



RESEARCHES
in MATHEMATICS
and MECHANICS

Том 29. Випуск 2(44).

Volume 29. Issue 2(44).

2024

ISSN 2519–206X

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ДОСЛІДЖЕННЯ В МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

Науковий журнал

Виходить 2 рази на рік

Журнал заснований у січні 1997 р.

Том 29. Випуск 2(44). 2024

Одеса
«Астропринт»
2024

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

Редакційна колегія журналу

Головний редактор — О. М. Станжицький, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Заступник головного редактора — В. М. Євтухов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Відповідальний редактор — О. Д. Кічмаренко, д. ф.-м. н., доц. (Україна)

А. Alifov, д. ф.-м. н., проф. (Азербайджан)

А. Ashyralyev, д. ф.-м. н., проф. (Туреччина)

S. Dashkovskiy, Dr. habil., проф. (Німеччина)

F. Iacoviello, PhD, проф. (Італія)

I. T. Kiguradze, д. ф.-м. н., проф. (Грузія)

С. К. Асланов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Н. Д. Вайсфельд, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Д. В. Дмитришин, д. т. н., проф. (Україна)

А. А. Дороговцев, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. В. Капустян, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

П. І. Когут, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Ан. О. Кореновський, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. Ф. Кривий, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

В. Є. Круглов, к. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. Меньшиков, д. ф.-м. н., проф. (Шотландія)

А. В. Плотніков, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

В. Г. Попов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Н. В. Скрипник, д. ф.-м. н., доц. (Україна)

І. М. Черевко, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Відповідальний за випуск — О. О. Максимов

Згідно з Рішенням Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення № 1407 від 26.06.2025 р. журнал зареєстрований як друковане медіа і внесений до Реєстру суб'єктів у сфері медіа з ідентифікатором R30-06164.

Журнал внесений до переліку наукових фахових видань наказами Міністерства освіти і науки України № 527 від 24.05.2018 р. та № 775 від 16.07.2018 р.

ISSN 2519–206X

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Scientific journal

Published twice a year

Journal founded in January, 1997

Volume 29. Issue 2(44). 2024

Odesa
«Astroprint»
2024

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

Editorial board of the journal

Editor-in-chief — O. M. Stanzhytskyi, DSc, Prof. (Ukraine)

Deputy Editor-in-chief — V. M. Evtukhov, DSc, Prof. (Ukraine)

Executive Editor — O. D. Kichmarenko, DSc, Assoc. Prof. (Ukraine)

A. Alifov, DSc, Prof. (Azerbaijan)

A. Ashyralyev, DSc, Prof. (Turkey)

S. K. Aslanov, DSc, Prof. (Ukraine)

I. M. Cherevko, DSc, Prof. (Ukraine)

S. Dashkovskiy, Dr. habil., Prof. (Germany)

D. V. Dmitrishin, DSc, Prof. (Ukraine)

A. A. Dorogovtsev, DSc, Prof. (Ukraine)

O. V. Kapustyan, DSc, Prof. (Ukraine)

I. T. Kiguradze, DSc, Prof. (Georgia)

P. I. Kogut, DSc, Prof. (Ukraine)

An. O. Korenovskyi, DSc, Prof. (Ukraine)

V. Ye. Kruglov, PhD, Prof. (Ukraine)

O. F. Kryvyi, DSc, Prof. (Ukraine)

F. Iacoviello, DSc, Prof. (Italy)

O. Menshykov, DSc, Prof. (Scotland)

A. V. Plotnikov, DSc, Prof. (Ukraine)

V. G. Popov, DSc, Prof. (Ukraine)

N. V. Skripnik, DSc, Assoc. Prof. (Ukraine)

N. D. Vaysfeld, DSc, Prof. (Ukraine)

Publication Editor — O. O. Maksymov

According to the Resolution of the National Council of Ukraine on Television and Radio Broadcasting No 1407 dated 06.26.2025, the journal is registered as a print media and included in the Registry of Media with identifier R30-06164.

The journal is included in the List of Scientific Specialized Publications by Orders of the Ministry of Education and Science of Ukraine No 527 dated May 24, 2018, and No 775 dated July 16, 2018.

ЗМІСТ

<i>Ваштанова Н. В., Покась С. М.</i> Деякі питання теорії наближення для просторів афінної зв'язності	7
<i>Воробйова А. В.</i> Асимптотичні властивості швидко змінних розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями близькими до правильно змінних	24
<i>Грабовська Р. Г.</i> <i>Кольцова Л. Л.</i> Про продовжуваність розв'язків системи сингулярних диференціальних рівнянь першого порядку на проміжок наперед заданої довжини	35
<i>Євтухов В. М.</i> Ареальна нескінченно мала деформація поверхні Гауді	46
<i>Кіосак В. А., Шарай Н. В.</i> Про конформні відображення із збереженням тензора енергії-імпульсу	60
<i>Bilozeroва М. О.</i> Asymptotic representations of one class of solutions with slowly varying derivatives to nonlinear second order differential equations	72

ХРОНІКА

Пам'яті професора Варбанця Павла Дмитровича	83
Інформація для авторів	92

CONTENTS

<i>Vashpanova N. V., Pokas S. M.</i> Some issues of approximation theory for affinely connected spaces	7
<i>Vorobiova A. V.</i> Asymptotic properties of rapidly-varying solutions to second-order differential equations with nonlinearities close to regularly varying	24
<i>Grabovska R. G.</i> , <i>Koltsova L. L.</i> On the continuability of solutions of a system of first-order singular differential equations to an interval of predetermined length	35
<i>Evtukhov V. M.</i> Areal infinitely small deformation of the Gaudi surface	46
<i>Kiosak V. A., Sharai N. V.</i> On conformal mappings preserving tensor of stress-energy	60
<i>Bilozerova M. O.</i> Asymptotic representations of one class of solutions with slowly varying derivatives to nonlinear second order differential equations	72

CHRONICLE

To the memory of Professor Varbanets Pavlo Dmytrovich	83
Information for authors	92

УДК 514.07

Н. В. Вашпанова, кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Одеська державна академія будівництва та архітектури

кафедра вищої математики

вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, 65029, Україна

e-mail: vasha_nina @ukr.net

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8639-8368>

С. М. Покась, кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна

e-mail: pokas@onu.edu.ua

ДЕЯКІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕННЯ ДЛЯ ПРОСТОРІВ АФІННОЇ ЗВ'ЯЗНОСТІ

Ідея вивчення геометричних об'єктів в околі довільної точки з точністю того чи іншого порядку частково застосовувалася в геометрії і призводила до глибшого вивчення цих об'єктів. В теорії кривих у диференціальному околі першого порядку виникає інваріантний вектор до дотичної. Це дозволяє ввести поняття довжини дуги кривої та вибрати її як параметр. У диференціальному околі другого порядку будується вектор головної нормалі та кривина кривої. При розгляді диференціального околу третього порядку отримуємо скрут кривої. В роботі досліджуються простори афінної зв'язності без скруту. Розроблені методи побудови наближених геометричних об'єктів та вивчені їх властивості відносно аналогічних об'єктів в заданому просторі афінної зв'язності. Дослідження ведуться в спеціальній системі координат. Отримані результати застосовані для вивчення рухів в просторах афінної зв'язності. Знайдено вид вектора Кілінга в наближених просторах афінної зв'язності.

MSC: 53B35.

Ключові слова: простір афінної зв'язності, рімановий простір, тензор Рімана, тензор Річчі, похідна Лі.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2\(44\).342072](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2(44).342072).

Вступ

Подібно тому, як досліджувалися ріманові простори другого наближення $\tilde{V}_n$ для ріманова простору V_n , в роботі побудовано наближення $\tilde{A}_n$ для простору афінної зв'язності A_n . Обчислені деякі геометричні об'єкти простору A_n : тензори кривини, Річчі, Вейля, проективні параметри Томаса і знайдено умови, коли $\tilde{A}_n$ є проективно-пласким простором афінної зв'язності, у вигляді рівномірно і абсолютно збіжного степеневого ряду, отримано вектор зміщення нескінченно малих рухів в $\tilde{A}_n$. Дослідження ведуться локально тензорними методами [1, 2].

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Наближення першого порядку для афіннозв'язного простору A_n та його геометричні об'єкти.

Розглянемо афіннозв'язний простір A_n , віднесений до координат $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ з об'єктом зв'язності $\Gamma_{ij}^h(x)$ і довільну точку $M_0(x_0^n)$ цього простору. Побудуємо новий простір $\tilde{A}_n$, віднесений до координат $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$, зі своїм об'єктом зв'язності $\tilde{\Gamma}_{ij}^h(y)$, який має вигляд

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^h = -\frac{1}{3}R_{0(ij)l}^h y^l, \quad (1.1)$$

де $R_{0ijl}^h = R_{ijl}^h(M_0)$ - компоненти тензора кривини простору A_n в точці M_0 , круглі дужки позначають симетрування без ділення за вміщеними у них індексами. Простір $\tilde{A}_n$ будемо називати наближенням першого порядку для афіннозв'язного простору A_n [15, 16].

Якщо в A_n перейти до канонічної системи координат з початком в точці M_0 та розкласти об'єкт зв'язності $\Gamma_{ij}^h(x)$ в ряд Тейлора в околі даної точки, то побачимо, що простір $\tilde{A}_n$ реалізує наближення першого порядку для A_n і тому відображає його геометричні властивості з деяким ступенем точності. Неважко обчислити наступні геометричні об'єкти простору $\tilde{A}_n$ [5, 8].

Тензор кривини

$$\tilde{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \frac{1}{9} \left(R_{(ik)l_1}^\alpha R_{(\alpha j)l_2}^h - R_{(ij)l_1}^\alpha R_{(\alpha k)l_2}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2}. \quad (1.2)$$

Тензор Річчі

$$\tilde{R}_{ij} = R_{ij} + \frac{1}{9} \left(R_{il_1} R_{jl_2} + R_{(ij)l_1}^\alpha R_{\alpha l_2} \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2}. \quad (1.3)$$

Проективні параметри Томаса

$$\tilde{T}_{ij}^h = -\frac{1}{3} \left[R_{(ij)l}^h + \frac{1}{n+1} \left(R_{il} \delta_j^h + R_{jl} \delta_i^h \right) \right] \Big|_0 y^l \quad (1.4)$$

Тензор проктивної кривини (тензор Вейля)

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{ijk}^h = & W_{ijk}^h + \frac{1}{9} \left[R_{(ik)l_1}^\alpha R_{(\alpha j)l_2}^h - R_{(ij)l_1}^\alpha R_{(\alpha k)l_2}^h - \frac{1}{n-1} \times \right. \\ & \times \left. \left[\left(R_{il_1} R_{jl_2} + R_{(ij)l_1}^\alpha R_{\alpha l_2} \right) \delta_k^h - \left(R_{il_1} R_{kl_2} + R_{(ik)l_1}^\alpha R_{\alpha l_2} \right) \delta_j^h \right] \right] \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Перевіримо чи є простір $\tilde{A}_n$ проєктивно плоским.

Означення 1. Простір афінної зв'язності $\tilde{A}_n$ називається проєктивно пласким (проєктивно евклідовим), якщо він допускає нетривіальне геодезичне відображення на плоский простір A_n .

Відома наступна теорема [17]:

Теорема 1. Простір афінної зв'язності $\tilde{A}_n$ є проєктивно пласким тоді і тільки тоді, коли його тензор Вейля тотожно дорівнює нулю.

Оскільки у співвідношенні $\tilde{W}_{ijk}^h = 0$, тоді кожний зведений коефіцієнт правої частини дорівнює нулю, значить

$$W_{ijk}^h = 0 \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ R_{(ik)l_1}^\alpha R_{(\alpha j)l_2}^h + R_{(ik)l_2}^\alpha R_{(\alpha j)l_1}^h - R_{(ij)l_1}^\alpha R_{(\alpha k)l_2}^h - R_{(ij)l_2}^\alpha R_{(\alpha k)l_1}^h - \right. \\ & - \frac{1}{n-1} \times \left[\left(R_{il_1} R_{jl_2} + R_{il_2} R_{jl_1} + R_{(ij)l_1}^\alpha R_{\alpha l_2} + R_{(ij)l_2}^\alpha R_{\alpha l_1} \right) \delta_k^h - \right. \\ & \left. \left. - \left(R_{il_1} R_{kl_2} + R_{il_2} R_{kl_1} + R_{(ik)l_1}^\alpha R_{\alpha l_2} + R_{(ik)l_2}^\alpha R_{\alpha l_1} \right) \delta_j^h \right] \right\} \Big|_0 = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Але якщо $\tilde{W}_{ijk}^h = 0$, то й $W_{ijk}^h = 0$, тому з (1.5) виходить, що

$$R_{ijk}^h = \frac{1}{n-1} \left(R_{ij} \delta_k^h - R_{ik} \delta_j^h \right) \quad (1.8)$$

Підставимо це в співвідношення (1.7).

$$\begin{aligned}
 R_{(ij)k}^h &= \frac{1}{n-1} \left(2R_{ij}\delta_k^h - R_{ik}\delta_j^h - R_{jk}\delta_i^h \right) \\
 R_{(ik)l_1}^\alpha R_{(\alpha j)l_2}^h &= \frac{1}{(n-1)^2} \left(2R_{ik}\delta_{l_1}^\alpha - R_{il_1}\delta_k^\alpha - R_{kl_1}\delta_i^\alpha \right) \times \\
 &\times \left(2R_{\alpha j}\delta_{l_2}^h - R_{\alpha l_2}\delta_j^h - R_{jl_2}\delta_\alpha^h \right) = \frac{1}{(n-1)^2} \left[2R_{ik} \left(2R_{jl_1}\delta_{l_2}^h - R_{l_1l_2}\delta_j^h - R_{jl_2}\delta_{l_1}^h \right) - \right. \\
 &\left. - R_{il_1} \left(2R_{kj}\delta_{l_2}^h - R_{kl_2}\delta_j^h - R_{jl_2}\delta_k^h \right) - R_{kl_1} \left(2R_{ij}\delta_{l_2}^h - R_{il_2}\delta_j^h - R_{jl_2}\delta_i^h \right) \right]
 \end{aligned}$$

Тому (1.7) набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \frac{1}{(n-1)^2} \left[2R_{ik} \left(2R_{jl_1}\delta_{l_2}^h - R_{l_1l_2}\delta_j^h - R_{jl_2}\delta_{l_1}^h \right) - R_{il_1} \left(2R_{kj}\delta_{l_2}^h - R_{kl_2}\delta_j^h - R_{jl_2}\delta_k^h \right) - \right. \right. \\
 &\left. - R_{kl_1} \left(2R_{ij}\delta_{l_2}^h - R_{il_2}\delta_j^h - R_{jl_2}\delta_i^h \right) \right] + \frac{1}{(n-1)^2} \left[2R_{ik} \left(2R_{l_2j}\delta_{l_1}^h - R_{l_2l_1}\delta_j^h - R_{jl_1}\delta_{l_2}^h \right) - \right. \\
 &\left. - R_{il_2} \left(2R_{kj}\delta_{l_1}^h - R_{kl_1}\delta_j^h - R_{jl_1}\delta_k^h \right) - R_{kl_2} \left(2R_{ij}\delta_{l_1}^h - R_{il_1}\delta_j^h - R_{jl_1}\delta_i^h \right) \right] - \frac{1}{(n-1)^2} \times \\
 &\times \left[2R_{ij} \left(2R_{l_1k}\delta_{l_2}^h - R_{l_1l_2}\delta_k^h - R_{kl_2}\delta_{l_1}^h \right) - R_{il_1} \left(2R_{jk}\delta_{l_2}^h - R_{jl_2}\delta_k^h - R_{kl_2}\delta_j^h \right) - R_{jl_1} \times \right. \\
 &\left. \times \left(2R_{ik}\delta_{l_2}^h - R_{il_2}\delta_k^h - R_{kl_2}\delta_i^h \right) \right] - \frac{1}{(n-1)^2} \left[2R_{ij} \left(2R_{l_2k}\delta_{l_1}^h - R_{l_2l_1}\delta_k^h - R_{kl_1}\delta_{l_2}^h \right) - \right. \\
 &\left. - R_{il_2} \left(2R_{jk}\delta_{l_1}^h - R_{jl_1}\delta_k^h - R_{kl_1}\delta_j^h \right) - R_{jl_2} \left(2R_{ik}\delta_{l_1}^h - R_{il_1}\delta_k^h - R_{kl_1}\delta_i^h \right) \right] - \\
 &- \frac{1}{n-1} \left[\left(R_{il_1}R_{jl_2} + R_{il_2}R_{jl_1} + \frac{1}{n-1} (2R_{ij}R_{l_1l_2} - R_{il_1}R_{jl_2} - R_{jl_1}R_{il_2} + \right. \right. \\
 &\left. \left. + 2R_{ij}R_{l_2l_1} - R_{il_2}R_{jl_1} - R_{jl_2}R_{il_1}) \right) \delta_k^h - \left(R_{il_1}R_{kl_2} + R_{il_2}R_{kl_1} + \frac{1}{n-1} \times \right. \right. \\
 &\left. \left. \times (2R_{ik}R_{l_1l_2} - R_{il_1}R_{kl_2} - R_{kl_1}R_{il_2} + 2R_{ik}R_{l_2l_1} - R_{il_2}R_{kl_1} - R_{kl_2}R_{il_1}) \delta_j^h \right) \right] \Big|_0 = 0
 \end{aligned}$$

Зведемо подібні у попередньому співвідношенні:

$$\left\{ \frac{1}{(n-1)^2} \left[2R_{ik} \left(-2R_{.l_1l_2} \delta_j^h + R_{jl_2} \delta_{.l_1}^h + R_{jl_1} \delta_{l_2}^h \right) - R_{kl_1} \left(2R_{ij} \delta_{l_2}^h - R_{il_2} \delta_j^h - R_{jl_2} \delta_i^h \right) - \right. \right. \\ \left. - R_{kl_2} \left(2R_{ij} \delta_{.l_1}^h - R_{il_1} \delta_j^h - R_{jl_1} \delta_i^h \right) - 2R_{ij} \left(-2R_{.l_1l_2} \delta_k^h + R_{kl_2} \delta_{.l_1}^h + R_{kl_1} \delta_{l_2}^h \right) + \right. \\ \left. + R_{jl_1} \left(2R_{ik} \delta_{l_2}^h - R_{il_2} \delta_k^h - R_{kl_2} \delta_i^h \right) + R_{jl_2} \left(2R_{ik} \delta_{.l_1}^h - R_{il_1} \delta_k^h - R_{kl_1} \delta_i^h \right) \right] - \\ \left. - \frac{1}{n-1} \left[(R_{il_1} R_{jl_2} + R_{il_2} R_{jl_1}) \delta_k^h - (R_{il_1} R_{kl_2} + R_{il_2} R_{kl_1}) \delta_j^h \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{(n-1)^2} \left[(4R_{ij} R_{.l_1l_2} - 2R_{il_1} R_{jl_2} - 2R_{jl_1} R_{il_2}) \delta_k^h - \right. \right. \\ \left. \left. - (4R_{ik} R_{.l_1l_2} - 2R_{il_1} R_{kl_2} - 2R_{kl_1} R_{il_2}) \delta_j^h \right] \right\} \Big|_0 = 0.$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо:

$$\left\{ \frac{1}{(n-1)^2} \left[-4R_{ik} R_{.l_1l_2} \delta_j^h + 4R_{ik} R_{.l_1l_2} \delta_j^h - R_{kl_1} R_{il_2} \delta_j^h - R_{il_1} R_{kl_2} \delta_j^h + 4R_{ij} R_{.l_1l_2} \delta_k^h - \right. \right. \\ \left. - 4R_{ij} R_{.l_1l_2} \delta_k^h + R_{jl_1} R_{il_2} \delta_k^h + R_{il_1} R_{jl_2} \delta_k^h + 4R_{ik} R_{jl_2} \delta_{.l_1}^h + R_{kl_1} R_{jl_2} \delta_i^h - R_{kl_1} R_{jl_2} \delta_i^h + \right. \\ \left. 4R_{ik} R_{jl_1} \delta_{l_2}^h - 4R_{ij} R_{kl_1} \delta_{l_2}^h - 4R_{ij} R_{kl_2} \delta_{.l_1}^h + R_{kl_2} R_{jl_1} \delta_i^h - R_{kl_2} R_{jl_1} \delta_i^h \right] - \\ \left. - \frac{1}{n-1} \left[(R_{il_1} R_{jl_2} + R_{il_2} R_{jl_1}) \delta_k^h - (R_{il_1} R_{kl_2} + R_{il_2} R_{kl_1}) \delta_j^h \right] \right\} \Big|_0 = 0.$$

Далі

$$\left\{ \frac{1}{(n-1)^2} \left[4(R_{ik} R_{jl_2} - R_{ij} R_{kl_2}) \delta_{.l_1}^h + 4(R_{ik} R_{jl_1} - R_{ij} R_{kl_1}) \delta_{l_2}^h - \right. \right. \\ \left. (R_{kl_1} R_{il_2} + R_{il_1} R_{kl_2}) \delta_j^h + (R_{jl_1} R_{il_2} + R_{il_1} R_{jl_2}) \delta_k^h \right] - (n-1) \times \\ \left. \times \left[(R_{il_1} R_{jl_2} + R_{il_2} R_{jl_1}) \delta_k^h - (R_{il_1} R_{kl_2} + R_{il_2} R_{kl_1}) \delta_j^h \right] \right\} \Big|_0 = 0.$$

Таким чином, одержимо:

$$\left\{ \frac{1}{(n-1)^2} \left[4R_{ik} \left(R_{jl_2} \delta_{.l_1}^h + R_{jl_1} \delta_{l_2}^h \right) - 4R_{ij} \left(R_{kl_2} \delta_{.l_1}^h + R_{kl_1} \delta_{l_2}^h \right) - (1-n+1) \times \right. \right. \\ \left. \times (R_{kl_1} R_{il_2} + R_{il_1} R_{kl_2}) \delta_j^h + (R_{il_1} R_{jl_2} + R_{il_2} R_{jl_1}) \delta_k^h (1-n+1) \right] \right\} \Big|_0 = 0$$

Оскільки розмірність простору n не може дорівнювати нулю, то отримаємо

наступне співвідношення:

$$\left\{ 4 \left[R_{ik} \left(R_{jl_2} \delta_{l_1}^h + R_{jl_1} \delta_{l_2}^h \right) - R_{ij} \left(R_{kl_2} \delta_{l_1}^h + R_{kl_1} \delta_{l_2}^h \right) \right] + \right. \\ \left. + (n-2) \left((R_{kl_1} R_{il_2} + R_{il_1} R_{kl_2}) \delta_j^h - (R_{jl_1} R_{il_2} + R_{il_1} R_{jl_2}) \delta_k^h \right) \right\} \Big|_0 = 0 \quad (1.9)$$

Просумуємо (1.9) за індексами h та k :

$$\left\{ 4 \left[R_{i\alpha} \left(R_{jl_2} \delta_{l_1}^\alpha + R_{jl_1} \delta_{l_2}^\alpha \right) - R_{ij} \left(R_{\alpha l_2} \delta_{l_1}^\alpha + R_{\alpha l_1} \delta_{l_2}^\alpha \right) \right] + \right. \\ \left. (n-2) \left((R_{\alpha l_1} R_{il_2} + R_{il_1} R_{\alpha l_2}) \delta_j^\alpha - (R_{jl_1} R_{il_2} + R_{il_1} R_{jl_2}) \delta_\alpha^\alpha \right) \right\} \Big|_0 = 0$$

Тоді:

$$\left\{ 4 (R_{il_1} R_{jl_2} + R_{il_2} R_{jl_1} - R_{ij} R_{l_1 l_2} - R_{ij} R_{l_1 l_2}) + \right. \\ \left. + (n-2) (R_{jl_1} R_{il_2} + R_{il_1} R_{jl_2} - n R_{jl_1} R_{il_2} - n R_{il_1} R_{jl_2}) \right\} \Big|_0 = 0$$

Звідси випливає, що

$$\left\{ R_{il_1} R_{jl_2} (4 + n - 2 - n^2 + 2n) + \right. \\ \left. + R_{il_2} R_{jl_1} (4 + n - 2 - n^2 + 2n) - 8 R_{ij} R_{l_1 l_2} \right\} \Big|_0 = 0$$

Помноживши попереднє співвідношення на -1 , отримаємо

$$\left\{ (n^2 - 3n - 2) (R_{il_1} R_{jl_2} + R_{il_2} R_{jl_1}) + 8 R_{ij} R_{l_1 l_2} \right\} \Big|_0 = 0. \quad (1.10)$$

Наразі просумуємо (1.9) за індекссами h і l_1 :

$$\left\{ 4 \left[R_{ik} \left(R_{jl_2} \delta_\alpha^\alpha + R_{j\alpha} \delta_{l_2}^\alpha \right) - R_{ij} \left(R_{kl_2} \delta_\alpha^\alpha + R_{k\alpha} \delta_{l_2}^\alpha \right) \right] + \right. \\ \left. (n-2) \left((R_{k\alpha} R_{il_2} + R_{i\alpha} R_{kl_2}) \delta_j^\alpha - (R_{j\alpha} R_{il_2} + R_{i\alpha} R_{jl_2}) \delta_k^\alpha \right) \right\} \Big|_0 = 0$$

Тоді:

$$\left\{ 4 (n R_{ik} R_{jl_2} + R_{ik} R_{jl_2} - n R_{ij} R_{kl_2} - R_{ij} R_{kl_2}) + \right. \\ \left. + (n-2) (R_{kj} R_{il_2} + R_{ij} R_{kl_2} - R_{jk} R_{il_2} - R_{ik} R_{jl_2}) \right\} \Big|_0 = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\left\{ 4(n+1) [R_{ik} R_{jl_2} - R_{ij} R_{kl_2}] - (n-2) (R_{ik} R_{jl_2} - R_{ij} R_{kl_2}) \right\} \Big|_0 = 0$$

Врешті-решт, отримали

$$\left\{ (R_{ik}R_{jl_2} - R_{ij}R_{kl_2}) (3n + 6) \right\} \Big|_0 = 0$$

Оскільки $3n + 6 \neq 0$, то

$$R_{ik}R_{jl_2} = R_{ij}R_{kl_2}. \quad (1.11)$$

З урахуванням (1.11) співвідношення (1.10) набуває наступного виду

$$\left\{ (n^2 - 3n - 2) (R_{ij}R_{l_1l_2} + R_{ij}R_{l_1l_2}) + 8R_{ij}R_{l_1l_2} \right\} \Big|_0 = 0$$

$$(2n^2 - 6n + 4) R_{ij}R_{l_1l_2} = 0 \quad (1.12)$$

Так як $(2n^2 - 6n + 4) \neq 0$, то виходить, що $R_{ij} = 0$. Таким чином, доведена наступна

Теорема 2. *Якщо простір афінної зв'язності $\tilde{A}_n$ є проективно плоским, то простір A_n - плоский.*

Властивості просторів в залежності від виду тензора Річчі вивчались в роботах [7, 9].

2. Нескінченно малі рухи в $\tilde{A}_n$.

Означення 2. Відображення простору $\tilde{A}_n$ на себе, яке зберігає об'єкт $\tilde{\Gamma}_{ij}^h(y)$, називається рухом даного простору афінної зв'язності.

Будемо досліджувати перехід від координат $y^1, y^2, \dots, y^n$ до нових координат $y'^1, y'^2, \dots, y'^n$ на лінійному перетворенні відносно приросту параметра t

$$y'^h = y^h + \tilde{\xi}^h(y) \delta t, \quad (2.1)$$

де $\tilde{\xi}^h(y)$ - вектор зміщення рухів.

Компоненти вектора зміщення рухів $\tilde{\xi}^h(y)$ будемо шукати в такому вигляді:

$$\tilde{\xi}^h(y) = a_{\cdot}^h + a_{\cdot l_1}^h y^{l_1} + a_{\cdot l_1 l_2}^h y^{l_1} y^{l_2} + a_{\cdot l_1 l_2 l_3}^h y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} + \dots + a_{\cdot l_1 l_2 \dots l_k}^h y^{l_1} y^{l_2} \dots y^{l_k} + \dots$$

або

$$\tilde{\xi}^h(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\cdot}^h, \quad (2.2)$$

де введено позначення

$$a_{\cdot p}^h = a_{\cdot l_1 l_2 \dots l_p}^h y^{l_1} y^{l_2} \dots y^{l_p}. \quad (2.3)$$

Зауваження 1. У (2.3) $a^h, a^h_{.l_1 l_2 \dots l_p}$ - деякі постійні, причому $a^h_{.l_1 \dots l_p}$ ($p \geq 2$) симетричні за будь-якою парою нижніх індексів.

Введемо позначення:

$$t_\alpha^h = \frac{1}{3} R^h_{.l_1 l_2 l_2} y^{l_1} y^{l_2}, t_\alpha^{(2)h} = t_\beta^h t_\alpha^\beta, \dots \quad (2.4)$$

Методом повної математичної індукції доведено наступну лему:

Лема 1. Для того, щоб ряди (2.2) визначали компоненти вектора зміщення рухів $\tilde{\xi}^h(y)$ у просторі $\tilde{A}_n$, необхідно, щоб члени цих рядів визначалися з рекурентних співвідношень

$$a^h_{2k} = -\frac{2k-3}{k(2k-1)} a^{\alpha}_{2k-2} t_\alpha^h \quad (2.5)$$

$$a^h_{2k+1} = 0, k \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Доведення. Необхідність. Відомо, що векторне поле зміщення рухів $\tilde{\xi}^h(y)$ тоді і тільки тоді переводить об'єкт $\tilde{\Gamma}_{ij}^h(y)$ в себе, коли

$$L_\xi \tilde{\Gamma}_{ij}^h(y) = 0 \quad (2.7)$$

де $L_\xi \tilde{\Gamma}_{ij}^h$ - похідна Лі об'єкта зв'язності [4, 10].

Відносно компонентів вектора зміщення рухів $\tilde{\xi}^h(y)$ рівняння (2.7) представляють систему диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\xi}^h}{\partial y^i \partial y^j} + \tilde{\xi}^\alpha \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ij}^h}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^i} \tilde{\Gamma}_{\alpha j}^h + \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^j} \tilde{\Gamma}_{\alpha i}^h - \frac{\partial \tilde{\xi}^h}{\partial y^\alpha} \tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha = 0 \quad (2.8)$$

Диференціюємо співвідношення (2.2) як степеневу функцію:

$$\frac{\partial \tilde{\xi}^h}{\partial y^i} = a^h_{.i} + 2a^h_{.il} y^l + 3a^h_{.il_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} + \dots + (k+1)a^h_{.il_1 l_2 \dots l_k} y^{l_1} y^{l_2} \dots y^{l_k} + \dots$$

Розпишемо перший доданок рівняння (2.8):

$$\frac{\partial^2 \tilde{\xi}^h}{\partial y^i \partial y^j} = 2a^h_{.ij} + 2 \cdot 3a^h_{.ijl_1} y^{l_1} + 3 \cdot 4a^h_{.ijl_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} + \dots + (k+1)(k+2)a^h_{.ijl_1 \dots l_k} y^{l_1} \dots y^{l_k} + \dots$$

Тепер розпишемо другий доданок:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ij}^h}{\partial y^\alpha} &= -\frac{1}{3} R_{0 \cdot (ij)\alpha}^h \\ \xi^\alpha \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ij}^h}{\partial y^\alpha} &= -\frac{1}{3} \left[\left(a_{\cdot}^\alpha R_{(ij)\alpha}^h \right) \Big|_0 + \left(a_{\cdot l_1}^\alpha R_{(ij)\alpha}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} + \left(a_{\cdot l_1 l_2}^\alpha R_{(ij)\alpha}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(a_{\cdot l_1 \dots l_k}^\alpha R_{(ij)\alpha}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} \dots y^{l_k} \right] \end{aligned}$$

Третій доданок має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^i} \tilde{\Gamma}_{\alpha j}^h &= -\frac{1}{3} \left[\left(a_{\cdot i}^\alpha R_{(\alpha j) l_1}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} + 2 \left(a_{\cdot i l_1}^\alpha R_{(\alpha j) l_2}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} + 2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(a_{\cdot i l_1 l_2}^\alpha R_{(\alpha j) l_3}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} + \dots + k \left(a_{\cdot i l_1 \dots l_{k-1}}^\alpha R_{(\alpha j) l_k}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} \dots y^{l_k} + \dots \right] \end{aligned}$$

Аналогічно четвертий доданок:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^j} \tilde{\Gamma}_{\alpha i}^h &= -\frac{1}{3} \left[\left(a_{\cdot j}^\alpha R_{(\alpha i) l_1}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} + 2 \left(a_{\cdot j l_1}^\alpha R_{(\alpha i) l_2}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} + 2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(a_{\cdot j l_1 l_2}^\alpha R_{(\alpha i) l_3}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} + \dots + k \left(a_{\cdot j l_1 \dots l_{k-1}}^\alpha R_{(\alpha i) l_k}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} \dots y^{l_k} + \dots \right] \end{aligned}$$

П'ятий доданок:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \tilde{\xi}^h}{\partial y^\alpha} \tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha &= \frac{1}{3} R_{(ij)m}^\alpha y^m \left(a_{\cdot \alpha}^h + 2a_{\cdot \alpha l_1}^h y^{l_1} + 2a_{\cdot \alpha l_1 l_2}^h y^{l_1} y^{l_2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + k a_{\cdot \alpha l_1 \dots l_{k-1}}^h y^{l_1} \dots y^{l_{k-1}} + \dots \right) \end{aligned}$$

Отримані співвідношення підставляємо в рівняння (2.8) і зведемо подібні:

$$\begin{aligned}
& \left(2a_{.ij}^h - \frac{1}{3}a_{.}^{\alpha}R_{.(ij)\alpha}^h \right) \Big|_0 + \left[2 \cdot 3a_{.jjl_1}^h - \frac{1}{3} \left(a_{.l_1}^{\alpha}R_{.(ij)\alpha}^h + a_{.i}^{\alpha}R_{.(\alpha j)l_1}^h + a_{.j}^{\alpha}R_{.(\alpha i)l_1}^h - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - a_{.\alpha}^h R_{.(ij)l_1}^{\alpha} \right) \right] \Big|_0 y^{l_1} + \left[3 \cdot 4a_{.ijl_1l_2}^h - \frac{1}{3} \left(a_{.l_1l_2}^{\alpha}R_{.(ij)\alpha}^h + 2 \left(a_{.il_1}^{\alpha}R_{.(\alpha j)l_2}^h + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + a_{.jl_1}^{\alpha}R_{.(\alpha i)l_2}^h - a_{.al_1}^h R_{.(ij)l_2}^{\alpha} \right) \right) \right] \Big|_0 y^{l_1}y^{l_2} + \dots + \left[(k+1)(k+2)a_{.ijl_1\dots l_k}^h y^{l_1} \dots y^{l_k} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{3} \left(a_{.l_1\dots l_k}^{\alpha}R_{.(ij)\alpha}^h + k \left(a_{.il_1\dots l_{k-1}}^{\alpha}R_{.(\alpha j)l_k}^h + a_{.jl_1\dots l_{k-1}}^{\alpha}R_{.(\alpha i)l_k}^h - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - a_{.al_1\dots l_{k-1}}^h R_{.(ij)l_k}^{\alpha} \right) \right) \right] \Big|_0 y^{l_1} \dots y^{l_k} = 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Оскільки рівняння (2.9) виконується при будь-яких $y^{l_1}y^{l_2} \dots y^{l_n}$, то зведені коефіцієнти дорівнюють нулю.

Спочатку прирівнюємо нулю доданок першого степеня.

$$\left[2 \cdot 3a_{.ijl_1}^h - \frac{1}{3} \left(a_{.l_1}^{\alpha}R_{.(ij)\alpha}^h + a_{.i}^{\alpha}R_{.(\alpha j)l_1}^h + a_{.j}^{\alpha}R_{.(\alpha i)l_1}^h - a_{.\alpha}^h R_{.(ij)l_1}^{\alpha} \right) \right] \Big|_0 y^{l_1} = 0$$

Згортаємо його з $y^i y^j$ та підсумуємо за індексами $i, j = 1, \dots, n$.

$$2 \cdot 3a_{.l_1l_2l_3}^h y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} = \frac{1}{3} \left(2a_{.l_1}^{\alpha}R_{.l_2l_3\alpha}^h + 2a_{.l_1}^{\alpha}R_{.(\alpha l_2)l_3}^h - 2a_{.\alpha}^h R_{.l_2l_3l_1}^{\alpha} \right) y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3}$$

З властивості тензора Рімана випливає, що $R_{.al_1l_2l_3}^h y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} \equiv 0$, тому

$$\begin{aligned}
3a_{.l_1l_2l_3}^h y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} &= \frac{1}{3} \left(a_{.l_1}^{\alpha}R_{.l_2l_3\alpha}^h + a_{.l_1}^{\alpha}R_{.al_2l_3}^h + a_{.l_1}^{\alpha}R_{.l_2l_3}^h \right) y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} \\
3a_{.l_1l_2l_3}^h y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} &= a_{.l_1}^{\alpha} \left(R_{.l_2l_3\alpha}^h - R_{.l_2l_3\alpha}^h \right) y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} \\
a_{.l_1l_2l_3}^h y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} &= 0 \\
a_{.}^h &= 0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Тепер розглянемо рівність нулю зведеного коефіцієнта при $y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3}$.

$$\begin{aligned}
4 \cdot 5a_{.ijl_1l_2l_3}^h y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} &= \frac{1}{3} \left(a_{.l_1l_2l_3}^{\alpha}R_{.(ij)\alpha}^h + 3 \left(a_{.il_1l_2}^{\alpha}R_{.(\alpha j)l_3}^h + a_{.jl_1l_2}^{\alpha}R_{.(\alpha i)l_3}^h - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - a_{.al_1l_2}^h R_{.(ij)l_3}^{\alpha} \right) \right) y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3}
\end{aligned}$$

Обидві частини попереднього співвідношення згортаємо з $y^i y^j$ та підсумуємо за індексами $i, j = 1, \dots, n$.

$$4 \cdot 5 a_{5\cdot}^h = \frac{1}{3} \left(2 a_{3\cdot}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h + 2 \cdot 3 a_{3\cdot}^\alpha R_{a l_1 l_2}^h - 2 \cdot 3 a_{3\cdot}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h \right) y^{l_1} y^{l_2}$$

$$a_{5\cdot}^h = 0$$

Продовжуючи цей процес, на $(2k-1)$ -ому кроці ми бачимо, що $a_{2k-1\cdot}^h = 0$

виражаються через добуток, у якому присутній множник $a_{2k-1\cdot}^h = 0$, тому має місце співвідношення (2.6). Наразі доведемо (2.5), для цього спочатку прирівняємо нулю вільний член.

$$2 a_{ij\cdot}^h - \frac{1}{3} a^\alpha R_{(ij)\alpha}^h = 0$$

$$a_{ij\cdot}^h = \frac{1}{6} a^\alpha R_{(ij)\alpha}^h$$

Якщо домножити попереднє рівняння на $y^i y^j$ та підсумувати за індексами $i, j = 1, \dots, n$, то отримаємо

$$a_{2\cdot}^h = a^\alpha t_\alpha^h. \quad (2.11)$$

Легко бачити, що (2.11) можна отримати і з (2.5) при $k = 1$. Розглянемо тепер рівність нулю доданка другого степеня відносно $y^1 y^2 \dots y^k$.

$$\left[3 \cdot 4 a_{ij l_1 l_2}^h - \frac{1}{3} \left(a_{l_1 l_2}^\alpha R_{(ij)\alpha}^h + 2 \left(a_{il_1}^\alpha R_{(\alpha j) l_2}^h + a_{jl_1}^\alpha R_{(\alpha i) l_2}^h - a_{al_1}^h R_{(ij) l_2}^\alpha \right) \right) \right] \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} = 0$$

$$3 \cdot 4 a_{ij l_1 l_2}^h y^{l_1} y^{l_2} = \frac{1}{3} \left(a_{l_1 l_2}^\alpha R_{(ij)\alpha}^h + 2 \left(a_{il_1}^\alpha R_{(\alpha j) l_2}^h + a_{jl_1}^\alpha R_{(\alpha i) l_2}^h - a_{al_1}^h R_{(ij) l_2}^\alpha \right) \right) y^{l_1} y^{l_2}$$

Ліву та праву частини останнього співвідношення згортаємо з $y^i y^j$ та підсумуємо за індексами $i, j = 1, \dots, n$.

$$3 \cdot 4 a_{4\cdot}^h = \frac{1}{3} \left(2 a_{2\cdot}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h + 4 a_{2\cdot}^\alpha R_{((a l_1) l_2)}^h \right) y^{l_1} y^{l_2}$$

$$3 \cdot 4 a_{4\cdot}^h = \frac{1}{3} \left(2 a_{2\cdot}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h + 4 a_{2\cdot}^\alpha R_{a l_1 l_2}^h - 4 a_{2\cdot}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h \right) y^{l_1} y^{l_2}$$

$$3 \cdot 4 a_{4\cdot}^h = -\frac{2}{3} a_{2\cdot}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h y^{l_1} y^{l_2}$$

Враховуючи рівняння (2.4), отримаємо

$$a_{4\cdot}^h = -\frac{1}{6} a_{2\cdot}^\alpha t_\alpha^h \quad (2.12)$$

Але до того ж результату приходимо і з (2.5) при $k = 2$. Тепер розглянемо рівність нулю зведеного коефіцієнта при $y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4}$.

$$5 \cdot 6 a_{ijl_1 \dots l_4}^h y^{l_1} \dots y^{l_4} = \frac{1}{3} \left(a_{l_1 \dots l_4}^a R_{\cdot(ij)\alpha}^h + 4 \left(a_{il_1 l_2 l_3}^\alpha R_{\cdot(\alpha j)l_4}^h + a_{jl_1 l_2 l_3}^\alpha R_{\cdot(\alpha i)l_4}^h - a_{\alpha l_1 l_2 l_3}^h R_{\cdot(ij)l_4}^\alpha \right) \right) y^{l_1} \dots y^{l_4}$$

Обидві частини попереднього співвідношення згортаємо з $y^i y^j$ та підсумуємо за індексами $i, j = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} 5 \cdot 6 a_{6\cdot}^h &= \frac{1}{3} \left(2 a_{4\cdot}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h + 2 \cdot 4 a_{4\cdot}^\alpha R_{\alpha l_1 l_2}^h - 2 \cdot 4 a_{4\cdot}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h \right) y^{l_1} y^{l_2} \\ 5 \cdot 3 a_{6\cdot}^h &= -\frac{4-1}{3} a_{4\cdot}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h y^{l_1} y^{l_2} \\ a_{6\cdot}^h &= -\frac{1}{5} a_{4\cdot}^\alpha t_\alpha^h \end{aligned} \quad (2.13)$$

Легко бачити, що (2.13) можна отримати і з (2.5) при $k = 3$.

Таким чином, формула (2.5) вірна для $k = 1, 2, 3$. Нехай вона має місце для $k = p$, тобто

$$a_{2p\cdot}^h = -\frac{2p-3}{p(2p-1)} a_{2p-2\cdot}^\alpha t_\alpha^h.$$

Доведемо, що вона справедлива і для $k = p + 1$. Враховуючи припущення індукції, отримуємо

$$a_{2p+2\cdot}^h = -\frac{2p-1}{(p+1)(2p+1)} a_{2p\cdot}^\alpha t_\alpha^h, \quad (2.14)$$

що й завершує доведення леми.

Раніше [3, 15] було доведено наступні дві леми:

Лема 2. Для того, щоб ряди (2.2) визначали компоненти вектора зміщення рухів $\tilde{\xi}^h(y)$ у просторі $\tilde{A}_n$, необхідно, щоб виконувалися співвідношення (2.6), а загальні члени рядів мали вигляд

$$a_{2k\cdot}^h = \frac{(-1)^{k+1}}{k!(2k-1)} a_{\cdot}^\alpha t_\alpha^{(k)h} \quad (2.15)$$

Лема 3. *Ряди*

$$\tilde{\xi}^h(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!(2k-1)} a_{\cdot}^{\alpha} t_{\alpha}^{(k)h} \quad (2.16)$$

при $h = 1, 2, \dots, n$ сходяться абсолютно і рівномірно на множині

$$\left| R_{l_1 l_2 k}^h y^{l_1} y^{l_2} \right| < \frac{3}{n}.$$

Знайдемо достатність умов (2.5) та (2.6) леми 1. Вимагатимемо, щоб ряди (2.2), члени яких знаходяться з (2.5) та (2.6), визначали компоненти вектора зміщення рухів $\tilde{\xi}^h(y)$ у просторі $\tilde{A}_n$. З рівнянь (2.14) випливає, що

$$(2p+2)a_{2p+1}^h(ij) = -\frac{2p-1}{3(p+1)(2p+1)} \left[2k \frac{a_{2p-1}^{\alpha}}{\cdot} (i R_j)_{l_1 l_2 \alpha} y^{l_1} y^{l_2} - \frac{a_{2p}^{\alpha}}{\cdot} R_{\alpha(ij)l} y^l \right] \quad (2.17)$$

Підстановка співвідношень (1.1), (2.5), (2.6) і (2.7) в рівняння (2.9) з урахуванням (2.4) дає

$$a_{\cdot(i}^{\alpha} R_j)_{(l_1 l_2) \alpha} + a_{\cdot(l_1}^{\alpha} R_{l_2)(ij) \alpha} = 0 \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{\cdot(i}^{\alpha} t_j)_{\alpha}}{2p-1} + \frac{a_{\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha}}{2p} &= 0 \\ (p = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Таким чином доведена наступна

Лема 4. *Для того, щоб ряди (2.2), члени яких визначаються з (2.6) і рекурентних співвідношень (2.5), визначали компоненти вектора зміщення рухів $\tilde{\xi}^h(y)$ у просторі $\tilde{A}_n$, достатньо, щоб виконувалися рівняння (2.17) і (2.18).*

Об'єднуючи лему 1 - лему 4, отримуємо наступну теорему.

Теорема 3. *Для того, щоб у просторі $\tilde{A}_n$ існував вектор зміщення рухів $\tilde{\xi}^h(y)$ виду (2.2), необхідно та достатньо, щоб виконувалися співвідношення (2.6) і (2.15).*

Отримані результати можуть бути застосовані в загальній теорії відносності [6, 9], теоретичній механіці [11, 14] та інших областях геометрії [12, 13].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Barden, D., Thomas, C.** (2003). *An Introduction to Differential Manifolds*. University of Cambridge, UK. <https://doi.org/10.1142/p285>
2. **do Carmo, M. P.** (1992). *Riemannian Geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA. <https://link.springer.com/book/9780817634902>
3. **Doikov, D., Kiosak, V.** (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040001. <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
4. **Duistermaat, J. J., Kolk, J. A. C.** (2000). *Lie Groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56936-4>
5. **Eisenhart, L. P.** (1950, repr. 1997). *Riemannian Geometry*. Princeton Univ. Press. ISBN: 9780691023533
6. **Isham, C. J.** (1999). *Modern Differential Geometry for Physicists*, 2nd Edition. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/3867>
7. **Kiosak, V., Kusik, L., Isaiev, V.** (2022). Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 15(2), 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
8. **Kiosak, V., Lesechko, O., Savchenko, O.** (2018). Mappings of Spaces with Affine Connection. In: *17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT*. Bratislava, pp. 563–569.
9. **Kiosak, V., Savchenko, A., Kusik, L.** (2022). On the properties of Ricci solitons. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120006. <https://doi.org/10.1063/5.0100792>
10. **Kiosak, V., Savchenko, A., Khniunin, S.** (2020). On the typology of quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040003. <https://doi.org/10.1063/5.0033700>
11. **Kiosak, V., Savchenko, A., Kovalova, G.** (2020). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I. *Proceedings of the International Geometry Center*, 13(1), 35–48. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v13i1.1711>
12. **Kiosak, V., Savchenko, A., Latysh, O.** (2021). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(1), 80–91. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i1.1936>
13. **Kuzakon, V. M., Kirichenko, V. N., Prishlyak, O. O.** (2013). *Smooth Manifolds*. Kyiv: Institute of Mathematics, NAS of Ukraine.
14. **Lesechko, O., Latysh, O., Kamienieva, A.** (2019). Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040002. <https://doi.org/10.1063/1.5130794>
15. **Pokas, S., Bilokobylskyi, I.** (2022). Lie group of the second-degree infinitesimal conformal transformations in a symmetric Riemannian space of the first class. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120005.

16. **Pokas, S., Krutoholova, A.** (2019). Infinitesimal conformal transformations in a second-approximation Riemannian space of non-zero constant curvature. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040004.
17. **Pokas, S. M.** (2014). Infinitesimal conformal transformations in a second-approximation Riemannian space. *Proceedings of the International Geometry Center*, 7(2), 36–50.

Vashpanova N. V., Pokas S. M.

SOME ISSUES OF APPROXIMATION THEORY FOR AFFINELY CONNECTED SPACES

Summary

The idea of studying geometric objects in the neighborhood of an arbitrary point with a certain order of precision has been partially applied in geometry and has led to a deeper investigation of these objects. In the theory of curves, an invariant vector to the tangent arises in the first-order differential neighborhood. This makes it possible to introduce the concept of the arc length of a curve and to choose it as a parameter. In the second-order differential neighborhood, the principal normal vector and the curvature of the curve are constructed. When considering the third-order differential neighborhood, the torsion of the curve is obtained.

In this work, affine connection spaces without torsion are studied. Methods for constructing approximate geometric objects have been developed, and their properties with respect to analogous objects in the given affine connection space have been examined. The investigation is carried out in a special coordinate system. The obtained results are applied to the study of motions in affine connected spaces. The form of the Killing vector in approximate affine connected spaces has been determined.

Keywords: affine connected space, Riemannian space, Riemann tensor, Ricci tensor, Lie derivative.

REFERENCES

1. **Barden, D., Thomas, C.** (2003). *An Introduction to Differential Manifolds*. University of Cambridge, UK. <https://doi.org/10.1142/p285>
2. **do Carmo, M. P.** (1992). *Riemannian Geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA. <https://link.springer.com/book/9780817634902>
3. **Doikov, D., Kiosak, V.** (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040001. <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
4. **Duistermaat, J. J., Kolk, J. A. C.** (2000). *Lie Groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56936-4>
5. **Eisenhart, L. P.** (1950, repr. 1997). *Riemannian Geometry*. Princeton Univ. Press. ISBN: 9780691023533

6. **Isham, C. J.** (1999). *Modern Differential Geometry for Physicists*, 2nd Edition. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/3867>
7. **Kiosak, V., Kusik, L., Isaiev, V.** (2022). Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 15(2), 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
8. **Kiosak, V., Lesechko, O., Savchenko, O.** (2018). Mappings of Spaces with Affine Connection. In: *17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT*. Bratislava, pp. 563–569.
9. **Kiosak, V., Savchenko, A., Kusik, L.** (2022). On the properties of Ricci solitons. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120006. <https://doi.org/10.1063/5.0100792>
10. **Kiosak, V., Savchenko, A., Khniunin, S.** (2020). On the typology of quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040003. <https://doi.org/10.1063/5.0033700>
11. **Kiosak, V., Savchenko, A., Kovalova, G.** (2020). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I. *Proceedings of the International Geometry Center*, 13(1), 35–48. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v13i1.1711>
12. **Kiosak, V., Savchenko, A., Latysh, O.** (2021). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(1), 80–91. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i1.1936>
13. **Kuzakon, V. M., Kirichenko, V. N., Prishlyak, O. O.** (2013). *Smooth Manifolds*. Kyiv: Institute of Mathematics, NAS of Ukraine.
14. **Lesechko, O., Latysh, O., Kamienieva, A.** (2019). Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040002. <https://doi.org/10.1063/1.5130794>
15. **Pokas, S., Bilokobylskyi, I.** (2022). Lie group of the second-degree infinitesimal conformal transformations in a symmetric Riemannian space of the first class. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120005.
16. **Pokas, S., Krutoholova, A.** (2019). Infinitesimal conformal transformations in a second-approximation Riemannian space of non-zero constant curvature. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040004.
17. **Pokas, S. M.** (2014). Infinitesimal conformal transformations in a second-approximation Riemannian space. *Proceedings of the International Geometry Center*, 7(2), 36–50.

УДК 517.925

А. В. Воробйова, аспірант

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна

e-mail: alla.vorobyova@stud.onu.edu.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0009-7664-3399>

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ШВИДКО ЗМІННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З НЕЛІНІЙНОСТЯМИ БЛИЗЬКИМИ ДО ПРАВИЛЬНО ЗМІННИХ

Для диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями загального вигляду, що є близькими до правильно змінних, вперше отримано необхідні та достатні умови існування досить широкого класу швидкозмінних розв'язків. Ця робота розширює та узагальнює класичні результати, отримані для рівнянь Емдена-Фаулера, та дозволяє застосувати асимптотичні методи до більш складних моделей. Крім того, отримано точні асимптотичні формули для таких розв'язків та їх похідних першого порядку. Ці формули є важливим інструментом для аналізу якісної поведінки розв'язків у залежності від властивостей коефіцієнтів рівняння. Отримані результати дозволяють прогнозувати поведінку розв'язків у околі особливої точки, що має велике значення для прикладних задач у фізиці, хімії та інших науках.

MSC: 2000: 34C41, 34A10.

Ключові слова: диференціальні рівняння, асимптотичний, швидко змінні розв'язки, правильно змінні нелінійності.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2\(44\).342073](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2(44).342073).

Вступ

З розвитком теорії правильно змінних функцій [1] у роботах В.М. Євтухова та численних представників його наукової школи (див., наприклад, [3]–[6]) було розроблено теорію дослідження достатньо широких класів розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями. Залишається відкритою задача дослідження рівнянь більш загального виду, які можуть виникати при розгляді уточнених моделей різноманітних природних явищ. Дану роботу присвячено саме таким

типам рівнянь.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) f(t, y, y'), \quad (1)$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$) – неперервна функція і $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow]0, +\infty[$ є неперервно диференційовною, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} має вид або $[y_i^0, Y_i[$ або $]Y_i, y_i^0]$.

Покладемо

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{то } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{то } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Вважаємо, що функція f у (1) задовольняє умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(t, v_0, v_1)}{f(t, v_0, v_1)} = \gamma \text{ рівномірно по } (v_0, v_1) \in \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \quad (2)$$

та для кожного $k \in \{0, 1\}$

$$\lim_{\substack{v_k \rightarrow y_k \\ v_k \in \Delta_{Y_k}}} \frac{v_k \cdot \frac{\partial f}{\partial v_k}(t, v_0, v_1)}{f(t, v_0, v_1)} = \sigma_k \text{ рівномірно по } t \in [a, w[\text{ та рівномірно по } \quad (3)$$

$v_j \in \Delta_{Y_j}, j \neq k, \sigma_i \in R$, причому $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$.

Функції f , що задовольняють умови (2) та (3) є близькими до правильно змінних функцій по кожній зі змінних. Прикладом можуть слугувати зокрема функції виду $|\pi_\omega(t)|^\gamma |y|^{\sigma_0} |y'|^{\sigma_1} \exp(|\ln |\pi_\omega(t) y y'|^\mu|)$, $0 < \mu < 1$. Важливою особливістю таких функцій є неможливість їх навіть асимптотично зобразити у вигляді добутку функції, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної.

В силу (2) та (3), $f(t, y, y')$ має вигляд

$$f(t, v_0, v_1) = |\pi_\omega(t)|^\gamma |y|^{\sigma_0} |y'|^{\sigma_1} \cdot \Theta(t, y, y'), \quad (4)$$

де функція Θ задовольняє умову

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t}(t, v_0, v_1)}{\Theta(t, v_0, v_1)} = 0 \text{ рівномірно по } (v_0, v_1) \in \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1}, \quad (5)$$

а також для кожного $k \in \{0, 1\}$

$$\lim_{\substack{v_k \rightarrow y_k \\ v_k \in \Delta Y_k}} \frac{v_k \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v_k}(\Theta, v_0, v_1)}{f(t, v_0, v_1)} = 0 \text{ рівномірно по } t \in [a, w[\text{ та рівномірно по } \quad (6)$$

$v_j \in \Delta Y_j, j \neq k$.

Розв'язок y рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язком, якщо він заданий на $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ та для кожного $i \in \{0, 1\}$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \quad (7)$$

Введемо необхідні позначення

$$I_2(t) = \alpha_0 \int_{A_\omega^2}^t p(\tau) d\tau, \quad A_\omega^2 = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau) d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau) d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$J_4(t) = \int_{B_\omega^4}^t |I_2(\tau)|^{\frac{1}{\sigma_0}} d\tau, \quad B_\omega^4 = \begin{cases} b, & \text{якщо } \int_b^\omega |I_2(\tau)|^{\frac{1}{\sigma_0}} d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_b^\omega |I_2(\tau)|^{\frac{1}{\sigma_0}} d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема. *Нехай у рівнянні (1) $\sigma_1 = 1$. Тоді, для існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$ -розв'язків необхідно, а якщо*

$$\sigma_0 I_2(t) < 0, \quad (8)$$

то і достатньо виконання умов

$$y_0^0 \alpha_0 > 0, \quad \sigma_0 y_1^0 I_2(t) < 0 \quad \text{при } t \in [a, \omega[, \quad (9)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y_0^0 |J_4(t)|^{-1} = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y_1^0 |J_4(t)|^{-1} = Y_1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{J_4(t) I_2'(t)}{J_4'(t) I_2(t)} = \sigma_0. \quad (10)$$

Крім того, для кожного такого розв'язку мають місце наступні асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$

$$\frac{1}{y'(t) \cdot (\Theta(t, y(t), y'(t)))^{\frac{1}{\sigma_0}}} = -J_4(t) |\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}} [1 + o(1)], \quad (11)$$

$$\frac{y(t)}{y'(t)} = -\frac{J_4(t)}{J_4'(t)} [1 + o(1)]. \quad (12)$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $y : [t_0, \omega[\rightarrow \mathbb{R} \in P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - розв'язком рівняння (1), для якого $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Підставляючи в (1) зображення (4) отримуємо рівність

$$y'' = \alpha_0 p(t) |\pi_\omega(t)|^\gamma |y|^{\sigma_0} |y'| \cdot \Theta(t, y, y'). \quad (13)$$

Розглянемо рівність

$$\begin{aligned} \left(\frac{y'(t)}{|y(t)|^{\sigma_0} |y'(t)| \Theta(t, y(t), y'(t))} \right)' &= \frac{y''(t)}{|y(t)|^{\sigma_0} |y'(t)| \Theta(t, y(t), y'(t))} \\ &\left(-\sigma_0 \frac{|y'(t)|^2}{y''(t) \cdot y(t)} - \frac{y'(t) \cdot \frac{\partial \Theta(t, y(t), y'(t))}{\partial v_1}}{\Theta(t, y(t), y'(t))} - \frac{(y'(t))^2}{y''(t) \cdot y(t)} \cdot \frac{y(t) \cdot \frac{\partial \Theta(t, y(t), y'(t))}{\partial v_0}}{\Theta(t, y(t), y'(t))} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{y'(t)}{\pi_\omega(t) \cdot y''(t)} \cdot \frac{\frac{\partial \Theta(t, y(t), y'(t))}{\partial t} \cdot \pi_\omega(t)}{\Theta(t, y(t), y'(t))} \right) \quad (14) \end{aligned}$$

При $t \uparrow \omega$ попередню рівність можна записати так:

$$\left(\frac{y'(t)}{|y(t)|^{\sigma_0} |y'(t)| \Theta(t, y(t), y'(t))} \right)' = \alpha_0 p(t) \text{sign} y_1^0(-\sigma_0) [1 + o(1)] \quad (15)$$

Звідси маємо

$$\frac{1}{|y(t)|^{\sigma_0} \cdot \Theta(t, y(t), y'(t))} = -\sigma_0 I_2(t) [1 + o(1)]. \quad (16)$$

Звідси випливає друга з умов (4). Перепишемо (11) у виді, при $t \uparrow \omega$

$$y(t) = (\Theta(t, y(t), y'(t)))^{-\frac{1}{\sigma_0}} |I_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma_0}} |\sigma_0|^{-\frac{1}{\sigma_0}} [1 + o(1)]. \quad (17)$$

Підставимо (12) у третю з умов (7) і отримаємо при $t \uparrow \omega$

$$(y'(t))^2 = y''(t) (\Theta(t, y(t), y'(t)))^{-\frac{1}{\sigma_0}} |I_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma_0}} |\sigma_0|^{-\frac{1}{\sigma_0}} [1 + o(1)]. \quad (18)$$

Звідси отримаємо при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y''(t)}{(y'(t))^2 \cdot (\Theta(t, y(t), y'(t)))^{\frac{1}{\sigma_0}}} = |I_2(t)|^{\frac{1}{\sigma_0}} |\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}} [1 + o(1)]. \quad (19)$$

Тоді з використанням тверджень 1 і 2 з [7] отримаємо при $t \uparrow \omega$

$$\frac{1}{y'(t) \cdot (\Theta(t, y(t), y'(t)))^{\frac{1}{\sigma_0}}} = -J_4(t) |\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}} [1 + o(1)], \quad (20)$$

тобто перше з зображень (6).

З (11) і (15) отримаємо при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y(t)}{y'(t)} = -\frac{J_4(t)}{J'_4(t)}[1 + o(1)], \quad (21)$$

звідси має місце друге з зображень (6). Крім того, з урахуванням (6) виконуються перша та друга умови з (5).

Поділивши (14) на (15) отримаємо при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{I_2(t)}{-\sigma_0 I_2(t)}[1 + o(1)].$$

Звідси, з урахуванням (16) і (7) отримаємо третю з умов (5).

Достатність. Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ та виконуються умови (3)–(5).

Покладемо

$$\begin{cases} \frac{1}{y'(t) \cdot (\Theta(t, y(t), y'(t)))^{\frac{1}{\sigma_0}}} = -J_4(t) |\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}} [1 + z_1(x)], \\ \frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{J'_4(t)}{J_4(t)} [1 + z_2(x)], \end{cases} \quad (22)$$

де

$$x = \beta \ln |J_4(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{якщо } \lim_{t \uparrow \omega} J_4(t) = +\infty, \\ -1 & \text{якщо } \lim_{t \uparrow \omega} J_4(t) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Враховуючи (5), оберемо $t_0 \in [a, \omega[$ так, щоб при $t \in [t_0, \omega[$ мала місце нерівність

$$\left| \frac{\pi_\omega(t) \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t}(t, v_0, v_1)}{\Theta(t, v_0, v_1)} \right| < \frac{1}{4}$$

Враховуючи (6), оберемо для кожного $i \in \{0, 1\}$ значення $y_i^1 \in \Delta_{Y_i}$ так, щоб

$$\left| \frac{v_i \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v_i}(t, v_0, v_1)}{\Theta(t, v_0, v_1)} \right| < \frac{1}{4} \quad (24)$$

де $v_i \in \Delta_{Y_i}^1$

$$\Delta_{Y_i}^1 = \begin{cases} [y_i^1, Y_i[, & \text{при } \Delta_{Y_i} = [y_i^0, Y_i[\\]Y_i, y_i^1], & \text{при } \Delta_{Y_i} =]Y_i, y_i^0]. \end{cases}$$

Покладемо

$$D = \left\{ (z_1, z_2) \in R^2 : |z_i| < \frac{1}{2}, i = 1, 2 \right\}.$$

Розглянемо функцію

$$F(t, y', z_1, z_2) = \frac{-1}{y'(t) \cdot \left(\Theta \left(t, \frac{-y' J_4(t)}{J_4'(t)[1+z_2]}, y' \right) \right)^{\frac{1}{\sigma_0}} J_4(t) |\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}} [1+z_1]} - 1.$$

Оскільки

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(t, y, z_1, z_2) = \frac{\left(1 - \frac{y' \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v_0} \left(t, \frac{-y' J_4(t)}{J_4'(t)[1+z_2]}, y' \right)}{\Theta \left(t, \frac{-y' J_4(t)}{J_4'(t)[1+z_2]}, y' \right)} - \frac{\frac{-y' J_4(t)}{J_4'(t)[1+z_2]} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v_1} \left(t, \frac{-y' J_4(t)}{J_4'(t)[1+z_2]}, y' \right)}{\Theta \left(t, \frac{-y' J_4(t)}{J_4'(t)[1+z_2]}, y' \right)} \right)}{\left(\Theta \left(t, y, \frac{\lambda_0 y [1+z_2]}{(\lambda_0 - 1) \pi_\omega(t)} \right) \right)^{\frac{1}{\sigma_0}} J_4(t) |\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}} [1+z_1]}$$

то за рахунок (24) на множині $\Delta = [t_0, \omega] \times \Delta_{Y_0}^1 \times \Delta_{Y_1}^1$ за теоремою про неявну функцію рівність

$$F(t, y, z_1, z_2) = 0$$

задає функцію $y = Y_0(t, z_1, z_2)$. Покладемо $Y_1(t, z_1, z_2) = \frac{\lambda_0 Y(t, z_1, z_2)[1+z_2]}{(\lambda_0 - 1) \pi_\omega(t)}$.

Тоді з (5) випливає, що для $i = 1, 2$ маємо

$$\lim_{t \rightarrow \omega} Y_i(t, z_1, z_2) = Y_i \quad \text{рівномірно по } (z_1, z_2) \in D. \quad (25)$$

За допомогою (22) зведемо на множині Δ рівняння (1) до системи

$$\begin{cases} z_1' = \beta[1+z_1] \left(G_3(t(x)) \cdot [1+z_1]^{-\sigma_0} \cdot [1+z_2]^{-\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_0} \left(K_0(x, z_1, z_2) \cdot G_4(t(x)) - \right. \right. \\ \left. \left. - K_1(x, z_1, z_2)[1+z_2] + K_2(x, z_1, z_2) \cdot G_3(t(x)) \cdot [1+z_1]^{-\sigma_0} \cdot [1+z_2]^{-\sigma_0} \right) + 1 \right); \\ z_2' = \beta[1+z_2] \left(G_3(t(x))[1+z_1]^{-\sigma_0}[1+z_2]^{-\sigma_0} + [1+z_2] \right), \end{cases} \quad (26)$$

де

$$G_3(t) = \frac{-J_4(t)I_2'(t)}{\sigma_0 J_4'(t)I_2(t)}, \quad G_4(t) = \frac{J_4(t)}{\pi_\omega(t)J_4'(t)}$$

$$K_0(x, z_1, z_2) = \frac{\pi_\omega(t(x)) \frac{\partial \Theta}{\partial t}(t(x), Y_0(t(x), z_1, z_2), Y_1(t(x), z_1, z_2))}{\Theta(t(x), Y_0(t(x), z_1, z_2), Y_1(t(x), z_1, z_2))},$$

$$K_1(x, z_1, z_2) = \frac{Y_0(t(x), z_1, z_2) \frac{\partial \Theta}{\partial v_0}(t(x), Y_0(t(x), z_1, z_2), Y_1(t(x), z_1, z_2))}{\Theta(t(x), Y_0(t(x), z_1, z_2), Y_1(t(x), z_1, z_2))},$$

$$K_2(x, z_1, z_2) = \frac{Y_1(t(x), z_1, z_2) \frac{\partial \Theta}{\partial v_1}(t(x), Y_0(t(x), z_1, z_2), Y_1(t(x), z_1, z_2)))}{\Theta(t(x), Y_0(t(x), z_1, z_2), Y_1(t(x), z_1, z_2))}.$$

В силу (5)

$$\lim_{t \uparrow \omega} G_3(t) = -1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} G_4(t) = 0. \quad (27)$$

З урахуванням (25),(5) та (6) маємо для кожного $i \in \{0, 1, 2\}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} K_i(x, z_1, z_2) = 0 \quad \text{рівномірно по } (z_1, z_2) \in D. \quad (28)$$

Перепишемо систему (26) у вигляді

$$\begin{cases} z'_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + R_1(x, z_1, z_2) + R_2(x, z_1, z_2), \\ z'_2 = A_{21}z_1 + A_{22}z_2 + R_3(x, z_1, z_2) + R_4(x, z_1, z_2), \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} A_{11}(x) &= \beta\sigma_0, & A_{12}(x) &= \beta\sigma_0, & A_{21}(x) &= -\beta\sigma_0, \\ A_{22}(x) &= \beta(-\sigma_0 + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1(x, z_1, z_2) &= \beta G_3(t(x)) + \frac{\beta}{\sigma_0} \left(K_0(x, z_1, z_2) \cdot G_4(t(x)) - \right. \\ &\quad \left. - K_1(x, z_1, z_2)[1 + z_2] + K_2(x, z_1, z_2) \cdot G_3(t(x)) \cdot [1 + z_1]^{-\sigma_0} \cdot [1 + z_2]^{-\sigma_0} \right) + \beta, \end{aligned}$$

$$R_2(x, z_1, z_2) = \beta \left(-[1 + z_1]^{-\sigma_0} [1 + z_2]^{-\sigma_0} + 1 + \sigma_0 z_1 + \sigma_0 z_2 \right),$$

$$R_3(x, z_1, z_2) = \beta [1 + z_2] \left(G_3(t(x)) + 1 \right),$$

$$R_4(x, z_1, z_2) = \beta \left(-[1 + z_1]^{-\sigma_0} [1 + z_2]^{-\sigma_0+1} + 1 + \sigma_0 z_1 - (1 - \sigma_0) z_2 + z_2^2 \right).$$

В силу (27) та (28) для $i \in \{1, 3\}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R_i(x, z_1, z_2) = 0 \quad \text{рівномірно за } z_1, z_2 : (z_1, z_2) \in D. \quad (29)$$

Крім того, маємо для $i \in \{2, 4\}$

$$\lim_{|z_1|+|z_2| \rightarrow 0} \frac{R_i(x, z_1, z_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0, \quad \text{рівномірно за } x \in [x_0, +\infty[. \quad (30)$$

Зауважимо, що характеристичне рівняння матриці

$$\begin{pmatrix} \beta\sigma_0 & \beta\sigma_0 \\ -\beta\sigma_0 & \beta(-\sigma_0 + 1) \end{pmatrix}$$

має вид

$$\mu^2 - \beta\mu + \sigma_0^2 = 0 \quad (31)$$

У цього рівняння немає коренів з нульовою дійсною частиною. Отримуємо, що у цих випадках для системи диференціальних рівнянь (26) виконано всі умови теореми з [2]. Відповідно до цієї теореми система (26) має розв'язки $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ ($x_1 \geq x_0$), які прямують до нуля при $x \rightarrow +\infty$. Цим розв'язкам у силу заміни (22), (23) відповідають розв'язки y рівняння (1), що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (6), (7).

Теорему доведено.

Висновки

Для диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями загального вигляду, що є близькими до правильно змінних, було отримано необхідні та достатні умови існування достатньо широкого класу швидкозмінних розв'язків. Крім того, знайдено асимптотичні формули для цих розв'язків та їх похідних першого порядку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.** *Regular Variation*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 494 р.
2. **Evtukhov V.M., Samoilenko A.M.** Conditions of existence of disappearing in the critical point solutions to rear nonautonomous systems of quasilinear differential equations // Ukrainian Mathematical Journal. – 2010. (пос.)

3. **Євтухов В.М.** Про один клас монотонних розв'язків нелінійного диференціального рівняння n -го порядку типу Емдена–Фаулера // Повідомл. АН Грузії. – 1992. – Т. 145, №2. – С. 269–273 (рос.)
4. **Євтухов В.М., Білозерова М.О.** Асимптотичні представлення розв'язків суттєво нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку // Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60, №3. – С. 310–331 (рос.)
5. **Євтухов В.М., Кусик Л.І.** Асимптотичні представлення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку // Дифференц. рівняння. – 2013. – Т. 49, №4. – С. 424–438 (рос.)
6. **Гержановська Г.А.** Асимптотичні представлення швидкозмінних розв'язків суттєво нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Нелінійні коливання. – 2017. – Т. 20, №3. – С. 329–345 (рос.)
7. **Marić V.** Regular variation and differential equations. *Lecture notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 2000. 128 p.

Vorobiova A. V.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF RAPIDLY-VARYING SOLUTIONS TO SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NONLINEARITIES CLOSE TO REGULARLY VARYING

Summary

For second-order differential equations with general nonlinearities that are close to regularly varying, we have for the first time obtained necessary and sufficient conditions for the existence of a sufficiently wide class of rapidly-varying solutions. This work expands upon and generalizes the classical results obtained for Emden-Fowler equations, allowing for the application of asymptotic methods to more complex models. Furthermore, we have obtained precise asymptotic formulas for these solutions and their first-order derivatives. These formulas are an important tool for analyzing the qualitative behavior of solutions depending on the properties of the equation's coefficients. The results obtained allow for the prediction of the behavior of solutions in the vicinity of a singular point, which is of great importance for applied problems in physics, chemistry, and other sciences.

Keywords: differential equations, asymptotic, rapidly-varying solutions, regularly varying nonlinearities.

REFERENCES

1. **Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.** *Regular Variation*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 494 p.
2. **Evtukhov V.M., Samoilenko A.M.** Conditions of existence of disappearing in the critical point solutions to rear nonautonomous systems of quasilinear differential equations // Ukrainian Mathematical Journal. – 2010. (In Russian)
3. **Yevtukhov V.M.** Pro odyn klas monotonnih rozv'yazkiv neliniynogo diferentsialnogo rivnyannya n -go poryadku tipu Emdena–Faulera // Povidoml. AN Gruzii. – 1992. – Vol. 145, No. 2. – P. 269–273 (In Russian)
4. **Yevtukhov V.M., Bilozerova M.O.** Asimptotychni predstavleniya rozv'yazkiv sut-tievo neliniynyh neavtonomnyh diferentsialnyh rivnyan drugogo poryadku // Ukr. mat. zhurn. – 2008. – Vol. 60, No. 3. – P. 310–331 (In Russian)
5. **Yevtukhov V.M., Kusiak L.I.** Asimptotychni predstavleniya rozv'yazkiv diferentsialnyh rivnyan drugogo poryadku // Differents. rivnyannya. – 2013. – Vol. 49, No. 4. – P. 424–438 (In Russian)

6. **Gerzhanovska G.A.** Asimptotychni predstavleniya shvydkozminnyh rozv'yazkiv suttievo neliniynyh diferentsialnyh rivnyan drugogo poryadku // Neliniyni kolivannya. – 2017. – Vol. 20, No. 3. – P. 329–345 (In Russian)
7. **Mari'c V.** Regular variation and differential equations. *Lecture notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 2000. 128 p.

УДК 517.927.2

Р. Г. Грабовська,

Л. Л. Кольцова, *ст. викладач*

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

кафедра математичного аналізу

вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна

e-mail: koltsova.liliya@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0005-1133-676X>

ПРО ПРОДОВЖУВАНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ СИНГУЛЯРНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ НА ПРОМІЖОК НАПЕРЕД ЗАДАНОЇ ДОВЖИНИ

У статті досліджуються сингулярні диференціальні системи, особливі криві та поверхні яких є прямими та площинами. Аналізується питання існування розв'язків, що продовжуються до особливої точки на заданий проміжок, та одержання їх якісних оцінок. Для дослідження використовуються геометричні методи, зокрема концепція кривих і поверхонь без контакту. Основна увага приділена способу вибору таких кривих, форма яких визначається поведінкою інтегральних траєкторій системи. Результати роботи мають значення для теорії сингулярних рівнянь і якісного аналізу динамічних систем.

MSC: 34A09, 34C05, 34C45.

Ключові слова: сингулярні диференціальні системи, особливі криві та поверхні, продовження розв'язків, якісні оцінки, геометричні методи, криві без контакту, поверхні без контакту, інтегральні траєкторії, якісний аналіз.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2\(44\).342074](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2(44).342074).

Вступ

Відомо, що сингулярні диференціальні рівняння та системи в загальному випадку не піддаються точному аналітичному розв'язанню. Однак можна ідентифікувати точки або об'єкти, у яких не виконуються умови теореми Пікара-Коші, що унеможливорює застосування класичних методів розв'язання. Вивчення поведінки розв'язків поблизу таких сингулярностей становить істотну наукову проблему, для розв'язання якої застосовуються якісні методи. Ці методи дозволяють аналізувати властивості розв'язків без необхідності їх явного знаходження, зосереджуючись на геометричній структурі диференціальних рівнянь.

Надійшла 03.08.2024

© **Грабовська Р. Г.**, Кольцова Л. Л., 2024

Серед якісних підходів особливе місце займають геометричні методи, зокрема використання кривих і поверхонь без контакту. Вибір таких кривих і поверхонь є важливим етапом дослідження, оскільки їхня форма суттєво залежить від поведінки інтегральних кривих системи та її загальної структури. Відповідний підбір цих геометричних об'єктів ускладнюється тим, що він вимагає глибокого розуміння динаміки системи, і тому часто розглядається як мистецтво.

У даній роботі досліджуються системи, особливі криві та поверхні яких є прямими та площинами. Основною метою є встановлення існування розв'язків, які можна продовжити до особливої точки на заданий проміжок, та одержання оцінок цих розв'язків. Результати роботи можуть знайти застосування в теорії сингулярних диференціальних рівнянь та якісному аналізу динамічних систем.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Нехай $A_1, A_2, \dots, A_n$ — дискретні множини з $\mathbb{R}$ (скінченні або нескінченні).

Розглядається система сингулярних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} g_k(x) q_k(y_k) y'_k = f_k(x, y_1, \dots, y_n), \\ k = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (1)$$

у якій g_k, q_k і f_k задовольняють наступним умовам:

- (а) $g_k \in C(0; \ell]$, де ℓ є меншою за мінімальну відстань від нуля до найближчого нуля функцій g_k , або до найближчої точки, у якій хоча б одна з функцій g_k визначена (якщо ж такої точки немає, то ℓ — довільно велике число); $g_k(+0) = 0$, $g_k(x) > 0$;
- (б) $q_k \in C^1(\mathbb{R} \setminus A_k)$, $q_k(y_k) > 0$; причому для будь-якого $a_{ki_k} \in A_k$ (i_k — не більше максимальної кількості елементів множини A_k): або $q_k(a_{ki_k}) = 0$, або $q_k(a_{ki_k})$ не визначено;
- (в) $f_k \in C_{x, y_1, \dots, y_n}^{0,1}(D)$, де $D = [(0; \ell] \times (\mathbb{R} \setminus A_1) \times \dots \times (\mathbb{R} \setminus A_n)]$; причому для будь-якого $a_{ki_k} \in A_k$: або $f_k(x, a_{1i_1}, \dots, a_{ni_n}) \neq 0$, або $f_k(x, a_{1i_1}, \dots, a_{ni_n})$ не визначена.

Крім того, будемо припускати, що серед первісних функцій $\varphi_k(x) = \int \frac{dx}{g_k(x)}$ існують такі, що $\lim_{x \rightarrow +0} \varphi_k(x) = 0$ (очевидно, що $\lim_{x \rightarrow +0} \varphi'_k(x) = +\infty$).

За зроблених припущень для кожної точки області D локально виконуються умови теореми Пікара–Коші. Тому через кожну точку області D проходить єдина неперервна інтегральна крива.

Зауваження 1. Вимога, що накладена на первісні $\varphi_k(x)$, значно звужує клас функцій $g_k(x)$.

Задача. Знайти достатню умову існування розв'язків системи рівнянь (1) на проміжку $(0; \ell]$, причому таких, що

$$\begin{cases} y_k(+0) = c_k, \\ k = \overline{1, n}, \end{cases}$$

де $c_k = \text{const} \notin A_k$ (тут c_k поки не визначені).

Дослідимо поведінку розв'язків системи рівнянь (1), які перетинають поверхні виду:

$$\begin{cases} y_{ki_k}(x) = c_{ki_k}(1 \pm \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)), \\ k = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (2)$$

де $c_k \notin A_k$, $x \in (0; \ell]$.

Введемо в розгляд область $G_{i_1 \dots i_n}$, обмежену поверхнями (2):

$$G_{i_1 \dots i_n} = \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \ell \\ c_{ki_k}(1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \leq y_{ki_k} \leq c_{ki_k}(1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \text{ при } c_{ki_k} > 0 \\ \text{або} \\ c_{ki_k}(1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \leq y_{ki_k} \leq c_{ki_k}(1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \text{ при } c_{ki_k} < 0 \\ k = \overline{1, n} \end{array} \right]$$

Для кожного фіксованого $x' \in (0; \ell]$ у перерізі $G_{i_1 \dots i_n}$ ($x = x'$) отримуємо деяку замкнену область, яка при $x' \rightarrow +0$ стягується в точку $P_{i_1 \dots i_n}(0; c_{1i_1}; \dots; c_{ni_n})$.

Границею області $G_{i_1 \dots i_n}$ є кусочно-гладка поверхня $\partial G_{i_1 \dots i_n} = \bigcup_{k=1}^n \partial G_{i_1 \dots i_n}^{ki_k}$,

де:

$$\partial G_{i_1 \dots i_n}^{ki_k} = \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \ell \\ y_{ki_k} = c_{ki_k} (1 \pm \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \\ c_{mi_m} (1 - \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \leq y_{mi_m} \leq c_{mi_m} (1 + \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \text{ при } c_{mi_m} > 0 \\ \text{або} \\ c_{mi_m} (1 + \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \leq y_{mi_m} \leq c_{mi_m} (1 - \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \text{ при } c_{mi_m} < 0 \\ m \neq k, m = \overline{1, n} \end{array} \right]$$

Оскільки $y_{ki_k} = a_{ki_k} \in A_k$ у просторі $\mathbb{R}^{n+1}$ задають особливі гіперплощини, то поверхні (2) не повинні з ними перетинатися.

Для цього підберемо $\lambda_{ki_k}(\ell) > 0$ настільки малими, щоб виконувались умови:

- $c_{ki_k} (1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) > a_{ki_k}$, якщо $0 \leq a_{ki_k} < c_{ki_k}$ ($c_{ki_k} (1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) > a_{ki_k}$, якщо $a_{ki_k} < c_{ki_k} < 0$);
- $c_{ki_k} (1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) < a_{ki_k}$, якщо $0 < c_{ki_k} < a_{ki_k}$ ($c_{ki_k} (1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) < a_{ki_k}$, якщо $c_{ki_k} < a_{ki_k} \leq 0$).

Оскільки $\varphi'_k(x) > 0$, то звідси випливає, що $\varphi_k(x)$ — зростаюча функція. Тоді, очевидно, $\lambda_{ki_k}(\ell) \rightarrow 0$ або при $\ell \rightarrow +\infty$, або при $\ell \rightarrow \ell_0$, де ℓ_0 — найближча до нуля особлива точка.

Розглянемо скалярний добуток вектора нормалі $\overline{N}_{i_1 \dots i_n}^{ki_k}$, спрямованого назовні відносно області $G_{i_1 \dots i_n}^{ki_k}$, на $g_k(x) q_k(y_{ki_k}) \overline{T}_{i_1 \dots i_n}^{ki_k}$, де $\overline{T}_{i_1 \dots i_n}^{ki_k}$ — вектор поля, визначений системою рівнянь (1) у тій же точці.

Тоді $\overline{N}_{i_1 \dots i_n}^{ki_k} = (\mp \lambda_{ki_k} c_{ki_k} \varphi'_k(x); 0; \dots; 0; 1_{k-\text{те}}; 0; \dots; 0)$.

Оскільки $g_k(x) q_k(y_{ki_k}) > 0$, то добуток $g_k(x) q_k(y_{ki_k}) \overline{T}_{i_1 \dots i_n}^{ki_k}$ не змінює напрямку вектора поля $\overline{T}_{i_1 \dots i_n}^{ki_k}$.

Тоді

$$\begin{aligned}
 & \left(g_k(x) q_k(y_{ki_k}) \overline{T}_{i_1 \dots i_n}^{ki_k}, \overline{N}_{i_1 \dots i_n}^{ki_k} \right) = f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{ki_k}, y_{k+1}, \dots, y_n) \mp \\
 & \mp \lambda_{ki_k} c_{ki_k} \varphi'_k(x) g_k(x) q_k(y_{ki_k}) = f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{ki_k}, y_{k+1}, \dots, y_n) \mp \\
 & \mp \lambda_{ki_k} c_{ki_k} \varphi'_k(x) \cdot \frac{q_k(y_{ki_k})}{\varphi'_k(x)} = f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{ki_k}, y_{k+1}, \dots, y_n) \mp \\
 & \mp \lambda_{ki_k} c_{ki_k} q_k(y_{ki_k}) = q_k(y_{ki_k}) \left[\mp \lambda_{ki_k} c_{ki_k} + \frac{f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{ki_k}, y_{k+1}, \dots, y_n)}{q_k(y_{ki_k})} \right] = \\
 & = q_k \left(c_{ki_k} [1 \pm \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)] \right) \left[\mp \lambda_{ki_k} c_{ki_k} + \frac{f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, c_{ki_k} [1 \pm \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)], y_{k+1}, \dots, y_n)}{q_k(c_{ki_k} [1 \pm \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)])} \right].
 \end{aligned}$$

Нехай для будь-якого $a_{ki_k} \in A_k$ існує

$$\lim_{p_{ki_k} \rightarrow a_{ki_k} + 0} \frac{f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, p_{ki_k}, y_{k+1}, \dots, y_n)}{q_k(p_{ki_k})} = 0 \quad (3)$$

$$\left(\lim_{p_{ki_k} \rightarrow a_{ki_k} - 0} \frac{f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, p_{ki_k}, y_{k+1}, \dots, y_n)}{q_k(p_{ki_k})} = 0 \right) \quad (3')$$

рівномірно відносно $x \in (0; \ell]$ і відносно $y_{si_s} \in \mathbb{R} \setminus A_s$ ($s \neq k$, $s = \overline{1, n}$). Тоді покажемо, що існує таке достатньо мале додатне число $c_{ki_k}^+(\ell)$ ($c_{ki_k}^-(\ell)$), що для будь-якого $c_k \in (a_{ki_k}; a_{ki_k} + c_{ki_k}^+]$ ($c_k \in [a_{ki_k} - c_{ki_k}^-; a_{ki_k})$) виконується умова:

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{sgn} \left[\mp \lambda_{ki_k} c_{ki_k} + \frac{f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, c_{ki_k} [1 \pm \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)], y_{k+1}, \dots, y_n)}{q_k(c_{ki_k} [1 \pm \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)])} \right] = \\
 & = \operatorname{sgn}[\mp \lambda_{ki_k} c_{ki_k}];
 \end{aligned} \quad (4)$$

причому, коли ℓ зростає в області допустимих значень, то $c_{ki_k}^+(\ell) \rightarrow 0$, $c_{ki_k}^-(\ell) \rightarrow 0$.

Геометрично це означає, що поверхні (2) на проміжку $(0; \ell]$ складаються з точок строгого виходу з області $G_{i_1 \dots i_n}$ при зменшенні x .

Скористаємося топологічним принципом Важевського [1].

Тут:

$$\Omega = G_{i_1 \dots i_n} = \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \ell \\ c_{ki_k}(1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \leq y_{ki_k} \leq c_{ki_k}(1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \text{ при } c_{ki_k} > 0 \\ \text{або} \\ c_{ki_k}(1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \leq y_{ki_k} \leq c_{ki_k}(1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \text{ при } c_{ki_k} < 0 \\ k = \overline{1, n} \end{array} \right]$$

$$S = \Omega \cap (x = \ell) = \left[\begin{array}{l} x = \ell \\ c_{ki_k}(1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \leq y_{ki_k} \leq c_{ki_k}(1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \text{ при } c_{ki_k} > 0 \\ \text{або} \\ c_{ki_k}(1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \leq y_{ki_k} \leq c_{ki_k}(1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \text{ при } c_{ki_k} < 0 \\ k = \overline{1, n} \end{array} \right]$$

$$\Omega_{se} = \partial\Omega =$$

$$= \bigcup_{k=1}^n \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \ell \\ y_{ki_k} = c_{ki_k}(1 \pm \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \\ c_{mi_m}(1 - \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \leq y_{mi_m} \leq c_{mi_m}(1 + \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \text{ при } c_{mi_m} > 0 \\ \text{або} \\ c_{mi_m}(1 + \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \leq y_{mi_m} \leq c_{mi_m}(1 - \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \text{ при } c_{mi_m} < 0 \\ m \neq k, m = \overline{1, n} \end{array} \right]$$

Тоді

$$S \cap \Omega_{se} =$$

$$= \bigcup_{k=1}^n \left[\begin{array}{l} x = \ell \\ y_{ki_k} = c_{ki_k}(1 \pm \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \\ c_{mi_m}(1 - \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \leq y_{mi_m} \leq c_{mi_m}(1 + \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \text{ при } c_{mi_m} > 0 \\ \text{або} \\ c_{mi_m}(1 + \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \leq y_{mi_m} \leq c_{mi_m}(1 - \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \text{ при } c_{mi_m} < 0 \\ m \neq k, m = \overline{1, n} \end{array} \right]$$

Перевіряємо виконання умов принципу Важевського.

1) Спочатку покажемо, що існує неперервне відображення Ω_{se} на $S \cap \Omega_{se}$.

Для цього розглянемо довільну точку $P'(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in \Omega_{se}$. Тоді існує таке $k \in \overline{1, n}$, що

$$\begin{cases} 0 < \bar{x} < \ell, \\ \bar{y}_{ki_k} = c_{ki_k} \left(1 + \theta_k \lambda_{ki_k} \varphi_k(\bar{x}) \right), & |\theta_k| = 1, \theta_k = const, \\ \bar{y}_{mi_m} = c_{mi_m} \left(1 + \eta_m \lambda_{mi_m} \varphi_m(\bar{x}) \right), & |\eta_m| \leq 1, \eta_m = const, \\ m \neq k, m = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Розглянемо наступне неперервне перетворення:

$$\begin{cases} \bar{x} \leq x < \ell, \\ y_{ki_k} = c_{ki_k} \left(1 + \theta_k \lambda_{ki_k} \varphi_k(x) \right), & |\theta_k| = 1, \theta_k = const, \\ y_{mi_m} = c_{mi_m} \left(1 + \eta_m \lambda_{mi_m} \varphi_m(x) \right), & |\eta_m| \leq 1, \eta_m = const, \\ m \neq k, m = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Спрямовуючи $x \rightarrow \ell - 0$, отримуємо, що точка P' , залишаючись на Ω_{se} , неперервно відобразиться в точку

$$P''(\ell; c_{1i_1}(1 + \eta_1 \lambda_{1i_1} \varphi_1(\ell)); \dots; c_{ki_k}(1 + \theta_k \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)); \dots; c_{ni_n}(1 + \eta_n \lambda_{ni_n} \varphi_n(\ell))),$$

яка належить $S \cap \Omega_{se}$. Отже, в силу неперервності функцій $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1, n}$, існує неперервне відображення Ω_{se} на $S \cap \Omega_{se}$.

2) З топології відомо, що область, гомеоморфну замкненій кулі, не можна неперервно відобразити на свою границю, залишаючи її нерухомою.

У нашому випадку замкнена область S — n -вимірний замкнений «паралелепіпед», тобто область, гомеоморфна замкненій кулі. Тому S не можна неперервно відобразити на свою границю, якою є $S \cap \Omega_{se}$, зберігаючи її нерухомою.

Таким чином, всі умови із принципу Важевського виконуються. Тому існує принаймні одна точка $s \in S$ така, що відповідна їй інтегральна крива при зменшенні x продовжується на проміжку $(0; \ell]$ і залишається всередині області $G_{i_1 \dots i_n}$. Тобто існує принаймні один неперервний розв'язок системи

рівнянь (1), який на проміжку $(0; \ell]$ задовольняє нерівностям:

$$\begin{cases} \vee c_k(1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \leq y_k \leq c_k(1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) & (\text{при } c_{ki_k} > 0), \\ \vee c_k(1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \leq y_k \leq c_k(1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) & (\text{при } c_{ki_k} < 0), \\ y_k(+0) = c_k, \\ k = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (5)$$

Таким чином, на основі отриманих результатів сформулюємо теорему.

Теорема. Нехай у системі рівнянь (1) функції $f_k(x, y_1, \dots, y_n)$, де $k = \overline{1, n}$, задовольняють умову (3) ((3')). Тоді існують такі достатньо малі додатні числа $c_{ki_k}^+(\ell)$ ($c_{ki_k}^-(\ell)$), що для будь-яких $c_k \in (a_{ki_k}; a_{ki_k} + c_{ki_k}^+]$ ($c_k \in [a_{ki_k} - c_{ki_k}^-; a_{ki_k})$) існує хоча б один розв'язок системи рівнянь (1), який на $(0; \ell]$ задовольняє нерівностям (5).

Зауваження 2. Припустимо, що для множини A_k значення $y_k = +\infty$ ($y_k = -\infty$) не є граничним. Крім того, припустимо, що для елементів множин A_j ($j \neq k, j = \overline{1, n}$) виконано граничне співвідношення (3) ((3')). Тоді існує таке число $m_{i_k}^+ > \max a_{ki_k}$ ($m_{i_k}^- < \min a_{ki_k}$), що в смугі $m_{i_k}^+ \leq y_k < +\infty$ ($-\infty < y_k \leq m_{i_k}^-$) немає елементів з A_k .

Якщо

$$\lim_{p_{ki_k} \rightarrow +\infty} \frac{f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, p_{ki_k}, y_{k+1}, \dots, y_n)}{q_k(p_{ki_k})} = 0 \quad (6)$$

$$\left(\lim_{p_{ki_k} \rightarrow -\infty} \frac{f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, p_{ki_k}, y_{k+1}, \dots, y_n)}{q_k(p_{ki_k})} = 0 \right) \quad (6')$$

рівномірно відносно $x \in (0; \ell]$ і відносно $y_{si_s} \in \mathbb{R} \setminus A_s$ ($s \neq k, s = \overline{1, n}$), то існують такі достатньо великі за модулем додатні числа $c_{ki_k}^{+\infty}(\ell)$ (від'ємні числа $c_{ki_k}^{-\infty}(\ell)$), що для будь-яких $c_k \in [c_{ki_k}^{+\infty}; +\infty)$ ($c_k \in (-\infty; c_{ki_k}^{-\infty}]$) виконується умова (4).

Не виключено, що для деяких (або всіх) множин A_j значення $y_j = +\infty$ ($y_j = -\infty$) також не є граничним.

Тоді всередині області $G_{i_1 \dots i_n}$ інтегральні криві продовжувані на $(0; \ell]$ і перетинають гіперплощину $x = 0$ у точці $P(0; c_1; \dots; c_n)$.

Зауваження 3. Якщо множини A_k , $k = \overline{1, n}$, містять більше ніж один елемент і граничні співвідношення або (3) ((3')), або (6) ((6')) справедливі, тоді всередині області, де

$$\begin{aligned} c_{ki_k}(1 + \lambda_{ki_k}\varphi_k(x)) &< y_k < c_{ki_{k+1}}(1 - \lambda_{ki_{k+1}}\varphi_{k+1}(x)), \quad 0 < c_{ki_k} < c_{(k+1)i_{k+1}} \\ (c_{ki_k}(1 - \lambda_{ki_k}\varphi_k(x)) &< y_k < c_{ki_{k+1}}(1 + \lambda_{ki_{k+1}}\varphi_{k+1}(x)), \quad c_{ki_k} < c_{(k+1)i_{k+1}} < 0), \\ k &= \overline{1, n}, \end{aligned}$$

будь-який розв'язок буде визначений на проміжку $(0; \ell]$, але існування граничних цього розв'язку при $x \rightarrow +0$ стверджувати не можна.

Зауваження 4. Якщо множини $A_k = \{-\infty; +\infty\}$, $k = \overline{1, n}$, і граничні співвідношення (6) ((6')) справедливі, то інтегральні криві, що проходять через будь-яку точку області, де $x \in (0; \ell]$, $y_k \in \mathbb{R}$, продовжувані на $(0; \ell]$, причому деякі з них мають скінченну границю при $x \rightarrow +0$, інші ж, взагалі кажучи, можуть її і не мати.

Приклад.

$$\begin{cases} x \ln^2 \frac{1}{x} \cdot y_1^4 \cdot y_1' = \sin^6 y_1 (2 + \sin y_2) + e^{-\frac{1}{y_1^2}}, \\ x^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \sin^2 y_2 \cdot y_2' = e^{-\frac{1}{\sin^4 y_2}} (4 + \operatorname{arctg} y_1). \end{cases}$$

Тут $x = 0$, $x = 1$ — сусідні особливі точки.

$$q_1(y_1) = y_1^4, \quad A_1 = \{-\infty; 0; +\infty\};$$

$$q_2(y_2) = \sin^2 y_2, \quad A_2 = \{\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Досліджується продовжуваність по x розв'язків цієї системи рівнянь на проміжок $(0; 1 - \delta]$, де δ — додатне як завгодно мале число.

Звідси:

$$\varphi_1(x) = \int \frac{dx}{x \ln^2 \frac{1}{x}} = \frac{1}{\ln \frac{1}{x}}, \quad \varphi_2(x) = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{x^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

$$G_{i_1 i_2} = \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq 1 - \delta \\ c_{1i_1} \left(1 \mp \frac{\lambda_{1i_1}}{\ln \frac{1}{x}} \right) \leq y_{ki_k} \leq c_{1i_1} \left(1 \pm \frac{\lambda_{1i_1}}{\ln \frac{1}{x}} \right), \\ c_{2i_2} \left(1 \mp \frac{\lambda_{2i_2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot x^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) \leq y_{2i_2} \leq c_{2i_2} \left(1 \pm \frac{\lambda_{2i_2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot x^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) \end{array} \right],$$

де i_1, i_2 — фіксовані.

У результаті маємо, що яким би малим не було $\delta > 0$, усі точки на границі області $G_{i_1 i_2}$ з відповідними константами

$$\begin{aligned} c_1 &\in (-\infty; -c_{1(-\infty)}^-) \cup [-c_{10}^-; 0) \cup (0; c_{10}^+] \cup (c_{1(+\infty)}^+; +\infty), \\ c_2 &\in \left(\bigcup_{k \geq 0, k \in \mathbb{Z}} \left((\pi k; \pi k + c_{2k}^+] \cup [\pi(k+1) - c_{2k}^-; \pi(k+1)) \right) \right) \cup \\ &\cup \left(\bigcup_{k < 0, k \in \mathbb{Z}} \left((\pi(k+1); \pi(k+1) + c_{2k}^+] \cup [\pi k - c_{2k}^-; \pi k) \right) \right), \end{aligned}$$

є точками строгого виходу при зростанні x . Отже, всередині області $G_{i_1 i_2}$ лежить хоча б одна інтегральна крива, продовжувана на проміжок $(0; 1-\delta]$ і спрямована в точку $P_{i_1 i_2}(0; c_1; c_2)$.

Інтегральні криві, що проходять між областями $G_{0 \pm i_2^+}$ і $G_{\pm \infty i_2^-}$, продовжувані на $(0; 1-\delta]$, але існування границі цих розв'язків при $x \rightarrow +0$ стверджувати не можна.

Висновки

У роботі досліджено сингулярні диференціальні системи з особливими кривими та поверхнями у вигляді прямих і площин. Отримано критерії існування розв'язків, які можна продовжити до особливої точки на заданий проміжок, та доведено їх якісні оцінки. Запропоновано геометричний підхід на основі методу кривих і поверхонь без контакту, який дозволяє аналізувати поведінку інтегральних траєкторій без явного розв'язання системи.

Результати роботи мають теоретичне значення для розвитку теорії сингулярних диференціальних рівнянь і можуть бути застосовані в якісному аналізі динамічних систем. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на узагальнення методу для нелінійних особливих поверхонь та розширення класу аналізованих систем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Hartman P.** Hartman P. Ordinary Differential Equations / P. Hartman. – Baltimore: Johns Hopkins Press, 1964. – P. 278-280.

Grabovska R. G., *Koltsova L. L.*

ON THE CONTINUABILITY OF SOLUTIONS OF A SYSTEM OF FIRST-ORDER SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATIONS TO AN INTERVAL OF PREDETERMINED LENGTH

Summary

The article investigates singular differential systems whose special curves and surfaces are straight lines and planes. The question of the existence of solutions that can be extended to a singular point over a given interval and obtaining their qualitative estimates is analyzed. The study employs geometric methods, particularly the concept of contactless curves and surfaces. The main focus is on the method of selecting such curves, whose shape is determined by the behavior of the system's integral trajectories. The results of the work are significant for the theory of singular equations and the qualitative analysis of dynamical systems.

Keywords: singular differential systems, special curves and surfaces, extension of solutions, qualitative estimates, geometric methods, contactless curves, contactless surfaces, integral trajectories, qualitative analysis.

REFERENCES

1. **Hartman P.** Hartman P. Ordinary Differential Equations / P. Hartman. – Baltimore: Johns Hopkins Press, 1964. – P. 278-280.

УДК 517.764

В. М. Євтухов, доктор фіз.-мат. наук, професор
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
e-mail: evtukhov@onu.edu.ua
ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0000-2458-7887>

АРЕАЛЬНА НЕСКІНЧЕННО МАЛА ДЕФОРМАЦІЯ ПОВЕРХНІ ГАУДІ

Дана стаття присвячена дослідженню нескінченно малих ареальних деформацій поверхні Гауді. Ці поверхні, які були названі на честь відомого каталонського архітектора Антоніо Гауді, використовуються в архітектурі як покрівельні конструкції, елементи декорування тощо. Раніше Velimirovic L. S., Svetkovic M. D. та інші досліджували нескінченно малі згинання поверхні Гауді. У цій статті доведено, що поверхня Гауді допускає довільну ареальну нескінченно малу деформацію, яка описується через дві довільні неперервно диференційовні функції, і наведено явний вираз вектора зміщення у декартових координатах. Окремо розглянуто випадок тангенціальної ареальної деформації з отриманням відповідного вектора зміщення. Крім того, доведено існування дійсної ортогональної сітки ліній стаціонарної довжини на поверхні Гауді та виведено диференціальне рівняння для її побудови.

MSC: 57R30.

Ключові слова: рімановий простір, метричний тензор, об'єкт афінної зв'язності, нескінченно мала деформація, кривина, диференціальні рівняння.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2\(44\).342075](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2(44).342075).

Вступ

З безлічі різних математичних поверхонь виділяють лінійчаті поверхні, які називають поверхнями Гауді. Свою назву вони отримали на честь відомого каталонського архітектора Антоніо Гауді, який використовував схожі форми у своїх проектах. Зараз вони також є популярними як елементи архітектури та покрівельних конструкцій.

Раніше у статтях Velimirovic L.S. та інших авторів [1; 2] були досліджені нескінченно малі згинання поверхні Гауді.

Дана робота присвячена дослідженню ареальних нескінченно малих деформацій поверхонь Гауді. Також в статті досліджується існування сітки ліній стаціонарної довжини при ареальних нескінченно малих деформаціях.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОВЕРХНІ ГАУДІ

Поверхні Гауді описуються рівнянням:

$$z = mx \sin \frac{y}{a},$$

де m, a — деякі параметри. Оскільки при $x = 0$ та $y = \pi a n$, $n \in \mathbb{Z}$, поверхня Гауді вироджується, то будемо розглядати це рівняння за умови $x \neq 0$ та $y \neq \pi a n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Параметризуємо рівняння поверхні Гауді і запишемо його у векторному вигляді:

$$\bar{r} = \left(x, y, mx \sin \frac{y}{a} \right).$$

Наведемо інформацію про диференціально-геометричні характеристики поверхні Гауді [1].

Перша квадратична форма поверхні Гауді має вигляд:

$$I(dx, dy) = dr^2 = \left(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} \right) dx^2 + \left(\frac{m^2 x}{a} \sin \frac{2y}{a} \right) dx dy + \left(1 + \frac{m^2 x^2}{a^2} \cos^2 \frac{y}{a} \right) dy^2.$$

Визначник матриці, яка складена з коефіцієнтів першої квадратичної форми, дорівнює:

$$g = 1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + \frac{m^2 x^2}{a^2} \cos^2 \frac{y}{a}.$$

Друга квадратична форма даної поверхні має вигляд:

$$II(dx, dy) = d^2 \bar{r} \cdot \bar{n} = \frac{2m}{a\sqrt{g}} \cos \frac{y}{a} dx dy - \frac{mx}{a^2\sqrt{g}} \sin \frac{y}{a} dy^2.$$

Гаусова кривина поверхні Гауді:

$$K = -\frac{m^2}{a^2 g^2} \cos^2 \frac{y}{a},$$

очевидно, не додатна при будь-якому значенні параметрів m і a . Це означає, що поверхня Гауді є поверхнею гіперболічного типу.

Вираз для середньої кривини:

$$H = -\frac{mx \sin \frac{y}{a}}{2a^2 g \sqrt{g}} \left(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a} \right).$$

З точки зору ріманової геометрії поверхня Гауді є двовимірним рімановим простором V_2 , метричний тензор якого має компоненти:

$$g_{11} = 1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a}; \quad g_{12} = \frac{m^2 x}{2a} \sin \frac{2y}{a}; \quad g_{22} = 1 + \frac{m^2 x^2}{a^2} \cos^2 \frac{y}{a}.$$

Тоді об'єкт афінної зв'язності Γ_{ij}^h на V_2 задається символами Крістофеля другого роду. В нашому випадку вони мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0; & \Gamma_{11}^2 &= 0; \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{m^2}{ag} \sin \frac{y}{a} \cos \frac{y}{a}; & \Gamma_{12}^2 &= \frac{m^2 x}{a^2 g} \cos^2 \frac{y}{a}; \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{m^2 x}{a^2 g} \sin^2 \frac{y}{a}; & \Gamma_{22}^2 &= -\frac{m^2 x^2}{a^3 g} \sin \frac{y}{a} \cos \frac{y}{a}. \end{aligned}$$

2. ПОНЯТТЯ АРЕАЛЬНОЇ НЕСКІНЧЕННО МАЛОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ПОВЕРХНІ

1°. Спочатку розглянемо поняття про нескінченно малу деформацію поверхні. Нехай S — поверхня, гомеоморфна деякій області G площини xOy :

$$S : \bar{r} = \bar{r}(x, y), \quad \bar{r} \in C^3. \quad (1)$$

Припустимо, що починаючи з деякого моменту, під впливом яких-небудь причин із плином часу вона змінює свою форму. Нехай множина всіх поверхонь S^* , які отримані таким чином, описується рівнянням

$$\bar{r}^* = \bar{r}^*(x, y, t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Поверхню S^* , яку отримують в будь-який момент часу t описаного вище процесу, називають *нескінченно малою деформацією* поверхні S [3].

Якщо в кожній точці (x, y) має місце розклад:

$$\bar{r}^*(x, y, t) = \bar{r}(x, y) + t\bar{u}^{(1)}(x, y) + t^2\bar{u}^{(2)}(x, y) + \dots + t^n\bar{u}^{(n)}(x, y) + \dots,$$

то деформацію називають *аналітичною*, а функції $\bar{u}^{(1)}(x, y)$, $\bar{u}^{(2)}(x, y), \dots$ — *полями зміщення* відповідно першого, другого і т. д. порядків [3].

Нескінченно малою деформацією першого порядку поверхні S називається деформація вигляду

$$\bar{r}^*(x, y, t) = \bar{r}(x, y) + t\bar{u}(x, y), \quad (2)$$

де $t \in [0, 1]$, $\bar{r}^*(x, y, 0) = \bar{r}(x, y)$, властивості якої розглядаються з точністю нескінченно малих першого порядку відносно параметру деформації $t \rightarrow 0$ [3]. При цьому малими величинами t^2 і більш високого порядку нехтуємо.

Векторну функцію $\bar{u}(x, y)$ називають *полем зміщення* нескінченно малої деформації першого порядку [3].

2°. Припустимо, що $R(x, y)$ і $R^*(x, y, t)$ — деяка геометрична величина поверхонь S і S^* відповідно. Нехай, що R^* можна представити так:

$$R^*(x, y, t) = R(x, y) + t\delta R(x, y) + o(t^2).$$

Величину $\delta R(x, y)$ називають *першою варіацією* геометричної величини $R(x, y)$ при нескінченно малій деформації поверхні S [4].

Геометрична величина $R(x, y)$ поверхні S називається *стаціонарною* при нескінченно малій деформації (або *такою, що зберігається*), якщо з точністю до нескінченно малих другого порядку вона збігається з геометричною величиною $R^*(x, y, t)$ поверхні S^* :

$$R^*(x, y, t) = R(x, y) + o(t^2).$$

Тобто, якщо $R(x, y)$ — стаціонарна геометрична величина, то

$$\delta R(x, y) = 0.$$

Нескінченно мала деформація поверхні на кожен геометричну величину цієї поверхні впливає так, що ця величина змінюється однозначно за деякими формулами (законами). Змінювання цієї величини характеризує її варіація. При нескінченно малій деформації варіація геометричної величини визначається однозначно.

3°. Нехай $g_{ij} = \bar{r}_i \bar{r}_j$ — метричний тензор поверхні S , а $g_{ij}^* = \bar{r}_i^* \bar{r}_j^*$ — метричний тензор zdeформованої поверхні S^* . Знайдемо вираз метричного

тензору g_{ij}^* zdeформованої поверхні через похідні радіус-вектора $\bar{r}_i$ і $\bar{r}_j$ недеформованої поверхні:

$$g_{ij}^* = \bar{r}_i \bar{r}_j + t(\bar{r}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i \bar{r}_j) + t^2 \bar{u}_i \bar{u}_j.$$

Тобто

$$g_{ij}^* = g_{ij} + t \delta g_{ij} + o(t^2). \quad (3)$$

Позначимо варіацію метричного тензору через

$$2\epsilon_{ij} = \delta g_{ij} = \bar{r}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i \bar{r}_j. \quad (4)$$

Тензор ϵ_{ij} називають *першим тензором деформації поверхні*.

Розкладемо векторне поле по базису $(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{n})$:

$$\bar{u} = u^\alpha \bar{r}_\alpha + u^o \bar{n}, \quad (5)$$

де $\alpha = 1, 2$. Продиференціюємо коваріантно по x^i :

$$\bar{u}_i = u_{,i}^\alpha \bar{r}_\alpha + u^\alpha \bar{r}_{\alpha,i} + u_{,i}^o \bar{n} + u^o \bar{n}_i.$$

Відповідно до дериваційних формул теорії поверхонь ($\bar{r}_{i,j} = b_{ij} \bar{n}$, $\bar{n}_i = -b_i^\alpha \bar{r}_\alpha$):

$$\bar{u}_i = (u_{,i}^\alpha - u^o b_i^\alpha) \bar{r}_\alpha + (u^\alpha b_{ij} + u_{,i}^o) \bar{n}.$$

Тепер знайдену коваріантну похідну підставимо до (3) та спростимо отриманий вираз, використовуючи властивість вектора нормалі:

$$2\epsilon_{ij} = (u_{,i}^\alpha - u^o b_i^\alpha) g_{\alpha j} + (u_{,j}^\alpha - u^o b_j^\alpha) g_{\alpha i} = u_{i,j} + u_{j,i} - 2u^o b_{ij}. \quad (6)$$

Отже, ми знайшли варіацію метричного тензора.

4°. Тепер знайдемо варіацію елемента площі. Відомо, що елемент площі поверхні S можна визначити за формулою:

$$d\sigma = \sqrt{g} dx^1 dx^2,$$

де $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ — визначник матриці метричних тензорів поверхні S . Тут і далі $x^1 = x$, $x^2 = y$. Тоді елемент площі поверхні S^* визначається так: $d\sigma^* = \sqrt{g^*} dx^1 dx^2$.

Знайдемо варіації дискримінанта першої квадратичної форми поверхні S при загальній нескінченно малій деформації:

$$g^* = g_{11}^* g_{22}^* - g_{12}^{*2} = g + 2t(\epsilon_{22}g_{11} + \epsilon_{11}g_{22}) - 4\epsilon_{12}g_{12}t + o(t^2).$$

Запишемо даний вираз дискримінанта через елементи оберненої до (g_{ij}) матриці:

$$g^* = g + 2gt(\epsilon_{11}g^{11} + \epsilon_{22}g^{22} + 2\epsilon_{12}g^{12}) + o(t^2) = g + 2gg^{ij}\epsilon_{ij}t + o(t^2).$$

Тоді варіація дискримінанта першої квадратичної форми поверхні S виразиться так:

$$\delta g = 2gg^{ij}\epsilon_{ij}.$$

Знайдемо $\sqrt{g^*}$:

$$\sqrt{g^*} = \sqrt{g} + t \cdot \left. \frac{\partial \sqrt{g^*}}{\partial t} \right|_{t=0} + o(t^2) = \sqrt{g} + t\sqrt{g}g^{ij}\epsilon_{ij} + o(t^2).$$

Звідси, варіація кореня з дискримінанта першої квадратичної форми має вигляд:

$$\delta \sqrt{g} = \sqrt{g}g^{ij}\epsilon_{ij}.$$

Нарешті можемо виписати вираз елемента площі поверхні S^* :

$$d\sigma^* = \sqrt{g}dx^1dx^2 + t\sqrt{g}g^{ij}\epsilon_{ij}dx^1dx^2 + o(t^2).$$

Тобто:

$$d\sigma^* = d\sigma + tg^{ij}\epsilon_{ij}d\sigma + o(t^2). \quad (7)$$

А варіація елемента площі виразиться так:

$$\delta d\sigma = g^{ij}\epsilon_{ij}d\sigma. \quad (8)$$

5°. Наведемо основні означення, що стосуються ареальної нескінченно малої деформації, з робіт [5; 6].

Знову розглянемо розклад (5) вектора зміщення через базисні вектори $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ і $\bar{n}$.

Нескінченно малу деформацію першого порядку (2), при якій зберігається елемент площі поверхні S з точністю до нескінченно малих величин другого порядку відносно параметра деформації, називають *ареальною* (*A-деформацією*).

З формули (6) можна отримати умову ареальної нескінченно малої деформації.

Теорема 1. Для того, щоб нескінченно мала деформація вигляду (2) була ареальною, необхідно і достатньо, щоб задовольнялася умова:

$$u_{,\alpha}^\alpha - 2Hu^o = 0, \quad (9)$$

де u^1, u^2, u^o — це компоненти вектора зміщення, $u_{,\alpha}^\alpha$ — коваріантна похідна u^α , H — середня кривина поверхні S .

Перепишемо рівняння (9):

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha u^\beta - 2Hu^o = 0.$$

Виразимо з отриманого рівняння u^o при умові, що $H \neq 0$:

$$u^o = \frac{1}{2H} \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha u^\beta \right).$$

Підставляємо цей вираз у (5):

$$\bar{u} = u^1 \bar{r}_1 + u^2 \bar{r}_2 + \frac{\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha u^\beta}{2H} \bar{n}. \quad (10)$$

Отриманий вираз являє собою вектор зміщення ареальної нескінченно малої деформації довільної поверхні класу C^3 за умови $H \neq 0$.

3. ІСНУВАННЯ АРЕАЛЬНОЇ НЕСКІНЧЕННО МАЛОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ПОВЕРХНІ ГАУДІ

Далі визначимо вектор зміщення при довільній ареальній нескінченно малій деформації поверхні Гауді.

Зауважимо, що диференціальне рівняння (9) для поверхні Гауді у загальному випадку є дуже громіздким. Тому представимо кінцевий вираз для вектора зміщення (10) ареальної нескінченно малої деформації поверхні Гауді:

$$\begin{aligned} \bar{u} = & u^1 \left(1, 0, m \sin \frac{y}{a} \right) + u^2 \left(0, 1, \frac{mx}{a} \cos \frac{y}{a} \right) + \\ & + \frac{\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y} + u^1 \cdot \frac{m^2 x}{a^2 g} \cos^2 \frac{y}{a} + u^2 \cdot \frac{m^2}{ag} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \sin \frac{y}{a} \cos \frac{y}{a}}{2 \left(-\frac{mx \sin \frac{y}{a}}{2a^2 g \sqrt{g}} \left(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a} \right) \right)} \cdot \\ & \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \left(-m \sin \frac{y}{a}, -\frac{mx}{a} \cos \frac{y}{a}, 1 \right). \end{aligned}$$

Позначимо координати вектора зміщення так: $\bar{u} = (A, B, C)$, та випишемо кожну координату отриманого вектора окремо в прямокутній декартовій системі координат:

I координата:

$$\begin{aligned} A = & u^1 \cdot \frac{1 + m^2 + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a}}{1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a}} + \\ & + u^2 \cdot \frac{m^2(a^2 - x^2)}{ax(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a})} \sin \frac{y}{a} \cos \frac{y}{a} + \\ & + \left(\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) \cdot \frac{a^2 g}{x(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a})}; \end{aligned} \quad (11)$$

II координата:

$$\begin{aligned} B = & u^1 \cdot \frac{m^2 x \cos^3 \frac{y}{a}}{a(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a}) \sin \frac{y}{a}} + \\ & + u^2 \cdot \left(1 + \frac{m^2(a^2 - x^2) \cos^2 \frac{y}{a}}{a^3(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a})} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) \cdot \frac{ag \operatorname{ctg} \frac{y}{a}}{1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a}}; \end{aligned} \quad (12)$$

III координата:

$$\begin{aligned} C = & u^1 \cdot \left(m \sin \frac{y}{a} - \frac{m \cos^2 \frac{y}{a}}{\sin \frac{y}{a} (1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a})} \right) + \\ & + u^2 \cdot \left(\frac{mx}{a} \cos \frac{y}{a} - \frac{m(a^2 - x^2) \cos \frac{y}{a}}{ax(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a})} \right) - \\ & - \left(\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) \cdot \frac{a^2 g}{mx(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a}) \sin \frac{y}{a}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким чином, нами доведена

Теорема 2. *Поверхня Гауді допускає довільну ареальну нескінченно малу деформацію, яка виражається через дві довільні функції u^1 і u^2 класу C^1 . При цьому прямокутні декартові координати вектора зміщення $\bar{u}$ мають вигляд (11), (12), (13).*

Доведемо ще одну теорему, яка має місце для поверхні Гауді.

Теорема 3. Поверхня Гауді допускає тангенціальну ареальну нескінченно малу деформацію, при якій прямокутні декартові координати вектора зміщення виражаються через одну довільну функцію двох змінних класу C^2 і мають вигляд:

$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot m \sin \frac{y}{a} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{mx}{a} \cos \frac{y}{a} \right).$$

Доведення. Припустимо, що $u^o = 0$, тоді вектор зміщення представляється так: $\bar{u} = u^1 \bar{r}_1 + u^2 \bar{r}_2$. Отже, ареальна нескінченно мала деформація буде тангенціальною і умова (9) набуває вигляду $u_{,\alpha}^\alpha = 0$. Розгорнемо цю умову (тут: $x = x^1, y = x^2$):

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha u^\beta = 0. \quad (14)$$

Підставимо в цю рівність значення символів Крістофеля. Таким чином, рівняння ареальної нескінченно малої деформації поверхні Гауді при $u^o = 0$ набуває вигляду:

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{m^2 x^1}{a^2 g} \cos^2 \frac{x^2}{a} u^1 + \frac{m^2}{ag} \left(1 - \frac{x^{12}}{a^2} \right) \sin \frac{x^2}{a} \cos \frac{x^2}{a} u^2 = 0.$$

Тепер повернемося до рівності (14) і, використовуючи формули Фосса-Вейля, матимемо:

$$\frac{\partial(\sqrt{g}u^\beta)}{\partial x^\beta} = 0, \quad (15)$$

де $\beta = 1, 2$. Покладемо $\psi_1 = -\sqrt{g}u^2$, $\psi_2 = \sqrt{g}u^1$, де ψ_i — деякий коваріантний вектор. Підставивши ці вирази у (15), отримаємо:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x^1} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x^2}.$$

Тоді ψ_i — градієнтний коваріантний вектор, тобто існує функція $\psi(x^1, x^2) \in C^2$ така, що $\frac{\partial \psi}{\partial x^1} = \psi_1$, $\frac{\partial \psi}{\partial x^2} = \psi_2$, через похідні якої виражається контрваріантний вектор u^i , де $i = 1, 2$:

$$u^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x^2}, \quad u^2 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x^1}. \quad (16)$$

Отже, для поверхні Гауді вектор зміщення ареальної нескінченно малої деформації буде мати такий вигляд:

$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot m \sin \frac{y}{a} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{mx}{a} \cos \frac{y}{a} \right). \quad (17)$$

В цій формулі прямокутні декартові координати вектора зміщення для поверхонь Гауді виражені через одну довільну функцію $\psi(x, y) \in C^2$. Це означає, що поверхні Гауді допускають тангенціальні ареальні нескінченно малі деформації.

4. СІТКА ЛІНІЙ СТАЦІОНАРНОЇ ДОВЖИНИ ПРИ А-ДЕФОРМАЦІЇ ПОВЕРХНІ ГАУДІ

Довжина лінії на поверхні визначається з формули для лінійного елемента поверхні S , яка є першою квадратичною формою поверхні:

$$ds^2 = I(dx, dy) = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Для поверхні S^* , відповідно, матимемо:

$$ds^{*2} = g_{\alpha\beta}^* dx^\alpha dx^\beta. \quad (18)$$

Перетворимо (18) за допомогою формули (3) для метричного тензора поверхні S^* :

$$ds^{*2} = ds^2 + 2t\epsilon_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + o(t^2).$$

Отриманий вираз лінійного елемента поверхні S^* можна переписати, використовуючи його варіацію (варіацію першої квадратичної форми) — $\delta I = 2\epsilon_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$:

$$I^* = I + t\delta I + o(t^2).$$

Очевидно, що при А-деформації поверхні в загальному вигляді лінійний елемент змінюється та залежить від точки і напрямку на поверхні. Розглянемо випадок, коли лінійний елемент залишається незмінним, при цьому варіація буде дорівнювати 0. Тоді:

$$\delta I = \epsilon_{11} dx^{12} + 2\epsilon_{12} dx^1 dx^2 + \epsilon_{22} dx^{22} = 0. \quad (19)$$

Отримали диференціальне рівняння, з якого можна знайти рівняння тих кривих, які складають сітку на поверхні, уздовж яких перша квадратична форма залишається стаціонарною при ареальній нескінченно малій деформації з точністю до величин другого порядку і вище. Геометрична властивість цих ліній така: вони не змінюють свою довжину при А-деформації.

Віднесемо поверхню до ортогональної системи координат. Це означає, що в кожній точці на поверхні координатні лінії будуть взаємно перпендикулярні. Тоді $\bar{r}_1 \bar{r}_2 = g_{12} = 0$.

Порахуємо перший тензор деформації поверхні Гауді, яка задана векторно-параметричним рівнянням

$$\bar{r} = (x, y, x \sin y),$$

тобто розглядаємо поверхню Гауді при значеннях параметрів $m = a = 1$. Виберемо функцію $\psi(x, y) = -x$. За такої умови вектор зміщення (17) буде мати вигляд:

$$\bar{u} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{g}}, \frac{x}{\sqrt{g}} \cos y \right).$$

Використаємо формулу для першого тензора $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{r}_i \bar{u}_j + \bar{r}_j \bar{u}_i)$, де $\bar{u}_i = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^i}$, де $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= g^{-\frac{3}{2}}(1 + \sin^2 y) \sin y \cos y; \\ \epsilon_{12} &= -\frac{x}{2} g^{-\frac{3}{2}}(1 + \sin^2 y) \sin^2 y; \\ \epsilon_{22} &= -g^{-\frac{3}{2}}(1 + x^2) \sin y \cos y. \end{aligned}$$

Отримали, що $\epsilon_{ij} \neq 0$ (так як ми розглядаємо поверхню Гауді за умови $x \neq 0$ і $y \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$), а це означає, що не виконується достатня умова тривіальної А-деформації. Отже, будь-яка нескінченно мала А-деформація поверхні Гауді є заздалегідь нетривіальною.

Тепер підставимо ці вирази ϵ_{ij} у диференціальне рівняння (19):

$$(1 + \sin^2 y) \cos y dx^2 - x(1 + \sin^2 y) \sin y dx dy - (1 + x^2) \cos y dy^2 = 0. \quad (20)$$

Припустивши, що $dy \neq 0$, перепишемо отриману рівність:

$$(1 + \sin^2 y) \cos y \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 - x(1 + \sin^2 y) \sin y \frac{dx}{dy} - (1 + x^2) \cos y = 0. \quad (21)$$

Таким чином, ми отримали алгебраїчне квадратне рівняння відносно напрямку $\frac{dx}{dy}$, розв'язками якого будуть два різних дійсних корені, які знаходяться за формулами:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-\epsilon_{12} + \sqrt{\epsilon_{12}^2 + \frac{g_{11}}{g_{22}} \epsilon_{22}^2}}{\epsilon_{11}}; \quad \frac{\delta x}{\delta y} = \frac{-\epsilon_{12} - \sqrt{\epsilon_{12}^2 + \frac{g_{11}}{g_{22}} \epsilon_{22}^2}}{\epsilon_{11}}.$$

Отже, ми довели теорему, яка була представлена у тезах [7]:

Теорема 4. При ареальній тангенціальній нескінченно малій деформації з полем зміщення (17) ($a = t = 1$, $\psi(x, y) = -x$) на поверхні Гауді існує дійсна ортогональна сітка ліній стаціонарної довжини, диференціальне рівняння якої має вигляд (20).

Висновки

Доведено, що поверхня Гауді допускає довільну ареальну нескінченно малу деформацію, яка виражається через дві довільні неперервно диференційовні функції, та отримано явне представлення вектора зміщення у декартових координатах. Також доведено, що поверхня Гауді допускає тангенціальну ареальну нескінченно малу деформацію, що виражається через одну довільну функцію двох змінних класу C^2 та отримано відповідний вектор зміщення у декартових координатах. Доведено існування дійсної ортогональної сітки ліній стаціонарної довжини на поверхні Гауді та отримано диференціальне рівняння для їх знаходження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Velimirovic L.S.** Analysis of Gaudi surfaces at small deformations / Velimirovic Ljubica S., Cvetkovic Milica D., Ciric Marija S., Vilimirovic Nicola, //Applied Mathematics and Computation – 2012. – №218(13).– С. 6999–7004.
2. **Velimirovic L.S.** Gaudi surfaces and curvature based functional variations / Velimirovic Ljubica S., Cvetkovic Milica D., //Applied Mathematics and Computation – 2014. – №228.– С. 377–383.
3. **Мокрищев К. К.** Введение в теорию бесконечно малых изгибаний поверхностей / Константин Константинович Мокрищев – Ростов: Издательство Ростовского университета, 1963. – 35 с.
4. **Векуа И. Н.** Обобщенные аналитические функции / Илья Нестерович Векуа – М.: Наука, 1988. – 509 с.
5. **Безкоровайна Л. Л.** Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки / Лілія Леонтіївна Безкоровайна – Одеса: АстроПринт, – 1999. – 168 с.
6. **Безкоровайная Л. Л.** Поверхности, образованные действительной и мнимой частями аналитической функции: А-деформации, происходящие независимо или одновременно. / Лілія Леонтіївна Безкоровайна, //Український математичний журнал – 2018. – Т.70. – №4.– С. 447–463.

-
7. **Хомич Ю.** Поверхня Гауді та деформація з заданою варіацією елемента площі / Юлія Хомич, Маргарита Піструїл – тези міжнародної конференції Algebraic and geometric methods of analysis (AGMA), – Одеса, – 2018. –с.93-94.

Evtukhov V. M.

AREAL INFINITELY SMALL DEFORMATION OF THE GAUDI SURFACE

Summary

This article is devoted to the study of infinitesimal areal deformations of the Gaudi surface. These surfaces, which were named after the famous Catalan architect Antonio Gaudi, are used in architecture as roofing structures, decorative elements, etc. Previously, Velimirovic L. S., Cvetkovic M. D., and others studied infinitesimal bendings of the Gaudi surface.

This article proves that the Gaudi surface admits an arbitrary areal infinitesimal deformation, which is described by two arbitrary continuously differentiable functions, and gives an explicit expression for the displacement vector in Cartesian coordinates. The case of tangential areal deformation is considered separately, with the corresponding displacement vector obtained. In addition, the existence of a real orthogonal grid of lines of stationary length on the Gaudi surface is proved and a differential equation for its construction is derived.

Keywords: Riemannian space, metric tensor, affine connection object, infinitesimal deformation, curvature, differential equations.

REFERENCES

1. **Velimirovic L.S., Cvetkovic M. D., Ciric M. S., Vilimirovic N.** (2012). Analysis of Gaudi surfaces at small deformations. *Applied Mathematics and Computation*, №218(13), p. 6999–7004.
2. **Velimirovic L.S., Cvetkovic M. D.** (2014). Gaudi surfaces and curvature based functional variations. *Applied Mathematics and Computation*, №228, p. 377–383.
3. **Mokrishchev, K.K.** (1963). Vvedenie v teoriyu beskonechno malykh izgibaniy poverkhnostey. Rostov: Izdatel'stvo Rostovskogo universiteta, p.35.
4. **Vekua, I.N.** (1988). Obobshchennye analiticheskie funktsii. Moscow: Nauka, p.509.
5. **Bezkorovayna, L.L.** (1999). Areal'ni neskinchenno mali deformatsiyi i vrinovazheni stany pruzhnoyi obolonky. Odesa: AstroPrint, p.168.
6. **Bezkorovayna, L.L.** (2018). Poverkhnosti, obrazovannye deystvitel'noy i mnimoy chastyami analiticheskoy funktsii: A-deformatsii, proikhodyashchie nezavisimo ili odnovenno. *Ukrains'kyi matematychnyi zhurnal*, №70(4), p.447–463.
7. **Khomych, Y., Pistrui, M.** (2018). Poverkhnyia Haudi ta deformatsiia z zadanoj variatsiieyu elementa ploshchi. *Abstracts of the international conference Algebraic and Geometric Methods of Analysis (AGMA)*, Odesa, p. 93–94.

УДК 514.07

В. А. Кіосак, доктор фіз.-мат. наук, професор
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
Одеська державна академія будівництва та архітектури
Кафедра вищої математики
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, 65029, Україна
e-mail: kiosakv@ukr.net

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7433-6709>

Н. В. Шарай кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
e-mail: rusnat36@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0003-4007-651X>

ПРО КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ІЗ ЗБЕРЕЖЕННЯМ ТЕНЗОРА ЕНЕРГІЇ-ІМПУЛЬСУ

Вивчаються конформні відображення псевдоріманових просторів із збереженням тензора енергії-імпульсу. Розв'язок задачі зведений до розв'язування системи диференціальних рівнянь першого порядку в коваріантних похідних. Виявлено лакуарність, наявність заборонених інтервалів, у розподілі кількості розв'язків зазначеної системи. Отримано тензорні ознаки та вивчено деякі геометричні властивості псевдоріманових просторів, відмінних від плоских, що допускають максимальну кількість розв'язків цієї системи. Для чотиривимірних просторів ці результати дають повний опис псевдоріманових просторів, що допускають відображення із збереженням тензора енергії-імпульсу.

Дослідження ведуться локально, тензорними методами без обмежень на сигнатуру та знаковизначенність метричного тензору псевдоріманового простору.

MSC: 53B35.

Ключові слова: псевдоріманові простори, конформні відображення, тензор енергії-імпульсу.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2\(44\).342076](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2(44).342076).

Вступ

Серед різних додаткових передумов і обмежень, що використовуються для пошуку розв'язків рівнянь Ейнштейна, особливе місце займає запропонована Фрідманом гіпотеза про конформну відповідність між реальним простором і простором-моделлю. Ця гіпотеза дозволила отримати покладене в основу теорії розширюваного всесвіту, нестационарне рішення [1] - [3].

Робота присвячена вивченню конформних відображень псевдориманових просторів із збереженням тензора енергії-імпульсу. Розв'язок задачі зведено до вивчення системи диференціальних рівнянь. Виявлено лакуарність у розподілі кількості розв'язків зазначеної системи. Отримано тензорні ознаки та вивчено деякі геометричні властивості псевдориманових просторів, відмінних від плоских, що допускають максимальну кількість рішень. Для чотиривимірних просторів ці результати дають повний опис псевдориманових просторів, що допускають конформне відображення із збереженням тензора енергії-імпульсу.

1. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ КОНФОРМНИХ ВІДБРАЖЕНЬ РИМАНОВИХ ПРОСТОРІВ

Нехай V_n ($n > 2$) псевдориманів простір з метричним тензором $g_{ij}(x)$ і $\bar{V}_n$ також псевдориманів простір з метричним тензором $\bar{g}_{ij}(x)$. Конформним відображенням називають взаємнооднозначну відповідність між точками просторів V_n і $\bar{V}_n$ таку, що

$$\bar{g}_{ij}(x) = e^{2\sigma(x)} g_{ij}(x), \quad (1)$$

тут σ - деяка функція.

Якщо σ - постійна, то відображення називають *гомотетією*. Надалі, якщо це не обумовлено окремо, ми обмежимося розглядом відображень, відмінних від гомотетичних.

З (1) отримаємо

$$\bar{g}^{ij} = e^{-2\sigma} g^{ij},$$

де g^{ij} і $\bar{g}^{ij}$ елементи зворотної матриці метричного тензора V_n і $\bar{V}_n$, відповідно.

Мають місце формули ([4] - [6]):

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \delta_i^h \sigma_j + \delta_j^h \sigma_i - \sigma^h g_{ij}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ijk}^h = & R_{ijk}^h + \delta_k^h \sigma_{ij} - \delta_j^h \sigma_{ik} + g^{h\alpha} (\sigma_{\alpha h} g_{ij} - \\ & - \sigma_{\alpha j} g_{ik}) + \Delta_1 \sigma (\delta_k^h g_{ij} - \delta_j^h g_{ik}); \end{aligned}$$

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n-2)\sigma_{ij} + (\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma) g_{ij}; \quad (3)$$

$$\bar{R} = e^{-2\sigma} (R + 2(n-1)\Delta_2 \sigma + (n-1)(n-2)\Delta_1 \sigma). \quad (4)$$

Тут і надалі Γ_{ij}^h — символи Крістоффеля другого роду, R_{ijk}^h — тензор Рімана, R_{ij} — тензор Річчі, що визначається наступним чином —

$$R_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} R_{ij\alpha}^{\alpha};$$

$$R \stackrel{\text{def}}{=} R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} - \text{скалярна кривина}, \quad \sigma_i \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} \equiv \sigma_{,i}, \quad \sigma^h = \sigma_{\alpha} g^{\alpha h},$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{,ij} - \sigma_{,i} \sigma_{,j},$$

$\Delta_1 \sigma$ і $\Delta_2 \sigma$ — перший і другий параметри Бельтрамі, що визначаються як

$$\Delta_1 \sigma = g^{\alpha\beta} \sigma_{,\alpha} \sigma_{,\beta}; \quad \Delta_2 \sigma = g^{\alpha\beta} \sigma_{,\alpha\beta},$$

δ_i^j — символи Кронекера, кома “,” — знак коваріантної похідної за зв’язністю V_n .

Об’єкти конформно відповідного V_n простору $\bar{V}_n$ будемо позначати рискою.

Зауважимо, що, якщо V_n і $\bar{V}_n$ пов’язані конформним відображенням, то від коваріантного диференціювання за зв’язністю V_n можна, використовуючи (2), перейти до коваріантної похідної за зв’язністю $\bar{V}_n$, позначимо її вертикальною рискою “ $\bar{}$ ”, тоді для довільного тензора A_{ij} :

$$A_{ij,k} = A_{ij|k} + 2\sigma_k A_{ij} + \sigma_i A_{jk} + \sigma_j A_{ik} - \sigma^{\alpha} A_{\alpha j} g_{ki} - \sigma^{\alpha} A_{\alpha i} g_{kj}.$$

2. ПРО КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ІЗ ЗБЕРЕЖЕННЯМ ТЕНЗОРА ЕНЕРГІЇ-ІМПУЛЬСУ

Рівняння виду

$$R_{ij} - \frac{R}{2}g_{ij} = T_{ij} \quad (5)$$

називають рівнянням Ейнштейна.

Тут T_{ij} — деякий тензор, який називають *тензором енергії-імпульсу*.

Для $\bar{V}_n$ має місце таке ж рівняння

$$\bar{R}_{ij} - \frac{\bar{R}}{2}\bar{g}_{ij} = \bar{T}_{ij} \quad (6)$$

Віднімаючи з (6) рівняння (5), отримаємо

$$(\bar{R}_{ij} - R_{ij}) - \frac{1}{2}(\bar{R}\bar{g}_{ij} - Rg_{ij}) = \bar{T}_{ij} - T_{ij}$$

Враховуючи (3), (4) і (1), будемо мати

$$\bar{T}_{ij} = T_{ij} + (n-2)(\sigma_{ij} - (\Delta_2\sigma - \frac{n-3}{2}\Delta_1\sigma)g_{ij}). \quad (7)$$

Таким чином, має місце теорема

Теорема 1. *Якщо V_n і $\bar{V}_n$ два конформно відповідних псевдориманових простори, то їх тензори енергії-імпульсу задовольняють співвідношенням (7).*

Конформні відображення псевдориманового простору V_n на $\bar{V}_n$, при якому

$$T_{ij} = \bar{T}_{ij}, \quad (8)$$

називають *конформним відображенням із збереженням тензора енергії-імпульсу*.

З урахуванням (8) рівняння (7) приймуть вигляд

$$\sigma_{ij} = (\Delta_2\sigma + \frac{n-3}{2}\Delta_1\sigma)g_{ij}. \quad (9)$$

Тоді

$$\sigma_{ij} = \frac{\Delta_2\sigma - \Delta_1\sigma}{n}g_{ij}. \quad (10)$$

Конформні відображення, при яких інваріант σ задовольняє умовам (10), називають *конциркулярними відображеннями*. Вони характеризуються тим, що при них геодезичні кола V_n переходять у геодезичні кола $\bar{V}_n$ [7; 8].

Геодезичним колом називається крива, перша кривина якої постійна, а друга — тотожно дорівнює нулю.

Таким чином, має місце теорема:

Теорема 2. *Якщо при конформному відображенні псевдориманових просторів V_n зберігається тензор-енергії імпульса, то при ньому зберігаються і геодезичні кола.*

З іншого боку, вивчаючи (9) і (10), можна переконатися, що, якщо V_n допускає конциркулярні відображення і виконується умова

$$\Delta_2 \sigma = -\frac{n-2}{2} \Delta_1 \sigma, \quad (11)$$

то при цьому відображенні зберігається і тензор енергії – імпульсу.

Введемо в розгляд інваріант S такий, що

$$\sigma = -\ln|S|, \quad (12)$$

тоді (1) приймуть вигляд

$$\bar{g}_{ij}(x) = S^{-2} g_{ij}.$$

Послідовно диференціюючи (12), отримаємо

$$\sigma_{,i} = -\frac{1}{S} S_{,i}$$

$$\sigma_{,ij} = -(S \cdot S_{,ij} - S_{,i} S_{,j}) \cdot S^{-2}$$

$$\sigma_{ij} = -S_{,ij} \cdot S^{-1}$$

Крім того,

$$\Delta_1 \sigma = \Delta_1 S \cdot S^{-2}; \quad \Delta_2 \sigma = (\Delta_1 S - S \Delta_2 S) \cdot S^{-2}.$$

З огляду на це, рівняння (10) набудуть вигляду

$$S_{,ij} = \frac{\Delta_2 S}{n} g_{ij}, \quad (13)$$

а (11) —

$$S \Delta_2 S = \frac{n}{2} \Delta_1 S. \quad (14)$$

Вектор $S_{,i}$, що задовольняє умовам (13), називають конциркулярним, а простори, що допускають такі поля — еквідістантними [5; 9].

Таким чином, нами доведена теорема:

Теорема 3. *Якщо псевдориманівський простір V_n допускає конформні відображення із збереженням тензора енергії-імпульсу, то V_n є еквідістантним простором.*

При $\Delta_2 S \neq 0$ евідістантний простір будемо вважати належним до основного типу, а при $\Delta_2 S \equiv 0$ — до особливого. Якщо вектор $S_{,i}$ ізотропний, тобто $\Delta_1 S = 0$, то еквідістантний простір належить за необхідністю до особливого типу. Еквідістантні простори основного типу характеризуються тим, що в них існує спеціальна система координат, в якій метричний тензор еквідістантного простору може бути представлений у вигляді

$$ds_n^2 = dx^{12} + f(x_1) ds_{n-1}^2(x_2, \dots, x_n). \quad (15)$$

Тут $f(x^1) \neq 0$ — деяка функція, а ds_{n-1}^2 — метрика $(n-1)$ — вимірного псевдориманова простору.

З огляду на теорему 3, можна сформулювати

Теорема 4. *Якщо псевдориманівський простір $V_n (n > 2)$ допускає конформні відображення із збереженням тензора енергії-імпульсу і $\Delta_2 S \neq 0$, то в деякій системі координат його метричний тензор записується у вигляді (15).*

Умови інтегрованості рівнянь (13) мають вигляд

$$S_{,\alpha} R_{ijk}^{\alpha} = \left(\frac{\Delta_2 S}{n} \right)_{,k} g_{ij} - \left(\frac{\Delta_2 S}{n} \right)_{,j} g_{ik}. \quad (16)$$

Множачи останнє на $S^i = S_{,\alpha} g^{\alpha i}$ і, згортаючи по i , переконуємося, що

$$\left(\frac{\Delta_2 S}{n} \right)_{,i} = B S_{,i}, \quad (17)$$

де B — деякий інваріант.

Тоді (16) набуде вигляду

$$S_{,\alpha} R_{ijk}^{\alpha} = B(S_{,k} g_{ij} - S_{,j} g_{ik}). \quad (18)$$

Згортаючи останнє, переконаємося

$$S_{,\alpha} R_k^{\alpha} = B(n-1)S_{,k}. \quad (19)$$

З урахуванням (5)

$$S_{,\alpha} T_k^{\alpha} = (B(n-1) - \frac{R}{2})S_{,k}. \quad (20)$$

Диференціюючи (8), враховуючи (5), (13) і (20), отримаємо

$$\bar{T}_{ij|k} = T_{ij,k} + \frac{1}{S}(2S_{,k}T_{ij} + S_{,i}T_{jk} + S_{,j}T_{ik} - (B(n-1) - \frac{R}{2})(S_{,j}g_{ki} + S_{,j}g_{kj})).$$

Враховуючи бездивергентність тензора енергії-імпульсу, переконаємося, що інваріант B , за необхідності, дорівнює нулю, і, отже, (17) та (18) набувають вигляду

$$(\Delta_2 S)_{,i} = 0 \quad (21)$$

і

$$S_{,\alpha} R_{ijk}^{\alpha} = 0.$$

Таким чином, доведено

Теорема 5. *Якщо псевдориманів простір $V_n(n > 2)$ допускає конформні відображення із збереженням тензора енергії-імпульсу, то в ньому існує розв'язок система рівнянь (13), (21).*

Зазначена система являє собою систему лінійних диференціальних рівнянь у коваріантних похідних типу Коші з коефіцієнтами, однозначно визначеними даним простором V_n . Дослідженню таких систем присвячені роботи [10] - [12]. Враховуючи ці роботи та викладене вище, можемо зробити висновок, що розподіл числа параметрів, від яких залежить загальне рішення системи (13), (21), має лакунарний характер. Максимальне число $(n+1)$ допускають пласкі простори. Не існує псевдориманових просторів $V_n(n > 2)$, відмінних

від плоских, для яких кількість параметрів більше ніж $(n-2)$. Простори, що допускають точно $(n-2)$ істотних параметрів, існують, для них

$$R_{hijk} = e(a_h b_i - a_i b_h)(a_j b_k - a_k b_j),$$

де $e = \pm 1$, a_i, b_i — деякі взаємно ортогональні, неколінеарні вектори.

Позначимо цю множину $V_n(A)$.

Для тензора Річчі та скалярної кривизни отримаємо

$$R_{hijk} = -e(a^\alpha a_\alpha b_i b_j + b^\alpha b_\alpha a_i a_j)(a_j b_k - a_k b_j),$$

$$R = -2e a^\alpha a_\alpha b^\alpha b_\alpha.$$

Тут $a^i = a_\alpha g^{\alpha i}$; $b^i = b_\alpha g^{\alpha i}$ [13].

Умова (22) дозволяє розбити множину $V_n(A)$ залежно від ізотропності або неізотропності векторів a_i і b_i на три класи, що не перетинаються:

$$V_n(A_1) : \quad a^\alpha a_\alpha \neq 0; \quad b^\alpha b_\alpha \neq 0,$$

$$V_n(A_2) : \quad a^\alpha a_\alpha = 0; \quad b^\alpha b_\alpha \neq 0,$$

$$V_n(A_3) : \quad a^\alpha a_\alpha \neq 0; \quad b^\alpha b_\alpha = 0.$$

Для кожного з класів $V_n(A)$ можна вказати тензорну характеристику

$$V_n(A_1) : \quad \frac{R}{2} R_{hijk} = R_{hk} R_{ij} - R_{hj} R_{ik},$$

$$V_n(A_2) : \quad R = 0; \quad R_{ij} = -e b^\alpha b_\alpha a_i a_j;$$

$$b^\alpha b_\alpha R_{hijk} = b_i b_j R_{hk} - b_i b_k R_{hj} +$$

$$+ b_h b_k R_{ij} - b_h b_j R_{ik},$$

$$V_n(A_3) : \quad R_{ij} = 0.$$

Зазначимо, що простори $V_n(A)$ є напівсиметричними, тобто в них

$$R_{hijk,lm} - R_{hijk,ml} = 0. \quad (22)$$

3. ВИСНОВКИ

Таким чином, чотиривимірні псевдориманові простори, що допускають конформні відображення із збереженням тензора енергії-імпульсу, будуть або плоскими, або напівсиметричними, що належать до одного з класів $V_4(A)$, або допускають одне еквідистантне векторне поле. Як впливає з досліджень [14], просторів $V_4(A_3)$ не існує.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Kiosak, V.** On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces / V. Kiosak, O. Savchenko, O. Gudyreva // AIP Conference Proceedings. - 2019. - 2164, 040001. <https://doi.org/10.1063/1.5130793>.
2. **Doikov, D.** On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe / D. Doikov, V. Kiosak // AIP Conference Proceedings. - 2020. - 2302, 040001. <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
3. **Kramer, D.** Exact solutions of the Einstein field equations / D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt, Ed. E Schmutzer // Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1980.
4. **Barden, D.** An Introduction to Differential Manifolds / D. Barden, C. Thomas // University of Cambridge, UK. - 2003. <https://doi.org/10.1142/p285>
5. **Eisenhart, L. P.** Riemannian Geometry / L.P. Eisenhart // Princeton Univ. Press.- 1950, repr. 1997. ISBN: 9780691023533
6. **Rong W.** An Introduction to Differential Geometry and Topology in Mathematical Physics / W. Rong, C. Yue // Zhejiang University, PR China. - 1999. <https://doi.org/10.1142/3871>
7. **Fernandes R. L.** Lectures on Differential Geometry. University of Illinois Urbana-Champaign / R.L. Fernandes // USA. World Scientific. - 2014. <https://doi.org/10.1142/12733>
8. **Yano K.** Conircular geometry, I-IV. Info Proc. Imp. Acad / K. Yano // Tokyo.- 1940. - 16. pp. 195 –200; 354 –360; 442 –448; 505 –511.
9. **Kiosak, V.** Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces / V. Kiosak, L. Kusik, V. Isaiev // Proceedings of the International Geometry Center. - 2022. - 15(2), 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>

10. **Kiosak, V.** Mappings of Spaces with Affine Connection /V. Kiosak, O. Lesechko, O. Savchenko// In: 17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT. Bratislava. - 2018. - pp. 563–569.
11. **Kiosak, V.** On the properties of Ricci solitons /V. Kiosak, A. Savchenko, L. Kusik // AIP Conference Proceedings. - 2022. - 2522, 120006. <https://doi.org/10.1063/5.0100792>
12. **Kiosak V.** Invariant transformations that preserve mappings /V. Kiosak, A. Savchenko, L. Makarenko // AIP Conference Proceedings. - 2022. - 2522, 120003. <https://doi.org/10.1063/5.0100787>
13. **Kiosak, V.** On geodesic mappings of symmetric pairs / V. Kiosak, O. Lesechko, O. Latysh // Proceedings of the International Geometry Center. - 2023.- 15, 230–238. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i3-4.2430>.
14. **Kiosak, V.** There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor /V. Kiosak, V.S. Matveev// Journal of Geometry and Physics. - 2014. - 78, 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.01.002>

Kiosak V. A., Sharai N. V.

ON CONFORMAL MAPPINGS PRESERVING TENSOR OF STRESS-ENERGY

Summary

Conformal mappings of pseudo-Riemannian spaces preserving the energy-momentum tensor are studied. The problem is reduced to solving a system of first-order differential equations in covariant derivatives. Lacunarity and the presence of forbidden intervals in the distribution of the number of solutions of the given system have been identified. Tensorial criteria have been obtained, and certain geometric properties of non-flat pseudo-Riemannian spaces that admit the maximum number of solutions to this system have been investigated. For four-dimensional spaces, these results provide a complete description of pseudo-Riemannian spaces that admit mappings preserving the energy-momentum tensor.

The study is conducted locally, using tensor methods, without restrictions on the signature or definiteness of the metric tensor of the pseudo-Riemannian space.

Key words: pseudo-Riemannian spaces, conformal mappings, tensor of stress-energy

REFERENCES

1. Kiosak, V., Savchenko, O., Gudyreva, O. (2019). On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces. AIP Conference Proceedings, vol.2164, 040001. <https://doi.org/10.1063/1.5130793>.
2. Doikov, D., Kiosak, V. (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. AIP Conference Proceedings, 2302, 040001. <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
3. Kramer, D., Stephani, H., MacCallum, M., Herlt, E., Ed. Schmutzer, E. (1980). Exact solutions of the Einstein field equations. Berlin: Leutscher Verlag der Wissenschaften.
4. Barden, D., Thomas, C. (2003). *An Introduction to Differential Manifolds*. University of Cambridge, UK. <https://doi.org/10.1142/p285>
5. Eisenhart, L. P. (1950, repr. 1997). *Riemannian Geometry*. Princeton Univ. Press. ISBN: 9780691023533
6. Rong W. and Yue C. (1999). An Introduction to Differential Geometry and Topology in Mathematical Physics. Zhejiang University, PR China. <https://doi.org/10.1142/3871>
7. Fernandes R. L. (2014). Lectures on Differential Geometry. University of Illinois Urbana-Champaign, USA. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/12733>

8. Yano K. (1940). Conircular geometry, I-IV. Info Proc. Imp. Acad. Tokyo. 16. pp. 195 – 200; 354 –360; 442 –448; 505 –511.
9. Kiosak, V., Kusik, L., Isaiev, V. (2022). Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. Proceedings of the International Geometry Center, 15(2), 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
10. Kiosak, V., Lesechko, O., Savchenko, O. (2018). Mappings of Spaces with Affine Connection. In: 17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT. Bratislava, pp. 563–569.
11. Kiosak, V., Savchenko, A., Kusik, L. (2022). On the properties of Ricci solitons. AIP Conference Proceedings, 2522, 120006. <https://doi.org/10.1063/5.0100792>
12. Kiosak V., Savchenko A. and Makarenko L. (2022) Invariant transformations that preserve mappings, AIP Conference Proceedings 2522, 120003. <https://doi.org/10.1063/5.0100787>
13. Kiosak, V., Lesechko, O., Latysh, O. (2023). On geodesic mappings of symmetric pairs. Proceedings of the International Geometry Center, vol.15, pp. 230–238. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i3-4.2430>.
14. Kiosak, V., Matveev, V. S. (2014). There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor. Journal of Geometry and Physics, 78, 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.01.002>

UDC 517.925

M. O. Bilozero*va*, *CandSc (Physics & Mathematics), Assoc. Prof.*

Odesa I. I. Mechnikov National University

Department of Algebra, Geometry and Differential Equations

2 Zmiiienka Vsevoloda St, Odesa, 65082, Ukraine

e-mail: marbel@ukr.net

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3177-790X>

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF ONE CLASS OF SOLUTIONS WITH SLOWLY VARYING DERIVATIVES TO NONLINEAR SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

For essentially nonlinear differential equations, that are in some sense close to equations of Emden-Fowler type necessary and sufficient conditions of existence of one class of critical solutions were found. Asymptotic representations for such solutions and their first order derivatives are also established.

MSC: 34C41, 34E10.

Keywords: differential equations, asymptotic, slowly varying solutions, regularly varying nonlinearities, nonlinear ODE, slowly varying derivatives.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2\(44\).342077](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2(44).342077).

INTRODUCTION

Differential equation

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y') \exp(R(\ln |y|, \ln |yy'|)), \quad (1)$$

where $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$), $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0, +\infty[$ are continuous functions, $R :]0; +\infty[\rightarrow]0; +\infty[$ $R :]0; +\infty[\times]0; +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ is continuously differentiable function. Here $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} is either the interval $[y_i^0; Y_i[, *$ or the interval $]Y_i; y_i^0]$ ($i = 0, 1$). Moreover, it is supposed, that every function φ_i ($i = 0, 1$) is regularly varying of the order σ_i ([1], chapter 1, §1.1, p. 9) as the argument tends to Y_i and $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$.

Moreover, suppose the function R satisfy the conditions

$$\lim_{(y_0, y_1) \rightarrow (+\infty, +\infty)} R(y_0, y_1) = +\infty, \quad (2)$$

$$\lim_{y_i \rightarrow +\infty} \frac{y_i \frac{\partial R}{\partial y_i}(y_0, y_1)}{R(y_0, y_1)} = \gamma_i, \text{ uniformly by } y_j \quad i, j \in \{0, 1\}, \quad i \neq j, \quad (3)$$

where $0 < \gamma_0 + \gamma_1 < 1$, $\gamma_0 \neq 0$.

Definition 1. The solution y of equation (1) is called $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ if it is defined on $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ and

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0. \quad (4)$$

Let the function $\varphi : \Delta_Y \rightarrow]0, +\infty[$ be a regularly varying function of the order σ as $z \rightarrow Y$ ($z \in \Delta_Y$) ($Y \in \{0, \infty\}$, Δ_Y is a onesided neighborhood of Y). We say that function φ satisfies the condition S if for any slowly varying as $z \rightarrow Y$ ($z \in \Delta_Y$) function $L : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0, +\infty[$, such, that

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Y \\ z \in \Delta_Y}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0,$$

the following equality takes place

$$\Theta(zL(z)) = \Theta(z)(1 + o(1)) \quad \text{as } z \rightarrow Y, \quad (z \in \Delta_Y),$$

where $\Theta(z) = \varphi(z)|z|^{-\sigma}$.

Some classes of $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solutions of the equation (1) were investigated before (look, for example, [4]). A class of $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solutions of equations of the type (1) has been considered firstly for cases $R(z) \equiv 0$ and $\varphi_0(z)|z|^{-\sigma_0}$ satisfies the condition S . Later it has turned out to extend the results on more general cases (look, for example, [3]). But general case of equation (1), hasn't been considered before. Let us notice, that the derivative of every $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solution is a slowly varying function as $t \uparrow \omega$. It makes additional difficulties by the investigations.

MAIN RESULTS

Let introduce subsidiary notations

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{as } \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{as } \omega < +\infty, \end{cases} \quad \Theta_i(z) = \varphi_i(z)|z|^{-\sigma_i}, \quad (i = 0, 1)$$

*If $Y_i = +\infty$ ($Y_i = -\infty$) we respectively suppose, that $y_i^0 > 0$ ($y_i^0 < 0$).

and in case $\lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)| \text{sign} y_0^0 = Y_0$,

$$N(t) = \alpha_0 p(t) |\pi_\omega(t)|^{\sigma_0+1} \Theta_0(|\pi_\omega(t)| \text{sign} y_0^0) \text{ as } t \in [b, \omega[,$$

$$I_0(t) = \alpha_0 \int_{A_\omega^0}^t p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0} \Theta_0(|\pi_\omega(\tau)| \text{sign} y_0^0) d\tau,$$

$$A_\omega^0 = \begin{cases} b, & \text{as } \int_b^\omega p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0} \Theta_0(|\pi_\omega(\tau)| \text{sign} y_0^0) d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{as } \int_b^\omega p(\tau) |\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_0} \Theta_0(|\pi_\omega(\tau)| \text{sign} y_0^0) d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Here we choose $b \in [a, \omega[$ by such a way, that $|\pi_\omega(t)| \text{sign} y_0^0 \in \Delta_0$ as $t \in [b, \omega[$.

Theorem 1. *The conditions*

$$Y_0 = \begin{cases} \pm\infty, & \text{as } \omega = +\infty, \\ 0, & \text{as } \omega < +\infty, \end{cases} \quad \pi_\omega(t) y_0^0 y_1^0 > 0 \text{ as } t \in [a; \omega[. \quad (5)$$

are necessary for the existence of $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solutions of the equation (1).

If function φ_0 satisfies the condition S and

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\sum_{i=0}^1 \gamma_i |\ln |\pi_\omega(t)||^{\gamma_i-1} \frac{\partial R}{\partial y_i}(|\ln |\pi_\omega(t)||, |\ln |\pi_\omega(t)||)}{\pi_\omega(t) I_0'(t)} = 0, \quad (6)$$

then conditions

$$\begin{aligned} y_1^0 I_0(t) (1 - \sigma_0 - \sigma_1) &> 0 \quad \text{as } t \in [a, \omega[, \\ \lim_{t \uparrow \omega} y_1^0 |I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} &= Y_1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I_0'(t)}{I_0(t)} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

together with conditions (5) are necessary and sufficient for the existence of the mentioned solutions of the equation (1). Moreover, for each $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solution of the equation (1) the next asymptotic representations take place as $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t) |y'(t)|^{-\sigma_0}}{\varphi_1(y'(t)) \exp(R(\ln |y|, \ln |yy'|))} = (1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_0(t) [1 + o(1)], \quad (8)$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} [1 + o(1)].$$

Proof. *The necessity.*

Let function $y : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_0}$ is a $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solution of the equation (1). By (4) it follows from the equality

$$\frac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2} = \left(\frac{y'(t)}{y(t)} \right)' \cdot \left(\frac{y'(t)}{y(t)} \right)^{-2} + 1,$$

that

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)} \right)' \cdot \left(\frac{y'(t)}{y(t)} \right)^{-2} = -1 + o(1) \text{ as } t \uparrow \omega.$$

From this by (4) the next asymptotic representations take place

$$y(t) = \pi_\omega(t)y'(t)[1 + o(1)], \quad y''(t) = o\left(\frac{y'(t)}{\pi_\omega(t)}\right) \text{ as } t \uparrow \omega. \quad (9)$$

From the first formula we get the first one of representations (8) and condition (5). It also follows from (9), that there exists such a slowly varying continuously differentiable function $L : \Delta_{Y_0} \rightarrow]0, +\infty[$, that $y(t) = \pi_\omega(t)L(\pi_\omega(t))$. By condition S we obtain $\Theta_0(y(t)) = \Theta_0(|\pi_\omega(t)|\text{sign}y_0^0)[1 + o(1)]$ as $t \uparrow \omega$.

Let us rewrite (1) in the form

$$\frac{y''(t)}{\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{\sigma_0}} = I_0'(t) \exp(R(\ln|y|, \ln|yy'|))[1 + o(1)] \text{ as } t \uparrow \omega. \quad (10)$$

Now let us suppose the condition (6) takes place and denote

$$\lim_{t \uparrow \omega} I_0(t) = J_0.$$

By conditions (6) and (9) the function $\exp(R(|\ln|y(I_0^{-1}(z))|, |\ln|y(I_0^{-1}(z))y'(I_0^{-1}(z))|))$ is a slowly varying function as $z \rightarrow J_0$. Here I_0^{-1} is the inverse function for I_0 .

Therefore, using (10) we get

$$\frac{y'(t)|y'(t)|^{-\sigma_0}}{\varphi_1(y'(t)) \exp(R(|\ln|y(t)|, |\ln|y(t)y'(t)|))} = (1 - \sigma_0 - \sigma_1)I_0(t)[1 + o(1)] \text{ as } t \uparrow \omega. \quad (11)$$

So the representation (8) is grounded. Taking into account sign of the function $y'(t)$ we obtain the first and the second of conditions (7). Using the second of relations (9) we have by (11) and (10), that

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)I_0'(t)\varphi_1(y'(t))}{|y'(t)|^{1-\sigma_0}} = 0.$$

The third of conditions (7) follows from this relation. And thus the necessity is proved.

The sufficiency. Let's suppose, that the function φ_1 satisfies condition S and conditions (5)-(7) of the theorem take place. Let's denote

$$g(v_0, v_1) = \exp(R(|\ln |v_0||, |\ln |v_0 v_1||))L_1(v_1),$$

where $L_1 : \Delta_{Y_1} \rightarrow]0, +\infty[$ is such slowly varying function as $z \rightarrow Y_1 (z \in \Delta_{Y_1})$, that

$$L_1(z) = \Theta_1(z)[1 + o(1)] \text{ as } z \rightarrow Y_1 \quad (z \in \Delta_{Y_1}), \quad \lim_{\substack{z \rightarrow Y_1 \\ z \in \Delta_{Y_1}}} \frac{zL_1'(z)}{L_1(z)} = 0. \quad (12)$$

According to properties of the function R and (12), we get

$$\lim_{\substack{v_i \rightarrow Y_i \\ v_i \in \Delta_{Y_i}}} \frac{v_i \frac{\partial g}{\partial v_i}(v_0, v_1)}{g(v_0, v_1)} = 0 \text{ uniformly by } v_j \in \Delta_{Y_j}, \quad j \neq i, \quad i, j = 0, 1. \quad (13)$$

So, we can take $\tilde{\Delta}_{Y_i} \subset \Delta_{Y_i}$ ($i = 0, 1$) in such a form, that

$$\left| \frac{v_i \frac{\partial g}{\partial v_i}(v_0, v_1)}{g(v_0, v_1)} \right| < \zeta, \quad (i = 0, 1) \text{ as } (v_0, v_1) \in \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}. \quad (14)$$

Here $0 < \zeta < \frac{|1-\sigma_0-\sigma_1|}{8}$, ζ is sufficiently small and

$$\tilde{\Delta}_{Y_i} = \begin{cases} \{[\tilde{y}_i^0, Y_i[, \text{ if } \Delta_{Y_i} = [y_i^0, Y_i[, \quad y_i^0 \leq \tilde{y}_i^0 < Y_i; \\]Y_i, \tilde{y}_i^0], \text{ if } \Delta_{Y_i} =]Y_i, y_i^0], \quad Y_i > \tilde{y}_i^0 \geq y_i^0, \end{cases} \quad i = 0, 1.$$

Let's consider the function

$$F(s_0, s_1) = \begin{pmatrix} \frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(s_0, s_1)} \\ \frac{s_1}{s_0} \end{pmatrix}$$

on the set $\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$.

Using (13) we get

$$\lim_{\substack{s_1 \rightarrow Y_1 \\ s_1 \in \tilde{\Delta}_{Y_1}}} \frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(s_0, s_1)} = \Upsilon, \quad \text{uniformly by } s_0 \in \tilde{\Delta}_{Y_0},$$

$$\Upsilon = \begin{cases} +\infty, & \text{if } Y_1 = \infty \text{ and } 1 - \sigma_0 - \sigma_1 > 0, \\ & \text{or } Y_1 = 0 \text{ and } 1 - \sigma_0 - \sigma_1 < 0, \\ 0, & \text{if } Y_1 = \infty \text{ and } 1 - \sigma_0 - \sigma_1 < 0, \\ & \text{or } Y_0 = 0 \text{ and } 1 - \sigma_0 - \sigma_1 > 0. \end{cases}$$

Let us show, that F sets one to one correspondence between the set $\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$ and the set

$$F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}) = \begin{cases} \left[\frac{|\tilde{y}_0^1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(\tilde{y}_0^0, \tilde{y}_0^1)}; \Upsilon \right) \times \Delta_0, & \text{as } \frac{|\tilde{y}_0^1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(\tilde{y}_0^0, \tilde{y}_0^1)} < \Upsilon, \\ \left(\Upsilon; \frac{|\tilde{y}_0^1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(\tilde{y}_0^0, \tilde{y}_0^1)} \right] \times \Delta_0, & \text{as } \frac{|\tilde{y}_0^1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(\tilde{y}_0^0, \tilde{y}_0^1)} > \Upsilon. \end{cases} \quad (15)$$

Here

$$\Delta_0 = \begin{cases} \left[\frac{\tilde{y}_0^1}{\tilde{y}_0^0}; Y_0^0 \right), & \text{as } \lambda_0 < 0, \frac{\tilde{y}_0^1}{\tilde{y}_0^0} < Y_0^0, \\ (Y_0^0; \frac{\tilde{y}_0^1}{\tilde{y}_0^0}], & \text{as } \lambda_0 < 0, \frac{\tilde{y}_0^1}{\tilde{y}_0^0} > Y_0^0, \end{cases} \quad (16)$$

$$Y_0^0 = \begin{cases} 0, & \text{as } Y_0 = 0, \\ -\infty & \text{as } Y_0 = 0 \text{ and } \omega < +\infty, \\ +\infty & \text{as } Y_0 = 0 \text{ and } \omega = +\infty. \end{cases}$$

Let's consider the behavior of the function $\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(s_0, s_1)}$ on straight lines

$$s_0 = ks_1, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (17)$$

On every such line we have $\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(s_0, s_1)} = \frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(ks_1, s_1)}$. Taking into account (14) we obtain, that

$$\text{sign} \left(\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(ks_1, s_1)} \right)'_{s_1} = \text{sign}(y_1^0(1 - \sigma_0 - \sigma_1)).$$

Therefore the function $\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(ks_1, s_1)}$ is strongly monotone on every line of the type (17). Let suppose, that the correspondence F is not a one to one type. Then

$$\exists (p_0, p_1), (q_0, q_1) \in \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}, \quad (p_0, p_1) \neq (q_0, q_1) : \quad F(p_0, p_1) = F(q_0, q_1).$$

Taking into account the definitions of the sets $\tilde{\Delta}_{Y_0}, \tilde{\Delta}_{Y_1}$, the last equality means, that

$$\frac{|p_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(p_0, p_1)} = \frac{|q_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(q_0, q_1)}, \quad \frac{p_0}{p_1} = \frac{q_0}{q_1} = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (18)$$

So, the points (p_0, p_1) and (q_0, q_1) lie on a line of the type (17). But in this case equalities (18) can not take place, because the function $\frac{|s_1|^{1-\sigma_0-\sigma_1}}{g(s_1, cs_1)}$ is strongly monotone on the line. Therefore, there exists the inverse function $F^{-1} : F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}) \rightarrow \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$. Taking into account the character of the function F , we have

$$F^{-1}(w_0, w_1) = \begin{pmatrix} F_1^{-1}(w_0, w_1) \\ F_0^{-1}(w_0, w_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^{-1}(w_0, w_1) \\ \frac{1}{w_0} F_1^{-1}(w_0, w_1) \end{pmatrix}.$$

Since by (14) Jakobian of the function F is different from zero as $(s_0, s_1) \in \tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}$, the function F^{-1} is continuously differentiable on $F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1})$.

Let

$$\begin{cases} \frac{|y'(t)|^{1-\sigma_0}}{\varphi_1(y') \exp(R(|\ln |y(t)||, |\ln |y(t)y'(t)||))} = (1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_0(t) \text{sign}(y') [1 + z_1(x)], \\ \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} [1 + z_2(x)], \end{cases} \quad (19)$$

where

$$x = \beta \ln |\pi_\omega(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{as } \omega = +\infty, \\ -1 & \text{as } \omega < \infty, \end{cases}$$

we can reduce the equation (1) to the system

$$\begin{cases} z_1' = \beta G_0(x) [1 + z_1] \left(\left(1 - \sigma_0 - \sigma_1 - \frac{\Psi_1(x, z_1, z_2) L_1'(\Psi_1(x, z_1, z_2))}{L_1(\Psi_1(x, z_1, z_2))} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{K_1(x, z_1, z_2)}{[1 + z_1][1 + z_2]^{\sigma_0}} - K_2(x, z_1, z_2) \frac{V(x)}{G_0(x)} \left(1 + \frac{K_1(x, z_1, z_2) G_0(x)}{[1 + z_1][1 + z_2]^{\sigma_0-1}} \right) - 1 \right), \\ z_2' = \beta [1 + z_2] \left(\frac{G_0(x) K_1(x, z_1, z_2)}{(1 - \sigma_0 - \sigma_1) [1 + z_1][1 + z_2]^{\sigma_0}} - z_2 \right), \end{cases} \quad (20)$$

where

$$\Psi_0(x, z_1, z_2) = F_0^{-1} \left((1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_0(t(X)) [1 + z_1(x)], \frac{1}{\pi_\omega(t(x))} [1 + z_2(x)] \right),$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(x, z_1, z_2) &= F_1^{-1} \left((1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_0(t(x)) [1 + z_1(x)], \frac{1}{\pi_\omega(t(x))} [1 + z_2(x)] \right), \\
 V(x) &= \sum_{i=0}^1 \gamma_i |\ln |\pi_\omega(t)||^{\gamma_i-1} \frac{\partial R}{\partial y_i} (|\ln |\pi_\omega(t)||, |\ln |\pi_\omega(t)||) \\
 G_0(x) &= \frac{\pi_\omega(t(x)) I_0'(t(x))}{I_0(t(x))}, \\
 K_1(x, z_1, z_2) &= \frac{\Theta_0(\Psi_0(t(x), z_1, z_2))}{(1 - \sigma_0 - \sigma_1) \Theta_0(|\pi_\omega(t(x))| \text{sign} y_0^0)}, \\
 K_2(x, z_1, z_2) &= \\
 &= \frac{\sum_{i=0}^1 \gamma_i |\Psi_i(t(x), z_1, z_2)|^{\gamma_i-1} \frac{\partial R}{\partial y_i} (|\ln |\Psi_0(t(x), z_1, z_2)||, |\ln |\Psi_0(t(x), z_1, z_2)||) \Psi_1(t(x), z_1, z_2)|)}{V(x)}.
 \end{aligned}$$

By (5) it is clear, that

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{1}{\pi_\omega(t)} = Y_1.$$

Moreover, it follows from the first and the second of conditions (7), that

$$\lim_{t \uparrow \omega} (1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_0(t) = \Upsilon.$$

Therefore, we can choose $t_0 \in [a, \omega[$ in such a form, that

$$\left(\begin{array}{c} (1 - \sigma_0 - \sigma_1) I_0(t) [1 + z_1(x)] \\ \frac{1}{\pi_\omega(t)} [1 + z_2(x)] \end{array} \right) \in F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1}) \text{ при } t \in [t_0, \omega[, |z_i| \leq \frac{1}{2}, i = 1, 2.$$

Then we consider the system of differential equations (20) on the set

$$\Omega = [x_0, +\infty[\times D, \text{ где } x_0 = \beta \ln |\pi_\omega(t_0)|,$$

$$D = \{(z_1, z_2) : |z_i| \leq \frac{1}{2}, i = 1, 2\}.$$

Let's rewrite the system in the form

$$\begin{cases} z_1' = G_0(x)(A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + R_1(x, z_1, z_2) + R_2(z_2)), \\ z_2' = A_{21}z_1 + A_{22}z_2 + R_3(x, z_1, z_2) + R_4(z_2), \end{cases} \quad (21)$$

where

$$A_{11} = A_{22} = -\beta, \quad A_{12} = -\beta\sigma_0, \quad A_{21} = 0,$$

$$R_1(x, z_1, z_2) = -\beta[1 + z_1] \left(K_2(x, z_1, z_2) \frac{V(x)}{G_0(x)} \left(1 + \frac{K_1(x, z_1, z_2)G_0(x)}{(1 + z_1)(1 + z_2)^{\sigma_0 - 1}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{K_1(x, z_1, z_2)}{(1 + z_1)|1 + z_2|^{\sigma_0}} \frac{\Psi_1(x, z_1, z_2)L'_1(\Psi_1(x, z_1, z_2))}{L_1(\Psi_1(x, z_1, z_2))} \right) + \beta \frac{|K_1(x, z_1, z_2)|(1 - \sigma_0 - \sigma_1) - 1}{|1 + z_2|^{\sigma_0}},$$

$$R_2(z_2) = \beta(|1 + z_2|^{-\sigma_0} + \sigma_0 z_2),$$

$$R_3(x, z_1, z_2) = \beta \frac{[1 + z_2]G_0(x)K_1(x, z_1, z_2)}{(1 - \sigma_0 - \sigma_1)[1 + z_1][1 + z_2]^{\sigma_0}}, \quad R_4(z_2) = -\beta z_2^2.$$

For $(w_0, w_1) \in F(\tilde{\Delta}_{Y_0} \times \tilde{\Delta}_{Y_1})$ the next equality

$$\frac{|F_1^{-1}(w_0, w_1)|^{1 - \sigma_0 - \sigma_1}}{g(F_0^{-1}(w_0, w_1), F_1^{-1}(w_0, w_1))} = w_1,$$

takes place. Since (14), (5) and the second of conditions (6), it follows from this equality, that as $i = 0, 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi_i(t(x), z_1, z_2) = Y_i \text{ uniformly by } (z_1, z_2) \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

Therefore by (12) we have

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Psi_1(t(x), z_1, z_2)L'_1(\Psi_1(t(x), z_1, z_2))}{L_1(\Psi_1(t(x), z_1, z_2))} = 0 \text{ uniformly by } (z_1, z_2) \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]. \quad (22)$$

Moreover, it follows from the properties of the function F by conditions (5)-(7), that the function $\Psi_1(t, z_1, z_2)$ is a slowly varying function as $t \uparrow \omega$ uniformly by $(z_1, z_2) \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. Since

$$\Psi_0(t, z_1, z_2) = \frac{\pi_\omega(t)\Psi_1(t, z_1, z_2)}{1 + z_2},$$

and the function φ_0 together with the logarithmic function satisfy the condition S , we have

$$\lim_{x \rightarrow \infty} K_1(x, z_1, z_2) = \frac{1}{1 - \sigma_0 - \sigma_1} \text{ uniformly by } (z_1, z_2) \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} K_2(x, z_1, z_2) = 1 \text{ uniformly by } (z_1, z_2) \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]. \quad (24)$$

Since the function R is regularly varying on infinity of the order μ , and $0 < \mu < 1$, we obtain

$$\lim_{t \uparrow \omega} R'(|\ln |\pi_\omega(t)||) = 0. \quad (25)$$

It follows from the third of conditions (7), that

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G_0(x) = 0. \quad (26)$$

By (6) and (22)–(26) we get as $i = 2, 4$ the next limit relations

$$\lim_{|z_1|+|z_2| \rightarrow 0} \frac{R_i(z_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0 \text{ uniformly by } x : x \in]x_0, +\infty[,$$

and as $i = 1, 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R_i(x, z_1, z_2) = 0 \text{ uniformly by } z_1, z_2 : (z_1, z_2) \in D.$$

By the definition of the function G_0 it is clear, that $\int_{x_0}^{\infty} G_0(x) dx = \infty$.

So, for the system of differential equations (21) all conditions of theorem 2.8 from [2] are fulfilled. According to this theorem, the system (21) has at least one solution $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2 (x_1 \geq x_0)$, that tends to zero as $x \rightarrow +\infty$. By (19) and (20) this solution is corresponded by such solution y of the equation (1), that admit asymptotic representations (8) as $t \uparrow \omega$. By the representations and (1) it is clear that the obtained solution is indeed $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solution. The theorem is proved in a whole.

CONCLUSION

For differential equations with new class of nonlinearity close regularly varying as arguments tend to critical points, necessary and sufficient conditions of existence of one class of critical solutions were found. Asymptotic representations for such solutions to such equations and their first order derivatives are also established.

Білозерова М. О.

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ РОЗВ'ЯЗКІВ З ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ ПОХІДНИМИ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Резюме

Для істотно нелінійних диференціальних рівнянь, що є в деякому сенсі близькими до рівнянь типу Емдена-Фаулера було знайдено необхідні та достатні умови існування одного класу особливих розв'язків. Також отримано асимптотичні зображення для таких розв'язків та їх похідних першого порядку.

Ключові слова: диференціальні рівняння, асимптотика, повільно змінні розв'язки, правильно змінні нелінійності, нелінійні диференціальні рівняння, повільно змінні похідні.

REFERENCES

1. E. Seneta, "Regularly Varying Functions", Lecture notes in Mathematics 508. SpringerVerlag, Berlin Heidelberg New York, 113 p (1976)
2. V. M. Evtukhov, A. M. Samoilenko, "Conditions for the existence of vanishing at a singular point of real solutions of non-autonomous systems of quasi-linear differential equations", *Ukr. Mat. J.*, **62**, No. 1, 52–80 (2010).
3. Bilozeroва М.А., Gerzhanovskaya G.A. Asymptotic representations of solutions with slowly varying derivatives of essentially nonlinear ordinary differential equations of the second order. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*. 2019. V. 77. P. 1– 12.
4. G. A. Gerzhanovskaya "Asymptotic representations of rapidly varying solutions of essential nonlinear differential equations of the second order" *Nonlinear oscillations*, **20**, No. 3, 329–345 (2017)

ХРОНІКА

Пам'яті професора Варбанця Павла Дмитровича



Одеська математична школа у представництві Одеського національного університету імені І. І. Мечникова (Імператорський Новоросійський університет (1865-1917), Новоросійський університет (1917-1920), Одеський державний університет імені І. І. Мечникова (1920-2000) завжди вважалася однією з найкращих. На теренах

університету працювало багато відомих науковців-математиків. Серед них: С. О. Шатуновський, В. Ф. Каган, Г. М. Фіхтенгольц, І. М. Занчевський, Н. Г. Чеботарьов, Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн, Б. Н. Делоне, М. А. Наймарк, Д. П. Мільман, М. С. Лівшиц, І. Ц. Гохберг, Б. Я. Левін, В. П. Шмультян, А. П. Артьоменко, В. М. Адамян, Г. Алексеевич, В. І. Слешинський, В. А. Циммерман, Б. С. Мітягін, Ю. А. Смекалков. Представником радянської теоретико-числової математичної школи, а також єдиним представником української теоретико-числової математичної школи був Варбанець Павло Дмитрович.

Павло Дмитрович Варбанець народився 18 листопада 1936 р. в Одесі у родині болгарських переселенців, які проживали в селі Катаржино Одеської області. В 2007 р. до 200 річчя народження села болгарський журналіст Олександр Візіров випустив фотоальбом «Катаржино» (Одеса, "Чорномор'я"), в якому наведені дані щодо трьох представників цієї родини – Варбанець Павла Дмитровича, його рідної сестри Варбанець Людмили Дмитрівни, їх троюрідного брата Варбанець Валерія Пилиповича, відомого в Одесі хірурга-проктолога, кандидата медичних наук, син якого Варбанець Сергій Валерійович, є відомим в Україні кардіохірургом. Батько Варбанець Дмитро Костянтинович (1906-1996 рр.) був талановитою людиною: маючи п'ятикласну освіту, він працював начальником статистичного обліку будівництва в одному з таборів, де відбував строк ув'язнення

в 30-ті рр. Мати Варбанець Надія Миколаївна (1907-1999 рр.) все своє життя присвятила дітям. Тож вихованням П. Д. Варбанця, як і його брата і сестри, займалася мати. Саме завдяки ній старший брат Костянтин Дмитрович Варбанець (1929-2015 рр.) став кандидатом економічних наук, а сестра Людмила Дмитрівна Варбанець (1940 р. н.) – доктор біологічних наук, професор, зав. відділом біохімії мікроорганізмів Інституту мікробіології і вірусології НАН України (Київ), лауреат державної премії в області науки і техніки в 2009 р., лауреат премії ім. Д. К. Заболотного, має ряд почесних грамот, зокрема Верховної ради України за внесок у розвиток біологічної науки. Дружина П. Д. Варбанця – Світлана Костянтинівна Варбанець (1945 р. н.) фахівець у галузі «Автоматика та телемеханіка» до 2021 року працювала в галузі обчислювальної математики, викладаючи комп'ютерні дисципліни в Одеському коледжі транспортних технологій (колишньому Одеському технікумі залізничного транспорту імені Ф. Е. Дзержинського). Син Варбанець Сергій Павлович (1983 р. н.) – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь з жовтня 2023 р. (2006-2007 рр. – кафедра математичного забезпечення комп'ютерних систем; 2009-2023 рр. – кафедра комп'ютерної алгебри та дискретної математики), в 2010 році захистив кандидатську дисертацію на тему «Генерування послідовностей інверсних конгруентних псевдовипадкових чисел» (спеціалізована вчена рада, Д 26.001.18, Київського національного університету імені Тараса Шевченка), а в 2021 році – докторську дисертацію «Метод тригонометричних сум в теорії конгруентних генераторів псевдовипадкових чисел та асимптотичних задачах теорії чисел» (спеціалізована вчена рада, Д 26.001.18, КНУ імені Тараса Шевченка).

У 1959 р. П. Д. Варбанець з відзнакою закінчив Одеський державний університет ім. І. І. Мечникова (нині Одеський національний університет імені І. І. Мечникова), його науковими керівниками були Г. М. Мірак'ян та М. І. Гаврилов. По закінченню університету, Павла Дмитровича Варбанця, як найкращого студента Одеського університету було запропоновано додати до списку тих, кого обирали до аспірантури Інституту математики АН СРСР ім. В. О. Стеклова (згодом до переліку був доданий ще один майбутній відомий математик – Сергій Петрович Новіков). І відомим є той факт, що на той час академік І. М. Виноградов, будучи ключовим

науковим співробітником інституту з правом відбору аспірантів і керівництва їх науковою підготовкою, зокрема в області теорії чисел, особисто обрав Варбанця Павла Дмитровича до свого відділу. Математичний шлях Павла Дмитровича, як науковця в Одеському університеті, починався з математичного аналізу та диференціальних рівнянь. Однак історична випадковість визначила його остаточний напрям математичного інтересу – аналітична теорія чисел. Поступаючи до аспірантури Інституту математики АН СРСР ім. В. О. Стеклова, Павло Дмитрович висловив бажання навчатися під керівництвом професора Постнікова. Однак на той час в інституті працювали два науковці – М. М. Постніков і А. Г. Постніков. Тож, волею долі, Павло Дмитрович був розподілений до відділу прикладної математики. Навчання в аспірантурі Інституту математики АН СРСР ім. В. О. Стеклова під керівництвом видатних вчених академіка І. М. Виноградова та професора А. Г. Постнікова визначило подальший шлях П. Д. Варбанця. У 1967 р. він захистив кандидатську дисертацію за темою "Аналітична теорія порівнянь за модулем, рівним степені простого числа". Вже тоді він виказував прагнення до пошуку застосувань аналітичної теорії чисел у різних галузях знань. Так, у 60-ті рр. П. Д. Варбанець виконав дослідження в галузі теорії кодування, а в 1976-1986 рр. взяв участь у розробці методів розпізнавання спадкових захворювань людини, також досліджував вплив полімерних матеріалів на здоров'я людини, розробляв методи статистичного аналізу у фонетичних дослідженнях. Результати його досліджень також були використані в організації логістичних процесів Одеського порту, а також такій галузі, як судова експертиза.

В Одеському університеті Павло Дмитрович працював з 1962 р. спочатку асистентом, старшим викладачем, з 1972 р. – доцентом, а з 1978 р. завідувачим кафедри алгебри та теорії чисел. З середини 1970х років П. Д. Варбанець став використовувати свої знання в прикладних задачах математики. В цей період він успішно співпрацював з науковцями лабораторії експериментальної фонетики Одеського державного університету (керівник лабораторії проф. Т. О. Бровченко). Результатом співпраці стала монографія «Методи математичної статистики в експериментальній фонетичі» (автори Т. О. Бровченко, П. Д. Варбанець, В. Г. Таранець). Наприкінці 1970х років, при співробітництві з відомим вченим доктором медичних наук, академіком Б. Я. Резником, П. Д. Варбанець запропонував побудовані

ним діагностичні таблиці розпізнавання характеру захворювання (спадковий або придбаний). Цей метод був підтверджений на практиці в одній з одеських лікарень, коли скептичні до математики медики запропонували протестувати його на декількох пацієнтах, одною з яких була маленька дівчинка. Нажаль, пацієнтка мала важку хворобу і метод професора Варбанця показав, що вона має померти за тиждень, на що медики були спантеличені, тому що за історією хвороби стан дівчинки був поліпшений. І через тиждень дівчинка була ще живою. Це спричинило ще більшу недовіру медичного світу до математики, що виражалося цитатою «ваша математика – брехлива наука», кинutoю на адресу Павла Дмитровича. Але наступного дня дівчинка померла, що підтвердило результативність методу і можливість існування певних, але незначних, похибок при будь-якому обчисленні. Пізніше метод діагностичних таблиць застосовувався і в інших задачах розпізнавання образів (наприклад, в Одеській лабораторії токсикології інституту гігієни водного транспорту, керівник – доктор медичних наук Л. М. Шафран). За допомогою того ж методу діагностичних таблиць були побудовані ефективні методики по використанню полімерних матеріалів у замкненому середовищі. Під керівництвом П. Д. Варбанця в цих розробках приймали участь і інші співробітники кафедри (Г. С. Белозьоров, С. В. Федоровський, В. К. Булітко).

Павла Дмитровича ніколи не цікавило прагнення до будь-яких посад, звань чи регалій. Його головною життєвою метою була наука, прагнення до отримання нових і покращення існуючих результатів та пошуку їх практичних застосувань. Тому у 1995 р. за наполегливою пропозицією молодшої сестри, вже на той час доктора біологічних наук, Варбанець Людмили Дмитрівни, Павло Дмитрович подав до розгляду свою наукову працю у спеціалізованій вченій раді Д01.01.01 Київського державного університету ім. Тараса Шевченка і захистив докторську дисертацію "Асимптотичні задачі теорії чисел" (опоненти – академік І. Катаі (Будапешт), професори В. І. Берник (Мінськ) та І. В. Протасов (Київ)). Цим він проклав шлях в цій вченій раді для захисту значної частини його аспірантів, а також його сина, який там захищав як кандидатську, так і докторську дисертації.

Велику роль в формуванні наукової направленості П. Д. Варбанця відіграло його наукове стажування в університеті ім. Е. Лоранда (Будапешт), де він мав можливість спілкуватися з видатними математиками ХХ ст. П.

Тураном, А. Реньї, П. Ердешем, І. Катаї (1969-1970).

П. Д. Варбанець більш, ніж 65 років пропрацював в Одеському національному університеті імені І. І. Мечнікова, 46 років з яких – завідувачим кафедрою. П. Д. Варбанець був ведучим і єдиним спеціалістом з аналітичної теорії чисел в Україні, а кафедра, що він очолював, була єдиною в Україні, де готували фахівців з аналітичної теорії чисел. За пропозицією П. Д. Варбанця в Інституті математики ОДУ ім. І. І. Мечнікова був створений факультет інформативних технологій на стику математики і комп'ютерних спеціальностей, а кафедру алгебри та теорії чисел він очолював і дав назву комп'ютерної алгебри та дискретної математики (2004). Під такою назвою кафедра плідно працювала протягом 20 років, до восени 2023 р., коли вона була об'єднана з іншою кафедрою із загальною назвою кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь. Слово комп'ютерна було викреслено, хоча саме Павло Дмитрович наполягав, що в сучасному світі співіснування математики і інформаційних технологій є невід'ємною складовою прогресу. Більш того, саме «Комп'ютерна алгебра», як виключно математична наука, тим не менш підкреслювала важливість і невід'ємність математичних наук, як фундаментальних гвинтиків в існуванні сучасних інформаційних систем. Павло Дмитрович був автором багатьох курсів, які доводили цю тезу, зокрема, таких курсів, як «Комп'ютерна алгебра», «Криптографія», «Криптологія», «Теорія інформації і кодування», «Прикладна теорія цифрових автоматів», «Лінгвостатистика», «Комп'ютерна лінгвістика» і багато інших. На цій кафедрі П. Д. Варбанець встиг попрацювати декілька місяців. П. Д. Варбанець до травня 2024 року був членом Спеціалізованої вченої ради по захисту докторських дисертацій (Д41.051.04) в інституті математики НАН України, Спеціалізованої вченої ради Одеського національного університету імені І. І. Мечнікова (К41.051.05). Також включно до травня 2024 року був членом редколегії Українського математичного журналу, членом редколегії журналу *Annales Universitatis Scientiarum Budapest, Sectio Computatorica* (Budapest Eötvös Loránd University) (Hungary) та членом редколегії журналу *Research in Mathematics and Mechanics* (ОНУ імені І. І. Мечнікова). П. Д. Варбанець володів англійською, міг спілкуватися угорською та болгарською мовами. Він багато років брав участь у багатьох міжнародних та вітчизняних конференціях та конгресах, а в де-

яких був співорганізатором або входив у програмний комітет. Зокрема, він приймав участь в математичних конгресах у 1966 та 1978 рр., 2-му Європейському математичному конгресі у 1996 р., в двох конгресах болгарських математиків та ін. У 80-х роках навіть приймав участь у міжнародному медичному конгресі, де за проханням академіка Б. Я. Резніка представив їх спільну роботу, зокрема розроблений ним метод діагностичних таблиць розпізнавання характеру захворювання, за що отримав оплески стоячі від усіх учасників. Був постійним учасником наступних періодичних конференцій: Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (Україна), International Conference in Honour of professor J. Kubilius (Литва), International Conference dedicated to professor A. Laurincikas (Литва), International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations (Україна), Український математичний конгрес (Україна), International Algebraic Conference in Ukraine (Україна), International Algebraic Conference "At the End of the Year" (Україна), Numbers, Functions, Equations (Угорщина), The International Conference "Chaotic Modeling and Simulation" (Греція, Туреччина, Португалія, Велика Британія, Франція), The International Conference dedicated to the anniversaries of Stefan Banach (Україна) Vilnius International Conference on Probabilistic Theory (Литва), The International Algebraic Conference dedicated to the anniversaries of L.A. Kaluzhnin (Україна), International Conference on Computer Algebra and Information Technologies (Україна), XII Белорусская математическая конференция (Беларусь), International Conference Groups and Actions: Geometry and Dynamics (Україна). В Одеському національному університеті був керівником створених ним наукових семінарів. Зокрема, «Одеський міський семінар по теорії графів», «Семінар з аналітичної теорії чисел Одеського національного університету імені І. І. Мечникова».

За часи своєї наукової діяльності П. Д. Варбанець встиг підготувати велику кількість аспірантів. Під його керівництвом було випущено більше 25 кандидатів фізико-математичних наук як з України, так і інших держав, зокрема Польщі, Іраку, В'єтнаму, Узбекистану та Німеччини. Також до останнього він співпрацював із своїм докторантом Воробйовим Я. А., але через життєві обставини, не встиг довести це до кінця.

Співпрацював з багатьма університетами та науково-дослідними інститутами світу, зокрема з Будапештським університетом ім. Етвеша Лоранда,

Інститутом математики Угорщини, Вільнюським та Шауляйським університетами (Литва), Інститутом математики Польської академії наук у Варшаві, із багатьма науково-дослідними інститутами та університетами країн колишнього радянського союзу. Тісно співпрацював з багатьма українськими науково-дослідними інститутами та університетами, зокрема, з Інститутом математики НАН України, Київським національним університетом ім. Тараса Шевченка, Національним педагогічним університетом імені М.П. Драгоманова, Луганським національним університетом імені Тараса Шевченка, Харківським національним університетом імені В. Н. Каразіна, Донецьким національним університетом імені Василя Стуса, Львівським національним університетом імені Івана Франка, Прикарпатським національним університетом імені Василя Стефаника, Інститутом кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Національним технічним університетом України «КПІ Вінницьким національним технічним університетом, Київським національним авіаційним університетом, Ізмаїльським державним гуманітарним університетом, Одеським національним політехнічним університетом, Одеським національним педагогічним університетом ім. К. Д. Ушинського, Одеським національним медичним університетом. Важливе значення для алгебри та теорії чисел мають дослідження Варбанця П. Д. з розподілу цілих точок на різних поверхнях, зокрема, його дослідження проблеми кола в арифметичній прогресії та розподілення цілих точок на круговому конусі. Він займався дослідженнями проблеми дільників в арифметичній прогресії. Також значними були його результати в дослідженні тригонометричних сум та застосуванні методу тригонометричних сум в різноманітних прикладних задачах. Останні 15 років свого життя він, зокрема, присвятив питанню побудови послідовностей псевдовипадкових чисел, розробці відповідних генераторів та застосуванню методу тригонометричних сум щодо оцінки якості побудованих послідовностей, покращуючи існуючі результати та отримуючи нові і навіть деякі непокрацзовані. Ці результати мають пряме застосування в питаннях захисту інформації, а також мають значний вплив на криптографічні застосування. П. Д. Варбанцем було опубліковано більше 200 наукових статей як в провідних міжнародних виданнях, так в наукових фахових виданнях України. Павло Дмитрович був світлою ерудованою людиною з доволі тонким іскрометним гумором. Відомо, що він був одним з пер-

ших капітанів команди в одеському клубі веселих і кмітливих, який на теренах колишнього радянського союзу і навіть після розпаду останнього історично став прообразом відомого об'єднання студентів, викладачів і науковців, які в змаганнях демонстрували таланти швидкого створення гумористичних вистав на будь-який несподіваний запит глядачів цих змагань. Далеко за межами одеського університету і до нині відомими є багато його філософських, цікавих і часто гумористичних висловів, що він видавав під час занять. Одним із таких висловів, коли Павло Дмитрович пояснював щось доволі просте і очевидно, було «ясно і їжаку». Студентки жіночої статі неодноразово демонстрували своє відношення до улюбленого викладача, таємно пишучи на стінах університету вислови «Варбанець, я Вас люблю!». Всі, кому хоч раз в житті вдалося поспілкуватися із Павлом Дмитровичем, завжди згадують ці спілкування і зустрічі з ним лише теплими словами. Особливими хобі Варбанця Павла Дмитровича були шахи, футбол і баскетбол. Ще в дитинстві власноруч він вирізав свої перші шахи та зробив шахову дошку. Любов до шахів привела його до одеського шахового клубу «Буревісник», де згодом він отримав звання кандидата в майстри спорту з шахів. Ця любов залишилася із Павлом Дмитровичем до останніх днів. Саме гра в шахи дозволяла відпочивати поміж наукової та викладацької роботи. Відомою є його гра в шахи навіть по телефону без шахів і ті факти, що за все своє життя він не програв жодної партії жодному гросмейстеру, з якими йому довелося грати (виграючи партії або доводячи їх до нічії), і лише одну партію в своєму житті він уступив одному зі своїх друзів. П. Д. Варбанець мав ще багато ідей, які він не встиг втілити в життя. 11 травня 2024 року в результаті серцевого нападу, а також недостатнього професіоналізму місцевих лікарів і неможливості у зв'язку із станом здоров'я транспортування в міську лікарню Одеси або Києва, в палаті інтенсивної терапії радіологічного відділення Дунайської обласної лікарні м. Ізмаїл Одеської області поряд із сином і дружиною перестало битися його серце. До останніх хвилин свого життя Павло Дмитрович працював в повній свідомості, розмірковуючи про нові результати, які він планував опублікувати після одужання. Вмираючи, він попросив свого сина, Варбанця Сергія Павловича, прочитати дві його останні лекції, видав розпорядження щодо студентів і аспірантів, а також взяв обіцянку продовжити його наукову і педагогічну діяльність, якій

Павло Дмитрович присвятив своє життя – теорії чисел, а також її застосувань в криптографії та комп'ютерній алгебрі, і ніколи не зупинятися в пошуках застосувань математичних теорій. У 2024 році разом угорськими та литовськими колегами математиками буде опублікований збірник наукових праць *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eotvos Nominatae, Section Computatorica, volume 57*, присвячений пам'яті Павла Дмитровича. На прощанні з Павлом Дмитровичем виступили ряд його колег, які відмітили значення його наукових результатів для розвитку вітчизняної та світової математики і тих областей, де він залишив свій науковий слід. Із зворушливою промовою виступив колишній ректор Міжнародного гуманітарного університету (Одеса), професор Микола Павлович Коваленко, який відмітив, що Павло Дмитрович посідає почесне місце серед видатних математиків, які працювали в Одеському національному університеті імені І. І. Мечникова, тому доцільно було б подбати про відкриття в університеті меморіальної дошки в пам'ять про Павла Дмитровича Варбанця.

Видатні наукові здобутки Павла Дмитровича продовжують розвиватися та втілюватися в нових дослідженнях його великої наукової родини, а ім'я Павла Дмитровича Варбанця назавжди залишиться в історії світової математичної науки.

Варбанець С. П.

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ (скорочений варіант)

Журнал «Дослідження в математиці і механіці» має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень, огляди з актуальних проблем за тематикою видання, а також повідомлення про ювілеї, знаменні дати та події.

Статті публікуються українською або англійською мовою.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Електронну версію рукопису слід надсилати на e-mail журналу

rmm-journal@onu.edu.ua

або завантажувати через сайт журналу

www.rmm-journal.onu.edu.ua

Вона повинна складатися з

- 1) вихідного $\text{\TeX}$ -файла,
- 2) PDF-файла,
- 3) всіх допоміжних файлів (графіки, рисунки, ілюстрації тощо),
- 4) документа з анкетними даними авторів (прізвище, ім'я, по батькові, місце роботи, e-mail, адреса для листування та телефон).

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи $\text{\LaTeX}$ відповідно до вимог та з використанням шаблону, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті. Також вимоги можна отримати в редакційній колегії журналу.

Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 25 сторінок.

Структура статті:

- УДК;
- список авторів;
- місце роботи авторів;
- назва статті;
- резюме мовою оригіналу обсягом не менше 100 слів;
- Mathematical Subject Classification (2010);

- список ключових слів мовою оригіналу;
- основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України «Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України» від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується подана стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером у квадратних дужках;
- список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформлюється відповідно до Державного стандарту України ДСТУ 7.1:2006 «Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання» та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008);
- анотація іншою мовою повинна містити назву, список авторів, резюме обсягом не менше 100 слів та список ключових слів;
- додатково, якщо стаття написана українською мовою, після анотації англійською мовою додається список літератури у транслітерації, оформлений у відповідності до міжнародного стандарту *Harvard* (зразок та правила оформлення можна знайти в шаблоні статті на сайті).

Усі надіслані статті проходять анонімне рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу «Дослідження в математиці і механіці».

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, зокрема й у співавторстві.

Редакційна колегія журналу
«Дослідження в математиці і механіці»
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Змієнка Всеволода, 2
м. Одеса, 65082

Українською та англійською мовами

Згідно з Рішенням Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення № 1407 від 26.06.2025 р. журнал зареєстрований як друковане медіа і внесений до Реєстру суб'єктів у сфері медіа з ідентифікатором R30-06164.

Затверджено до друку вченою радою
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова
Протокол № 6 від 17 грудня 2024 р.

Відповідальний за випуск *О. О. Максимов*
Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*
Технічний редактор *М. М. Бушин*

Наклад 100 пр. Зам. № 337(78).

Адреса редколегії:
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Видавництво і друкарня «Астропринт»
вул. Разумовська, 21, м. Одеса, 65091, Україна
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
astro_print@ukr.net

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Дослідження в математиці і механіці. — 2024. — Т. 29, вип. 2(44). —
С. 1–94.