x_j}u_k,w_i\right\rangle+\\&+\left\langle c\left(x\right)u_k,w_i\right\rangle+\left\langle u_k\left|u_k\right|^{\rho},w_i\right\rangle=\left\langle f(x,t),w_i\right\rangle-\left\langle\tfrac{d^2}{dt^2}u_k,w_i\right\rangle.\end{aligned}$$

Помножимо на $\lambda_i c_i(t)$ - де λ_iвідповідні власні числа і сумуємо, маємо:

$$\begin{aligned}&\left\langle u''_k,\Delta u_k\right\rangle=\\&=\left\langle\sum\nolimits_{r,j=1}^{l}\tfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{rj}\left(x\right)\tfrac{\partial}{\partial x_r}u_k\right),\Delta u_k\right\rangle-\left\langle\sum\nolimits_{j=1}^{l}b_j(x)\tfrac{\partial}{\partial x_j}u_k,\Delta u_k\right\rangle-\\&-\left\langle c\left(x\right)u_k,\Delta u_k\right\rangle+\left\langle u_k\left|u_k\right|^{\rho},\Delta u_k\right\rangle+\left\langle f(x,t),\Delta u_k\right\rangle.\end{aligned}$$

Отже, аналогічно, маємо:

$$\|u''_k(0)\|_2^2\leqslant const\left(\|u_0\|^2_{W_2^2(R^l,d_lx)}+\|v_0\|^2_{W_1^2(R^l,d_lx)}+\|f\|_2^2\right).$$

Використовуючи нерівність Гронуола і позначення $v_k=u'_k$, отримуємо:

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}\left(\|u_k(t)\|^2_{W_2^2(R^l,d_lx)}+\|u'_k(t)\|^2_{W_1^2(R^l,d_lx)}+\|u''_k(t)\|^2_{L^2(R^l,d_lx)}\right)\leqslant\\&\leqslant C\left(\|u_0\|^2_{W_2^2(R^l,d_lx)}+\|v_0\|^2_{W_1^2(R^l,d_lx)}+\|f\|^2_{W_1^2(0,T;L^2(R^l,d_lx))}\right).\end{aligned}$$

Для завершення доведення перейдемо до границі по підпослідовності при $k_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty$. Теорема 4 доведена.

Розглянемо приклад . Рівняння телеграфного типу:
$\vartheta u_{tt}-\left(\rho u_x\right)_x-\sigma u_t+\zeta u=0$, де $\vartheta>0$, $\rho>0$, $\sigma\geqslant 0$, $\zeta>0$, при всіх $x\in(a,b)$.

Введемо заміну $\upsilon_1 = u$, $\upsilon_2 = u_x$, $\upsilon_3 = u_t$,тоді телеграфне рівняння буде записане у вигляді системи:

$$\begin{cases} \upsilon_1 = \upsilon_3, \\ \rho\upsilon_2 = (\rho\upsilon_3)_x - \rho_x\upsilon_3, \\ \vartheta\upsilon_3 = (\rho\upsilon_2)_x - \zeta\upsilon_1 - \sigma\upsilon_3. \end{cases}$$

Отже, якщо вектор $(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ задовольняє дану систему і початкові дані у вигляді $\upsilon_2(x{,}0) = \upsilon_{1x}(x{,}0)$, оскільки, $\upsilon_{2t} = \upsilon_{1tx} = \upsilon_{3x}$, тоді для всіх $t > 0$ виконується рівність $\upsilon_2(x{,}t) = \upsilon_{1x}(x{,}t)$, для всіх розв'язків системи. Дана система є диссипативною і її можна досліджувати за допомогою теорії напівгруп стиску.

Висновки. Доведено існування слабкого розв'язку квазілінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу з сингулярними коефіцієнтами. Результати даної роботи можуть бути узагальнені на більш широкі класи рівнянь.

1. **Ахиезер Н.И.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н.И. Ахиезер. – М.: Гостехиздат, 1950. – 543 с.
2. **Вишик М.Й.** О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений / М.Й. Вишик // Матем. сб. – 1951. – Т. , №3. – С. 615–676.
3. **Вишик М.Й., Чепыжов В.В.** Усреднение траекторных аттракторов эволюционных уравнений с быстро осциллирующими членами / М.Й.Вишик, В.В. Чепыжов // Матем. сб. – 2001. – Т. 192, №1. – С.13–50.
4. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В.Скороход. – М.: Наука, 1965. – 510 с.
5. **Дубинский Ю.А.** Нелинейные параболические и эллиптические уравнения / Ю.А. Дубинский // Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. – М.: ВИНИТИ, 1976. – Т. 9. – С. 5 – 130.
6. **Иосида К.** Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
7. **Кухарчук М.М., Яременко М.I.** Про розв'язність одного класичного лінійного еліптичного диференціального рівняння другого порядку / М.М.Кухарчук, М.I.Яременко // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – №5. – С. 137–141.
8. **Кухарчук М.М., Яременко М.I.** Про аналог теореми Лакса / М.М.Кухарчук, М.I.Яременко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2008. – №3. – С. 183–185.

Яременко Н. И.

Гиперболические уравнения с сингулярными коэффициентами

Резюме

Работа посвящена доказательству существования слабого решения квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных в пространствах W_1^p с измеримыми коэффициентами. Исследование проводится с использованием метода Галеркина и метода форм и нелинейных монотонных операторов. Условия на коэффициенты уточняются в процессе исследования свойств нелинейных операторов, порожденных формой,

составленной по левым частям заданного уравнения.
Ключевые слова: гиперболическое уравнение, сингулярные коэффициенты, метод форм

Yaremenko M. I.
HYPERBOLIC EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENT

Summary

Dedicated to research existence conditions of quasi-linear differential equations with measurable coefficients, ie the study limitations imposed by the non linearity in which the system will have to research a solution and uniqueness of the solution of a certain class of functions. We consider weak solvability of quasi-linear differential partial differential equations of hyperbolic type with smooth and measurable singular coefficients, research methods based on the theory of semigroups using the method of differential forms. A new class of operators $A^p_\lambda : W^p_1 \to W^p_{-1}$ associated with a given differential equation and investigate the properties of these operators.
Key words: hyperbolic equation, singular coefficient, metod form.

REFERENCES

1. Ahiezer, N. I. (1950). *Teoriya lineynyih operatorov v gilbertovom prostranstve*, Moscow: Gostehizdat, 543 p.
2. Vishik, M. Y. (1951). O silno ellipticheskih sistemah differentsialnyih uravneniy, *Matem. sb.*, vol. 29(71), no. 3, pp. 615–676.
3. Vishik, M. Y. & Chepyizhov, V. V. (2001). Usrednenie traektornyih attraktorov evolyutsionnyih uravneniy s byistro ostsilliruyuschimi chlenami, *Matem. sb.*, vol. 192, no. 1, pp. 13–50.
4. Gihman, I. I. & Skorohod, A. V. (1965). *Vvedenie v teoriyu sluchaynyih protsessov*, Moscow: Nauka, 510 p.
5. Dubinskiy, Yu. A. (1976). Nelineynyie parabolicheskie i ellipticheskie uravneniya, *Itogi nauki i tehniki. Seriya: Sovremennyie problemyi matematiki*, Moscow: VINITI, vol. 9, pp. 5–130.
6. Iosida, K. (1967). *Funktsionalnyiy analiz*, Moscow: Mir, 624 p.
7. Kukharchuk, M. M. & Yaremenko, M. I. (2008). Pro rozviaznist odnoho klasychnoho liniinoho eliptychnoho dyferentsialnoho rivniannia druhoho poriadku, *Naukovi visti NTUU KPI*, no. 5, pp. 137–141.
8. Kukharchuk, M. M. & Yaremenko, M. I. (2008). Pro analoh teoremy Laksa, *Visnyk Kyivskoho natsionalnoho universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seriia: fizyko-matematychni nauky*, no. 3, pp. 183–185.

Researches in Mathematics and Mechanics.– 2017.–V. 22, Is. 1(29).–P. 97–104

UDC 511

A. S. Radova
I. I. Mechnikov Odesa National University

DIVISORS OF THE GAUSSIAN INTEGERS IN NORM GROUP E_N^+

The divisor function in norm group E_n^+ is investigated, where the set E_n^+ is a multiplicative subgroup in the multiplicative group of classes of residues modulo p^n over $\mathbb{Z}[i]$. The asymptotic formula is obtained.

MSC: 11N37.
Key words: divisor function, Gaussian integers, asymptotic formula.

Introduction. Let A, B be two infinite sets of positive numbers. We define generalized function of divisors

$$\tau_{\mathrm{A,B}}(n) = \#\left\{(a,b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B} \,|ab = n\right\}, (n \in \mathbb{N}).$$

Usually study a behavior in average the function $\tau_{\mathrm{A,B}}(n)$, i. e. construct an asymptotic formula for $\sum_{n\leqslant x} \tau_{\mathrm{A,B}}(n)$. In the case A = B = N we have the classical Dirichlet problem of divisors. In works of Smith and Subbarao [5], Nowak [3], Varbanec and Zarzycki [6] was investigated the case A = N, $\mathrm{B} = \mathrm{B}(b_0,q) := \{b \in \mathbb{N}\,|b \equiv b_0 \;(mod\; q)\}$. In the sequel came to be consider other sets A and B.

Varbanec and Zarzycki [7], Varbanec [8], Nowak [4] generalized this problem on the case of sets A, B, which define as the sets of all positive integers each of which is norm of integer ideal in finite extension of field $\mathbb{Q}$.

In the present paper we will consider a generalized function of divisors over the ring of Gaussian integers determined in this way:

for every $w \in \mathbb{Z}[i]$ we put

$$\tau\left(w; E_n^+\right) = \sum_{\substack{\delta\,|w \\ \delta \in E_n^+}} 1,$$

where $E_n^+ := \{\alpha \in \mathbb{Z}[i]\,|\mathrm{N}(\alpha) \equiv 1\,(modp^n)\}$, $(p \equiv 3\,(mod 4)$, p is prime).

The set E_n^+ is a multiplicative subgroup in the multiplicative group of classes of residues modulo p^nover $\mathbb{Z}[i]$.

Auxiliary arguments. Throughout the paper, α,β and γ(also with a subscript) denote Gaussian integers; $\mathrm{N}(\alpha)$, $Sp(\alpha)$ are a norm (respectively, a trace) of α, i. e. $\mathrm{N}(\alpha) = |\alpha|^2$, $Sp(\alpha) = 2Re(\alpha)$.

We denote by $G = \mathbb{Z}[i] = \left\{a + bi \in \mathbb{C}\,\middle|a,b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\right\}$ and G_{p^n} (respectively,$G^*_{p^n}$) an additive group of residue classes (respectively, a multiplicative group of reduced residue classes) modulo p^n over G.

Let δ_0, δ be the Gaussian rationales (i. e. δ_0, $\delta \in \mathbb{Q}[i]$) not necessarily integers and let m be a rational integer (i. e. $m \in \mathbb{Z}$). For $Res > 1$ we consider the following series

Received 24.03.2016

$$\zeta_m\left(s;\delta_0,\delta\right) = \sum_{\substack{w \in G \\ w \neq -\delta_0}} \frac{e^{4mi \arg w}}{N\left(w+\delta_0\right)^s} e^{\pi i Sp(\delta w)} \tag{1}$$

The function $\zeta_m\left(s;\delta_0,\delta\right)$ accepts an analytic extending on all complex plane and calls the Hecke zeta-function.

Lemma 1. The Hecke zeta-function $\zeta_m\left(s;\delta_0,\delta\right)$ has the functional equation

$$\pi^{-s}\Gamma\left(2\left|m\right|+s\right)\zeta_m\left(s;\delta_0,\delta\right) = \pi^{-(1-s)}\Gamma\left(2\left|m\right|+1-s\right)\zeta_m\left(1-s;-\delta,\delta_0\right)e^{-\pi i Sp\left(\delta_0\overline{\delta}\right)}$$

(here $\overline{\delta}$ is a complexly-conjugate with δ).

Moreover, $\zeta_m\left(s;\delta_0,\delta\right)$ is an entire function if $m \neq 0$ or $m=0$ and δ is not a Gaussian integer. For $m=0$ and $\delta \in G$, $\zeta_m\left(s;\delta_0,\delta\right)$ is a holomorphic function except at $s=1$, where it has a simple pole with a residue π.

For the proof in case $\zeta_m\left(s;0,0\right)$ see [1]. The proof in other cases is similar.

Corollary. $\zeta_0\left(0;\delta_0,\delta\right)=0$ if δ_0 is not a Gaussian integer.

Lemma 2. Let $\alpha \in E_n^+$. Then for every ε, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ any $T>1$ in the rectangle

$$R = \left\{-\varepsilon \leqslant Res \leqslant 1+\varepsilon, \left|Ims\right| \leqslant T\right\}$$

we have

$$\begin{aligned}&(s-1)^2\left[\zeta_m\left(s;0,0\right)\left(\zeta_m\left(s;\tfrac{\alpha}{p^n},0\right)-\textstyle\sum_{\beta\in\mathrm{B}}\frac{e^{4mi\arg\left(\frac{\alpha}{p^n}+\beta\right)}}{\left(N\left(\frac{\alpha}{p^n}+\beta\right)\right)^s}\right)\right]=\\&=\mathrm{O}\left(\varepsilon^{-2}\left(t^2+1\right)\left(t^2+m^2+10\right)^{\theta}\right)\end{aligned} \tag{2}$$

where $\theta=\frac{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon-\sigma)}{1+2\varepsilon}$, $\sigma = Res$.

From now on B denote the set $\{0,\ \pm 1,\ \pm i\}$.

A constant in symbol "O" is absolute.

Proof. This assertion follows at once from estimates for

$$(s-1)^2\left[\zeta_m\left(s;0,0\right)\left(\zeta_m\left(s;\frac{\alpha}{p^n},0\right)-\sum_{\beta\in\mathrm{B}}e^{4mi\arg\left(\frac{\alpha}{p^n}+\beta\right)}\left(N\left(\frac{\alpha}{p^n}+\beta\right)\right)^s\right)\right]$$

on vertical legs of the rectangle R and the Phragmen–Lindelof theorem.

■

Lemma 3. Let $\delta \in \mathbb{Q}\left(i\right), N\left(\delta_0\right)<1$. Then $\zeta_0\left(s;\ \delta_0,0\right)$ has the following in the Laurent expansion

$$\zeta_0\left(s;\delta_0,0\right)=\frac{\pi}{s-1}+a_0^{'}\left(\delta_0\right)+a_1\left(\delta_0\right)\left(s-1\right)+...,$$

where

$$a_0(\delta_0)=\begin{cases}\pi\gamma+4L'\left(1,\chi_4\right)\ \ if\ \delta_0\in G,\\ \pi\gamma+4L'\left(1,\chi_0\right)+\mathrm{O}\left(\min\limits_{\beta\in\mathrm{B}}\left(N\left(\delta_0+\beta\right)\right)^{-1}\right)\ \ if\ \delta_0\in\mathbb{Q}\left(i\right),\ \delta_0\notin G;\end{cases}$$

γ is the Euler's constant, χ_4 is non-principal character modulo 4.

Proof. For $\delta_0 = 0$ we have $\zeta_0(s;\, 0{,}0) = 4\xi(s)L(s{,}\chi_4)$,

where $\xi(s)$ is the Riemann zeta-function, $L(s,\chi_4)$ is the Dirichlet zeta-function with non-principal character modulo 4.

Hence,

$$a_0\left(\delta_0\right) = \pi\gamma + 4L'\left(1{,}\chi_4\right).$$

Since a residue of $\zeta_0\left(s;\delta_0{,}0\right)$ does not depends at δ_0, $\delta_0 \neq 0$, we may write

$$\begin{aligned}
&a_0\left(\delta_0\right) - a\left(0\right) = \lim\left(\zeta_0\left(s;\delta_0{,}0\right) - \zeta_0\left(s;0{,}0\right)\right) = \\
&= \lim_{s\to 1\pm 0}\left\{\tfrac{1}{(N(\delta_0))^s} + \textstyle\sum_{N(\beta)=1}\left(\tfrac{1}{(N(\delta_0+\beta))^s} - \tfrac{1}{(N(\beta_0))^s}\right) + \right.\\
&\left.+\textstyle\sum_{N(\beta)\geqslant 2}\left(\tfrac{1}{(N(\delta_0+\beta))^s} - \tfrac{1}{(N(\beta))^s}\right)\right\} = \\
&= \tfrac{1}{N(\delta_0)} + \textstyle\sum_{N(\beta)=1}\tfrac{1}{N(\delta_0+\beta)} - 4 + \textstyle\sum_{N(\beta)\geqslant 2}\tfrac{N(\beta)-N(\beta+\delta_0)}{N(\beta)N(\beta+\delta_0)}
\end{aligned}$$

At last, if we observe that for $N\left(\beta\right) \to \infty$

$$\left|\frac{N\left(\beta\right) - N\left(\beta+\delta_0\right)}{N\left(\beta\right)N\left(\beta+\delta_0\right)}\right| \leqslant \frac{c\left|\delta_0\right|\cdot\left|\beta\right|}{N\left(\beta\right)N\left(\beta+\delta_0\right)} = \mathrm{O}\left(N\left(\delta\right)^{1/2}N\left(\beta\right)^{-3/2}\right)$$

we obtain the assertion of Lemma.

■

Corollary.

$$\operatorname*{res}_{s=1}\left\{\zeta_0\left(s;0{,}0\right)\zeta_0\left(s;\frac{\alpha}{p^n}{,}0\right)\frac{y^s}{s}\right\} = \pi^2 y\log y + c_0\left(\alpha{,}p^n\right)y \tag{3}$$

where

$$\begin{aligned}
&c_0\left(\alpha{,}p^n\right) = \pi\left(\textstyle\sum_{\beta\in\mathrm{B}}\tfrac{1}{N\left(\frac{\alpha}{p^n}+\beta\right)} + 2\pi\left(\gamma - \tfrac{1}{2}\right) + 8L'\left(1{,}\chi_4\right) - 4 + \right.\\
&\left.+\mathrm{O}\left(N^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\alpha}{p^n}\right)\right)\right)
\end{aligned} \tag{4}$$

Lemma 4. For every $\varepsilon > 0$ and $T \to \infty$ the following assertion has place

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_{-T}^{T}\left|\tfrac{e^{4mi\arg\gamma}}{N(\gamma)^s}\zeta_m\left(s;\tfrac{\alpha}{\gamma}{,}0\right) - \textstyle\sum_{\mathrm{B}} e^{4mi\arg(\alpha+\beta\gamma)}\left(N\left(\alpha+\beta\gamma\right)\right)^{-s}\right|ds = \\
&= \mathrm{O}\left(\tfrac{\left(T^2+m^2\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{N(\gamma)^{1-\varepsilon}}\right)
\end{aligned}$$

with the O-constant depending only on ε.

Lemma 5. Let a, a_0, b, b_0 be complex-valued functions over the ring of Gaussian integers,$\left|a_0\left(w\right)\right|$, $\left|b_0\left(w\right)\right| \leq 1$. Let

$$A\left(w\right) = \sum_{\substack{\delta\in G\\ a\left(\delta\right)=w}} a_0\left(\delta\right)$$

$$B(w) = \sum_{\substack{\delta \in G \\ b(\delta) = w}} b_0(\delta)$$

and let $A(w)$,$\mathrm{B}(w) << N(w)^{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.
Let us assume for α,$\gamma \in G$ and $Res > 1$

$$f(w;\alpha,\gamma) = \sum_{\substack{w_1,w_2 = w \\ w_2 \equiv \alpha\,(mod\gamma)}} A(w_1)\,\mathrm{B}(w_2)$$

$$F(s) = \sum_{w} f(w;\alpha,\gamma)\,N(w)^{-s}.$$

Then for $c \geqslant 1+\varepsilon$, $T > 1$, $1 < N(\gamma) \leqslant x$ we have

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{N(w)\leqslant x} f(w;\alpha,\gamma) = \\
&= \tfrac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\Big[F(s) - \textstyle\sum_{\beta\in\mathrm{B}} \mathrm{B}(\alpha+\beta\gamma)\,N^{-s}(\alpha+\beta\gamma)\sum_{w} \mathrm{A}(w)\,N(w)^{-s}\Big]\tfrac{x^s}{s}ds + \\
&+ \textstyle\sum_{\beta\in\mathrm{B}} \mathrm{B}(\alpha+\beta\gamma)\sum_{w\in\Omega} \mathrm{A}(w) + \mathrm{O}\left(x^{c+2\varepsilon}T^{-1}(c-1)^2\min\left\{1,\frac{x^{1/2}}{N(\gamma)^{3/2}}\right\}\right) + \\
&+ \mathrm{O}\left(\frac{x^{1/2+\varepsilon}}{N^{1/2}(\gamma)}\log T\right)
\end{aligned} \qquad (5)$$

where

$$\mathrm{B} = \{\beta\,|N(\beta) = 0,1\},\ \Omega(\alpha) = \left\{w(\alpha)\,\middle|\,N(w) \leq \frac{x}{N(\alpha+\beta\gamma)}\right\}.$$

The proofs of Lemma 4 and 5 are similar to proofs of Lemmas 6 and in [8].

Main Results. We denote

$$\tau^{(m)}\left(w;E_n^+\right) := \sum_{\substack{\alpha \in E_n^+ \\ \alpha\,|w}} e^{4mi\arg w} = e^{4mi\arg w}\tau^{(0)}\left(w;E_n^+\right) = e^{4mi\arg w}\tau\left(w;E_n^+\right).$$

First we prove the following statement.

Theorem 1. Let p be a prime rational number, $p \equiv 3\,(mod 4)$. For any positive integer n the asymptotic formula

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{N(w)\leqslant x} \tau^{(m)}(w;E_n^+) = \varepsilon_m\Big(\tfrac{\pi^2}{2}\tfrac{p+1}{p}\tfrac{x\log x}{p^n} + \\
&+ \tfrac{\pi x}{4p^n}\tfrac{p+1}{p}\left(b_0(\tilde{\chi}_0) + \gamma + L'(1,\chi_4)\right) + O\left(x^{1/2+\varepsilon}\log T\right) + \\
&+ O\left(\left(\tfrac{T^2+m^2}{T^2}\right)^{\frac{1}{2}}p^{-n}x^{\frac{1}{2}}\right)\Big)
\end{aligned}$$

holds, where the parameter $b_0\left(\tilde{\chi}_0\right)$ determine in (**??**)

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1\ if\, m=0 \\ 0\ if\, m\neq 0 \end{cases}.$$

a parameter $b_0\left(\tilde{\chi}_0\right)$ determine in (9) (see the bellow).
Proof. For $m=0$ we use Lemma 5 with $a\left(w\right)=b\left(w\right)=w$, $a_0\left(w\right)=1$

$$b_0\left(w\right)=\begin{cases} 1\ \ if\, w\in E_n^+ \\ \ \ 0\ \ else \end{cases}$$

For $Res>1$ and $\alpha\in E_n^+$ we have:

$$p^{-2ns}\zeta_0\left(s;0{,}0\right)\zeta_0\left(s;\frac{\alpha}{p^n}{,}0\right)=\sum_w \tau^*\left(w;\alpha{,}E_n^+\right)N\left(w\right)^{-s},$$

where

$$\tau\left(w;\alpha{,}E_n^+\right)=\sum_{\substack{w=w_1w_2\\ w_2\equiv\alpha\left(p^n\right)\\ \alpha\in E_n^+}}1.$$

Hence, by (5),

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{N(w)\leqslant x}\tau\left(w;\alpha{,}E_n^+\right)=\\ &=\tfrac{1}{2\pi i}\textstyle\int_{c-iT}^{c+iT}\zeta_0\left(s;0{,}0\right)\left[p^{-2ns}\zeta_0\left(s;\tfrac{\alpha}{p^n}{,}0\right)-\sum_{\beta\in\mathrm{B}}N\left(\alpha+\beta p^n\right)^{-s}\right]\tfrac{x^s}{s}ds+\\ &+\textstyle\sum_{\mathrm{B}}\sum_{\Omega(\alpha)}1+\mathrm{O}\left(\tfrac{x^{c-2\varepsilon}}{T(c-1)^2}\min\left\{1,\left(\tfrac{x}{p^{3n}}\right)^{1/2}\right\}\right)+\mathrm{O}\left(x^{1/2+\varepsilon}p^{-n}\log T\right).\end{aligned}\tag{6}$$

In order to estimate the integral in (6) we take $c=1+3\varepsilon$ and use the residual theorem. Thus Lemmas 1 and 2 give

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2\pi i}\textstyle\int_{c-iT}^{c+iT}\zeta_0\left(s;0{,}0\right)\left[\zeta_0\left(s;\tfrac{\alpha}{p^n}{,}0\right)-\sum_{\beta\in\mathrm{B}}N\left(\alpha+\beta p^n\right)^{-s}\right]\left(\tfrac{x}{p^{2n}}\right)^s\tfrac{ds}{s}=\\ &=\underset{s=1}{res}\left\{\zeta_0\left(s\right)\left[\zeta_0\left(s;\tfrac{\alpha}{p^n}{,}0\right)-\textstyle\sum_{\mathrm{B}}N\left(\tfrac{\alpha}{p^n}+\beta\right)^{-s}\right]\left(\tfrac{x}{p^{2n}}\right)^s\tfrac{1}{s}\right\}+\\ &+\textstyle\int_{1/2-iT}^{1/2+iT}\zeta_0\left(s;0{,}0\right)\left[\zeta_0\left(s;\tfrac{\alpha}{p^n}{,}0\right)-\sum_{\beta\in\mathrm{B}}N\left(\alpha+\beta p^n\right)^{-s}\right]\left(\tfrac{x}{p^{2n}}\right)^s\tfrac{ds}{s}+\\ &+\mathrm{O}\left(x^{1+3\varepsilon}T^{-1}p^{-2n}\right)+\mathrm{O}\left(\left(xp^{-2n}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)\qquad\qquad(\mathbf{??})\end{aligned}$$

Applying Cauchy inequality in an integral in (**??**), we obtain

$$\begin{aligned}&I=\left|\textstyle\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT}\zeta_0\left(s;0{,}0\right)\left[\zeta_0\left(s;\tfrac{\alpha}{p^n}{,}0\right)-\sum_{\mathrm{B}}N\left(\tfrac{\alpha}{p^n}+\beta\right)^{-s}\right]\left(\tfrac{x}{p^{2n}}\right)^s\tfrac{ds}{s}\right|\leqslant\\ &\leqslant x^{1/2}\left(\textstyle\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT}\left|\zeta_0\left(s;0{,}0\right)\right|^2\tfrac{ds}{s}\right)^{1/2}\left(\textstyle\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT}\left|p^{-2ns}\zeta_0\left(s;\tfrac{\alpha}{p^n}{,}0\right)-\sum_{\mathrm{B}}\tfrac{1}{N(\alpha+\beta p^n)}\right|^2\tfrac{|ds|}{|s|}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

Since $\zeta_0(s;0{,}0) = 4\xi(s)\,L(s,\chi_4)$ we infer

$$\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} |\zeta_0(s;0{,}0)|^2 \frac{|ds|}{|s|} << \left(\int_1^T |\xi(s)|^4 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_1^T |L(s,\chi_4)|^4 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} << \log^5 T$$

(we use estimates of mean value for fourth moment of $\xi(s)$ and $L(s,\chi_4)$, see [2]). Moreover, Lemma 4 gives

$$\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} \left| p^{-2ns}\zeta_0\left(s;\frac{\alpha}{p^n},0\right) - \sum_{\mathrm{B}} N(\alpha+\beta p^n)^{-s} \right|^2 \frac{|ds|}{|s|} << \frac{T^{\varepsilon}}{p^{2n(1-\varepsilon)}}$$

Therefore,

$$I << x^{1/2} p^{-n+\varepsilon} T^{\varepsilon} << x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} T^{1+\varepsilon} p^{-n}.$$

We take

$$T = \begin{cases} x^{1/2} & if\ \ p^n \le x^{1/3} \\ x^{1/4} p^{n/2} & if\ \ p^n > x^{1/3} \end{cases}.$$

Hence,

$$\begin{gathered} \sum\nolimits_{N(w)\le x} \tau(w;\alpha,E_n^+) = \\ = \operatorname*{res}_{s=1}\left\{ \zeta_0(s;0{,}0)\left[\zeta_0\left(s;\tfrac{\alpha}{\gamma},0\right) - \sum\nolimits_{\mathrm{B}} N\left(\tfrac{\alpha}{p^n}+\beta\right)^{-s}\right]\left(\tfrac{x}{p^{2n}}\right)^s \tfrac{1}{s}\right\} + \\ + \sum\nolimits_{\beta\in\mathrm{B}} \sum\nolimits_{w\in\Omega(\alpha)} 1 + \mathrm{O}\left(x^{1/2+3\varepsilon} p^{-n}\right). \end{gathered} \tag{8}$$

But we have

$$\sum_{\alpha\in\mathrm{E}_n^+} \sum_{\beta\in\mathrm{B}} \sum_{w\in\Omega(\alpha)} 1 = \pi x \sum_{\alpha\in\mathrm{E}_n^+} \sum_{\mathrm{B}} N(\alpha+\beta p^n)^{-1} + \mathrm{O}\left(\left(\frac{x}{N(\alpha)}\right)^{1/3}\right) \tag{6}$$

$$\sum_{\alpha} \operatorname*{res}_{s=1}\left\{ -\zeta_0(s) \sum_{\mathrm{B}} \frac{x^s}{sN(\alpha+\beta p^n)} \right\} = -\pi x \sum_{\alpha} \sum_{\mathrm{B}} \frac{1}{N(\alpha+\beta p^n)} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{\alpha} \operatorname*{res}_{s=1}\left\{\zeta_0(s;0{,}0)\,\zeta_0\left(s;\tfrac{\alpha}{p^n},0\right)p^{-2ns}\tfrac{x^s}{s}\right\} = \\ &= \operatorname*{res}_{s=1}\left[\left(\tfrac{\pi}{4}\tfrac{1}{s-1} + \left(\tfrac{\pi\gamma}{4} + L'(1,\chi_4) + \ldots\right)\right) \times \right. \\ &\left. \times \sum\nolimits_{\alpha\in E_n^+} \tfrac{1}{\left|E_n^+\right|}\tfrac{1}{p^{2ns}}\left(\sum\nolimits_{\hat{\chi}\in\hat{E}_n^+} \hat{\chi}\left(\alpha^{-1}\right)\zeta(s,\hat{\chi})\right)\tfrac{x^s}{s}\right] \end{aligned} \tag{8}$$

where $\hat{\mathrm{E}}_n^+$ is the group of characters forE_n^+.

$$\zeta\left(s,\hat{\chi}\right)=\sum_{w\in G}\frac{\tilde{\chi}\left(w\right)}{N\left(w\right)^{s}},\tilde{\chi}\in\hat{E}_n^+.$$

$$\zeta\left(s,\hat{\chi}\right)=\frac{\varepsilon\left(\hat{\chi}\right)}{s-1}+b_0\left(\hat{\chi}\right)+b_1\left(\hat{\chi}\right)\left(s-1\right)+...$$

$$\varepsilon\left(\tilde{\chi}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{4}\frac{p^2-1}{p^2} & if\ \ \tilde{\chi}=\tilde{\chi}_0\ is\ the\ principal\ character\ from\ \hat{E}_n^+;\\ 0 & else.\end{cases}$$

$$b_0\left(\tilde{\chi}_0\right)=\frac{\pi}{4}\frac{p^2-1}{p^2}\left(\gamma+\frac{L'\left(1,\chi_4\right)}{L\left(1,\chi_4\right)}+\frac{\log p^2}{p^2-1}\right) \tag{9}$$

Hence,

$$\begin{aligned}&\operatorname*{res}_{s=1}\left\{\sum\nolimits_{\alpha\in E_n^+}\zeta_0\left(s;0{,}0\right)\zeta_0\left(s;\tfrac{\alpha}{p^n},0\right)p^{-2ns}\tfrac{x^s}{s}\right\}=\\&=\tfrac{\pi^2}{2}\tfrac{p+1}{p}\tfrac{x\log x}{p^n}+\tfrac{\pi x}{4p^n}\tfrac{p+1}{p}\left(b_0\left(\tilde{\chi}_0\right)+\gamma+L'\left(1,\chi_4\right)\right)\end{aligned} \tag{10}$$

■

In the case $m\neq 0$ the proofs follows by analogous if we take $T=\left(xp^{-2n}\right)^{\frac{1}{2}-2\varepsilon}$.

Well known lemma of Vinogradov on approximation of characteristic function of segment $\Delta\subset[0{,}1)$ by truncated Fourie series gives the main result our paper.

Theorem 2. For $p^n\ll x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ and $\left(\phi_2-\phi_1\right)\ll\left(xp^{-2n}\right)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$ the following asymptotic formula

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathrm{E}_n^+\\ \varphi_1\leqslant\arg w\leqslant\varphi_2\\ N(w)\leqslant x}}\tau\left(w;\alpha,\mathrm{E}_n^+\right)=\left(\frac{\pi^2 x\log x}{p^n}\cdot\frac{p+1}{p}+\frac{x}{p^{2n}}\sum_{\alpha\in\mathrm{E}_n}c\left(\alpha,p^n\right)\right)\left(\varphi_2-\varphi_1\right)+\mathrm{O}\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

holds.

The constant in symbol "O" depends only on ε, $\varepsilon>0$.

Concluding remark. The Theorem 2 establishes that the divisor function is an Gaussian integers with divisors from the norm group E_n^+.

Conclusion. The divisor function in norm group E_n^+ was investigated. The asymptotic formula is obtained.

1. **Hecke E.** Uber eine neue Art von Zeta-funktionen und ihre Beziechungen zur Verteilung der Primzahlen // Math. Z. – 1920. – 6. – P. 11–51.
2. **Montgomery H. L.** Topics in Multiplicative Number Theory, Springer-Varlag, 1971.
3. **Nowak W. G.** On result of Smith and Subbarao concerning a divisor problem / W. G. Nowak // Canad. Math. Bull. – 1984. – 27. – P. 501–504.
4. **Nowak W. G.** Divisor problem in special sets on positive integers / W. G. Nowak // Acta Math. Univ. Comeniance. – 1992. – LXI, 1. – P. 101–115.

5. **Smith R. A.** The average number of divisors in an arithmetic progression / R. A. Smith, M. V. Subbarao // Canad. Math. Bull. – 1981. – 24(1). – P. 37–41.
6. **Varbanec P. D.** Divisors of integers in arithmetic progression / P. D. Varbanec, P. Zarzycki // Canad. Math. Bull. – 1990. – 33. – P. 129-133.
7. **Varbanec P. D.** Divisors of the Gaussian integers in an Arithmetic Progression / P. D. Varbanec, P. Zarzycki // J. Number Theory. – 1989. – 33(2). – P. 152–169.
8. **Varbanec P. D.** On the distribution of natural numbers with divisors from an arithmetic progression // Acta Arith. – 1991. – LVII. – P. 245–256.

Радова А. С.
Дільники Гаусових чисел на норменій підгрупі E_n^+

Резюме

Розглядається функція дільників на норменій підгрупі E_n^+, де множина E_n^+ – мультиплікативна підгрупа мультиплікативної групи класів лишків модулю p^nнад $\mathbb{Z}[i]$. Побудована асимптотична формула.
Ключові слова: гаусові числа, функція дільників, асимптотична формула.

Радова А. С.
Делители Гауссовых чисел на норменной подгруппе E_n^+

Резюме

Рассматривается функция делителей на норменной подгруппе E_n^+, где множество E_n^+ – мультипликативная подгруппа мультипликативной группы классов вычетов по модулю p^n над $\mathbb{Z}[i]$. Построена асимптотическая формула.
Ключевые слова: гауссовы числа, функция делителей, асимптотическая формула.

Researches in Mathematics and Mechanics.– 2017.–V. 22, Is. 1(29).–P. 105–114

UDC 519.21

Tran Dinh Tuong
Ho Chi Minh University of Transport, Ho Chi Minh, Vietnam

DYNAMICS OF A STOCHASTIC LOTKA–VOLTERRA FOOD CHAIN MODEL

The authors would like to thank Nguyen Hai Dang for his comments on the manuscript of this paper.

This paper is concerned with a stochastic Lotka-Volterra food chain model. The existence of the global solution and the ultimate boundedness of moments of the solutions are proved. Moreover, we estimate the average in time of the solution and investigate the extinction and persistence of each species.

MSC: 60J65, 60G10, 65C30.
Key words: brownian motion; food chain, Lotka–Volterra, predator-prey model, stochastic differential equation.

Introduction. Since the 1920's when Vito Volterra employed systems of differential equations to describe the dynamics of a predator-prey population, there has been a large amount of mathematical study on population dynamics. One of the most important type of species interaction in ecology is food chain interaction. The simplest food chain model is the classical Lotka-Volterra predator-prey

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(a - by(t)), \\ \dot{y}(t) = y(t)(-c + dx(t)), \end{cases} \tag{1}$$

where $x(t)$ and $y(t)$ represent, respectively, the densities of the prey and the predator populations; a, b, c and d are positive constants. Besides, in order to describe better different ecology models, other predator-prey models with various type of functional responses have been investigated in many papers. Meanwhile, there has been considerable interest in food chain models of n pieces, especially models of three species (see [1,2,8,9,11,13,14,18,21,22]). For example, we take a three species Lotka-Volterra food chain model

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(A - Bx(t) - C_1 y(t)), \\ \dot{y}(t) = y(t)(-D_1 + C_2 x(t) - E_1 z(t)), \\ \dot{z}(t) = z(t)(-D_2 + E_2 y(t)), \end{cases} \tag{2}$$

where $x(t), y(t), z(t)$ are the densities of the lowest-level prey (X), mid-level species (Y), and top predator (Z) at time t, respectively; $A > 0$ in the intrinsic growth rate of X; $B > 0$ is the coefficient of intra specific competition of X; $D_1 > 0$ and $D_2 > 0$ represent the natural death rate of the mid-level predator respectively, $C_1 > 0$ and $E_1 > 0$ represent the effect of predation on the lowest-level prey and the mild-level species; $C_2 > 0$ and E_2 represent the efficiency and propagation rate of Y and Z in the presence of their own preys.

Received 15.03.2017

On another direction, stochastic population models have also been received much attention recently. In fact, stochastic models are more realistic than deterministic on since parameters of models are often perturbed environment noise. In [17], the authors studied the existence and uniqueness of the positive solution of a general stochastic Lotka-Volterra model. Then, the asymptotic behavior of the positive solution was also considered in [17] and [6]. Especially, the more detailed study for stochastic predator-prey models can be found [3, 5, 7, 12, 19, 20], etc. In [10], the author considered the persistence of the following stochastic food web model in which the top predator consumes the lowest-level rather than the mid-level

$$\begin{cases} dx(t) = x(t)(a - bx(t) - c_1 y(t))dt + \sum\limits_{j=1}^{2} \sqrt{\sigma_{1j}} dW_j(t), \\ dy(t) = y(t)(-d_1 + c_2 x(t) - e_1 z(t))dt + \sum\limits_{j=1}^{2} \sqrt{\sigma_{2j}} dW_j(t), \\ dz(t) = z(t)(-d_2 + e_2 y(t))dt + \sum\limits_{j=1}^{2} \sqrt{\sigma_{3j}} dW_j(t), \end{cases} \tag{3}$$

where the σ_{ij} are nonnegative constants and the $W_j,\ j = \overline{1,3}$ are independent scalar Brownian motion processes. In this paper, we consider (2) with suppose the rate of growth of each species perturbed by white noise. So that (2) becomes

$$\begin{cases} dx(t) = x(t)(A - Bx(t) - C_1 y(t))dt + \sigma_1 x(t)dW(t), \\ dy(t) = y(t)(-D_1 + C_2 x(t) - E_1 z(t))dt + \sigma_2 y(t)dW(t), \\ dz(t) = z(t)(-D_2 + E_2 y(t))dt + \sigma_3 z(t)dW(t), \end{cases} \tag{4}$$

where σ_1,σ_2 and σ_3 are real constants. Beside that, [15] discussed a system has a unique positive solution and its pth moment is bounded. They also established conditions that the system is persistent in time average and the system is going to be extinction in probability. It looks more general than our model. How ever, our results are better than them.

The goal of this paper is to prove the existence and uniqueness of positive solution to Equation (4). Then we investigate the extinction and persistence of each species with a slightly condition. A brief description of the organization of this article is as follows. The article is divided into three sections. In section 2, the existence and uniqueness of the global solution are proved and the ultimate boundedness of moments of the solution are given. In section 3, we give conditions for the existence and persistence of each species.

Main Results

1. Global positive solution and moment estimation. Throughout this paper, we let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be a probability space and $\{W(t)\}_{t\geqslant 0}$ be a scalar Brownian motion defined on this probability space. Denote by $\mathbb{R}^3_+$ the set $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$. Obviously, the coefficients of Equation (4) are locally Lipschitz continuous but do not satisfy the linear growth condition. However, we have

Theorem 1. *For any given initial value $\big(x(0),y(0),z(0)\big) \in \mathbb{R}^3_+$, there is a unique global solution to Equation (4) on $t \geqslant 0$ and the solution will remain in $\mathbb{R}^3_+$ almost surely.*

Proof. Since the coefficient of the Equation (4) are locally Lipschitz continuous, for any given value $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3_+$, there is a unique local solution $(x(t),y(t),z(t))$ on $t \in [0;\tau_e]$, where τ_e is the explosion time. The solution is global if $\tau_e = \infty$ a.s.

Putting $\alpha = C_1 C_2^{-1}$ and $\beta = \alpha E_1 E_2^{-1}$. For each $k \in \mathbb{N}$, we define the stopping time

$$\tau_k = \inf\left\{t \geqslant 0, x(t) + \alpha y(t) + \beta z(t) < k^{-1} \text{ or } x(t) + \alpha y(t) + \beta z(t) > k\right\}$$

with convention $\inf \emptyset = \infty$. τ_k is increasing, so we put $\tau_\infty = \lim_{k\to\infty} \tau_k$. Let $V(x,y,z) = (x + \alpha y + \beta z) - \ln(x + \alpha y + \beta z)$. Obviously, $V(x,y,z) \geqslant 0$ for all $x > 0, y > 0, z > 0$. By Itô's formula,

$$\begin{aligned} dV(x(t),y(t),z(t)) &= \mathcal{L}V(x(t),y(t),z(t))dt \\ &\quad + (x(t) + \alpha y(t) + \beta z(t) - 1)\frac{\sigma_1 x(t) + \alpha\sigma_2 y(t) + \beta\sigma_3 z(t)}{x(t) + \alpha y(t) + \beta z(t)} dW(t), \end{aligned}$$

where,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x,y,z) &= (Ax - Bx^2 - \alpha D_1 y - \beta D_2 z) - \frac{Ax - Bx^2 - \alpha D_1 y - \beta D_2 z}{x + \alpha y + \beta z} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1 x + \alpha\sigma_2 y + \beta\sigma_3 z}{x + \alpha y + \beta z}\right)^2. \end{aligned}$$

From the formula of $\mathcal{L}V(x,y,z)$ we have

$$\mathcal{L}V(x,y,z) \le (A + B)x - Bx^2 + D_1 + D_2 + \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) \ \forall x,y,z > 0.$$

It implies that $K := \sup_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_+} \mathcal{L}V(x,y,z) < \infty$. Consequently,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}V\big(x(t\wedge\tau_k),y(t\wedge\tau_k),z(t\wedge\tau_k)\big) \\ &\qquad = V\big(x(0),y(0),z(0)\big) + \mathbb{E}\int_0^{t\wedge\tau_k} \mathcal{L}V\big(x(s),y(s),z(s)\big)ds, \\ &\qquad \leqslant V\big(x(0),y(0),z(0)\big) + \mathbb{E}\int_0^{t\wedge\tau_k} K ds = V\big(x(0),y(0),z(0)\big) + K\mathbb{E}(t\wedge\tau_k). \end{aligned} \tag{5}$$

Suppose $\tau_\infty < \infty$ with a positive probability. It implies the existence of two positive constants ϵ and $T > 0$ such that $\mathbb{P}\{\tau_\infty < T\} > 2\epsilon$. Hence, there is $k_0 \in \mathbb{N}$ such that $\mathbb{P}\{\tau_k < T\} > \epsilon$ for any $k > k_0$.

Putting $h_k = (k - \ln k) \wedge (k^{-1} + \ln k)$, then $h_k \to \infty$ as $k \to \infty$ and $V(x(\tau_k), y(\tau_k), z(\tau_k)) \geqslant h_k$. It follows from (5) that,

$$\begin{aligned} h_k\epsilon \leqslant h_k\mathbb{P}\{\tau_k < T\} &\leqslant \mathbb{E}V\big(x(T\wedge\tau_k),y(T\wedge\tau_k),z(T\wedge\tau_k)\big), \\ &\leqslant K\mathbb{E}(T\wedge\tau_k) + V\big(x(0),y(0),z(0)\big), \\ &\leqslant KT + V\big(x(0),y(0),z(0)\big) \ \ \forall\, k > k_0. \end{aligned}$$

Let $k \to \infty$ we get a contradiction. This implies that $\tau_\infty = \infty$ a.s. The proof is complete.

Theorem 2. *Let $\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ be a solution to Equation (4) with the initial value $\big(x(0),y(0),z(0)\big) \in \mathbb{R}^3_+$. There exist $\theta, K_\theta > 0$ such that*

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}\big([x(t)]^{\theta+1} + [y(t)]^{\theta+1} + [z(t)]^{\theta+1}\big) \leqslant K_\theta.$$

Proof. Let $\theta = \left(\left[\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}{2}+1\right].\max\left\{1,\frac{1}{D_1},\frac{1}{D_2}\right\}\right)^{-1}$. Consider $V(x,y,z) = (x+\alpha y+\beta z)^{\theta+1}$. By Itô's formula,

$$\begin{aligned} &de^{(\theta+1)\theta t}V\big((x(t),y(t),z(t)\big)\\ &\qquad = e^{(\theta+1)\theta t}\Big(\mathcal{L}V\big(x(t),y(t),z(t)\big) + (\theta+1)\theta V\big(x(t),y(t),z(t)\big)\Big)dt\\ &+(\theta+1)e^{(\theta+1)\theta t}\Big(x(t)+\alpha y(t)+\beta z(t)\Big)^\theta\big(\sigma_1 x(t)+\alpha\sigma_2 y(t)+\beta\sigma_3 z(t)\big)dW(t), \end{aligned} \tag{6}$$

where,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x,y,z) &= (\theta+1)(x+\alpha y+\beta z)^\theta[(Ax-Bx^2-\alpha D_1 y-\beta D_2 z)\\ &\quad+\frac{\theta}{2(x+\alpha y+\beta z)}(\sigma_1 x+\alpha\sigma_2 y+\beta\sigma_3 z)^2]. \end{aligned}$$

Since $\alpha,\beta>0$, for all $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_+$, we have

$$\begin{aligned} &\frac{\theta}{2(x+\alpha y+\beta z)}(\sigma_1 x+\alpha\sigma_2 y+\beta\sigma_3 z)^2 + \theta(x+\alpha y+\beta z)\\ &\qquad\leqslant \theta\Big(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}{2}+1\Big)(x+\alpha y+\beta z)\\ &\qquad\leqslant \theta\Big[\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}{2}+1\Big]\max\Big\{1,\frac{1}{D_1},\frac{1}{D_2}\Big\}\Big(x+\alpha D_1 y+\beta D_2 z\Big)\\ &\qquad= x+\alpha D_1 y+\beta D_2 z. \end{aligned}$$

Thus, there is a $K_3>0$ such that for all $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_+$

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}V(x,y,z)+(\theta+1)\theta V(x,y,z)\\ &\qquad\leqslant(\theta+1)(x+\alpha y+\beta z)^\theta\big((A+1)x-Bx^2-\alpha D_1 y-\beta D_2 z\big)\leqslant K_3. \end{aligned}\tag{7}$$

Let τ_k be defined in the proof of Theorem 1. Taking expectations on both sides of (6) and (7), we obtain,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}e^{(\theta+1)\theta(t\wedge\tau_k)}V\big(x(t\wedge\tau_k),y(t\wedge\tau_k),z(t\wedge\tau_k)\big)\\ &\qquad\qquad\leqslant V\big(x(0),y(0),z(0)\big)+\frac{K_3}{(\theta+1)\theta}\mathbb{E}\big(e^{(\theta+1)\theta(t\wedge\tau_k)}-1\big). \end{aligned}$$

Let $k\to\infty$, we get

$$e^{(\theta+1)\theta t}\mathbb{E}V\big(x(t),y(t),z(t)\big)\leqslant V\big(x(0),y(0),z(0)\big)+\frac{K_3}{(\theta+1)\theta}(e^{(\theta+1)\theta t}-1),$$

equivalently,

$$\mathbb{E}V\big(x(t),y(t),z(t)\big) \leqslant V\big(x(0),y(0),z(0)\big)e^{-(\theta+1)\theta t} + \frac{K_3}{(\theta+1)\theta}(1-e^{-(\theta+1)\theta t}),$$

which implies

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}V\big(x(t),y(t),z(t)\big) \leqslant \frac{K_3}{(\theta+1)\theta} =: K_\theta.$$

The proof is complete.

The following result is a direct corollary of this theorem.

Corollary 1. *Equation* (4) *is a stochastically ultimately bounded in the sense that for any* $\epsilon > 0$, *there is a positive constant* $H = H(\epsilon)$ *such that for any initial value* $\big(x(0),y(0),z(0)\big) \in \mathbb{R}^3_+$, *the solution has the property that*

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}\big\{x(t)+y(t)+z(t) \geqslant H\big\} < \epsilon.$$

We now give a estimation for the growth rate of the prey.

Theorem 3. *Let* $\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ *be a solution to Equation* (4) *with the initial value* $\big(x(0),y(0),z(0)\big) \in \mathbb{R}^3_+$. *We have*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{x(t)}{\ln t} \leqslant \frac{\sigma_1^2}{B}.$$

Proof. Let $\eta > 0$. In view of Itô's formula,

$$e^{\eta t}x(t) = x(0) + \int_0^t e^{\eta s}\Big((A+\eta)x(s) - Bx^2(s) - C_1 y(s)\Big)ds + \sigma_1 \int_0^t e^{\eta s} x(s)dW(s). \quad (8)$$

Note that $M(t) = \int_0^t e^{\eta s}x(s)dW(s)$ is a real valued continuous local martingale with quadratic form

$$\big\langle M(t),M(t)\big\rangle = \int_0^t e^{2\eta s}x^2(s)ds.$$

For each $\lambda > 0$, it follows from the exponential martingale inequality (see [16]) that

$$\mathbb{P}\Big\{\sup_{0\leqslant t\leqslant k} M(t) - \lambda e^{-\eta k}\big\langle M(t),M(t)\big\rangle \;< \frac{e^{\eta k}}{\lambda}\ln k\Big\} \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

By the well known Borel-Cantelli lemma, there exists an $\Omega_0 \subset \Omega$ with $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ such that for any $\omega \in \Omega_0$, there exists a $k_0 = k_0(\omega) \in \mathbb{N}$ satisfying

$$M(t) - \lambda e^{-\eta k}\big\langle M(t),M(t)\big\rangle \;< \frac{e^{\eta k}}{\lambda}\ln k, \;\; \forall\, 0 \;\leqslant t \leqslant k,\; k \geqslant k_0.$$

Since for any $0 \leqslant t \leqslant k$,

$$e^{-\eta k}\big\langle M(t),M(t)\big\rangle \leqslant \int_0^t e^{\eta s}x^2(s)ds.$$

We have

$$M(t) \leqslant \int_0^t \lambda e^{\eta s}x^2(s)ds + \frac{e^{\eta k}}{\lambda}\ln k,\ \forall 0 \leqslant t \leqslant k,\, k \geqslant k_0. \tag{9}$$

For $\lambda < \frac{B}{\sigma_1}$, we put $K_\lambda = \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\big\{(A+\eta)x - (B-\sigma_1\lambda)x^2\big\} < \infty$. It follows from (8), (9) that

$$e^{\eta t}x(t) \leqslant x(0) + \frac{K_\lambda}{\eta}(e^{\eta t}-1) + \frac{e^{\eta k}\sigma_1 \ln k}{\lambda}.$$

Obviously, if $k \geqslant k_0$ and $k-1 \leqslant t \leqslant k$, the following inequality holds,

$$\frac{x(t)}{\ln t} \leqslant \frac{e^{-\eta k}}{\ln(k-1)}\Big(x(0) - \frac{K_\lambda}{\eta}\Big) + \frac{K_\lambda}{\eta\ln(k-1)} + \frac{e^{\eta}\sigma_1}{\lambda}\frac{\ln k}{\ln(k-1)}.$$

Let $k \to \infty$, we get $\limsup_{t\to\infty}\frac{x(t)}{\ln t} \leqslant \frac{e^{\eta}\sigma_1}{\lambda}$. Letting $\eta \to 0, \lambda \to \frac{B}{\sigma_1}$, we yield the desired assertion.

2. Extinction and persistence. We now give condition for the existence and persistence of the three species. Let $\widehat{x}(t)$ be the solution with the initial value $\widehat{x}(0) = x(0)$ to equation

$$dx(t) = \widehat{x}(t)\big(A - B\widehat{x}(t)\big)dt + \sigma_1\widehat{x}(t)dW(t). \tag{10}$$

By the comparison theorem for stochastic equation, we have $\widehat{x}(t) \geqslant x(t)\ \forall t \geqslant 0$ a.s.

If $A < \frac{\sigma_1^2}{2}, \lim_{t\to\infty}\widehat{x}(t) = 0$ a.s. (see [19]) which implies that $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Moreover,

$$\frac{\ln y(t)}{t} \leqslant \frac{\ln y(0)}{t} - D_1 - \frac{\sigma_2^2}{2} + \frac{1}{t}\int_0^t C_2 x(s)ds + \frac{W(t)}{t} \tag{11}$$

so it follows from $\lim_{t\to\infty}\frac{W(t)}{t} = 0$ a.s. that $\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln y(t)}{t} \leqslant -D_1 - \frac{\sigma_2^2}{2}$. Similarly we have

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln z(t)}{t} \leqslant -D_2 - \frac{\sigma_3^2}{2}.$$

As a result, when $A < \frac{\sigma_1^2}{2}$, all species are extinct.

If $A_1 > \frac{\sigma_1^2}{2}$ it is known that $\ln\widehat{x}(t)$ has a unique stationary distribution with the density $f_*(u) = C\exp\big((2A-\sigma_1^2)u - \frac{2B}{\sigma_1}e^u\big)$. For more details, please see [19]. Moreover, we define

$$\int_{\mathbb{R}} uf_*(u)du = \frac{2B}{2A-\sigma^2} := m.$$

By the ergodic theorem,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \widehat{x}(s)ds = m, \text{ a.s.} \tag{12}$$

Substituting the inequality $x(t) \leqslant \widehat{x}(t)\ \forall t \geqslant 0$ and (12) into (11) gets that if $C_2 m \leqslant D_1 + \frac{\sigma_2^2}{2}$, $y(t) \to 0$ as $t \to \infty$ with probability 1. It again implies $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$ a.s. By the same way as in the proof of [4, Theorem 2.1], we claim that $\ln x(t)$ converges weakly to f_*. In the other case, we have

Theorem 4. *Let $\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ be a solution to Equation (4) with the initial value $\big(x(0),y(0),z(0)\big) \in \mathbb{R}^3_+$. Assume that $A > \frac{\sigma_1^2}{2}$. The following claims hold with probability 1.*

a) $\liminf_{t\to\infty} \frac{\ln y(t)}{t} \leqslant 0$. *Moreover, if* $C_2 m > D_1 + \frac{\sigma_2^2}{2}$ *then*

b) $\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t y(s)ds \geqslant \min\Big\{\frac{D_2+\frac{\sigma_3^2}{2}}{E_2}, \frac{B}{C_1C_2}\big(C_2m - D_1 - \frac{\sigma_2^2}{2}\big)\Big\}$;

c) $\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t x(s)ds \geqslant \frac{D_1+\frac{\sigma_2^2}{2}}{C_2}$;

d) *If* $\frac{B}{C_1C_2}\big(C_2m - D_1 - \frac{\sigma_2^2}{2}\big) > \frac{D_2+\frac{\sigma_3^2}{2}}{E_2}$ *then* $\limsup_{t\to\infty} z(t) > 0$.

Proof. Assume that there is a $\Omega_1 \subset \Omega$, $\mathbb{P}(\Omega_1) > 0$ and $\liminf_{t\to\infty} \frac{\ln y(t)}{t} > 0$. Hence, for $\omega \in \Omega_1, \lim_{t\to\infty}\int_0^t y(s)ds = \infty$. It follows from Itô's formula for $\ln x(t)$ that

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln x(t)}{t} &\leqslant A - \frac{\sigma_1^2}{2} - \liminf_{t\to\infty}\frac{B}{t}\int_0^t x(s)ds\\ &\quad - \lim_{t\to\infty}\frac{C_1}{t}\int_0^t y(s)ds + \lim_{t\to\infty}\sigma_1^2\frac{W(t)}{t} = -\infty \text{ a.s. in } \Omega_1.\end{aligned}$$

Hence $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ for almost $\omega \in \Omega_1$. Combining with (11), we get

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln y(t)}{t} \leqslant -D_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \quad \text{for almost } \omega \in \Omega_1.$$

This contradiction implies that item a) holds almost surely.

Suppose that there exists a subset $\Omega_2 \subset \Omega$ with $\mathbb{P}(\Omega_2) > 0$ such that

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{E_2}{t}\int_0^t y(s)ds < D_2 + \frac{\sigma_3^2}{2}.$$

By Itô's formula

$$\frac{\ln z(t)}{t} - \frac{\ln z(0)}{t} \leqslant -D_2 - \frac{\sigma_3^2}{2} + \frac{1}{t}\int_0^t E_2 y(s)ds + \frac{W(t)}{t}.$$

Since $\frac{W(t)}{t} \to 0$ as $t \to \infty$ with probability 1, then for almost we have

$$\omega \in \Omega_2, \limsup_{t\to\infty}\frac{\ln z(t)}{t} < 0.$$

Applying Itô's formula again, we derive that for almost $\omega \in \Omega_2$,

$$\begin{aligned}\liminf_{t\to\infty}\frac{\ln y(t)}{t} &\geqslant -D_1 - \frac{\sigma_2^2}{2} + \lim_{t\to\infty}\frac{C_2}{t}\int_0^t \widehat{x}(s)ds - \lim_{t\to\infty}\frac{E_1}{t}\int_0^t z(s)ds\\ &\quad - \limsup_{t\to\infty}\frac{C_2}{t}\int_0^t \big(\widehat{x}(s) - x(s)\big)ds \qquad (13)\\ &= C_2m - D_1 - \frac{\sigma_2^2}{2} - C_2\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \big(\widehat{x}(s) - x(s)\big)ds.\end{aligned}$$

On the other hand, employing Itô's formula for $\ln \widehat{x}(t) - \ln x(t)$ yields

$$0 \leqslant \frac{\ln \widehat{x}(t) - \ln x(s)}{t} = -\frac{B}{t}\int_0^t \big(\widehat{x}(s) - x(s)\big)ds + \frac{C_1}{t}\int_0^t y(s)ds \ \text{ a.s.} \tag{14}$$

which results in

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \big(\widehat{x}(s) - x(s)\big)ds \leqslant \frac{C_1}{B} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t y(s)ds \text{ a.s.} \tag{15}$$

From (13) and (15) imply that for almost $\omega \in \Omega_2$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\ln y(t)}{t} \geqslant C_2 m - D_1 - \frac{\sigma_2^2}{2} - \frac{C_1 C_2}{B} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t y(s)ds.$$

By item a), we get

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t y(s)ds \geqslant \frac{B}{C_1 C_2}\Big(C_2 m - D_1 - \frac{\sigma_2^2}{2}\Big) \quad \text{a.s. in} \quad \Omega_2.$$

This inequality implies item b). It follows from item b) that

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln y(t)}{t} \geq 0 \quad \text{a.s. if} \quad C_2 m - D_1 - \frac{\sigma_2^2}{2} > 0.$$

Using (11) we have

$$0 \leqslant \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln y(t)}{t} \leqslant -D_1 - \frac{\sigma_2^2}{2} + \limsup_{t\to\infty} \frac{C_2}{t}\int_0^t x(s)ds \ \text{ a.s.}$$

From this inequality, it is easy to obtain item c). We now prove the final claim. Suppose that there is a $\Omega_3 \subset \Omega$ such that $\mathbb{P}(\Omega_3) > 0$ and that $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0 \ \forall \omega \in \Omega_3$. Similar to the proof of item b) we claim that for almost $\omega \in \Omega_3$,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t y(s)ds \geqslant \frac{B}{C_1 C_2}(C_2 m - D_1 - \frac{\sigma_2^2}{2}).$$

Applying Itô's formula to $\ln z(t)$ we obtain that for almost $\omega \in \Omega_3$,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln z(t)}{t} = -D_2 - \frac{\sigma_3^2}{2} + \limsup_{t\to\infty} \frac{E_2}{t}\int_0^t y(s)ds + \lim_{t\to\infty} \frac{W(t)}{t} > 0.$$

This contradiction completes the proof.

Conclusion. This paper is concerned with a stochastic Lotka-Volterra food chain model. The existence of the global solution and the ultimate boundedness of moments of the solutions are proved. Moreover, we estimate the average in time of the solution and investigate the extinction and persistence of each species.

1. R. S. Baghela, J. Dhar, *Pattern formation in three species food web model in spatiotemporal domain with Beddington-DeAngelis functional response*, Nonlinear Analysis: Modelling and Control. 19 (2014), 155-171.

2. C. H. Chiu, S. B. Hsu, *Extinction of top-predator in a three-level food chain model*, J. Math. Biol. 37(1998) 372-380.
3. N. H. Dang, N. H. Du, T. V. Ton, *Asymptotic behavior of predator-prey systems perturbed by white noise*. Acta Appl. Math. 115 (2011), no. 3, 351-370.
4. N. T. Dieu, D. H. Nguyen, N. H. Du, G. Yin, *Classification of the asymptotic behavior of a stochastic SIR model*, to appear in SIAM Journal on Applied Dynamical Systems.
5. N. H. Du, N. H. Dang, *Asymptotic behavior of Kolmogorov systems with predator-prey type in random environment*. Commun. Pure Appl. Anal. 13 (2014), no. 6, 2693-2712.
6. N. H. Du, V. H. Sam, *Dynamics of a stochastic Lotka-Volterra model pertubed by white noise*, J. Math. Anal. Appl. 324 (1) (2006), 82-97.
7. N.H. Du, D. H. Nguyen, G. Yin, *Conditions for permanence and ergodicity of certain stochastic predator-prey models*, J. Appl. Probab. 53 (2016), 1-16.
8. H. Freedman, J. So, *Global stability and persistence of simple food chains*, Math. Biosci. 76 (1985), 69 - 86.
9. T. C. Gard, T. G. Hallman, *Persistence in food webs-I Lotka-Volterra food chains*, Math. Biol. 41 (1979) 877-891.
10. T. C. Gard, *Persistence in stochastic food web models*, Bullentin of Mathematical Biology. 46 (1984), 357 - 370.
11. S. B. Hsu, T. W. Hwang, Y. Kuang, *A ratio-dependent food chain model and its applications to biological control*, Math. Biosci. 18(2003), 55-83.
12. R. Z. Khasminskii, F. C. Klebaner, *Long term behavior of solutions of the Lotka-Volterra system under small random perturbations*, Ann. Appl. Probab. 11 (2001), no. 3, 952-963.
13. Y. Ko, *The asymptotic stability behavior in a Lotka-Volterra type predator-prey system*, Bull. Korean Math. Soc. 43 (2006), no. 3, 575-587.
14. Z. Lin, M. Pedersen, *Stability in a diffusive food-chain model with Michaelis-Menten functional response*, Nonlinear Anal. 57 (2004), no. 3, 421-433.
15. H. Li, F. Cong, D. Jiang and H. Hua, *Persistence and Nonpersistence of a Food Chain Model with Stochastic Perturbation*, Abstract and Applied Analysis (2013).
16. X. Mao, *Stochastic Differential Equations and Applications*, Horwood Publishing Chichester (1997).
17. M. Mao, S. Sabanis, E. Renshaw, *Asymptotic behaviour of the stochastic Lotka-Volterra model*, J. Math. Anal. Appl. 287 (2003), 141-156.
18. R. D Parshad, N. Kumari, A. R. Kasimov, H. A. Abderrahmane, T*uring patterns and long-time behavior in a three-species food-chain model*, Math. Biosci. 254 (2014), 83-102.
19. R. Rudnicki, *Long-time behaviour of a stochastic prey-predator model*, Stochastic Process. Appl. 108 (2003), 93-107.
20. R. Rudnicki, K. Pichor, *Influence of stochastic perturbation on prey-predator systems*, Math. Biosci. 206 (2007), no. 1, 108-119.
21. C. Xu, X. Tang, M. Liao, *Bifurcation analysis of a delayed predator-prey model of prey migration and predator switching*. Bull. Korean Math. Soc. 50 (2013), no. 2, 353-373.
22. F. Yang, S. Fu, *Global solutions for a tritrophic food chain model with diffusion*, Rocky Mountain J. Math. 38 (2008), no. 5, 1785-1812.

Чан Дінь Туонґ

Динаміка стохастичної моделі харчового ланцюга Лотки–Вольтерри

Резюме

Робота присвячена вивченню стохастичної моделі харчового ланцюга типу Лотки–Вольтерри. Доведено існування глобального розв'язку та граничної обмеженості його моментів. Більш того, ми отримуємо оцінку усередненного за часом розв'язку та досліджуємо умови вимирання та виживання обох біологічних видів.

Ключові слова: броунівський рух, харчовий ланцюг, модель Лотки–Вольтерри, модель хижак–жертва, стохастичне диференціальне рівняння .

Чан Динь Туонг

Динамика стохастической модели пищевой цепочки Лотки–Вольтерра

Резюме

Работа посвящена изучению стохастической модели пищевой цепочки Лотке–Вольтерра. Доказано существование глобального решения и предельная ограниченность его моментов. Более того, мы получаем оценку усредненного по времени решения и исследуем условия вымирания и выживания каждого биологического вида.

Ключевые слова: броуновское движение, пищевая цепочка, модель Лотке–Вольтерра, модель хищник–жертва, стохастическое дифференциальное уравнение .

Researches in Mathematics and Mechanics.– 2017.–V. 22, Is. 1(29).–P. 115–129

UDC 519.833.7

V. I. Zhukovskiy[1*], **M. Larbani**[2]
[1] Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
[2] School of Mathematics and Statistics, Carleton University, Ottawa, Canada

ALLIANCE IN THREE PERSON GAMES

In the present paper, we suggest a new concept of an optimal solution (that we call "coalitional equilibrium") based on the concepts of Nash and Berge equilibria. We apply the concept of an optimal solution where the outcome of a deviant coalition cannot increase. Then we determine sufficient conditions of existence of a coalitional equilibrium using the Germeier convolution. The convolution transforms the problem of determining a coalitional equilibrium into finding a saddle point of a special antagonistic game that can be effectively constructed based on the mathematical model of the initiall game. As an example of application, we suggest the proof of existence of a coalitional equilibrium in mixed strategies under "regular" mathematical programming limitations: continuity of players' outcome functions and compactness of sets of strategies. This work is intentionally limited to three persons to avoid cumbersome notations and calculations, even though application of the suggested method to games with more than three players is promising for solving problems of creating stable coalitions.
MSC: 91A12 .
Key words: maximin, Pareto maximum, Slater maximum, coalitional rationality, Germieier resultant, mixed strategies.

Introduction. In a three-person game, seven coalitions for joint decision making and five coalitional structures (partitions of all players into non-intersecting coalitions) are possible. Over half a century ago, in 1949, twenty-one-years-old PhD student of Princeton University, John Forbes Nash, suggested in his thesis a concept of "optimal solution" for a coalitional structure consisting of one player each that he called "equilibrium" and, following Borel and von Neumann, he proved the existence of such a solution in mixed strategies.

The concept of equilibrium is based on the stability of a situation considered as an optimal solution against deviation of any player (not necessarily only one). Stability lies in that the deviant's outcome cannot increase. This concept of optimality, later called "Nash equilibrium", later found use in economics, sociology, military sciences

[*] **От редакционной коллегии.** 30 апреля исполнилось 80 лет одному из авторов этой статьи, Владиславу Иосифовичу Жуковскому. Несмотря на бег времени и стремительно меняющуюся жизнь, его дружеское отношение к нам остается неизменным вот уже долгие-долгие годы. Трудолюбие Владислава Иосифовича, способность объяснять простыми словами сложные вещи, чувство юмора и несомненный математический талант остаются образцом для нас и вот уже третьего поколения наших коллег и учеников. Члены редакционной коллегии и математики Одесского национального университета имени И. И. Мечникова желают юбиляру здоровья и сил для достижения поставленных целей, которых — если судить по количеству публикаций — остается еще немало.

Received 24.02.2017

and many other areas. In 45 years, in 1994, Nash, in a common effort with White House employees John Harsanyi and Reichard Selten won the Nobel Prize "for fundamental analysis of equillibria in noncooperative game theory". Within 20 years, Nash developed the foundation of the scientific method that played a great role in the development of world economy.

A different case of a coalitional structure in which all players unite to create a single coalition became the subject of study of multicriteria optimization, founded in 1909 by the Italian economist and sociologist Vilfredo Pareto. Here, the idea is again centered on stability: deviation from an optimal solution causes decrease of one or several criteria. The mathematical theory of multicriteria optimization (multiobjective optimization) developed into a separate modern branch of operational research and also found use in engineering and economics.

What about the "intermediate" coalitional structures that contain at least two coalitions with at least one of these including at least two players? How does one formalize the concept of an optimal solution? The present article is dedicated to this question.

Consider a three-person game with its mathematical model defined by the ordered triplet

$$\Gamma_3 = \langle \{1,2,3\}, \{X_i\}_{i=1,2,3}, \{f_i(x)\}_{i=1,2,3} \rangle \,.$$

In Γ_3, $\{1,2,3\}$ is the set of players, each of whom selects his *strategy* $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}, i = 1,2,3$, which results in the *situation* $x = (x_1, x_2, x_3) \in X = \prod_{i=1}^{3} X_i \subset \mathbb{R}^n (n = \sum_{i=1}^{3} n_i)$. For a given situation x in X, the *outcome* of each player $i, i = 1,2,3$ is defined by the value of his *outcome functions* $f_i(x)$. The study of conflicts that are mathematically represented by the three-person game Γ_3, is usually conducted from the standard point of view that defines what players' behavior should be considered optimal (rational, reasonable). The main concepts of optimality in mathematical game theory are [1] the intuitive concepts of *profitability, stability, fairnes and justice.* The "dominant" in the non-coalitional (non cooperative) games, the concept of Nash equilibrium [2], [3], the Berge equilibrium [4], the active equilibrium, and the bargaining equilibrium are based on stability. In addition to the mentioned concepts of optimality, there are several other concepts of optimality prevailing in the non-coalitional game theory. In this class of games, each conflict participant (player) usually pursues his own aims; moreover, the players cannot form coalitions with other players for determining their strategies. The counterpart to the described class of games is the cooperative games [5], in which any unions – coalitions – of players for the purpose of pursuing their common interests as well as the possibility of unlimited negotiations between players that result in the selection and application of a common situation; of course, it is implied that "pacta sunt servanda" (agreements must be commited to). The specific concepts of *individual* [[5], p.117] and *collective or group* [[5], p.125] *rationality* are esential for optimality in cooperative game theory. Individual rationality lies in that each player's outcome is not less than his guaranteed outcome that he can "guarantee" by acting independently (applying his maximin strategy). Collective rationality involves a vector maximum solution such as Pareto, weak pareto, Jeoffrion, Borwein, etc. optimal situations obtained when all players form one coalition.

The present article heavily relies on the concept of a *coalitional structure* of a game (partitioning players into pairwise disjoint subsets). For the three-person game Γ_3,

five coalition structures are possible: $\mathfrak{P}_1 = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, $\mathfrak{P}_2 = \{\{1,2\},\{3\}\}$, $\mathfrak{P}_3 = \{\{1,3\},\{2\}\}$, $\mathfrak{P}_4 = \{\{1\},\{2,3\}\}$,
$\mathfrak{P}_5 = \{1,2,3\}$. Here, $\mathfrak{P}_1$ corresponds to the non-coalitional nature of a game and $\mathfrak{P}_5$ corresponds to the coalitional nature of a game. The mentioned conditions of individual rationality can be formulated for the coalitional structure $\mathfrak{P}_1$. We will use the following notations: $\forall i \in \{1,2,3\}$, $-i = \{\{1,2,3\}\backslash\{i\}\}$, i.e. for $i = 1 \to -i = \{2,3\}$, for $i = 2 \to -i = \{1,3\}$, and, finally, for $i = 3 \to -i = \{1,2\}$.

Then the condition of individual rationality for a situation $x = (x_1, x_2, x_3) \in X$ means that

$$f_i^o = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}) = \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i^0, x_{-i}) = f_i(x_i^0, x_{-i}^0) \leqslant f_i(x), \quad i = 1,2,3, \tag{1}$$

i.e. the application of the maximin strateges $x_i, i = 1, 2, 3$ implies the following inequalities:

$$f_i^0 \leqslant f_i(x), \quad i = 1,2,3. \tag{2}$$

We denote by X^0 the set of individually rational situations of the game Γ_3. For the coalitional structure $\mathfrak{P}_5$ of the game Γ_3: within the set of situations $X^0 \subseteq X$ a situation $x^p \in X^0 \subseteq X$ is *Pareto maximal* in the three-criteria problem $\Gamma_{X^0} = \left\langle X^0, \{f_i(x)\}_{i=1,2,3} \right\rangle$ if $\forall x \in X^0$ the system of inequalities $f_i(x) \geqslant f_i(x^p), i = 1,2,3$, of which at least one is strict, is incompatible. According to Karlin lemma [[6], p.71], if

$$\sum_{i=1}^{3} f_i(x^p) = \max_{x \in X^0} \sum_{i=1}^{3} f_i(x), \tag{3}$$

then the situation x^p is Pareto maximal in the problem Γ_{X^0}.

Main Results

1. Conditions of Coalitional Rationality We will formalize the conditions of coalitional rationality for the coalitional structures $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ and $\mathfrak{P}_4$. For this purpose, we will use the suitable combination of the concepts of Berge and Nash equilibria.

For the coalitional structure $\mathfrak{P}_2$, the coalitional rationality requires the satisfaction of four inequalities:

$$f_1(x_1^*,x_2^*,x_3) \leqslant f_1(x^*) \quad \forall x_3 \in X_3, \tag{4a}$$

$$f_2(x_1^*,x_2^*,x_3) \leqslant f_2(x^*) \quad \forall x_3 \in X_3, \tag{4b}$$

$$f_1(x_1,x_2,x_3^*) \leqslant f_1(x^*) \quad \forall x_j \in X_j \ (j = 1,2), \tag{4c}$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3^*) \leqslant f_2(x^*) \quad \forall x_j \in X_j \ (j = 1,2); \tag{4d}$$

for $\mathfrak{P}_3$:

$$f_1(x_1,x_2^*,x_3) \leqslant f_1(x^*) \quad \forall x_k \in X_k \ (k = 1,3), \tag{5a}$$

$$f_3(x_1,x_2^*,x_3) \leqslant f_3(x^*) \quad \forall x_k \in X_k \ (k = 1,3), \tag{5b}$$

$$f_1(x_1^*,x_2,x_3^*) \leqslant f_1(x^*) \quad \forall x_2 \in X_2, \tag{5c}$$

$$f_3(x_1^*,x_2,x_3^*) \leqslant f_3(x^*) \quad \forall x_2 \in X_2; \tag{5d}$$

and, finally, for $\mathfrak{P}_4$:

$$f_2(x_1,x_2^*,x_3^*) \leqslant f_2(x^*) \quad \forall x_1 \in X_1, \tag{6a}$$

$$f_3(x_1,x_2^*,x_3^*) \leqslant f_3(x^*) \quad \forall x_1 \in X_1, \tag{6b}$$

$$f_2(x_1^*,x_2,x_3) \leqslant f_2(x^*) \quad \forall x_l \in X_l \ (l = 2,3), \tag{6c}$$

$$f_3(x_1^*,x_2,x_3) \leqslant f_3(x^*) \quad \forall x_l \in X_l \ (l = 2,3). \tag{6d}$$

A situation $x^* \in X$ that satisfies all the twelve limitations (4a)–(6d) is called *coalitionally rational* for the game Γ_3. The set of coalitionally rationall situations of the game Γ_3 is denoted by X^*; obviously, $X^* \subseteq X$.

In the process of definition of an optimal solution of the game Γ_3, we will use only 6 of the above 13 inequalities (2) and (4a)–(6d), as the other 6 directly follow from the former 6 inequalities.

This reduction in the number of coalitional rationality conditions is justified iby the following two Lemmas.

Lemma 1. *If (4c), (6c), and (6d) are satisfied for a sitaution x^*, then the following statement holds:*

$$f_i(x^*) \geqslant f_i^0 = \max_{x_i} \min_{x_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}) = \min_{x_{-i}} f_i(x_i^0, x_{-i}) \quad , i = 1,2,3.$$

where x_i^0 is defined in (1) for $i = 1, 2, 3$.

Proof. Indeed, according to (4c),

$$f_1(x^*) \geqslant f_1(x_1,x_2,x_3^*) \quad \forall x_j \in X_j \ (j = 1,2).$$

When applying first player's strategy $x_1 = x_1^0$ (defined in (1) for $i = 1$), from the previous inequality we get

$$f_1(x^*) \geqslant f_1(x_1^0,x_2,x_3^*) \geqslant \min_{x_2,x_3} f_1(x_1^0,x_2,x_3) = \max_{x_1} \min_{x_2,x_3} f_1(x_1,x_2,x_3) = f_1^0.$$

Analogously, from (6c) follows

$$f_2(x^*) \geqslant f_2(x_1^*,x_2,x_3) \quad \forall x_2 \in X_2, \ x_3 \in X_3;$$

For $x_2 = x_2^0$, (defined in (1) for $i = 2$)

$$f_2(x^*) \geqslant f_2(x_1^*,x_2^0,x_3) \geqslant \min_{x_1,x_3} f_2(x_1,x_2^0,x_3) = \max_{x_2} \min_{x_1,x_3} f_2(x_1,x_2,x_3) = f_2^0.$$

And finally, according to (6d), setting $x_3 = x_3^0$, we get

$$f_3(x^*) \geqslant f_3(x_1^*,x_2,x_3^0) \geqslant \min_{x_1,x_2} f_3(x_1,x_2,x_3^0) = f_3^0.$$

Lemma 2. *The following implications are true:*

$$(5a) \Rightarrow (4a),\ (4c) \Rightarrow (5c),\ (4d) \Rightarrow (6a),\ (6c) \Rightarrow (4b),\ (5b) \Rightarrow (6b),\ (6d) \Rightarrow (5d).$$

Remark 1. *From Lemmas 1 and 2, it immediately follows that it is sufficient to use six inequalities, namely (5a), (4c), (4d), (6c), (5b) and (6d), instead of all 13 inequalities in determining the optimal solution of the game Γ_3.*

Consequently, we arrive to the following concept of the optimal solution of the game Γ_3; from now on, we use the notation $f = (f_1,f_2,f_3) \in \mathbb{R}^3$.

Definition 1. *We will call the pair $(x^*, f(x^*)) \in X \times \mathbb{R}^3$ coalitional equilibrium for the game Γ_3, if the following conditions hold:*

1. The six inequalities:

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} f_j(x_1,x_2,x_3^*) &= f_j(x^*) \quad (j = 1,2), \\ \max_{x_1,x_3} f_k(x_1,x_2^*,x_3) &= f_k(x^*) \quad (k = 1,3), \\ \max_{x_2,x_3} f_l(x_1^*,x_2,x_3) &= f_l(x^*) \quad (l = 2,3); \end{aligned} \tag{7}$$

2. The situation $x^* \in X$ is Pareto maximal within the set of coalitionallly rational situations X^* of the game Γ_3, i.e. $\forall x \in X^*$ the system of inequalities $f_i(x) \geqslant f_i(x^*)$ $(i = 1,2,3)$, of which at least one is strict, is incompatible.

Remark 2. *The pair consisting of the situation x^* and corresponding vector of outcomes $f(x^*) = (f_1(x^*),f_2(x^*),f_3(x^*))$, is an appropriate concept of optimal solution for the game Γ_3 as the existence of the pair $(x^*, f(x^*))$ immediately answers the following fundamental questions of the mathematical game theory: a) How the players should behave in the game Γ_3 in terms of strategy selection? and b) what will they "obtain" as a result? Answer: select their strategies x_i^* from the situation $x^* = (x_1^*,x_2^*,x_3^*)$ and the components of the vector $f(x^*) = (f_1(x^*),f_2(x^*),f_3(x^*))$ are the outcomes they get, respectively, after inplementing the situation $x^* = (x_1^*,x_2^*,x_3^*)$*

Remark 3. *We will list the advantages of the suggested coalitional equilibrium solution of the game Γ_3.*

<u>First</u>, according to Lemma 1, the application of x^* ensures the satisfaction of conditions of individual rationality: each player "obtains" an outcome not less than what he can "guarantee" by acting independently using his own maximin strategy.

<u>Second</u>, the situation x^* "leads" all the players to the "greatest" strategies (Pareto maximal relative to other coalitionall rational situations of the game Γ_3). This fact appears to us as an analogue of the collective rationality of the mathematical theory of cooperative games.

<u>Third</u>, satifsation of requirements (4a)–(6d) means that, for example, for the first player, the dual-purpose distribution of his resources, namely, not forgetting about their interests:

first, player 1 aims to provide maximal assistance to the player 2 in the coalition (union) $\{1,2\}$ as a member of the coalition structure $\mathfrak{P}_2$ (requirements (4c) and (4d);

second, player 1 helps player 3 as a member of the coalition {1,3} of thecoalition structure $\mathfrak{P}_3$ (requirements (5a) and (5b)). Formalization of these two requirements in the first and second lines of (7) appears to us as a modification of the idea of a Nash equilibrium concept version features two-criteria scoring players; the third line of (7) can already be viewed as a realization of the idea of Berge equilibrium for the same two-criteria case. The second and third players' behavior can be interpreted similarly.

Finally, the property of coalitional rationality is also based on the principle of stability since, thanks to (7), deviation from x^* of any coalition (of one or two players) cannot lead to "increase" of outcomes of the members of the deviant coalition in the game Γ_3 (compared to $f_i(x^*)$ $(i = 1,2,3)$.

Remark 4. *After the optimal solution has been defined, mathematical game theory recommends answering the following two questions:*

1) Does such a solution exist?

2) how does one find it?

The followingl part of the article is dedicated to answering these questions. We will determine sufficient conditions of coalitional equilibrium (section "Sufficient conditions") and prove its existence in mixed strategies under "common" for the game theory limitations (section "Theorem of existence in mixed startegies")

2. Sufficient Conditions We will now proceed to the result that we find "nec (non) plus ultra" (Latin *nothing above that*) of the present article.

We will employ two n-vectors $x = (x_1,x_2,x_3) \in X \subset \mathbb{R}^n$ $(n = \sum_{i=1}^{3} n_i)$ and $z = (z_1,z_2,z_3) \in X$ as well as the following seven seven scalar functions:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x,z) &= f_1(x_1,x_2,x_3^*) - f_1(z),\\
\varphi_2(x,z) &= f_2(x_1,x_2,x_3^*) - f_2(z),\\
\varphi_3(x,z) &= f_1(x_1,x_2^*,x_3) - f_1(z),\\
\varphi_4(x,z) &= f_3(x_1,x_2^*,x_3) - f_3(z),\\
\varphi_5(x,z) &= f_2(x_1^*,x_2,x_3) - f_2(z),\\
\varphi_6(x,z) &= f_3(x_1^*,x_2,x_3) - f_3(z),\\
\varphi_7(x,z) &= \sum_{l=1}^{3} f_l(x) - \sum_{l=1}^{3} f_l(z),
\end{aligned} \tag{8}$$

and using players' outcome functions in the game Γ_3, we introduce the *Germeier convolution* of these seven functions (8)

$$\varphi(x,z) = \max_{k=1,\dots,7} \varphi_k(x,z), \tag{9}$$

defined in $X \times (Z = X) \subset \mathbb{R}^{2n}$, where $X = \prod_{i=1}^{3} X_i$ is the set of situations of the game Γ_3.

A saddle point $(\overline{x}, z^*) \in X \times Z$ of the scalar function $\varphi(x,z)$ (from (8), (9)) in the antagonistic(zero-sum two-person) game

$$\Gamma^\alpha = \langle X, Z = X, \varphi(x,z)\rangle \tag{10}$$

is defined by the chain of inequalities

$$\varphi(x,z^*) \leqslant \varphi(\overline{x},z^*) \leqslant \varphi(\overline{x},z) \quad \forall x \in X,\ z \in X, \tag{11}$$

where $z^* \in X^*$ is the maximin strategy, i.e.

$$\max_{z\in X} \min_{x\in X} \varphi(x,z) = \min_{x\in X} \varphi(x,z^*).$$

Lemma 3. *If in the game Γ^α there is a saddle point $(\overline{x},z^*)$, then the minimax strategy $z^* \in X$ of the game Γ^α is a coalitional equilibrium of the initial game Γ_3.*

Proof By assuming that $z = \overline{x}$ in (11), from (8) we obtain that $\varphi(\overline{x},\overline{x}) = 0$, as all $\varphi_k(\overline{x},\overline{x}) = 0$ $(k = 1,...,7)$. Then, in accordance with (11), (from transitivity) it follows that

$$\begin{aligned}\varphi(x,z^*) = \max\{&f_1(x_1,x_2,z_3^*) - f_1(z^*), f_2(x_1,x_2,z_3^*) - f_2(z^*), f_1(x_1,z_2^*,x_3) - f_1(z^*),\\ &f_3(x_1,z_2^*,x_3) - f_3(z^*), f_2(z_1^*,x_2,x_3) - f_2(z^*), f_3(z_1^*,x_2,x_3) - f_1(z^*),\\ &\sum_{i=1}^{3} f_i(x_1,x_2,x_3) - \sum_{i=1}^{3} f_i(z_1^*,z_2^*,z_3^*)\} \leqslant 0\end{aligned}$$

for $\forall x_i \in X_i$ $(i = 1,2,3)$. This implies the seven following inequalities:

$$\begin{aligned} f_j(x_1,x_2,z_3^*) &\leqslant f_j(z^*) \quad \forall x_j \in X_j\ (j = 1,2),\\ f_k(x_1,z_2^*,x_3) &\leqslant f_k(z^*) \quad \forall x_k \in X_k\ (k = 1,3),\\ f_l(z_1^*,x_2,x_3) &\leqslant f_l(z^*) \quad \forall x_l \in X_l\ (l = 2,3),\\ \sum_{r=1}^{3} f_r(x_1,x_2,x_3) &\leqslant \sum_{r=1}^{3} f_r(z^*) \quad \forall x = (x_1,x_2,x_3) \in X^* \subseteq X. \end{aligned} \tag{12}$$

The first three inequalities in (12) mean that the situation $z^* \in X$ is (because of these inequalities and (7)) coalitionally rational in the game Γ_3. The last inequality in (12) and the inclusion $X^* \subseteq X$ "guarantee" [[6], p. 71] the Pareto maximality of the situation x^* in the three-criteria problem $\Gamma_{X^*} = \langle X^*, \{f_i(x)\}_{i=1,2,3}\rangle$.

Remark 5. *From Lemma 3, we obtain the following constructive method of finding a coalitional equilibrium of the game Γ_3:*

first, build, using (8) and (9), the function $\varphi(x,z)$,

second, find a saddle point $(\overline{x},z^*)$ of the function $\varphi(x,z)$ (satifsfying the chain of inequalities from (11)),

third, find the values of the three functions $f_i(z^*)$ $(i = 1,2,3)$.

Then the pair $(z^*,f(z^*)) = (f_1(z^*),f_2(z^*),f_3(z^*)) \in X \times \mathbb{R}^3$ forms a coalitional equilibrium of the game Γ_3.

In the following section, we will use the following lemma.

Lemma 4. *If $N+1$ scalar functions $\varphi_j(x,z)$ $(j = 1,...,N+1)$ are continuous in $X \times Z$ and the sets $X, Z \in comp(R^n)$ (are compact), then the function*

$$\varphi(x,z) = \max_{j=1,...,N+1} \varphi_j(z,z) \tag{13}$$

is also continuous on $X \times Z$.

The proof of an even more general result can be found in many textbooks on operational research, for example, in [[7], p. 54], it even appeared in textbooks on convex analysis [[8], p. 146].

3. Theorem of Existence in Mixed Strategies

3.1 Mixed Strategy Situations and Mixed Extension of the Game We will present the mixed strategy extension of the game Γ_3 that includes mixed startegy situations and mathematical expectation of the outcome functions.

We will analyze the three-person game Γ_3, assuming continuity of $f_i(x)$ on the product of compacts $X = \prod_{i=1}^{3} X_i$. In each compact $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i = 1{,}2{,}3)$ we will consider the Borel σ-algebra $\mathcal{B}(X_i)$ – set of subsets of X_i such that $X_i \in \mathcal{B}(X_i)$, where $\mathcal{B}(X_i)$ is continuous relative to the operations of complement and addition of a countable number of sets from $\mathcal{B}(X_i)$; moreover, $\mathcal{B}(X_i)$ is the minimal σ-algebra that contains all completed subsets of the compact X_i.

When there are no situations x^* in the class of pure strategies $x_i \in X_i$ $(i = 1{,}2{,}3)$ that satisfy requirements 1 and 2 of Definition 1, following the approach of Borel [9], Von Neumann [10], Nash [3] and their followers, we need to enlarge the set X_i of pure strategies x_i to mixed ones. Then we will establish the existence of the coaltional equilibrium (analog of Definition 1) in the mixed strategy situations game formalized using mixed strategy situations of the game Γ_3.

Thus we will build Borel σ-algebras $\mathcal{B}(X_i)$ based on each compact X_i $(i = 1{,}2{,}3)$ and the Borel σ-algebra $\mathcal{B}(X)$ for the set of situations $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ assuming that $\mathcal{B}(X)$ contains all Cartesian products of Borel σ-algebras $\mathcal{B}(X_i)$ $(i = 1{,}2{,}3)$.

According to mathematical game theory, we will associate a *mixed strategy* $\nu_i(\cdot)$ of the player i to a *probability measure in the compact* X_i. By definition [[11], p. 271] and notations from [[12], p. 284], a probablilty measure is a *non-negative* scalar function $\nu_i(\cdot)$ defined on the Borel σ-algebra $\mathcal{B}(X_i)$ of subsets of the compact $X_i \subset \mathbb{R}^n$ satisfying the following two conditions:

1) $\nu_i\left(\bigcup\limits_k Q_k^{(i)}\right) = \bigcup\limits_k \nu_i\left(Q_k^{(i)}\right)$ for any sequence $\{Q_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ of pairwise disjoint elements from $\mathcal{B}(X_i)$ (property of *countable additivity of the function* $\nu_i(\cdot)$);

2) $\nu_i(X_i) = 1$ (property of *normality*) and thus $\nu_i(Q^{(i)}) \leqslant 1$, $\forall Q^{(i)} \in \mathcal{B}(X_i)$.

We will denote the set of mixed strategies of player i $(i = 1{,}2{,}3)$ as $\{\nu_i\}$.

We will also note that the product measures $\nu(dx) = \nu_1(dx_1)\nu_2(dx_2)\nu_3(dx_3)$, in accordance with the known definitions from [[11], p. 370] (and notations from [[12], p. 123]) are probability measures in the set of situations X. The set of these probability measures (situations) we will denote by $\{\nu\}$. Note once more that during the process of building of the product measure $\nu(dx)$ as the σ-algebra of the subsets of the set $X_1 \times X_2 \times X_3 = X$, the *minimal* σ-algebra $\mathcal{B}(X)$ containing all Cartesian products $Q^{(1)} \times Q^{(2)} \times Q^{(3)}$, where $Q^{(i)} \in \mathcal{B}(X_i)$ $(i = 1{,}2{,}3)$ is selected. From the known properties of probabilistic measures [[14], p. 288; [[11], p. 254] follows that the sets of all possible measures $\nu_i(dx_i)$ $(i = 1{,}2{,}3)$ and $\nu(dx)$ are *weakly closed* and *weakly compact in itself* [[11], p. 212, 254; [13], p. 48, 49]. For $\{\nu\}$, for example, it means that for any infinite sequence $\{\nu^{(k)}\}$ $(k = 1{,}2{,}...)$ one can select a subsequence $\{\nu^{(k_j)}\}$ $(j = 1{,}2{,}...)$ that will *weakly converge* to $\nu^{(0)}(\cdot) \in \{\nu\}$. That is to say, for any continuous in X function $\psi(x)$ the following statement holds:

$$\lim_{j\to\infty}\int_X \psi(x)\nu^{(k_j)}(dx)=\int_X \psi(x)\nu^{(0)}(dx)$$

and $\nu^{(0)}\in\{\nu\}$. Given the continuity of $\psi(x)$, integrals $\int\limits_X \psi(x)\nu(dx)$ (expectations) are defined using the Fubini theorem

$$\lim_{j\to\infty}\int_X \psi(x)\nu(dx)=\int_{X_1}\int_{X_2}\int_{X_3}\psi(x)\nu_3(dx_3)\nu_2(dx_2)\nu_1(dx_1),$$

where the order of integrations can be altered.

Now we introduce the *mixed extension* of the game Γ_3 based on its pure strategies

$$\left\langle \{1,2,3\},\{\nu_i\}_{i=1,2,3},\left\{f_i[\nu]=\int_X f_i[x]\nu(dx)\right\}_{i=1,2,3}\right\rangle, \tag{14}$$

where, as in Γ_3, $\{1,2,3\}$ is the set of players, but $\{\nu_i\}$ is now the set of mixed strategies $\nu_i(\cdot)$ of player i; in the game Γ_3 each player selects his mixed strategy $\nu_i(\cdot)\in\{\nu_i\}$; the expectation (outcome function) of player i is defined on the set of mixed strategy situations $\{\nu\}$ by:

$$f_i(\nu)=\int_X f_i(x)\nu(dx)\quad (i=1,2,3).$$

For the game (14) we will define an analog of the concept of coalitional equilibrium situation X^*.

Definition 2. *A mixed-strategy situation $\nu^*(\cdot)\in\{\nu\}$ is called coalitional equilibrium of the mixed extension (14) (or coalitional equilibrium in mixed strategies for the game Γ_3) if*

first, the situation $\nu^*(\cdot)$ is coalitionally rational for the game (14), i.e.,

$$\begin{aligned}\max_{\nu_1(\cdot)\nu_2(\cdot)} f_j(\nu_1,\nu_2,\nu_3^*)&=f_j(\nu^*)\ (j=1,2),\\ \max_{\nu_1(\cdot)\nu_3(\cdot)} f_k(\nu_1,\nu_2^*,\nu_3)&=f_k(\nu^*)\ (k=1,3),\\ \max_{\nu_2(\cdot)\nu_3(\cdot)} f_l(\nu_1^*,\nu_2,\nu_3)&=f_l(\nu^*)\ (j=2,3);\end{aligned} \tag{15}$$

(We will denote the sets of coalitional equilibria of the game (14) by $\{\nu^*\}$);

second, $\nu^*(\cdot)$ is Pareto maximal in the three-criteria problem

$$\langle\{\nu^*\},\{f_i(\nu)\}_{i=1,2,3}\rangle$$

i.e. for all $\nu(\cdot)\in\{\nu^*\}$, the system of inequalities

$$f_i(\nu)\geqslant f_i(\nu^*)\quad (i=1,2,3),$$

of which at least one is strict, is incompatible;

The sufficient condition of Pareto maximality is obvious; it is the essence of the following remark.

Remark 6. *Mixed situation $\nu^*(\cdot) \in \{\nu\}$ is Pareto maximal in $\tilde{\Gamma}_\nu = \langle \{\nu^*\}, \{f_i(\nu)\}_{i=1,2,3} \rangle$ if*

$$\max_{\nu(\cdot)\in\{\nu^*\}} \sum_{i=1}^{3} f_i(\nu) = \sum_{i=1}^{3} f_i(\nu^*).$$

3.2 Preliminaries In this section we provide some prelimary results.

Lemma 5. *Suppose in the game Γ_3 the sets X_i are compact, the outcome functions $f_i(x)$ are continuous on $X = X_1 \times X_2 \times X_3$ and the set of coalitionally equilibrial mixed-strategy situations $\{\nu^*\}$ (satisfying (15)) is not empty.*

Then $\{\nu^*\}$ is weakly compact in itself subset of the set of situations $\{\nu\}$ of the game (14) (in mixed strategies).

Proof. To establish the weak compactness in itself of the set $\{\nu^*\}$, we will select an arbitrary scalar continuous function $\psi(x)$ with domain the compact set X, and an infinite sequence of situations

$$\nu^{(k)}(\cdot) \in \{\nu^*\} \quad (k = 1,2,...) \tag{16}$$

of the game (14) in mixed strategies. From (16) (and therefore from $\{\nu^*\} \subset \{\nu\}$) follows $\{\nu^{(k)}(\cdot)\} \subset \{\nu\}$. As noted above, the set $\{\nu\}$ is weakly compact in itself, therefore the subsequence $\{\nu^{(k_j)}(\cdot)\}$ and the measure $\nu^{(0)}(\cdot) \in \{\nu\}$ such that

$$\lim_{j\to\infty} \int_X \psi(x)\nu^{(k_j)}(dx) = \int_X \psi(x)\nu^{(0)}(dx).$$

exist. We will then apply the regular method of proving such statements (as in, for example, [[15], p. 86]).

Lemma 6. *Compactness (closedness and boundedness) in the criteria space $\mathbb{R}^3$ of the set*

$$f(\{\nu^*\}) = \bigcup_{\nu(\cdot)\in\nu^*} f(\nu),$$

where, as we recall, the vector $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$, can be proven analogously.

Lemma 7. *If in game the (14) the sets $X_i \in comp(\mathbb{R}^n)$ and $f_i(\cdot), i = 1,2,3$ are continuous on X, then for the function*

$$\varphi(x,z) = \max_{r=1,...,7} \varphi_r(x,z) \tag{17}$$

the following inequality is correct:

$$\max_{r=1,...,7} \int_{X\times X} \varphi_r(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \leqslant \int_{X\times X} \max_{r=1,...,7} \varphi_r(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \tag{18}$$

for all $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$; here, we recall that the scalar functions $\varphi_r(x,z)$ are defined in (8), (9).

Proof. Indeed, from (17), for all $x,z \in X$, follow the seven inequalities

$$\varphi_r(x,z) \leqslant \max_{j=1,\dots,7} \varphi(x,z) \quad (r = 1,\dots,7).$$

After integration of both parts of these inequalities with an arbitrary product measure $\mu(dx)\nu(dz)$ as the measure being integrated, we obtain

$$\varphi_r(\mu,\nu) = \int_{X\times X} \varphi_r(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \leqslant \int_{X\times X} \max \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu(dz)$$

for all $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$ and each $r = 1,\dots,7$. Therefore,

$$\max_{r=1,\dots,7} \varphi_r(\mu,\nu) = \max_{r=1,\dots,7} \int_{X\times X} \varphi_r(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \leqslant$$
$$\leqslant \int_{X\times X} \max_{r=1,\dots,7} \varphi_r(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \quad \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\}, \nu(\cdot) \in \{\nu\}$$

which proves (18).

Remark 7. *In fact, (18) is a generalization of the well-known property of the maximization operation: maximum of a sum cannot be greater than the sum of the maximums.*

3.3 Existence Theorem We will provide the main result of this article: the existence of a mixed strategy coalitional equilibrium situation in the game Γ_3 has been proven.

Theorem 1. *If in the game Γ_3 the sets $X_i \in comp(\mathbb{R}^n)$ and $f_i(\cdot) i = \{1,2,3\}$ are continuous on X, then the game has a coalitional equilibriuml mixed-strategy situation.*

Proof. Consider the auxiliary antagonistic game introduced in (10)

$$\Gamma^\alpha = \langle \{1,2\}, \{X, Z = X\}, \varphi(x,z) \rangle .$$

In the game Γ^α, the set X of strategies x of the first player (maximizing $\varphi(x,z)$). A *saddle point* $(\overline{x},z^*) \in X \times X$ of the game Γ^α satisfies, by definition, the following chain of inequalities for all $x \in X$ and $z \in X$

$$\varphi(x,z^*) \leqslant \varphi(\overline{x},z^*) \leqslant \varphi(\overline{x},z).$$

Now we will associate to Γ^α its mixed extension $\tilde{\Gamma}^\alpha = \langle \{1,2\}, \{\mu\}, \{\nu\}, \varphi(\mu,\nu) \rangle$, where $\{\nu\}$ is the set of mixed strategies $\nu(\cdot)$ of the second player, and $\{\mu\} = \{\nu\}$ is the set of mixed strategies $\mu(\cdot)$ of the first player, whose outcome function (expectation) are defined by

$$\varphi(\mu,\nu) = \int_{X\times X} \varphi(x,y)\mu(dx)\nu(dz).$$

A saddle point (μ^0, ν^*) defined by the inequalities

$$\varphi(\mu,\nu^*) \leqslant \varphi(\mu^0,\nu^*) \leqslant \varphi(\mu^0,\nu) \tag{19}$$

for all $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$ will also be a solution of the game $\tilde{\Gamma}^{\alpha}$ (mixed extension of Γ^{α}).

This pair (μ^0,ν^*) is called a *mixed-strategy solution of* Γ^{α}.

In 1952, Gliksberg [16] established the theorem of existence of a Nash equilibrium situation in a non-coalitional game of $N \geqslant 2$ persons in mixed strategies, from which we deduce the statement for its particular case – antagonistic game Γ^{α}: suppose that in the game Γ^{α} the set $X \subset \mathbb{R}^n$ is non-empty and compact and the outcome function of the first player $\varphi(x,z)$ is continuous in $X \times X$ (we use the continuity of $\varphi(x,z)$ in Lemma 3). Then for the game Γ^{α}, there exists a solution (μ^0, ν^*) as defined in (19), i.e. there exists a mixed-strategy saddle point.

Given (18), the inequalities (19) takes the following form:

$$\int_{X\times X} \max_{j=1,\dots,7} \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) \leqslant \int_{X\times X} \max_{j=1,\dots,7} \varphi_j(x,z)\mu^0(dx)\nu^*(dz) \leqslant$$
$$\leqslant \int_{X\times X} \max_{j=1,\dots,7} \varphi_j(x,z)\mu^0(dx)\nu(dz)$$

for all $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$. Assuming in

$$\varphi(\mu^0,\nu) = \int_{X\times X} \max_{j=1,\dots,7} \varphi_j(x,z)\mu^0(dx)\nu(dz)$$

the measure $\nu_i(dz_i) = \mu_i^0(dx_i)$ $(i \in \mathbb{N})$ and then $\nu(dz) = \mu^0(dx)$. Given (18), we obtain that $\varphi(\mu^0,\mu^0) = 0$. Analogously follows the equality $\varphi(\nu^*,\nu^*) = 0$ and then from (19) we get

$$\varphi(\mu^0,\nu^*) = 0 \tag{20}$$

From $\varphi(\mu^0,\mu^0) = 0$ and the chain of preceding inequalities (using transitivity), we come to

$$\varphi(\mu,\nu^*) = \int_{X\times X} \max_{j=1,\dots,7} \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) \leqslant 0 \quad \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\}.$$

In agreement with the Lemma 7, we have

$$0 \geqslant \int_{X\times X} \max_{j=1,\dots,7} \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) \geqslant \max_{j=1,\dots,7} \int_{X\times X} \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz)$$

Therefore, for all $j = 1,\dots,7$, we have

$$\int_{X\times X} \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) \leqslant 0 \quad \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\}.$$

There are two cases.

First case $(j = 1,\dots,6)$. Here, in accordance with (20), (18) and normality of $\nu_j(\cdot)$, we obtain (see (8))

$$0 \geqslant \int_{X\times X} \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) = \int_{X\times X} (f_j(z_1,z_2,z_3) - f_j(z))\mu(dx)\nu^*(dz) =$$
$$= \int_{X\times X} f_j(z_1,z_2,z_3)\mu(dx)\nu^*(dz) - \int_X f_j(z)\nu^*(dz)\int_X \mu(dx) = f_j(\mu_1,\mu_2,\nu_3^*) - f_j(\nu^*)$$
$$\forall \mu_j(\cdot) \in \{\nu_j\} \ (j = 1,2),$$

Analogously,

$$0 \geqslant \int_{X\times X} \varphi_k(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) = f_k(\mu_1,\nu_2^*,\mu_3) - f_k(\nu^*) \quad \forall \mu_k(\cdot) \in \{\nu_k\}\ (k = 1,3)$$

$$0 \geqslant \int_{X\times X} \varphi_l(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) = f_l(\nu_1^*,\mu_2,\mu_3) - f_l(\nu^*) \quad \forall \mu_l(\cdot) \in \{\nu_l\}\ (l = 2,3).$$

According to Definition 2, $\nu^*(\cdot)$ is a coalitionally rational situation in mixed strategies for the game Γ_3.

Second case ($j = 7$) Once again, in accordance with (20), (18) and normality of $\nu(\cdot)$, we obtain

$$0 \geqslant \int_{X\times X} \left[\sum_{r=1}^{7} f_r(x) - \sum_{r=1}^{7} f_r(z)\right] \mu(dx)\nu^*(dz) = \int_X \sum_{r=1}^{7} f_r(x)\mu(dx) \int_X \nu^*(dz) -$$
$$- \int_X \mu(dx) \int_X \sum_{r=1}^{7} f_r(x)\nu^*(dz) = \sum_{r=1}^{7} f_r(\mu) - \sum_{r=1}^{7} f_r(\nu^*) \quad \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\}.$$

Then, after considering Remark 7, we see that the mixed-strategy situation $\nu^*(\cdot) \in \{\nu\}$ of the game Γ_3 is Pareto maximal in the problem

$$\tilde{\Gamma}_\nu = \langle \{\nu^*\},\{f_i(\nu)\}_{i=1,2,3}\rangle\,.$$

Therefore, for the mixed-strategy situation $\nu^*(\cdot)$ of the game Γ_3, coalitional rationality as well as Pareto maximality compared to the other coalitionally rational situations have been established. Therefore, from Definition 2, the mixed-strategy situation $\nu^*(\cdot)$ is coalitionally rational in the mixed extension of the game Γ_3 and the pair $(\nu^*,f(\nu^*))$ forms a coalitional equilibrium in mixed strategies for Γ_3.

Conclusion. In this paper we have made the following *new contributions to cooperative games theory* .

First, the concept of coalitional equilibrium (CE) that takes into account interests of any coalition has been introduced.

Second, a practical method of finding CE has been presented, which can be reduced to the determination of a minimax strategy for a special Germeier convolution that can be built using players' outcome functions.

Third, the existence of CE in mixed strategies under "usual" for mathematical programming conditions (continuity of the outcome functions and compactness of the set of strategies) has been proven.

We find that the following *new qualitative results* of the present article are significant as well:

1. the results can be extended to cooperative games of any number of participants (over three);

2. CE "guarantees" the stability of coalitional structures against deviation of any coalitions;

3. CE is applicable, even if the game's coalitional structure change throughout the game or even if the coalitional structures remains unchanged;

4. CE can be used for forming stable unions of players;

and these by far do not exhaust all advantages of CE!

But there is another advantage that we find important to note.

To this day, in the theory of cooperative games, the conditions of individual or collective rationality have been stressed. Individual interests of players are matched by the concept of Nash equilibrium with its "egoistic" character ("to each his own"); mutual support in games is matched by the concept of Berge equilibrium with its "altruism" ("help everyone and forget about your own interests"). However, such "oblivion" is not characteristic for the human nature of the players. This is overcome by the coalitional rationality.

Indeed, in terms of coalitional rationality, player 1, minding his own interests and being a part of the coalition {1,2} within the coalitional structure $\mathfrak{P}_2$ helps player 2 (element of Berge equilibrium), while being a part of the coalition {1,3} within the coalitional structure $\mathfrak{P}_3$ supports player 3, but, as we mentioned "not forgetting about himselve". The same statement is valid for the other players. Therefore, coalitional rationality fills the gap between the Nash (NE) and Berge (BE) equilibriums, adding "care about the others" to NE and "care about themselves" to BE.

In this article, the authors see the idea of the Golden rule: one should treat others as one would like others to treat oneself. In the definition of rational equilibrium in the present article the "others" for each players are the members of the coalition the player takes part in.

1. Vorobyov, N. (1985). Game theory for economic cyberneticans. Moscow: Nauka. Main oce of literature on physics and mathematics.
2. Nash, J. (1951). *Non-cooperative games. Ann. Math.*. 54. p. 286–295.
3. Nash, J. (1950). Equillibrium points in N-person games. *Proc. Nat. Academ. Sci. USA*. 36. p. 48–49.
4. Zhukovskiy, V. I., Chikriy, A. A. (1994). *Linear-quadratic dierential games.* Kiev: Naukova Dumka.
5. Zhukovskiy, V. I. (2009). *Cooperative games under uncertainty and their applications.* Moscow: Editorial URSS.
6. Podinovskiy, V. V., Nogin, V. D. (2007). *Pareto optimal solutions of multicriteria problems.* Moscow: Fizmatlit.
7. Morosov, V. V., Sukharev, A. G. and Fedorov, V. V. (1968). *Operational research in problems and exercises.* Moscow: Higher school.
8. Dmitruk, A. V. (2012). *Convex analysis. Elementary introduction course.* Moscow: MAKS-PRESS.
9. Borel, E. (1921). La theorie du jeu et les equations integrales a noyau symetrique. *Compes Rendux de l'Academie des Sceinces.* 54. p. 286–295.
10. Von Neumann, J. (1928). Zur Theorie der Gesellschaftspiele. *Math. Ann.*. 100. p. 295–320.
11. Lyusternik, L. A., Sobolev, V. I. (1969). *Elements of functional analysis.* Moscow: Nauka.
12. Krasovskiy, N. N., Subbotin, A. I. (1969). *Positional dierential games.* Moscow: Nauka.
13. Khille, E., Philips, P. (1962). *Functional analysis and semigroups.* Moscow: IIL.

14. Danford, N., Schwartz, J. T. (2010). *Linear operators.* Moscow: Foreign literature publishing house.
15. Guseynov, A. A., Zhukovskiy, V. I., Kudryavtsev, K. N. (2016). *Mathematical basis of the Golden rule. Theory of new altruistic balancing conicts as opposed to egoistic Nash equilibrium.* Moscow: LENAND.
16. Gliksberg, I. L. (1961). Further generalization of Katukani xed-point theorem in application to Nash equilibria. In Vorobyov, N. N. *Innite antagonistic games.* Moscow: Fizmatgiz. . p. 497–503.

Жуковський В. І., Ларбані М.
Альянс в іграх трьох осіб

Резюме

В цій роботі ми пропонуємо нову концепцію оптимального розв'язку (яку ми називаємо «коаліційною рівновагою»), побудовану на ідеях рівноваги за Нешем та за Берже. Ми використовуємо поняття оптимального розв'язку, в якому виграш коаліції, що відхиляється, не може зростати. Після цього за допомогою згортки Гермейера знаходяться достатні умови існування коаліційної рівноваги. Згортка перетворює задачу знаходження коаліційної рівноваги в пошук сідлової точки особливої антагоністичної гри, яка може буди побудована на підставі математичної моделі вихідної гри. В якості прикладу ми даємо доведення існування коаліційної рівноваги в змішаних стратегіях, за «регулярних» обмежень математичного програмування: неперервності функцій виграшу гравців та компактності множин стратегій. Ми обмежуємось випадком гри трьох осіб в цій роботі, щоб уникнути складних позначень та обчислень. Однак застосування запропонованного методу для ігр з більш ніж трьома гравцями може бути багатообіцяючим при розв'язанні задач побудови стійких коалцій.
Ключові слова: максимін, максимум за Парето, макисмум за Слейтером, коаліційна раціональність, результант Гермейера, змішані стратегії .

Жуковский В. И., Ларбани М.
Альянс в играх трех лиц

Резюме

В этой работе мы предлагаем новую концепцию оптимального решения (которую мы называем «коалиционным равновесием»), основанную на идеях равновесия по Нэшу и по Берже. Мы используем понятие оптимального решения, в котором выигрыш отклоняющейся коалиции не может возрастать. Затем, используя свертку Гермейера, находятся достаточные условия существования коалиционного равновесия. Свертка превращает задачу нахождения коалиционного равновесия в поиск седловой точки особой антагонистической игры, которая может быть эффективно построена на основании математической модели исходной игры. В качестве примера мы даем доказательство существования коалиционного равновесия в смешанных стратегиях при «регулярных» ограничениях математического программирования: функции выигрыша игроков предполагаются непрерывными, а множества стратегий компактными. Мы ограничиваемся в этой работе случаем игры трех лиц, чтобы избежать сложных обозначений и вычислений. Однако применение предложенного метода для игр с более чем тремя игроками может быть многообещающим при решении задач построения устойчивых коалиций.
Ключевые слова: максимин, максимум по Парето, максимум по Слейтеру, коалиционная рациональность, результант Гермейера, смешанные стратегии .

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ
(скорочений варіант)

Журнал «Дослідження в математиці і механіці» має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень, огляди з актуальних проблем за тематикою видання, а також повідомлення про ювілеї, знаменні дати та події.

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Електронну версію рукопису слід надсилати на e-mail журналу

rmm-journal@onu.edu.ua

або завантажувати через сайт журналу

www.rmm-journal.onu.edu.ua

Вона повинна складається з

1) вихідного файлу TEX-файлу,
2) PDF-файлу,
3) всіх допоміжних файлів (графіки, рисунки, ілюстрації тощо),
4) документу з анкетними даними авторів (прізвище, ім'я, по батькові, місце роботи, e-mail, адресу для листування та телефон).

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LATEX відповідно до вимог та з використанням шаблону, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті. Також вимоги можна отримати в редакційній колегії журналу.

Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 25 сторінок.

Структура статті:

— УДК;
— список авторів;
— місце роботи авторів;
— назва статті;
— резюме мовою оригіналу обсягом не менш як 100 слів;
— Mathematical Subject Classification (2010);
— список ключових слів мовою оригіналу;
— основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України «Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України» від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми в

загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується подана стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером у квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформлюється відповідно до державного стандарту України ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 «Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання» та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008);

— анотації двома іншими мовами, які повинні містити назву, список авторів, резюме обсягом не менш як 100 слів та список ключових слів;

— додатково, якщо стаття написана українською або російською мовами, після анотацій подається список літератури у транслітерації, оформлений у відповідності до міжнародного стандарту *Harvard* (зразок та правила оформлення можна знайти в шаблоні статті на сайті).

Усі надіслані статті проходять анонімне рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу «Дослідження в математиці і механіці».

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, зокрема і у співавторстві.

Редакційна колегія журналу
«Дослідження в математиці і механіці»
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2
м. Одеса, 65082

Українською, російською та англійською мовами

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації серія КВ № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

Затверджено до друку вченою радою
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова
Протокол №9 від 30 травня 2017 р.

Відповідальний за випуск *О. П. Огуленко*
Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*
Технічний редактор *М. М. Бушин*

Тираж прим. Зам. № .

Адреса редколегії:
65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
astro_print@ukr.net
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Дослідження в математиці і механіці. – 2017. – Т. 22, вип. 1(29). – С. 1–132.