



ДОСЛІДЖЕННЯ
в МАТЕМАТИЦІ
і МЕХАНІЦІ

RESEARCHES
in MATHEMATICS
and MECHANICS

Том 29. Випуск 1(43).

Volume 29. Issue 1(43).

2024

ISSN 2519–206X

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ДОСЛІДЖЕННЯ В МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

Науковий журнал

Виходить 2 рази на рік

Журнал заснований у січні 1997 р.

Том 29. Випуск 1(43). 2024

Одеса
«Астропринт»
2024

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

Редакційна колегія журналу

Головний редактор — О. М. Станжицький, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Заступник головного редактора — В. М. Євтухов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Відповідальний редактор — О. Д. Кічмаренко, д. ф.-м. н., доц. (Україна)

A. Alifov, д. ф.-м. н., проф. (Азербайджан)

A. Ashyralyev, д. ф.-м. н., проф. (Туреччина)

S. Dashkovskiy, Dr. habil., проф. (Німеччина)

F. Iacoviello, PhD, проф. (Італія)

I. T. Kiguradze, д. ф.-м. н., проф. (Грузія)

С. К. Асланов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Н. Д. Вайсфельд, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Д. В. Дмитришин, д. т. н., проф. (Україна)

A. A. Дороговцев, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. В. Капустян, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

П. І. Когут, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Ан. О. Кореновський, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. Ф. Кривий, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

В. Є. Круглов, к. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. Меньшиков, д. ф.-м. н., проф. (Шотландія)

A. В. Плотніков, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

В. Г. Попов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Н. В. Скрипник, д. ф.-м. н., доц. (Україна)

І. М. Черевко, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Відповідальний за випуск — О. О. Максимов

Згідно з Рішенням Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення № 1407 від 26.06.2025 р. журнал зареєстрований як друковане медіа і внесений до Реєстру суб'єктів у сфері медіа з ідентифікатором R30-06164.

Журнал внесений до переліку наукових фахових видань наказами Міністерства освіти і науки України № 527 від 24.05.2018 р. та № 775 від 16.07.2018 р.

ISSN 2519–206X

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Scientific journal

Published twice a year

Journal founded in January, 1997

Volume 29. Issue 1(43). 2024

Odesa
«Astroprint»
2024

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

Editorial board of the journal

Editor-in-chief — O. M. Stanzhytskyi, DSc, Prof. (Ukraine)

Deputy Editor-in-chief — V. M. Evtukhov, DSc, Prof. (Ukraine)

Executive Editor — O. D. Kichmarenko, DSc, Assoc. Prof. (Ukraine)

A. Alifov, DSc, Prof. (Azerbaijan)

A. Ashyralyev, DSc, Prof. (Turkey)

S. K. Aslanov, DSc, Prof. (Ukraine)

I. M. Cherevko, DSc, Prof. (Ukraine)

S. Dashkovskiy, Dr. habil., Prof. (Germany)

D. V. Dmitrishin, DSc, Prof. (Ukraine)

A. A. Dorogovtsev, DSc, Prof. (Ukraine)

O. V. Kapustyan, DSc, Prof. (Ukraine)

I. T. Kiguradze, DSc, Prof. (Georgia)

P. I. Kogut, DSc, Prof. (Ukraine)

An. O. Korenovskyi, DSc, Prof. (Ukraine)

V. Ye. Kruglov, PhD, Prof. (Ukraine)

O. F. Kryvyi, DSc, Prof. (Ukraine)

F. Iacoviello, DSc, Prof. (Italy)

O. Menshykov, DSc, Prof. (Scotland)

A. V. Plotnikov, DSc, Prof. (Ukraine)

V. G. Popov, DSc, Prof. (Ukraine)

N. V. Skripnik, DSc, Assoc. Prof. (Ukraine)

N. D. Vaysfeld, DSc, Prof. (Ukraine)

Publication Editor — O. O. Maksymov

According to the Resolution of the National Council of Ukraine on Television and Radio Broadcasting No 1407 dated 06.26.2025, the journal is registered as a print media and included in the Registry of Media with identifier R30-06164.

The journal is included in the List of Scientific Specialized Publications by Orders of the Ministry of Education and Science of Ukraine No 527 dated May 24, 2018, and No 775 dated July 16, 2018.

ЗМІСТ

<i>Євтухов В. М., Кольцова Л. Л.</i> Асимптотика неявних функцій на необмежених областях	7
<i>Соловійов А. А.</i> Відображення псевдоріманових просторів з напівсиметричною афінорною структурою	14
<i>Чепок О. О.</i> Асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків диференціального рівняння другого порядку, яке містить добуток різного типу нелінійностей, у деякому критичному випадку	34
<i>Покась С. М., Білозерова М. О.</i> Інфінітезимальні перетворення у ріманових просторах другого наближення	49
<i>Kusik L. I.</i> On asymptotic representations of one class solutions of second-order differential equations	64
<i>Savchenko O. G., Konovenko O. G.</i> On special 2F-planar mappings of pseudo-Riemannian spaces with f -structure	87
Інформація для авторів	103

CONTENTS

<i>Evtukhov V. M., Koltsova L. L.</i> Asymptotic behavior of implicit functions on unbounded domains	7
<i>Soloviov A. A.</i> Mappings of pseudo-Riemannian spaces with semi-symmetric affinor structure	14
<i>Chepok O. O.</i> Asymptotic representations of $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solutions of a second-order differential equation containing a product of different types of nonlinearities, in some critical case	34
<i>Pokas S. M., Bilozerova M. O.</i> Infinitesimal transformations in second-order approximation Riemannian spaces	49
<i>Kusik L. I.</i> On asymptotic representations of one class solutions of second-order differential equations	64
<i>Savchenko O. G., Konovenko O. G.</i> On special 2F-planar mappings of pseudo-Riemannian spaces with f -structure	87
Information for authors	103

УДК 517.925

В. М. Євтухов, доктор фіз.-мат. наук, професор
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
e-mail: evtukhov@onu.edu.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0000-2458-7887>

Л. Л. Кольцова, ст. викладач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра математичного аналізу
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
e-mail: koltsova.liliya@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0005-1133-676X>

АСИМПТОТИКА НЕЯВНИХ ФУНКЦІЙ НА НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

Досліджуються властивості неявної функції, заданої рівнянням $F(t, x_1, \dots, x_n, y) = 0$ у необмеженій області при $t \rightarrow +\infty$ та малих значеннях інших змінних. Ця стаття є узагальненням одного з результатів роботи [1] на багатовимірний випадок та доповнюють результати робіт [2], [3].

Доведено теорему існування та єдиності неперервної функції $y = y(t, x_1, \dots, x_n)$, яка має неперервні частинні похідні по змінним $x_1, \dots, x_n$. Встановлено ключову асимптотичну властивість $y(t, 0, \dots, 0) \sim -\frac{F(t, 0, \dots, 0)}{F_y(t, 0, \dots, 0)}$ при $t \rightarrow +\infty$.

Отримані результати є фундаментальними для асимптотичного аналізу розв'язків диференціальних рівнянь з сингулярностями на нескінченності та можуть знайти застосування в теорії динамічних систем і нелінійних коливань.

MSC: 34E05.

Ключові слова: неявна функція, необмежена область, асимптотична поведінка, сингулярність, диференціальні рівняння.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1\(43\).342062](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1(43).342062).

Вступ

Дослідження властивостей неявних функцій, що визначаються функціональними співвідношеннями, є важливим для теорії диференціальних рівнянь. Особливий інтерес представляють випадки, коли такі співвідношення розглядаються

в необмежених областях, де незалежна змінна прямує до нескінченності. У подібних ситуаціях виникають нетривіальні питання щодо існування, диференційовності та асимптотичної поведінки відповідних розв'язків на нескінченності.

У даній роботі розглядається рівняння

$$F(t, x_1, \dots, x_n, y) = 0, \quad (1)$$

де $(t, x_1, \dots, x_n, y) \in D$, $D = D_0 \times [-b; b]$, $D_0 = [a; +\infty) \times [-h_1; h_1] \times \dots \times [-h_n; h_n]$, $a, h_k, b \in \mathbb{R}$, $h_k > 0$ ($k = \overline{1, n}$), $b > 0$. На функцію F накладаються такі умови:

- (i) $F, F'_{x_k}, F''_{yy} \in C(D; \mathbb{R})$ для всіх $k = \overline{1, n}$;
- (ii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t, 0, \dots, 0) = 0$;
- (iii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} F'_y(t, 0, \dots, 0) = A_1 \neq 0$;
- (iv) $\sup_D |F''_{yy}(t, x_1, \dots, x_n, y)| = A_2 < +\infty$.

Метою роботи є доведення існування єдиної неперервної функції $y = y(t, x_1, \dots, x_n)$, яка задовольняє рівняння (1) у деякій підобласті $D_1 \subset D$, та дослідження її асимптотичної поведінки при $t \rightarrow +\infty$ і $x_k \rightarrow 0$ ($k = \overline{1, n}$).

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Для рівняння (1) має місце наступне твердження.

Теорема. *Нехай для функції F виконуються умови (i)–(iv). Тоді в деякій області $D_1 = D_{01} \times [-b_0; b_0]$, де $D_{01} = [t_0; +\infty) \times [-h_1^0; h_1^0] \times \dots \times [-h_n^0; h_n^0]$, t_0, h_k^0 ($k = \overline{1, n}$) і b_0 задовольняють нерівності $t_0 \geq a$, $0 < h_k^0 \leq h_k$, $b_0 \in (0; b_0]$, $\frac{4A_2b_0}{|A_1|} < 1$, рівняння (1) визначає єдину неперервну на множині D_{01} функцію $y = y(t, x_1, \dots, x_n)$, таку що $F(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n)) \equiv 0$, $\frac{\partial y}{\partial x_k} \in C(D_{01}; \mathbb{R})$ ($k = \overline{1, n}$), $y(+\infty, 0, \dots, 0) = 0$ і*

$$y(t, 0, \dots, 0) \sim -\frac{F(t, 0, \dots, 0)}{F'_y(t, 0, \dots, 0)} \quad (t \rightarrow +\infty). \quad (2)$$

Доведення. Оскільки функція $F(t, x_1, \dots, x_n, y)$ диференційована за змінною y при $(t, x_1, \dots, x_n) \in D_0$, то, згідно формули Тейлора із залишковим членом у формі Пеано, рівняння (1) можна записати у вигляді:

$$F(t, x_1, \dots, x_n, y) = F(t, x_1, \dots, x_n, 0) + F'_y(t, x_1, \dots, x_n, 0) \cdot y + R(t, x_1, \dots, x_n, y) = 0, \quad (3)$$

де $R(t, x_1, \dots, x_n, y) = r(t, x_1, \dots, x_n, y) \cdot y$, $r(t, x_1, \dots, x_n, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$ для будь-якої точки $(t, x_1, \dots, x_n) \in D_0$.

З (3) випливає, що $y = y(t, x_1, \dots, x_n)$ – неявна функція, яка визначається співвідношенням

$$y(t, x_1, \dots, x_n) = \frac{-F(t, x_1, \dots, x_n, 0) - R(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n))}{F'_y(t, x_1, \dots, x_n, 0)}. \quad (4)$$

Оскільки

$$R(t, x_1, \dots, x_n, y) = F(t, x_1, \dots, x_n, y) - F(t, x_1, \dots, x_n, 0) - F'_y(t, x_1, \dots, x_n, 0) \cdot y,$$

тоді

$$R'_y(t, x_1, \dots, x_n, y) = F'_y(t, x_1, \dots, x_n, y) - F'_y(t, x_1, \dots, x_n, 0).$$

Розглянемо та оцінімо при $(t, x_1, \dots, x_n) \in D_0$ і фіксованих $y_1, y_2 \in [-b; b]$ ($y_1 < y_2$) різницю $F'_y(t, x_1, \dots, x_n, y_2) - F'_y(t, x_1, \dots, x_n, y_1)$, застосувавши теорему Лагранжа за змінною y :

$$F'_y(t, x_1, \dots, x_n, y_2) - F'_y(t, x_1, \dots, x_n, y_1) = F''_{yy}(t, x_1, \dots, x_n, y^*) \cdot (y_2 - y_1),$$

де $y^* \in (y_1; y_2)$.

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} \sup_{D_0} |F'_y(t, x_1, \dots, x_n, y_2) - F'_y(t, x_1, \dots, x_n, y_1)| &\leq \\ &\leq \sup_{D_0} |F''_{yy}(t, x_1, \dots, x_n, y^*)| \cdot |y_2 - y_1| \leq \\ &\leq \sup_D |F''_{yy}(t, x_1, \dots, x_n, y)| \cdot |y_2 - y_1| = A_2 \cdot |y_2 - y_1|. \end{aligned}$$

Покладаючи $y_1 = 0$, $y_2 = y$, для будь-якого фіксованого $y \in [-b; b]$ отримаємо:

$$\sup_{D_0} |R'_y(t, x_1, \dots, x_n, y)| \leq A_2 \cdot |y|. \quad (5)$$

Аналогічно розглянемо і оцінімо при $(t, x_1, \dots, x_n) \in D_0$ і фіксованих $y_1, y_2 \in [-b; b]$ різницю $R(t, x_1, \dots, x_n, y_2) - R(t, x_1, \dots, x_n, y_1)$, застосувавши теорему Лагранжа за змінною y :

$$R(t, x_1, \dots, x_n, y_2) - R(t, x_1, \dots, x_n, y_1) = R'_y(t, x_1, \dots, x_n, y^{**}) \cdot (y_2 - y_1),$$

де $y^{**} \in (y_1; y_2)$.

Враховуючи (5) отримаємо, що

$$\begin{aligned} \sup_{D_0} |R(t, x_1, \dots, x_n, y_2) - R(t, x_1, \dots, x_n, y_1)| &\leq \\ &\leq \sup_{D_0} |R'_y(t, x_1, \dots, x_n, y)| \cdot |y_2 - y_1| \leq A_2 \cdot |y_2 - y_1|^2. \end{aligned}$$

Вважаючи $y_1 = 0$, $y_2 = y$, для будь-якого фіксованого $y \in [-b; b]$ отримаємо:

$$\sup_{D_0} |R(t, x_1, \dots, x_n, y)| \leq A_2 \cdot |y|^2. \quad (6)$$

В силу (6) та властивостей (ii), (iii) функції F існує область $D_{01} = [t_0; +\infty) \times [-h_1^0; h_1^0] \times \dots \times [-h_n^0; h_n^0]$, $D_{01} \subset D_0$, де $t_0 \geq a$, $0 < h_k^0 \leq h_k$ ($k = \overline{1, n}$), для якої:

- 1) $\sup_{D_{01}} |F(t, x_1, \dots, x_n, 0)| \leq \frac{b_0 |A_1|}{4}$, де $b_0 \in (0; b]$ та $\frac{4A_2 b_0}{|A_1|} < 1$;
- 2) $\inf_{D_{01}} |F'_y(t, x_1, \dots, x_n, 0)| > \frac{|A_1|}{2}$;
- 3) $\sup_{D_{01}} |R(t, x_1, \dots, x_n, y)| \leq \sup_{D_0} |R(t, x_1, \dots, x_n, y)| \leq A_2 \cdot |y|^2$.

Розглянемо банаховий простір B обмежених неперервних у D_{01} функцій $y(t, x_1, \dots, x_n)$ з нормою $\|y\| = \sup_{D_{01}} |y(t, x_1, \dots, x_n)|$.

У банаховому просторі B розглянемо підпростір $B_1 \subset B$ функцій $y \in B$, для яких $\|y\| \leq b_0$, і введемо на B_1 оператор

$$T(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n)) \equiv \frac{-F(t, x_1, \dots, x_n, 0) - R(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n))}{F'_y(t, x_1, \dots, x_n, 0)}. \quad (7)$$

Використовуючи принцип стислих відображень, покажемо, що $T(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n)) = y(t, x_1, \dots, x_n)$, тобто оператор T має нерухому точку $y \in B_1$.

- 1) Доведемо, що $T(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n)) \in B_1$ при $y \in B_1$.

Оскільки $y \in C(D_{01}; \mathbb{R})$, то в силу структури оператора $T \in C(D_{01}; \mathbb{R})$.

З $\|y(t, x_1, \dots, x_n)\| \leq b_0$ випливає, що

$$\begin{aligned} \|T(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n))\| &= \left\| \frac{-F(t, x_1, \dots, x_n, 0) - R(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n))}{F'_y(t, x_1, \dots, x_n, 0)} \right\| \leq \\ &\leq \frac{\left(\sup_{D_{01}} |F(t, x_1, \dots, x_n, 0)| + \sup_{D_{01}} |R(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n))| \right)}{\inf_{D_{01}} |F'_y(t, x_1, \dots, x_n, y)|} \leq \\ &\leq \frac{2}{|A_1|} \left(\frac{b_0 |A_1|}{4} + A_2 |y|^2 \right) \leq \frac{b_0}{2} + \frac{b_0}{2} \leq b_0. \end{aligned}$$

2) Перевіримо умову стискання.

Оберемо довільним чином $y_1(t, x_1, \dots, x_n), y_2(t, x_1, \dots, x_n) \in B_1$, тоді

$$\begin{aligned} \|T(t, x_1, \dots, x_n, y_2(t, x_1, \dots, x_n)) - T(t, x_1, \dots, x_n, y_1(t, x_1, \dots, x_n))\| &= \\ &= \left\| \frac{R(t, x_1, \dots, x_n, y_2(t, x_1, \dots, x_n)) - R(t, x_1, \dots, x_n, y_1(t, x_1, \dots, x_n))}{F'_y(t, x_1, \dots, x_n, 0)} \right\| \leq \\ &\leq \frac{A_2}{\inf_{D_{01}} |F'_y(t, x_1, \dots, x_n, 0)|} \|y_2(t, x_1, \dots, x_n) - y_1(t, x_1, \dots, x_n)\|^2 \leq \\ &\leq \frac{2A_2(\|y_2(t, x_1, \dots, x_n)\| + \|y_1(t, x_1, \dots, x_n)\|)}{|A_1|} \|y_2(t, x_1, \dots, x_n) - y_1(t, x_1, \dots, x_n)\| \leq \\ &\leq \frac{4A_2 b_0}{|A_1|} \|y_2(t, x_1, \dots, x_n) - y_1(t, x_1, \dots, x_n)\|. \end{aligned}$$

Тобто оператор T відображає простір B_1 у себе і є оператором стискання. Тому згідно принципу стислих відображень існує єдина функція $y = y(t, x_1, \dots, x_n) \in B_1$, така що

$$y(t, x_1, \dots, x_n) = T(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n)).$$

В силу (7) ця неперервна на множині D_{01} функція є єдиним розв'язком рівняння (4), що задовольняє умову $\|y\| \leq b_0$. З урахуванням цієї умови і оскільки $F \in C(D; \mathbb{R})$, то за локальною теоремою о диференціюванні неявної функції можна стверджувати, що $y, \frac{\partial y}{\partial x_k} \in C(D_{01}; \mathbb{R})$ ($k = \overline{1, n}$).

Доведемо, що функція $y(t, x_1, \dots, x_n)$ при $x_k = 0$ ($k = \overline{1, n}$) має властивість (2).

Функція $y(t, x_1, \dots, x_n)$ задовольняє рівнянню (3), яке, поклавши $x_k = 0$ ($k = \overline{1, n}$), можна записати у вигляді

$$F(t, 0, \dots, 0) + F'_y(t, 0, \dots, 0)y(t, 0, \dots, 0) + r(t, 0, \dots, 0, y(t, 0, \dots, 0))y(t, 0, \dots, 0) \equiv 0.$$

Звідси, враховуючи, що $F'_y(+\infty, 0, \dots, 0) = A_1 \neq 0$,

$$y(t, 0, \dots, 0) \cdot \left(1 + \frac{r(t, 0, \dots, 0, y(t, 0, \dots, 0))}{F'_y(t, 0, \dots, 0)} \right) = -\frac{F(t, 0, \dots, 0)}{F'_y(t, 0, \dots, 0)}.$$

З останньої рівності випливає властивість (2).

Теорему доведено

Висновки

У даній роботі доведено існування єдиної неперервної неявної функції $y = y(t, x_1, \dots, x_n)$, яка задовольняє рівняння (1) у деякій підобласті $D_1 \subset D$. Встановлено, що ця функція є диференційовною за змінними x_k ($k = \overline{1, n}$) і має асимптотичну поведінку (2) при $t \rightarrow +\infty$.

Отримані результати створюють основу для асимптотичного аналізу розв'язків диференціальних рівнянь із сингулярностями на нескінченності. Вони відкривають перспективи для застосування у дослідженні динамічних систем, теорії нелінійних коливань та інших суміжних галузях, пов'язаних із поведінкою розв'язків у необмежених областях.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Koltsova L., Kostin A.** The Asymptotic behavior of Solutions of Monotone type of First-order Nonlinear Ordinary Differential Equations, unresolved for the derivative [Text] / L. Koltsova, A. Kostin // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2012. – № 57. – С. 51–74.
2. **Євтухов В. М.** Про зникаючі на нескінченності розв'язки неавтономних систем квазілінійних диференціальних рівнянь [Текст] / В.М. Євтухов // Диференц. рівняння. – 2003. – Т. 39, № 4. – С. 441–452.
3. **Євтухов В. М., Самойленко А. М.** Умови існування зникаючих в особливій точці розв'язків у реальних неавтономних системах квазілінійних диференціальних рівнянь [Текст] / В.М. Євтухов, А.М. Самойленко // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, № 1. – С. 52–80.

Evtukhov V. M., Koltsova L. L.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF IMPLICIT FUNCTIONS ON UNBOUNDED DOMAINS

Summary

The properties of an implicit function defined by the equation $F(t, x_1, \dots, x_n, y) = 0$ in an unbounded domain as $t \rightarrow +\infty$ and for small values of the other variables are investigated. This article generalizes one of the results of [1] to the multidimensional case and supplements the results of the works [2], [3].

A theorem on the existence and uniqueness of a continuous function $y = y(t, x_1, \dots, x_n)$ with continuous partial derivatives with respect to the variables $x_1, \dots, x_n$ is proved. The key asymptotic property $y(t, 0, \dots, 0) \sim -\frac{F(t, 0, \dots, 0)}{F'_y(t, 0, \dots, 0)}$ as $t \rightarrow +\infty$ is established.

The obtained results are fundamental for the asymptotic analysis of solutions to differential equations with singularities at infinity and can find applications in the theory of dynamical systems and nonlinear oscillations.

Keywords: implicit function, unbounded domain, asymptotic behavior, singularity, differential equations.

REFERENCES

1. **Koltsova L., Kostin A.** The Asymptotic behavior of Solutions of Monotone type of First-order Nonlinear Ordinary Differential Equations, unresolved for the derivative [Text] / L. Koltsova, A. Kostin // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2012. – No. 57. – C. 51–74.
2. **Yevtukhov B. M.** On solutions vanishing at infinity of nonautonomous systems of quasilinear differential equations [Text] // Differential Equations. – 2003. – Vol. 39, No. 4. – P. 441–452.
3. **Yevtukhov V. M., Samoilenko A. M.** Yevtukhov V. M., Samoilenko A. M. Conditions for the existence of solutions vanishing at a singular point in real nonautonomous systems of quasilinear differential equations [Text] / V.M. Yevtukhov, A.M. Samoilenko // Ukrainian Mathematical Journal. – 2010. – Vol. 62, No. 1. – P. 52–80.

УДК 514.07

А. А. Соловійов, аспірант

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна

e-mail: andrey-solovyov@stud.onu.edu.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0003-7923-6912>

ВІДОБРАЖЕННЯ ПСЕВДОРІМАНОВИХ ПРОСТОРІВ З НАПІВСИМЕТРИЧНОЮ АФІНОРНОЮ СТРУКТУРОЮ

Робота складається з двох частин. У першій частині з використанням тензора деформації зв'язності розглянуто загальні геометричні властивості нетривіальних відображень між двома просторами афінної зв'язності без скруту. Побудовано геометричний об'єкт, що позначає різницю коваріантних похідних довільного тензора за зв'язностями простора, на яке відбувається відображення та його прообраз, яка суттєво залежить лише від згорток самого тензора та тензора деформації. Як наслідок, отримана залежність різниці коваріантних похідних тензора деформації за двома різними зв'язностями просторів, між якими відбувається відображення, яка виражається через згортки тензора деформації з самим собою. Продовжуючи ідею дослідження загальних властивостей відображень, введено в розгляд чотиривалентний тензор, що визначає різницю тензорів Рімана просторів, які залучено у відображення, та двовалентний тензор, що визначає різницю тензорів Річі цих просторів. Отримано вираз через диференційно-алгебраїчні доданки тензора деформації цих двох тензорів.

У другій частині розглянуто псевдоріманові простори, які наділено антисиметричною майже комплексною напівсиметричною афінорною структурою, досліджено властивості довільних тензорів у цих просторах загалом та зокрема афінора, що визначає структуру. Далі, було приділено увагу п'яти спеціальним відображенням таких просторів окремо та доведено, що лише тензор деформації, що визначає відображення першого типу, відмінний від нульового тензора. Доведено, що якщо простори, що розглядаються, допускають відображення першого типу, то це K -простори. Для відображень першого типу побудовані геометричні об'єкти, що пов'язують коваріантні похідні цих двох просторів, як у першій частині роботи, для цих об'єктів отримано вираз через афінор та його згортки. Враховуючи напівсиметричність афінорної структури побудовано чотиривалентний геометричний об'єкт як альтернування коваріантної похідної тензора деформації, що згорнуто з афінором, який при відображенні стає від'ємним зі зміною послідовності індексів.

Дослідження ведуться локально, тензорними методами без обмежень на сигнатуру та знаковизначенність метричного тензору простору, що розглядається. В роботі широко застосовується спеціальна операція (спряження), що введена для просторів, які

наділено афінною структурою, та її властивості для тензорів Рімана та Річчі.

MSC: 53B35.

Ключові слова: рімановий простір, псевдорімановий простір, тензор Рімана, тензор Річчі, відображення просторів, тензор деформації, простори афінної зв'язності, коваріантна похідна, афіно́р, афіно́рна структура, напівсиметрична афіно́рна структура, антисиметрична афіно́рна структура, майже комплексна афіно́рна структура, операція спряження, K -простір, геометричний об'єкт.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1\(43\).342063](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1(43).342063).

Вступ

Зв'язності в диференціальній геометрії виникли сто років тому в роботах Туліо Леві-Чівіті (1917 рік), а згодом Г. Вейль (1920 рік), вивчаючи питання про паралельне перенесення векторів, прийшов до просторів афінної зв'язності.

В теорії відображень працювала велика кількість вчених як математиків, так і фізиків, зацікавлених в застосуванні результатів для моделювання динамічних процесів. Як відомо, рух деяких типів механічних систем, багато процесів в гравітаційних та електромагнітних полях, в суцільних середовищах протікають за траєкторіями, які можна розглядати як геодезичні лінії афіннозв'язного або псевдоріманового простору, що визначаються енергетичним режимом, за якого зовнішні сили відсутні, або за деякими кривими, вектор кривини яких – це вектор узагальнених зовнішніх сил.

Вивчення відображень (морфізмів) різних типів геометричних структур складає актуальну частину сучасної диференціальної геометрії. Під відображенням в сучасній геометрії розуміють дифеоморфізм, що зберігає ті чи інші властивості геометричних об'єктів. Центральною в сучасній геометрії є структура афінної зв'язності, як така, що має широке застосування.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Деформація внутрішньої геометрії простору при відображенні.

Означення 1. Простором афінної зв'язності A_n розмірності n називають такий диференційований многовид, на кожній кривій якого задана афінна зв'язність, що задовольняє умові лінійності, тобто для кожної точки M та для всякого векторного поля в околі даної точки, абсолютний диференціал

вектора, що належить цьому полю, обчислений в точці M для всякої кривої, що проходить через цю точку, є лінійна функція вектора елементарного зміщення по кривій.

Якщо не зазначено інше, то розглядаються простори афінної зв'язності A_n без скруту [3], тобто такі, що

$$\Gamma_{ij}^h(x) = \Gamma_{ji}^h(x) \quad (1)$$

Простір A_n належить класу C^r ($A_n \in C^r$), якщо $\Gamma_{ij}^h(x) \in C^r$ [2]. Розглянемо два простори афінної зв'язності.

Означення 2. Взаємно однозначна відповідність між точками просторів афінної зв'язності A_n та $\bar{A}_n$ називається відображенням, якщо в спільній за відображенням системі координат виконуються умови

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + P_{ij}^h(x). \quad (2)$$

Спільною за відображенням системою координат [3] називають таку систему криволінійних координат, в якій координати відповідних точок співпадають.

Означення 3. Тензор $P_{ij}^h(x)$ називають тензором деформації зв'язності при даному відображенні. Якщо

$$P_{ij}^h(x) \neq 0, \quad (3)$$

то відображення називають нетривіальним.

Зауваження 1. Тензор деформації симетричний за коваріантними індексами, тобто $P_{ij}^h = P_{ji}^h$, для просторів афінної зв'язності без скруту.

Тут тензор деформації є об'єктом, що належить простору V_n , проте неважко побачити, що

$$\Gamma_{ij}^h(x) = \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) - P_{ij}^h(x), \quad (4)$$

або, враховуючи означення тензора деформації

$$\Gamma_{ij}^h(x) = \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) + \bar{P}_{ij}^h(x), \quad (5)$$

тому доведено

Наслідок 1. Тензори деформації просторів, між якими відбувається відображення, мають наступну залежність

$$\bar{P}_{ij}^h(x) = -P_{ij}^h(x) \quad (6)$$

В випадку тензорного поля S типу $\binom{p}{q}$ коваріантна похідна по зв'язності A_n , яку ми будемо позначати ∇ , в кожній системі координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ визначається наступним чином:

$$\begin{aligned} \nabla_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) &= \partial_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) + \Gamma_{k\alpha}^{i_1}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p}(x) + \dots + \\ &+ \Gamma_{k\alpha}^{i_p}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \alpha}(x) - \Gamma_{kj_1}^\beta(x) S_{\beta j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) - \dots - \\ &- \Gamma_{kj_q}^\beta(x) S_{j_1 j_2 \dots j_{q-1} \beta}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) \end{aligned} \quad (7)$$

$(i_1, \dots, i_p; \quad j_1, \dots, j_q; \quad k = 1, 2, \dots, n)$

Для простору $\bar{A}_n$ та коваріантній похідної в ньому $\bar{\nabla}$ будемо мати [4] в спільній системі координат

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) &= \partial_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) + \bar{\Gamma}_{k\alpha}^{i_1}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p}(x) + \dots + \\ &+ \bar{\Gamma}_{k\alpha}^{i_p}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \alpha}(x) - \bar{\Gamma}_{kj_1}^\beta(x) S_{\beta j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) - \dots - \\ &- \bar{\Gamma}_{kj_q}^\beta(x) S_{j_1 j_2 \dots j_{q-1} \beta}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) \end{aligned} \quad (8)$$

$(i_1, \dots, i_p; \quad j_1, \dots, j_q; \quad k = 1, 2, \dots, n)$

Віднімаючи від останнього (4) з урахуванням (2), отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) - \nabla_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) &= P_{k\alpha}^{i_1}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p}(x) + \dots + \\ &+ P_{k\alpha}^{i_p}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \alpha}(x) - P_{kj_1}^\beta(x) S_{\beta j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) - \dots - \\ &- P_{kj_q}^\beta(x) S_{j_1 j_2 \dots j_{q-1} \beta}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) \end{aligned} \quad (9)$$

$(i_1, \dots, i_p; \quad j_1, \dots, j_q; \quad k = 1, 2, \dots, n)$

Останнє справедливе для будь-якого тензора, а для тензора деформації (6) прийме вигляд

$$\bar{\nabla}_k P_{ij}^h(x) - \nabla_k P_{ij}^h(x) = P_{k\alpha}^h(x) P_{ij}^\alpha(x) - P_{ki}^\alpha(x) P_{\alpha j}^h(x) - P_{kj}^\alpha(x) P_{i\alpha}^h(x). \quad (10)$$

Альтернуючи останнє, отримаємо

$$\bar{\nabla}_k P_{ij}^h - \bar{\nabla}_j P_{ik}^h - \nabla_k P_{ij}^h + \nabla_j P_{ik}^h = -2 \left(P_{k\alpha}^h P_{ij}^\alpha - P_{ki}^\alpha P_{\alpha j}^h \right). \quad (11)$$

Закон зміни тензора кривини, що визначається, як

$$R_{.ijk}^h = \partial_j \Gamma_{ik}^h + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^h - \partial_k \Gamma_{ij}^h - \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{k\alpha}^h, \quad (12)$$

при відображенні простору A_n на $\bar{A}_n$ запишеться в вигляді

$$\bar{R}_{.ijk}^h = R_{.ijk}^h + P_{.ijk}^h, \quad (13)$$

де

$$P_{.ijk}^h = \nabla_k P_{ji}^h - \nabla_j P_{ki}^h + P_{\alpha k}^h P_{ji}^\alpha - P_{\alpha j}^h P_{ki}^\alpha. \quad (14)$$

Або, з урахуванням (12),

$$P_{.ijk}^h = \frac{1}{2} \left(\nabla_k P_{ji}^h - \nabla_j P_{ki}^h + \bar{\nabla}_k P_{ji}^h - \bar{\nabla}_j P_{ki}^h \right). \quad (15)$$

Тензор Річчі $R_{ij} = R_{ij\alpha}^\alpha$ змінюється за законом

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + P_{ij}. \quad (16)$$

де

$$P_{ij} = \frac{1}{2} \left(\nabla_\alpha P_{ji}^\alpha - \nabla_j P_{\alpha i}^\alpha + \bar{\nabla}_\alpha P_{ji}^\alpha - \bar{\nabla}_j P_{\alpha i}^\alpha \right). \quad (17)$$

Теорема 1. При відображенні простору афінної зв'язності A_n на простір афінної зв'язності $\bar{A}_n$ тензори Рімана та Річчі просторів A_n та $\bar{A}_n$ в спільній системі координат зв'язані співвідношеннями (15) та (16) відповідно.

Якщо в просторі афінної зв'язності тензор Річчі є симетричним [5], тобто

$R_{ij} = R_{ji}$, то такі простори називають еквіафінними просторами.

2. Спеціальні відображення афінор-напівсиметричних просторів.

Розглянемо псевдоріманів простір V_n з метричним тензором $g_{ij}(x)$, у якому існує тензор $F_i^h(x)$ [8]. Задля зручності введемо в V_n операцію спряження:

$$A_{i\dots}^{\dots} \equiv A_{\alpha\dots}^{\dots} F_i^\alpha \quad B_{\dots}^{\bar{i}\dots} \equiv B^{\alpha\dots}_{\dots} F_{\alpha}^i. \quad (18)$$

Тут A і B довільні тензори будь-якої валентності.

Якщо у просторі V_n існує тензор $F_i^h(x)$, який задовільняє деяким умовам, тоді про такі простори кажуть, що вони наділені афінорною структурою [7].

Означення 4. Простір V_n назвемо афінор-напівсиметричним, якщо в ньому існує напівсиметрична афінорна структура $F_i^h(x)$, тобто афінор $F_i^h(x)$ задовольняє умовам

$$\nabla_{[kl]} F_{ij} = 0. \quad (19)$$

Тут індекс опускається за допомогою метричного тензора

$$F_{ij} = g_{i\alpha} F_{\cdot j}^{\alpha}. \quad (20)$$

Розглянемо афінор-напівсиметричний простір V_n без скруту з метричним тензором $g_{ij}(x)$, афінорна структура якого додатково задовольняє

$$F_{(ij)} = 0, \quad (21)$$

$$F_{\cdot\alpha}^h F_{\cdot i}^{\alpha} = -\delta_i^h, \quad (22)$$

де круглі дужки в індексах позначають операцію симетрування, а δ_i^h - символи Кронекера, які визначаються наступними умовами

$$\delta_i^h = \begin{cases} 1, & i = h \\ 0, & i \neq h \end{cases}. \quad (23)$$

З (21) випливає

$$g^{\alpha h} \nabla_{\alpha} F_{(ij)} = \nabla^h F_{(ij)} = 0. \quad (24)$$

Афінорні структури, які задовольняють (22) називають майже комплексними [8]. З урахуванням (18) формула (22) в термінах операції спряження приймає вид

$$F_{\cdot i}^h = -\delta_i^h. \quad (25)$$

Цей вираз коваріантно продиференціюємо за напрямком x^k та врахуємо коваріантну сталість символів Кронекера

$$\nabla_k F_{\cdot i}^{\bar{h}} = \nabla_k F_{\cdot i}^h. \quad (26)$$

Розглянемо деякі спеціальні [9–11] відображення простору V_n на $\bar{V}_n$ та їх властивості.

Досліджуючи простори, що наділено афінорною структурою [12], багато відображень було визначено незалежно багатьма авторами починаючи з 1954 року. Деякі з них, наприклад, Й. А. Схоутен [13] та К. Яно [14], базуються на геометричних припущеннях, а інші, такі як П. Ліberman та А.

Ліхнерович [15], визначають відображення неявно, без явних формул для тензора деформації, а також один з них, А. Фреліхер, наводить відображення без будь-яких пояснень. Т. Уесугі розглянув співвідношення між цими відображеннями, використовуючи адаптовану систему координат. Продовжуючи дослідження цього напрямку, розглянемо відображення простору V_n , перераховуючи тензори деформації кожного з відображень:

$$P_{ij}^1 = \frac{1}{2} F^{h\alpha} \nabla_i F_{j\alpha}, \quad (27)$$

$$P_{ij}^2 = -\frac{1}{2} (\nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}} + \nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} + \nabla^{\bar{h}} F_{ij}). \quad (28)$$

$$P_{ij}^3 = -\frac{1}{2} (\nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}} - \nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} + \nabla^{\bar{h}} F_{ij}). \quad (29)$$

$$P_{ij}^4 = \frac{1}{2} (\nabla^{\bar{h}} F_{ij} - \frac{1}{2} \nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} - \nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}} - \frac{1}{2} \nabla^{\bar{h}} F_{\cdot ij}). \quad (30)$$

$$P_{ij}^5 = \frac{1}{2} (\nabla_i F_{\cdot j}^h - \nabla_j F_{\cdot i}^h + \nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}}). \quad (31)$$

Кожне з наведених відображень будемо називати відповідним типом.

2.1. Відображення першого типу.

З урахуванням (18) та (21) визначення першого типу приймає вид

$$P_{ij}^h = \frac{1}{2} \nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}}. \quad (32)$$

Таким чином, символи Кристофеля при цьому відображенні змінюються за формулою

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \frac{1}{2} \nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}}. \quad (33)$$

Оскільки простір V_n без скруту,

$$\frac{1}{2} \nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} = P_{ji}^h = P_{ij}^h = \frac{1}{2} \nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}}, \quad (34)$$

тому

$$\nabla_j F_{\cdot i}^h = \nabla_i F_{\cdot j}^h. \quad (35)$$

Відомо, що псевдоріманів простір, в якому афінорна структура задовольняє цій умові, називається K -простором. Доведена

Теорема 2. *Якщо при відображенні майже комплексного простору V_n з антисимметричною афінорною структурою на $\bar{V}_n$ тензор деформації зв'язності першого типу, тоді V_n - це K -простір.*

Перепишемо вираз (32) беручи до уваги (26)

$$P_{ij}^h = \frac{1}{2} \nabla_i F_{\bar{j}}^h. \quad (36)$$

Далі, згортаючи з афінором рівність (32) за індексом h та рівність (36) за індексом j отримуємо властивість для тензора деформації

$$P_{ij}^{\bar{h}} = P_{i\bar{j}}^h, \quad (37)$$

або, враховуючи симетричність за нижніми індексами тензору деформації,

$$P_{ij}^{\bar{h}} = P_{\bar{i}j}^h, \quad (38)$$

таким чином,

$$P_{i\bar{j}}^h = P_{\bar{i}j}^h. \quad (39)$$

Звідси випливає

$$P_{i\bar{j}}^{\bar{h}} = P_{i\bar{j}}^h = P_{\bar{i}j}^h = -P_{ij}^h. \quad (40)$$

У (7) підставимо (36)

$$\bar{\nabla}_k P_{ij}^h - \nabla_k P_{ij}^h = \frac{1}{2} (\nabla_k F_{\bar{\alpha}}^h \nabla_i F_{\bar{j}}^\alpha - \nabla_k F_{\bar{i}}^\alpha \nabla_\alpha F_{\bar{j}}^h - \nabla_k F_{\bar{j}}^\alpha \nabla_i F_{\bar{\alpha}}^h). \quad (41)$$

Відомо, що в K -просторах виконується

$$\nabla_j F_{\bar{i}}^h = \nabla_{\bar{j}} F_i^h, \quad (42)$$

тому, враховуючи цю властивість та додатково (26) перепишемо (41)

$$\bar{\nabla}_k P_{ij}^h - \nabla_k P_{ij}^h = \frac{1}{2} (\nabla_k F_{\bar{\alpha}}^h \nabla_i F_{\bar{j}}^\alpha - \nabla_k F_{\bar{i}}^\alpha \nabla_\alpha F_{\bar{j}}^h - \nabla_k F_{\bar{j}}^\alpha \nabla_i F_{\bar{\alpha}}^h). \quad (43)$$

Розглянемо коваріантну похідну афінора за напрямком x^j за зв'язністю простора $\bar{V}_n$

$$\bar{\nabla}_j F_{\bar{i}}^h = \partial_j F_{\bar{i}}^h + F_{\bar{i}}^\alpha \bar{\Gamma}_{\alpha j}^h - F_{\alpha}^h \bar{\Gamma}_{ij}^\alpha. \quad (44)$$

Тут врахуємо (33) та (38)

$$\bar{\nabla}_j F_i^h = \nabla_j F_i^h. \quad (45)$$

Далі, знову коваріантно продиференціюємо цей вираз за напрямком x^k за зв'язністю простора $\bar{V}_n$ враховуючи закон перетворення символів Кристофеля та властивості афінора

$$\bar{\nabla}_k \bar{\nabla}_j F_i^h = \nabla_k \nabla_j F_{i,jk}^h + \frac{1}{2} (\nabla_{\bar{k}} F_{\alpha}^h \nabla_i F_{\cdot j}^{\alpha} - \nabla_{\bar{k}} F_{\cdot i}^{\alpha} \nabla_{\alpha} F_{\cdot j}^h - \nabla_{\bar{k}} F_{\cdot j}^{\alpha} \nabla_i F_{\alpha}^h). \quad (46)$$

Рівність (43) спряжімо за індексом k та віднімемо від (46)

$$\bar{\nabla}_k \bar{\nabla}_j F_i^h - \nabla_k \nabla_j F_i^h = \bar{\nabla}_{\bar{k}}^1 P_{ij}^h - \nabla_{\bar{k}}^1 P_{ij}^h. \quad (47)$$

Альтернуємо отриману рівність за індексами j, k та враховуючи афінор-напівсиметричність простору будемо мати

$$\bar{\nabla}_{\bar{k}}^1 P_{ij}^h - \bar{\nabla}_{\bar{j}}^1 P_{ik}^h = \nabla_{\bar{k}}^1 P_{ij}^h - \nabla_{\bar{j}}^1 P_{ik}^h, \quad (48)$$

або, використовуючи (6)

$$\bar{\nabla}_{\bar{j}}^1 \bar{P}_{ik}^h - \bar{\nabla}_{\bar{k}}^1 \bar{P}_{ij}^h = \nabla_{\bar{k}}^1 P_{ij}^h - \nabla_{\bar{j}}^1 P_{ik}^h. \quad (49)$$

Цю рівність згорнемо з афінором за індексами j, k та отримаємо

$$\bar{M}_{ijk}^h = -M_{ikj}^h, \quad (50)$$

де

$$\bar{M}_{ijk}^h \stackrel{def}{=} \bar{\nabla}_j \bar{P}_{i\bar{k}}^h - \bar{\nabla}_k \bar{P}_{i\bar{j}}^h \quad (51)$$

$$M_{ijk}^h \stackrel{def}{=} \nabla_j P_{i\bar{k}}^h - \nabla_k P_{i\bar{j}}^h. \quad (52)$$

Далі, користуючись (15) закон зміни тензора кривини при відображенні запишемо як

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \frac{1}{2} (\nabla_k \nabla_{\bar{j}} F_i^h - \nabla_j \nabla_{\bar{k}} F_i^h) + \frac{1}{4} (\nabla_{\alpha} F_{\bar{k}}^h \nabla_j F_{\cdot i}^{\alpha} - \nabla_{\alpha} F_{\cdot j}^h \nabla_k F_{\cdot i}^{\alpha}), \quad (53)$$

тоді закон зміни тензора Річчі, відповідно до (16), буде мати вигляд

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + \frac{1}{2} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\bar{j}} F_{\cdot i}^{\alpha} - \nabla_j \nabla_{\bar{\alpha}} F_{\cdot i}^{\alpha}) - \frac{1}{4} \nabla_{\alpha} F_{\cdot j}^{\beta} \nabla_{\beta} F_{\cdot i}^{\alpha}. \quad (54)$$

Доведена

Теорема 3. Якщо тензор деформації при відображенні $V_n \longrightarrow \bar{V}_n$ має вигляд (30) та V_n наділено антисиметричною майже комплексною афінор-

напівсиметричною структурою, тоді мають місце (53), (54)

2.2. Відображення другого типу.

Доведемо

Теорема 4. Якщо афінорна структура антисиметрична при другому типі відображення, тоді вона також є коваріантно сталою, а відображення - тривіальним.

$$P_{\cdot ij}^h \equiv P_{ijk}^h \equiv P_{ij} \equiv 0, \quad \bar{R}_{\cdot ijk}^h = R_{ijk}, \quad \bar{R}_{ij} = R_{ij}. \quad (55)$$

Доведення. Оскільки простір без скруту, будемо мати

$$-\frac{1}{2}(\nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} + \nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}} + \nabla^{\bar{h}} F_{ji}) = P_{\cdot ji}^h = P_{ij}^h = -\frac{1}{2}(\nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}} + \nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} + \nabla^{\bar{h}} F_{ij}). \quad (56)$$

Тому після спряження за індексом h отримуємо

$$\nabla^h F_{ji} = \nabla^h F_{ij}, \quad (57)$$

але враховуючи (24)

$$\nabla^h F_{ji} = 0. \quad (58)$$

Таким чином, доведена коваріантна сталість афінору, тому виконуються

$$P_{ij}^h = 0, \quad \bar{R}_{\cdot ijk}^h = R_{ijk}, \quad \bar{R}_{ij} = R_{ij}, \quad (59)$$

і таке відображення тривіальне що й треба було довести $\square$.

2.3. Відображення третього типу.

Враховуючи симетричність тензора P_{ij}^h будемо мати

$$-\frac{1}{2}(\nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} - \nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}} + \nabla^{\bar{h}} F_{ji}) = P_{\cdot ji}^h = P_{ij}^h = -\frac{1}{2}(\nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}} - \nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} + \nabla^{\bar{h}} F_{ij}), \quad (60)$$

порівнюючи ліву та праву частинку, з урахуванням антисиметричності афінорної структури впливає

$$\nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}} - \nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} + \nabla^{\bar{h}} F_{ij} = 0. \quad (61)$$

Цю рівність підставимо у визначення тензора деформації

$$P_{ij}^h = 0, \quad (62)$$

тому це відображення є тривіальним і, як наслідок, виконуються

$$P_{ij}^h \equiv P_{ijk}^h \equiv P_{ij} \equiv 0, \quad \bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}, \quad \bar{R}_{ij} = R_{ij}. \quad (63)$$

Доведена

Теорема 5. *Якщо афінорна структура антисиметрична при третьому типі відображення, тоді таке відображення - тривіальне.*

2.4. Відображення четвертого типу.

Проальтернуємо визначення тензора деформації відображення цього типу

$$2\nabla^{\bar{h}}F_{ij} + \frac{1}{2}\nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} - \frac{1}{2}\nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}} - \nabla^h F_{\bar{i}j} = 0, \quad (64)$$

спряжімо за індексом i

$$2\nabla^{\bar{h}}F_{\bar{i}j} + \frac{1}{2}\nabla_j F_{\cdot \bar{i}}^{\bar{h}} - \frac{1}{2}\nabla_{\bar{i}} F_{\cdot j}^{\bar{h}} - \nabla^h F_{ij} = 0, \quad (65)$$

та врахуємо (26)

$$2\nabla^{\bar{h}}F_{\bar{i}j} - \frac{1}{2}\nabla_j F_{\cdot i}^h - \frac{1}{2}\nabla_{\bar{i}} F_{\cdot j}^{\bar{h}} + \nabla^h F_{ij} = 0. \quad (66)$$

Далі, рівність (64) спряжімо за індексом j

$$2\nabla^{\bar{h}}F_{\cdot i\bar{j}} + \frac{1}{2}\nabla_{\bar{j}} F_{\cdot i}^{\bar{h}} - \frac{1}{2}\nabla_i F_{\cdot \bar{j}}^{\bar{h}} - \nabla^h F_{i\bar{j}} = 0, \quad (67)$$

або, беручи до уваги (26)

$$2\nabla^{\bar{h}}F_{\cdot i\bar{j}} + \frac{1}{2}\nabla_{\bar{j}} F_{\cdot i}^{\bar{h}} + \frac{1}{2}\nabla_i F_{\cdot \bar{j}}^h + \nabla^h F_{i\bar{j}} = 0. \quad (68)$$

Порівнюючи (66) та (68) отримуємо

$$\nabla_j F_{\cdot i}^h + \nabla_i F_{\cdot j}^h + \nabla_{\bar{i}} F_{\cdot j}^{\bar{h}} + \nabla_{\bar{j}} F_{\cdot i}^{\bar{h}} = 0 \quad (69)$$

Цю рівність домножимо на F_{hk} просумуємо за індексом h та зробимо заміну індексів $k \rightarrow h$

$$\nabla_j F_{hi} + \nabla_i F_{hj} - \nabla_{\bar{i}} F_{hj} - \nabla_{\bar{j}} F_{hi} = 0 \quad (70)$$

зробимо заміну індексів $h \longleftrightarrow i$

$$\nabla_j F_{ih} + \nabla_h F_{ij} - \nabla_{\bar{h}} F_{ij} - \nabla_{\bar{j}} F_{ih} = 0 \quad (71)$$

та додамо до (70)

$$\nabla_i F_{\bar{h}j} - \nabla_{\bar{i}} F_{hj} + \nabla_h F_{ij} - \nabla_{\bar{h}} F_{ij} = 0. \quad (72)$$

Спряжімо цю рівність за індексом i

$$\nabla_{\bar{i}} F_{\bar{h}j} + \nabla_i F_{hj} - \nabla_h F_{ij} - \nabla_{\bar{h}} F_{ij} = 0. \quad (73)$$

Вираз (69) домножимо на g_{hk} просумуємо за індексом h та зробимо заміну індексів $k \longrightarrow h$

$$\nabla_j F_{hi} + \nabla_i F_{hj} + \nabla_{\bar{i}} F_{\bar{h}j} + \nabla_{\bar{j}} F_{\bar{h}i} = 0 \quad (74)$$

та додамо до (73)

$$\nabla_j F_{hi} + \nabla_{\bar{j}} F_{\bar{h}i} - \nabla_h F_{ij} - \nabla_{\bar{h}} F_{ij} = 0. \quad (75)$$

Далі, спряжімо отриману рівність за індексом i

$$\nabla_j F_{h\bar{i}} + \nabla_{\bar{j}} F_{\bar{h}\bar{i}} - \nabla_h F_{ij} + \nabla_{\bar{h}} F_{ij} = 0 \quad (76)$$

та врахуємо (26)

$$\nabla_j F_{h\bar{i}} - \nabla_{\bar{j}} F_{hi} - \nabla_h F_{ij} + \nabla_{\bar{h}} F_{ij} = 0. \quad (77)$$

Вираз (75) згорнемо з афінором за індексом h

$$\nabla_j F_{\bar{h}i} - \nabla_{\bar{j}} F_{hi} - \nabla_{\bar{h}} F_{ij} + \nabla_h F_{ij} = 0 \quad (78)$$

та додамо до (77)

$$\nabla_j F_{h\bar{i}} + \nabla_j F_{\bar{h}i} - 2\nabla_{\bar{j}} F_{hi} = 0, \quad (79)$$

або, скориставшись (26)

$$\nabla_j F_{h\bar{i}} = \nabla_{\bar{j}} F_{hi}, \quad (80)$$

тому тензор деформації можна записати як

$$P_{ij}^h = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \nabla^h F_{ij} - \frac{1}{2} \nabla_j F_{\bar{i}}^{\bar{h}} - \nabla_i F_{\bar{j}}^{\bar{h}} \right). \quad (81)$$

Знов, врахуємо симетрію тензора деформації

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\nabla^h F_{\bar{j}i} - \frac{1}{2}\nabla_i F_{\bar{j}}^{\bar{h}} - \nabla_j F_{\bar{i}}^{\bar{h}}) = \overset{4}{P}_{\bar{j}i}^h = \overset{4}{P}_{ij}^h = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\nabla^h F_{\bar{i}j} - \frac{1}{2}\nabla_j F_{\bar{i}}^{\bar{h}} - \nabla_i F_{\bar{j}}^{\bar{h}}), \quad (82)$$

тобто

$$\nabla_j F_{\bar{i}}^h = \nabla_i F_{\bar{j}}^h. \quad (83)$$

Перепишемо цей вираз беручи до уваги (80)

$$\nabla_j F_{\bar{i}}^h = \nabla_{\bar{i}} F_{\bar{j}}^h, \quad (84)$$

або, згорнувши з афіном за індексом i

$$\nabla_j F_{\bar{i}}^h = \nabla_i F_{\bar{j}}^h, \quad (85)$$

що характерно для K -просторів. Таким чином, доведена

Теорема 6. *Якщо тензор деформації при відображенні $V_n \longrightarrow \bar{V}_n$ має вигляд (30) та V_n наділено антисиметричною майже комплексною афіною структурою, тоді V_n - це K -простір.*

Врахуємо (85) у визначенні тензора деформації

$$\overset{4}{P}_{ij}^h = \nabla_{\bar{i}} F_{\bar{j}}^h, \quad (86)$$

проте з симетричності тензора деформації та антисиметричності афінової структури випливає

$$\overset{4}{P}_{ij}^h = 0, \quad (87)$$

і, як наслідок,

$$\overset{4}{P}_{ij}^h \equiv P_{ijk}^h \equiv P_{ij} \equiv 0, \quad \bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}, \quad \bar{R}_{ij} = R_{ij}. \quad (88)$$

тому доведена

Наслідок 2. *Якщо тензор деформації при відображенні $V_n \longrightarrow \bar{V}_n$ четвертого типу та V_n наділено антисиметричною майже комплексною афіною структурою, тоді це тривіальне відображення.*

2.3. Відображення п'ятого типу.

Враховуючи симетричність тензору деформації будемо мати

$$\frac{1}{2}(\nabla_j F_{\bar{i}}^h - \nabla_{\bar{i}} F_{\cdot j}^h + \nabla_i F_{\cdot \bar{j}}^{\bar{h}}) = P_{\cdot j i}^h = P_{i j}^{\bar{h}} = \frac{1}{2}(\nabla_i F_{\cdot \bar{j}}^h - \nabla_{\bar{j}} F_{\cdot i}^h + \nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}}), \quad (89)$$

тому

$$\nabla_i F_{\cdot \bar{j}}^h + \nabla_j F_{\cdot \bar{i}}^h + \nabla_{\bar{j}} F_{\cdot i}^h - \nabla_{\bar{i}} F_{\cdot j}^h = 0. \quad (90)$$

У цьому виразі за допомогою метричного тензора опустимо індекс h

$$\nabla_i F_{h \bar{j}} + \nabla_j F_{h \bar{i}} + \nabla_{\bar{j}} F_{h i} - \nabla_{\bar{i}} F_{h j} = 0 \quad (91)$$

та згорнемо з афінором за індексом h

$$\nabla_i F_{h \bar{j}} + \nabla_j F_{h \bar{i}} + \nabla_{\bar{j}} F_{h i} - \nabla_{\bar{i}} F_{h j} = 0, \quad (92)$$

або, враховуючи (26)

$$\nabla_{\bar{j}} F_{h i} - \nabla_{\bar{i}} F_{h j} - \nabla_i F_{h j} - \nabla_j F_{h i} = 0. \quad (93)$$

Перепишемо цю рівність зробивши заміну індексів $h \longleftrightarrow i$

$$\nabla_{\bar{j}} F_{i h} - \nabla_{\bar{h}} F_{i j} - \nabla_h F_{i j} - \nabla_j F_{i h} = 0, \quad (94)$$

додамо її до (93)

$$\nabla_{\bar{i}} F_{h j} + \nabla_i F_{h j} + \nabla_{\bar{h}} F_{i j} + \nabla_h F_{i j} = 0. \quad (95)$$

Далі, виконаємо заміну індексів $h \longleftrightarrow j$ в (93)

$$\nabla_{\bar{h}} F_{j i} - \nabla_{\bar{i}} F_{j h} - \nabla_i F_{j h} - \nabla_h F_{j i} = 0. \quad (96)$$

та перепишемо її з урахуванням антисиметричності афінорної структури

$$\nabla_{\bar{i}} F_{h \bar{j}} - \nabla_{\bar{h}} F_{i \bar{j}} + \nabla_i F_{h j} + \nabla_h F_{i j} = 0. \quad (97)$$

Цей вираз віднімемо від (95)

$$\nabla_{\bar{i}} F_{h \bar{j}} - \nabla_{\bar{i}} F_{h \bar{j}} + \nabla_{\bar{h}} F_{i j} + \nabla_{\bar{h}} F_{i j} = 0 \quad (98)$$

та врахуємо в ньому (26)

$$\nabla_{\bar{h}} F_{i j} = 0, \quad (99)$$

або, згортаючи з афінором за індексами h, i

$$\nabla_h F_{ij} = 0, \quad (100)$$

отримуємо, що афінорна структура при такому відображенні буде коваріантно сталою, і, як наслідок, відображення буде тривіальним, тобто

$$P_{ij}^5 \equiv P_{ijk}^h \equiv P_{ij} = 0, \quad \bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}, \quad \bar{R}_{ij} = R_{ij}. \quad (101)$$

. Доведена

Теорема 7. *Якщо тензор деформації при відображенні $V_n \longrightarrow \bar{V}_n$ n 'ятого типу та V_n наділено антисиметричною майже комплексною афінорною структурою, тоді це тривіальне відображення.*

Висновки

Досліджено псевдоріманові простори, які оснащені антисиметричною майже комплексною напівсиметричною афінорною структурою. Визначено характеристики довільних тензорних полів у таких просторах, зокрема аналізується афінор, що визначає цю структуру. Далі окремо розглянуто п'ять специфічних типів відображень між такими просторами, серед яких лише для першого типу тензор деформації виявляється ненульовим. Доведено, що прообраз відображення першого типу є K -простором. Для цього класу відображень побудовано аналогічні до першої частини роботи геометричні об'єкти, які пов'язують коваріантні похідні різних просторів, та отримано їхнє подання через афінор і його згортки. Використавши напівсиметричність структури, сконструйовано чотиривалентний об'єкт як результат альтернування коваріантної похідної від тензора деформації, що був згорнутий з афінором; при відображенні цей об'єкт змінює знак, а його два останні індекси міняються місцями.

Розглянуто нетривіальні відображення між двома просторами афінної зв'язності без скруту. За допомогою тензора деформації виявлено загальні геометричні характеристики таких відображень. Визначено об'єкт, який відображає різницю коваріантних похідних довільного тензора відносно зв'язностей у просторі, який є образом та його прообразом; цей об'єкт залежить лише від згорток самого тензора і тензора деформації. Звідси

отримано формулу для різниці коваріантних похідних самого тензора деформації відносно двох зв'язностей, що виражається через його власні згортки. Було введено в розгляд чотиривалентний тензор, який характеризує різницю тензорів Рімана відповідних просторів, та двовалентний тензор, що описує різницю їхніх тензорів Річчі. Для цих нових геометричних об'єктів отримано представлення через диференційно-алгебраїчні комбінації доданків тензора деформації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Eisenhart, L.P. (1926). *Riemannian Geometry*. Princeton University Press. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 8 (2000).
2. Schouten, J.A.; Struik, D.J. (1935) *Introduction into new Methods in Differential Geometry*. (Germ. Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie.) 1935.
3. Lesechko, O.; Latysh, O.; Spychak, T. (2020). Conformally flat Kahler spaces. *AIP Conference Proceedings*. Vol. 2302, 040004. <https://doi.org/10.1063/5.0034024>.
4. Kiosak, V.; Savchenko, O.; Shevchenko, T. (2018). Holomorphically Projective Mappings of Special Kahler Manifolds. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2025, 08004. <https://doi.org/10.1063/1.5064924>.
5. Kiosak, V.; Kusik, L.; Isaiev, V. (2022). Geodezychni Richi-symetrychni psevdorimanovi prostory [Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces]. *Proceedings of the International Geometry Center*, Vol. 15, P. 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
6. Kiosak, V.; Savchenko, O.; Gudyreva, O. (2019). On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2164, 040001. <https://doi.org/10.1063/1.5130793>.
7. Kahler, E. (1933). Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metric. *Sem. Hamburg. Univ.*, Vol. 9, P. 173–186.
8. Yano, K. (1965) *Differential geometry of complex and almost complex spaces*. Pergamon Press, (1965).
9. Suguri, T. (1956) Determination of various affine connexions in almost Hermitian space. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, A, 10, No 2, 151–166.
10. Reboucas, M.J.; Santos, J.; Teixeira, A.F.F. (2004) Classification of energy momentum tensors in $n = 5$ dimensional space-time. *Brazilian J. of Physics*, vol. 34, 2A, June, 535–543.
11. Fedorova, A.; Kiosak, V.; Matveev, V.; Rosemann, S. (2012). The only Kahler manifold with degree of mobility at least 3 is $(CP^n, g_{\text{Fubini-Study}})$, *Proceedings of the London Mathematical Society*. <https://doi.org/10.1112/plms/pdr053>.

12. Ehresmann, C.; Libermann, P. (1951) Sur les structures presque hermitiennes isotropes. *Acad., sci.*, 232, No 13, 1281—1283.
13. Schouten, J. A.; Dantzig, D. (1930) Ober unitare Geometric. *Math. Ann.*, 103, No 2, 319—346.
14. Yano, K. (1955) On three remarkable affine connexions in a almost Hermitian space. *Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.*, A58, No 1, 24—32.
15. Lichnerowicz, A. (1954) Un theoreme sur les espaces homogenes complexes. *Arch. Math.*, 5, No 1-3, 207—215.

Soloviov A. A.

MAPPINGS OF PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES WITH SEMI-SYMMETRIC AFFINOR STRUCTURE

Summary

The work consists of two parts. In the first part, using the deformation tensor of the connection, the general geometric properties of nontrivial mappings between two affine connection spaces without torsion are considered. A geometric object is constructed that represents the difference of the covariant derivatives of an arbitrary tensor with respect to the connections of the target space and its preimage. This object essentially depends only on the contractions of the tensor itself and the deformation tensor. As a consequence, a relation is obtained for the difference of the covariant derivatives of the deformation tensor with respect to the two different connections of the spaces involved in the mapping, which is expressed through the contractions of the deformation tensor with itself. Continuing the idea of studying the general properties of mappings, a four-valent tensor is introduced that characterizes the difference between the Riemann tensors of the spaces under consideration, as well as a two-valent tensor that characterizes the difference between their Ricci tensors. Explicit expressions for these two tensors are obtained in terms of differential-algebraic terms of the deformation tensor.

In the second part, pseudo-Riemannian spaces endowed with an antisymmetric almost complex semi-symmetric affinor structure are studied. The properties of arbitrary tensors in these spaces are investigated in general, and in particular, the affinor that defines the structure. Further, five special mappings of such spaces are examined individually, and it is shown that only the deformation tensor defining a mapping of the first type is nonzero. It is proven that if the spaces under consideration admit mappings of the first type, then they are K -spaces. For first-type mappings, geometric objects are constructed that relate the covariant derivatives of the two spaces, similar to the first part of the work; for these objects, explicit expressions are obtained in terms of the affinor and its contractions. Taking into account the semi-symmetry of the affinor structure, a four-valent geometric object is constructed as the alternation of the covariant derivative of the deformation tensor contracted with the affinor. Under the mapping, this object becomes negative when the sequence

of indices is permuted.

The research is carried out locally, using tensor methods without restrictions on the signature or definiteness of the metric tensor of the space under consideration. A special operation (conjugation), introduced for spaces endowed with an affinor structure, is widely applied, and its properties with respect to the Riemann and Ricci tensors are studied.

Keywords: Riemannian space, pseudo-Riemannian space, Riemann tensor, Ricci tensor, mapping of spaces, deformation tensor, affine connection spaces, covariant derivative, affinor, affinor structure, semi-symmetric affinor structure, antisymmetric affinor structure, almost complex space, conjugation operation, K -space, geometric object.

REFERENCES

1. Eisenhart, L.P. (1926). *Riemannian Geometry*. Princeton University Press. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 8 (2000).
2. Schouten, J.A.; Struik, D.J. (1935) *Introduction into new Methods in Differential Geometry*. (Germ. Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie.) 1935.
3. Lesechko, O.; Latysh, O.; Spsychak, T. (2020). Conformally flat Kahler spaces. *AIP Conference Proceedings*. Vol. 2302, 040004. <https://doi.org/10.1063/5.0034024>.
4. Kiosak, V.; Savchenko, O.; Shevchenko, T. (2018). Holomorphically Projective Mappings of Special Kahler Manifolds. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2025, 08004. <https://doi.org/10.1063/1.5064924>.
5. Kiosak, V.; Kusik, L.; Isaiev, V. (2022). Geodezychni Richi-symetrychni psevdorimanovi prostory [Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces]. *Proceedings of the International Geometry Center*, Vol. 15, P. 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
6. Kiosak, V.; Savchenko, O.; Gudyreva, O. (2019). On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2164, 040001. <https://doi.org/10.1063/1.5130793>.
7. Kahler, E. (1933). Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik. *Sem. Hamburg. Univ.*, Vol. 9, P. 173–186.
8. Yano, K. (1965) *Differential geometry of complex and almost complex spaces*. Pergamon Press, (1965).
9. Suguri, T. (1956) Determination of various affine connexions in almost Hermitian space. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, A, 10, No 2, 151–166.
10. Reboucas, M.J.; Santos, J.; Teixeira, A.F.F. (2004) Classification of energy momentum tensors in $n = 5$ dimensional space-time. *Brazilian J. of Physics*, vol. 34, 2A, June, 535–543.

-
11. Fedorova, A.; Kiosak, V.; Matveev, V.; Rosemann, S. (2012). The only Kahler manifold with degree of mobility at least 3 is $(CP^n, g_{\text{Fubini-Study}})$, *Proceedings of the London Mathematical Society*. <https://doi.org/10.1112/plms/pdr053>.
 12. Ehresmann, C.; Libermann, P. (1951) Sur les structures presque hermitiennes isotropes. *Acad., sci.*, 232, No 13, 1281–1283.
 13. Schouten, J. A.; Dantzig, D. (1930) Ober unitare Geometric. *Math. Ann.*, 103, No 2, 319–346.
 14. Yano, K. (1955) On three remarkable affine connexions in a almost Hermitian space. *Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.*, A58, No 1, 24–32.
 15. Lichnerowicz, A. (1954) Un theoreme sur les espaces homogenes complexes. *Arch. Math.*, 5, No 1-3, 207–215.

УДК 517.925

О. О. Чепок кандидат фіз-мат наук,
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний
університет імені К. Д. Ушинського»
кафедра вищої математики і статистики
вул Старопортофранківська 26, м. Одеса, Україна, 65020
e-mail: olachtpok@ukr.net
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-8514-2769>

**АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -РОЗВ'ЯЗКІВ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ЯКЕ
МІСТИТЬ ДОБУТОК РІЗНОГО ТИПУ НЕЛІНІЙНОСТЕЙ, У
ДЕЯКОМУ КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ**

Встановлення умов існування та побудова асимптотичних зображень розв'язків диференціальних рівнянь з нелінійностями різних типів у правій частині є однією з найважливіших задач якісної теорії диференціальних рівнянь. Подібні рівняння мають практичне значення, зокрема, у моделях горіння чи при дослідженні електростатичного потенціалу в сферичних або циліндричних об'ємах плазми продуктів згорання. У даній роботі розглянуто диференціальні рівняння другого порядку, у правій частині яких міститься добуток правильно змінної нелінійної функції від невідомої функції та швидко змінної нелінійної функції від її похідної при прямуванні аргументів до нуля або до нескінченності. Отримано необхідні й достатні умови існування повільно змінних $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків таких рівнянь у деякому критичному випадку, а також побудовано асимптотичні зображення таких розв'язків та їхніх перших похідних. При додаткових обмеженнях на коефіцієнти характеристичного рівняння відповідної еквівалентної системи квазілінійних рівнянь встановлено умови існування однопараметричної та двопараметричної сім'ї $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків. Варто зазначити, що раніше аналогічні результати були отримані для рівнянь, у яких, навпаки, праву частину становить добуток швидко змінної функції від невідомої функції та правильно змінної функції від її похідної. Для рівнянь, розглянутих у цій роботі, отримані результати є новими.

MSC: 34A34, 34C41, 34E99.

Ключові слова: нелінійні диференціальні рівняння другого порядку, асимптотичні зображення розв'язків, $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язки, швидко змінні функції, правильно змінні функції, повільно змінні перші похідні.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1\(43\).342064](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1(43).342064).

Вступ

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y') \varphi_1(y), \quad (1)$$

у якому $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, функції $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$) та $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0, +\infty[$ ($i \in \{0, 1\}$) є неперервними у своїх областях визначення, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, проміжок Δ_{Y_i} — або $[y_i^0, Y_i[$, або $]Y_i, y_i^0]$ * (тобто, деякий однобічний окіл точки Y_i , $i \in \{0, 1\}$)

Крім того, будемо вважати, що функція $\varphi_1 : \Delta_{Y_1} \rightarrow]0, +\infty[$ є правильно змінною (див. [1], с. 17) порядку σ_1 при прямуванні аргументу до Y_1 , а функція $\varphi_0 : \Delta_{Y_0} \rightarrow]0, +\infty[$ двічі неперервно диференційовна на Δ_{Y_0} та задовольняє умови:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_0(y) \in \{0, +\infty\}, \quad \varphi'_0(y) \neq 0 \text{ при } y \in \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(y) \varphi''_0(y)}{(\varphi'_0(y))^2} = 1. \quad (2)$$

З умов (2) випливає, що функція φ_0 та її похідна першого порядку є швидко змінними при прямуванні аргументу до Y_0 (див. [9], С. 91-92).

Отже, диференціальне рівняння (1) містить у правій частині добуток правильно та швидко змінних нелінійностей від невідомої функції та її похідної відповідно, при прямуванні аргументів до нуля або нескінченності.

Істотно нелінійні диференціальні рівняння, які містять добуток двох нелінійностей не лише від невідомої функції, а й від її похідної, часто виникають на практиці, наприклад, у теорії плазми продуктів згоряння.

Так, наприклад, під час розгляду електростатичного потенціалу в циліндричному об'ємі плазми продуктів згоряння виникає диференціальне рівняння досліджуваного типу, у якому $\varphi_0(y) = \exp(\sigma y)$, $\varphi_1(y') = |y'|^\lambda$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$, $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a, a < \omega \leq +\infty$) — неперервно диференційовна функція. Відповідні результати отримано у роботах В. М. Євтухова та Н. Г. Дрік (див. [7])

Особливий інтерес, як узагальнення попередніх класів рівнянь, становлять рівняння, у правій частині яких стоїть добуток функцій $\varphi_0(y)$ та $\varphi_1(y')$, де φ_0 є швидко змінною при $y \rightarrow Y_0$, а φ_1 — правильно змінною при $y' \rightarrow Y_1$. Відповідні результати були опубліковані, наприклад, у [2].

* При $Y_i = +\infty$ ($Y_i = -\infty$) вважаємо, що $y_i^0 > 0$ ($y_i^0 < 0$) відповідно.

У даній роботі ми продовжуємо дослідження рівнянь типу (1), у яких функція φ_0 є швидко змінною функцією від похідної невідомої функції, тоді як φ_1 — правильно змінна функція від самої невідомої функції.

Для рівнянь типу (1) розглянемо наступний клас рівнянь.

Означення 1. Розв'язок y рівняння (1), визначений на $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, називається $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язком $(-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty)$, якщо справедливими є наступні твердження

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \quad (3)$$

Цей клас розв'язків був визначений у роботі В. М. Євтухова та А. М. Самойленка [8] для диференціальних рівнянь n -го порядку типу Емдена-Фаулера та конкретизований для рівняння другого порядку. Завдяки асимптотичним властивостям функцій у класі $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків, кожен такий розв'язок належить до однієї з чотирьох непересічних множин відповідно до значення λ_0 : $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_0 = \pm\infty$.

У даній роботі ми досліджуємо рівняння (1) щодо умов існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків. Цей клас розв'язків для рівнянь виду (1) є одним з найскладніших для вивчення, оскільки похідна другого порядку явно не виражається через похідну першого порядку.

Для досліджуваних $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків у роботі [8] було встановлено наступні апріорні асимптотичні співвідношення:

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = [1 + o(1)], \quad \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = o(1) \quad \text{при } t \uparrow \omega, \quad (4)$$

де

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty. \end{cases}$$

З умов (4) випливає, що $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язки є правильно змінними функціями (див. [1], с. 17) порядку 1 при $t \uparrow \omega$, а їх похідні першого порядку є повільно змінними функціями при $t \uparrow \omega$. Деякі результати для $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків рівняння (1) у випадку $\lambda_0 = \pm\infty$ були отримані в роботах [3] та [4].

Метою даної роботи є встановлення необхідних і достатніх умов існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків, а також знаходження асимптотичних зображень при $t \uparrow \omega$ для цих розв'язків та їх похідних першого порядку у деякому критичному випадку, який у роботах [3] та [4] розглянуто не було.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Наведемо наступні означення.

Означення 2. Нехай $Y \in \{0, \infty\}$, Δ_Y — деякий однобічний окіл Y . Неперервно диференційовна функція $L : \Delta_Y \rightarrow]0; +\infty[$ називається нормалізованою повільно змінною функцією при $y \rightarrow Y$ ($y \in \Delta_Y$) ([9], с.2-3), якщо

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{yL'(y)}{L(y)} = 0.$$

Означення 3. Говорять, що повільно змінна при $y \rightarrow Y$ ($y \in \Delta_Y$) функція $\theta : \Delta_Y \rightarrow]0; +\infty[$ задовільняє умову S при прямуванні аргументу до Y (див., наприклад, у [8]), якщо для будь-якої нормалізованої повільно змінної при $y \rightarrow Y$ ($y \in \Delta_Y$) функції $L : \Delta_Y \rightarrow]0; +\infty[$ має місце співвідношення

$$\theta(yL(y)) = \theta(y)(1 + o(1)) \quad \text{при } y \rightarrow Y \quad (y \in \Delta_Y).$$

Введемо наступні позначення

$$\mu_0 = \text{sign} \varphi'_0(y'), \quad v_0 = \text{sign} y'_0, \quad v_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Delta_{Y_0} = [y_0^0, Y_0[, \\ -1, & \text{якщо } \Delta_{Y_0} =]Y_0, y_0^0]. \end{cases}$$

Згідно з означення $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків диференціального рівняння (1) числа v_0, v_1 та α_0 однозначно визначають знаки будь-якого $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язку, а також його першої та другої похідних у деякому околі точки ω . Зауважимо, що умови

$$v_0 \cdot v_1 < 0 \quad \text{при } Y_0 = 0, \quad v_0 \cdot v_1 > 0 \quad \text{при } Y_0 = \pm\infty,$$

та

$$v_1 \cdot \alpha_0 < 0 \quad \text{при } \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = 0, \quad \alpha_0 \cdot v_1 > 0 \quad \text{при } \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = \pm\infty,$$

є необхідними для існування таких розв'язків.

Тоді, зважаючи на (4), виконуються умови

$$v_0 \cdot v_1 \pi_\omega(t) > 0 \text{ при } t \in [a, \omega[,$$

а також,

$$Y_0 = 0 \text{ при } \omega < +\infty, Y_0 = \pm\infty \text{ при } t \in [a, \omega[,$$

які є необхідним умовами існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків.

У роботі [4] також доведено наступну теорему, яка також вказує на необхідні умови існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків.

Теорема 1. *Нехай $\sigma_1 \neq 1$, функція $\varphi_1(y')|y'|^{-\sigma_1}$ задовольняє умову S при $y' \rightarrow Y_1$ ($y' \in \Delta_{Y_1}$). Тоді, кожен $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ - розв'язок диференціального рівняння (1) може бути представлений у вигляді*

$$y(t) = \pi_\omega(t)L(t), \quad (5)$$

де $L : [t_0, \omega[\rightarrow R$ - двічі неперервно диференційовна функція така, що

$$y_0^0 \pi_\omega(t)L(t) > 0, \quad L'(t) \neq 0 \text{ при } t \in [t_1, \omega[\quad (t_0 \leq t_1 < \omega), \quad (6)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} L(t) \in \{0; \pm\infty\}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t)L(t) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} = 0. \quad (7)$$

При цьому, у випадку існування скінченної або нескінченної границі

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}, \quad (8)$$

мають місце наступні співвідношення

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)} = -1, \quad \alpha_0 L'(t) > 0 \text{ при } t \in [t_1, \omega[\quad (t_0 \leq t_1 < \omega), \quad (9)$$

$$p(t) = \frac{\alpha_0 L'(t)}{|\pi_\omega(t)L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(\pi_\omega(t)) \cdot \varphi_0 \left(L(t) \left[1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \right] \right)} [1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \quad (10)$$

Означення 4. Будемо говорити, що виконується умова N , якщо для деякої неперервно диференційовної функції $L(t) : [t_0, \omega[\rightarrow R$ ($t_0 \in [a, \omega[$), яка задовольняє умови (5)-(7) та (9), має місце зображення

$$p(t) = \frac{\alpha_0 L'(t)}{|\pi_\omega(t)L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(\pi_\omega(t)) \cdot \varphi_0 \left(L(t) \left[1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \right] \right)} [1 + r(t)], \quad (14)$$

де $r(t) : [t_0, \omega[\rightarrow]-1; +\infty[$ - неперервна функція, яка прямує до нуля при $t \uparrow \omega$.

Введемо наступні позначення

$$\theta_1(y) = \varphi_1(y)|y|^{-\sigma_1}, \quad X(t) = L(t) \cdot e_1(t),$$

$$H(t) = \frac{L^2(t)\varphi'_0(X(t))}{\pi_\omega(t)L'(t)\varphi_0(X(t))}, \quad q_1(t) = \frac{\left(\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right)^2} \Big|_{y=X(t)}, \quad q_2(t) = y \frac{\left(\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right)} \Big|_{y=X(t)},$$

$$e_1(t) = 1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}, \quad e_2(t) = 2 + \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}.$$

Для цих функцій, у силу (2) та (7) виконуються наступні твердження:

1)

$$\lim_{t \uparrow \omega} e_1(t) = \lim_{t \uparrow \omega} e_2(t) = 1 \quad (15)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} H(t) = \pm\infty, \quad \lim_{t \uparrow \omega} q_1(t) = 0, \quad (16)$$

2) якщо існує границя

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \cdot \frac{H'(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}},$$

тоді

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \cdot \frac{H'(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}} = 0. \quad (17)$$

Дійсно, в твердження (15) безпосередньо впливають з умов (7) та (9).

Твердження (16) впливають зі справедливості тверджень:

$$H(t) = \frac{L(t)}{\pi_\omega(t)L'(t)} \cdot \frac{X(t)\varphi'_0(X(t))}{\varphi_0(X(t))} \cdot \frac{1}{e_1(t)},$$

$$\frac{\varphi_0(X(t))\varphi''_0(X(t))}{(\varphi'_0(X(t)))^2} = 1 + \frac{\left(\frac{\varphi'_0(X(t))}{\varphi_0(X(t))}\right)'}{\frac{\varphi'_0(X(t))}{\varphi_0(X(t))}}.$$

Твердження (17) доводиться аналогічно до відповідного твердження, наведеного у роботі Євтухова В.М. та Чернікової А.Г. [5].

У даній роботі на відміну від [3] та [4] розглянемо випадок, коли виконується умова

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} |H(t)|^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (18)$$

У цьому випадку, з урахуванням (17)

$$\frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} q_1(t)H(t) = -1 + o(1) \text{ при } t \uparrow \omega$$

З виду функцій H , q_1 , q_2 випливає, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} q_2(t) = -1,$$

звідки, в силу (9) та (10) функція $\frac{\varphi'_0(y')}{\varphi_0(y')}$ є правильно змінною порядку -1 при $y' \rightarrow Y_0$ ($y' \in \Delta_{Y_0}$)

Отже, випадок виконання умови (18) є у деякому сенсі критичним.

Будемо надалі вважати, що існує скінченна або нескінченна границя

$$\lim_{t \uparrow \omega} \left(1 + q_1(t) + \frac{X(t)}{e_2(t) \cdot L'(t)} \right) \cdot (e_1(t) - 1) \cdot e_1(t) \cdot H(t) = \gamma_1. \quad (19)$$

Зауважимо, що знак γ_1 повинен співпадати зі знаком $\alpha_0 \cdot v_0 \cdot v_1 \mu_0(t)$

Теорема 2. Нехай $\sigma_1 \neq 1$, функція θ_1 задовольняє умову S , виконується умова N та (18). Тоді диференціальне рівняння (1) має принаймні один $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язок, для якого мають місце наступні асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$:

$$y(t) = \pi_\omega(t) \cdot L(t)(1 + o(1)), \quad (20)$$

$$y'(t) = X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi'_0(X(t))} \cdot |H(t)|^{\frac{1}{2}} \cdot o(1). \quad (21)$$

Більш того, якщо $\omega < +\infty$, то при виконанні однієї з умов

$$\text{або } 1 < \gamma_1 < 0, \text{ або } \gamma_1 = 0 \text{ та } \alpha_0 \cdot \mu_0 > 0,$$

диференціальне рівняння (1) має однопараметричну $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків з асимптотичними зображеннями (20)-(21), а якщо $\omega = +\infty$, то таких розв'язків існує двопараметрична сім'я у випадках, коли

$$\text{або } 1 < \gamma_1 < 0, \text{ або } \gamma_1 = 0 \text{ та } \alpha_0 \cdot \mu_0 < 0,$$

і однопараметрична сім'я у випадках, коли

$$-\infty < \gamma_1 < -1 \text{ або } 0 < \gamma_1 < +\infty$$

Доведення. До рівняння (1) застосуємо перетворення

$$y(t) = \pi_\omega(t) \cdot L(t) \cdot [1 + z_1(t)], \quad (22)$$

$$y'(t) = X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi'_0(X(t))} \cdot z_2(t).$$

У результаті перетворення отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$z'_1 = \frac{e_1(t)}{\pi_\omega(t)} \cdot [-z_1 + K(t)z_2], \quad (23)$$

$$z'_2 = L'(t) \cdot e_2(t) \cdot \frac{\varphi'_0(X(t))}{\varphi_0(X(t))} \times \\ \times \left[\frac{\alpha_0 p(t) |\pi_\omega(t) \cdot L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(\pi_\omega(t)) \varphi_0(Y_2(t, z_2)) \cdot N(t, z_1)}{L'(t) e_2(t)} \cdot [1 + z_1]^{\sigma_1} - 1 + z_2 \cdot q_1(t) \right],$$

де

$$K(t) = \frac{\varphi_0(X(t))}{X(t) \varphi'_0(X(t))}, \quad N(t, z_1) = \frac{\theta_1(Y_1(t, z_1))}{\theta_1(\pi_\omega(t))},$$

$$Y_1(t, z_1) = \pi_\omega(t) \cdot L(t) \cdot [1 + z_1(t)], \quad Y_2(t, z_2) = X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi'_0(X(t))} \cdot z_2(t).$$

Оскільки функція $Y_1(t, z_1)$ є правильно змінною порядку 1, функція θ_1 задовольняє умову S , то

$$\lim_{t \uparrow \omega} N(t, z_1) = 1 \text{ рівномірно за } z_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \quad (24)$$

У силу умови N

$$\frac{\alpha_0 p(t) |\pi_\omega(t) L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(\pi_\omega(t)) \varphi_0(Y_2(t, z_2))}{L'(t)} = \frac{\varphi_0(Y_2(t, z_2))}{\varphi_0(X(t))} [1 + r(t)]. \quad (25)$$

Розкладаючи праву частину (25) при фіксованому $t \in [t_1; \omega[$ за формулою Маклорена з залишком у формі Лагранжа, маємо,

$$\frac{\varphi_0(Y_1(t, z_1))}{\varphi_0(X(t))} \cdot [1 + r(t)] = [1 + r(t)] \cdot (1 + z_2) + R(t, z_2),$$

де

$$R(t, z_2) = [1 + r(t)] \cdot \frac{\varphi_0'' \left(X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi \right) \varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot z_2^2,$$

$$|\xi| < |z_2|.$$

Оскільки,

$$Y(t, z_1) = X(t) \left[1 + \frac{1}{\frac{X(t)\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))}} \xi \right],$$

то з умов (2) та (7) випливає, що

$$\varphi_0'' \left(X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi \right) = \frac{\varphi_0'^2 \left(X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi \right)}{\varphi_0 \left(X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi \right)} \cdot [1 + d_1(t, z_2)],$$

де

$$\lim_{t \uparrow \omega} d_1(t, z_2) = 0 \text{ рівномірно за } z_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

За лемою 1.2. з [5] так, як $\varphi_0, \varphi_0' \in \Gamma_{Y_1}(Z_1)$ з додатковою функцією $g = \frac{\varphi_0}{\varphi_0'}$, то справедливою є рівність

$$\varphi_0'' \left(X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi \right) = \frac{\varphi_0'^2(X(t))}{\varphi_0(X(t))} e^\xi [1 + d_1(t, z_2)],$$

де

$$\lim_{t \uparrow \omega} d_1(t, z_2) = 0 \text{ рівномірно за } z_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

Отже, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують такі

$t_1 \in [t_0; \omega[$ та $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$, що

$$|R(t, z_2)| \leq (1 + \varepsilon) |z_2|^2 \text{ при } t \in [t_1; \omega[, |z_1| \leq \delta. \quad (26)$$

Вибираємо довільним чином число $\varepsilon > 0$ та розглянемо систему (23) на множині

$$\Omega = [t_1; \omega[\times D, \text{ де } D = \{(z_1; z_2) \in R^2, \quad |z_1| \leq \delta, \quad |z_2| \leq \frac{1}{2}\}.$$

Система (23) на Ω має вид

$$z_1' = \frac{e_1(t)}{\pi_\omega(t)} \cdot [A_{11}z_1 + A_{12}z_2], \quad (27)$$

$$z_2' = L'(t)e_2(t) \cdot \frac{\varphi_0'(X(t))}{\varphi_0(X(t))} \cdot [A_{21}(t)z_1 + A_{22}(t)z_2 + R_1(t, z_1, z_2) + R_2(t, z_1, z_2)], \quad (28)$$

де

$$A_{11}(t) = -1, \quad A_{12} = K(t), \quad A_{21}(t) = \sigma_1, \quad A_{22}(t) = 1 + q_1(t),$$

$$\begin{aligned} R_1(t, z_1, z_2) &= \left(\frac{(1+r_1)N(t, z_1)}{e_2(t)} - 1 \right) (1 + \sigma_1 z_1 + z_2), \\ R_2(t, z_1, z_2) &= \frac{(1+r_1)N(t, z_1)}{e_2(t)} (\sigma_1 z_1 z_2 + (1+z_2)((1+z_1)^{\sigma_1} - 1 - \sigma_1 z_1)) + \\ &\quad + R(t, z_2) \cdot \frac{(1+z_2)(1+z_1)^{\sigma_1} N(t, z_1)}{e_2(t)}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що з урахуванням (2) та (15),

$$\lim_{t \uparrow \omega} A_{11} = -1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} A_{12} = 0.$$

До системи (27)-(28) застосуємо перетворення

$$z_1(t) = \omega_1(t)$$

$$z_2(t) = \frac{\omega_2(t)}{K(t)}.$$

У результаті отримаємо систему

$$\omega_1' = h_1(t) \cdot [c_{11}(t)\omega_1 + c_{12}(t)\omega_2], \quad (29)$$

$$\omega_2' = h_2(t) \cdot [c_{21}(t)\omega_1 + c_{22}(t)\omega_2 + f(t, \omega_1, \omega_2) + R_3(t, \omega_1, \omega_2)], \quad (30)$$

де

$$h_1(t) = \frac{e_1(t)}{\pi_\omega(t)}, c_{11}(t) = -1, c_{12}(t) = 1$$

$$h_2(t) = \frac{L'(t) \cdot e_2(t)}{e_1(t) \cdot L(t)}$$

$$c_{21}(t) = \sigma_1, \quad c_{22}(t) = \frac{1 + q_1 + \frac{1}{h_2(t)}}{K(t)},$$

$$\begin{aligned} R_1(t, \omega_1, \omega_2) &= \left(\frac{(1 + r_1)N(t, \omega_1)}{e_2(t)} - 1 \right) \left(1 + \sigma_1 \omega_1 + \frac{\omega_2}{K(t)} \right), \\ R_2(t, \omega_1, \omega_2) &= \frac{(1 + r_1)N(t, \omega_1)}{e_2(t)} \left(\sigma_1 \omega_1 \frac{\omega_2}{K(t)} + \left(1 + \frac{\omega_2}{K(t)} \right) ((1 + \omega_1)^{\sigma_1} - 1 - \sigma_1 \omega_1) \right) + \\ &\quad + R(t, \frac{\omega_2}{K(t)}) \cdot \frac{(1 + \frac{\omega_2}{K(t)})(1 + \omega_1)^{\sigma_1} N(t, \omega_1)}{e_2(t)}. \end{aligned}$$

В силу умови N, умов теореми та умови маємо

$$h_1(t) \cdot h_2(t) \neq 0, \quad t \in [t_1; \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{h_2(t)}{h_1(t)} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \cdot L'(t) \cdot e_2(t)}{e_1^2(t) \cdot L(t)} = 0,$$

$$\int_{t_1}^t h_2(\tau) d\tau = \pm \infty$$

Крім того,

$$\lim_{t \uparrow \omega} c_{22}(t) = \gamma_1$$

Також,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R_1(t; \omega_1; \omega_2) = 0 \text{ рівномірно за } \omega_1, \omega_2 : |z_i| < \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2.$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{R_2(t; \omega_1; \omega_2)}{|\omega_1| + |\omega_2|} = 0.$$

При $0 \leq \gamma_1 < +\infty$ та $\gamma_1 \neq -1$ гранична матриця коефіцієнтів при ω_1 та ω_2 має вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \sigma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}$$

Оскільки $\gamma_1 \neq -1$, визначник матриці не дорівнює нулю, сума елементів першого рядка дорівнює 0, сума елементів другого рядка не дорівнює 0, в сиду умов для системи виконані всі умови теореми 2.7 роботи [6].

Відповідно до цієї теореми система (29)-(30) має принаймні один розв'язок $\{\omega_i\}_{i=1}^2 : [t^*, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ ($t^* \geq t_1$), які прямують до нуля при $t \uparrow \omega$. Цим

розв'язкам відповідають розв'язки $y : [t^*, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ($t^* \geq t_1$) рівняння (1), що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (20)-(21).

При $\omega < +\infty$ та $\alpha_0\mu_0\nu_0\nu_1 < 0$, а також при $\omega = +\infty$ та $\alpha_0\mu_0\nu_0\nu_1 > 0$ існує однопараметрична сім'я таких $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків, при $\omega = +\infty$ та $\alpha_0\mu_0\nu_0\nu_1 < 0$ існує двопараметрична сім'я таких $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків. В силу виду зображень (20)-(21) впливає, що отримані розв'язки є $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язками рівняння (1). Теорема повністю доведена.

Висновки

У даній роботі отримано достатні умови існування рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків у деякому критичному випадку, визначена кількість таких розв'язків в залежності від умов на рівня (1), а також, встановлено асимптотичні при зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків та їх похідних першого порядку. Застосована в роботі методика дослідження може бути використана для встановлення асимптотики диференціальних рівнянь третього і вищих порядків з добутком правильно та швидко змінних нелінійностей від невідомої функції та її першої похідної у правій частині.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.** Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications.// Cambridge university press. Cambridge. 1987. 494p.
2. **Чепок О. О.** Asymptotic Representations of a Class of Regularly Varying Solutions of Differential Equations of the Second Order with Rapidly and Regularly Varying Non-linearities// Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. 2018. V. 74. P. 79–92.
3. **Чепок, О.** (2022). Асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, +\infty)$ -розв'язків диференціального рівняння другого порядку, яке містить добуток різного типу нелінійностей від невідомої функції та її похідної// Дослідження в математиці і механіці. 2022. Т. 27, вип. 1-2(38-39). С. 92–104.10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294309
4. **Чепок, О.** (2023). Asymptotic behavior of $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solutions of the second order differential equations with the product of different types of nonlinearities from an unknown function and its first derivative. Bukovinian Math. Journal. 11, No. 2, 33 – 40. 10.31861/bmj2023.02.04
5. **Evtukhov, V., Chernikova, A.** (2019). Asymptotic Behavior of Slowly Varying Solutions of Second-Order Ordinary Binomial Differential Equations with Rapidly Varying Nonlinearity // Journal of Mathematical Sciences. 236. 10.1007/s10958-018-4111-7.

-
6. **Evtukhov, V., Samoilenko, A.** (2010). Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point // Ukrainian Mathematical Journal - UKR MATH J. 62. 56-86. 10.1007/s11253-010-0333-7.
 7. **Evtulhov V. M., Drik N. G.** Asimptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation // Georgian Mathematical Journal. 1996. Vol.3, №2, P. 101-120.
 8. **Evtukhov, V., Samoilenko, A.** (2011). Asymptotic Representations of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities // Differential Equations, Vol. 47, No. 5, pp. 627–649
 9. **Maric V.** Regular Variation and differential equations // Springer (Lecture notes in mathematics, 1726). 2000. 127p.
 10. **Seneta E.** (1976) *Regularly varying functions* Lecture Notes in Math., vol. 508, Berlin: Springer-Verlag.

Chepok O. O.

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -SOLUTIONS OF A SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION CONTAINING A PRODUCT OF DIFFERENT TYPES OF NONLINEARITIES, IN SOME CRITICAL CASE

Summary

Establishing the existence conditions and constructing asymptotic representations of solutions of differential equations with nonlinearities of various types in the right-hand side is one of the most important tasks of the qualitative theory of differential equations. Such equations have practical significance, in particular, in combustion models or in the study of the electrostatic potential in spherical or cylindrical plasma volumes of combustion products. This paper considers second-order differential equations, the right-hand side of which contains the product of a regularly varying nonlinear function from an unknown function and a rapidly varying nonlinear function from its derivative as the arguments approach zero or infinity. Necessary and sufficient conditions for the existence of slowly varying $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solutions of such equations in some critical case are obtained, and asymptotic representations of such solutions and their first derivatives are also constructed. With additional restrictions on the coefficients of the characteristic equation of the corresponding equivalent system of quasilinear equations, the conditions for the existence of one-parameter and two-parameter families of $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solutions are established. It is worth noting that previously similar results were obtained for equations in which, on the contrary, the right-hand side is the product of a rapidly varying function by an unknown function and a regularly varying function by its derivative. For the equations considered in this paper, the obtained results are new.

Keywords: nonlinear second-order differential equations, asymptotic representations of solutions, $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solutions, rapidly varying functions, regularly varying functions, slowly varying first-order derivatives.

REFERENCES

1. **Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.** Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications.// Cambridge university press. Cambridge. 1987. 494p.

2. **Chepok O. O.** Asymptotic Representations of a Class of Regularly Varying Solutions of Differential Equations of the Second Order with Rapidly and Regularly Varying Nonlinearities // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. 2018. V. 74. P. 79–92.
3. **Чепок, О.** (2022). Asymptotic representations of $P_\omega(Y_0, Y_1, +\infty)$ -solutions of a second-order differential equation containing the product of various types of nonlinearities of an unknown function and its derivative [Asymptotychni zobrazhennia $P_\omega(Y_0, Y_1, +\infty)$ -rozv'iazkiv dyferentsialnoho rivniannia druho poriadku, yake mistyt dobutok riznoho typu neliniinosti vid nevidomoi funktsii ta yii pokhidnoi] // Doslidzhennia v matematytsi i mekhanitsi. 2022. 27, 1-2(38-39). P. 92–104. 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294309
4. **Chepok, O.** (2023). Asymptotic behavior of $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solutions of the second order differential equations with the product of different types of nonlinearities from an unknown function and its first derivative. Bukovinian Math. Journal. 11, No. 2, 33–40. 10.31861/bmj2023.02.04
5. **Evtukhov, V., Chernikova, A.** (2019). Asymptotic Behavior of Slowly Varying Solutions of Second-Order Ordinary Binomial Differential Equations with Rapidly Varying Nonlinearity // Journal of Mathematical Sciences. 236. 10.1007/s10958-018-4111-7.
6. **Evtukhov, V., Samoilenko, A.** (2010). Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point // Ukrainian Mathematical Journal - UKR MATH J. 62. 56-86. 10.1007/s11253-010-0333-7.
7. **Evtulhov V. M., Drik N. G.** Asimptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation // Georgian Mathematical Journal. 1996. Vol.3, №2, P. 101-120.
8. **Evtukhov, V., Samoilenko, A.** (2011). Asymptotic Representations of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities // Differential Equations, Vol. 47, No. 5, pp. 627–649
9. **Maric V.** Regular Variation and differential equations // Springer (Lecture notes in mathematics, 1726). 2000. 127p.
10. **Seneta E.** (1976) *Regularly varying functions* Lecture Notes in Math., vol. 508, Berlin: Springer-Verlag.

УДК 514.07

С. М. Покась, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
e-mail: pokas@onu.edu.ua

М. О. Білозерова, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
e-mail: marbel@ukr.net
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3177-790X>

ІНФІНІТЕЗИМАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ У РІМАНОВИХ ПРОСТОРАХ ДРУГОГО НАБЛИЖЕННЯ

В роботі розвиваються наближені методи дослідження геометричних властивостей ріманових просторів з використанням рядів Тейлора. Досліджуються нескінченно малі конформні рухи та нетривіальні конциркулярні перетворення у рімановому просторі другого наближення для ріманова простора спеціальної структури. У явному вигляді отримано вектор зсуву конформного вектора Кілінга. Отримані умови носять необхідний і достатній характер, тому вони дозволяють вивчити геометричні властивості як самих просторів, так і їх наближення. Доведено, що простір другого наближення, відмінний від простору сталої кривини, не допускає нетривіальних конциркулярних перетворень. Для дослідження використовуються спеціальні системи координат для визначення наближення другого порядку. Дослідження ведуться локально, тензорними методами без обмежень на сигнатуру та знаковизначеність метричного тензора ріманового простору.

MSC: 53B35.

Ключові слова: рімановий простір, тензор Рімана, тензор Річчі, простір другого наближення, інфінітезимальні перетворення, похідна Лі.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1\(43\).342065](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1(43).342065).

Вступ

Актуальність розробки в диференціальній геометрії інваріантних щодо вибору системи координат наближених методів пояснюється наступними

міркуваннями.

Основні геометричні об'єкти диференціальної геометрії виникають в результаті розгляду різних геометричних образів в диференціальному околі першого, другого або більш високого порядку, і таким чином наближено, з деякою, що не піддається більш-менш суворій оцінці, точністю. Однак при вивченні геометричних об'єктів зазначений принцип, як правило, не враховується, що є неприродним з теоретичної точки зору і перешкоджає використанню досягнень сучасної диференціальної геометрії в додатках [4, 5].

Ідея вивчення геометричних об'єктів в околі довільної точки з точністю того чи іншого порядку досить часто застосовувалася в геометрії і приводила до більш глибокому вивченню цих об'єктів. Так, наприклад, в теорії кривих у диференціальній околі 1-го порядку виникає інваріантний вектор дотичної. Це дозволяє ввести поняття довжини дуги кривої і вибрати її в якості параметра кривої. У диференціальній околі 2-го порядку будується вектор головної нормалі і кривина кривої. І, нарешті, при розгляді диференціального околу 3-го порядку отримуємо скрут кривої.

Використання наближених методів у рімановій геометрії пов'язано з формулою Тейлора. Вперше цю формулу для метричного тензора симетричного ріманова простору, віднесеного до нормальної системи координат, застосував П. А. Широков. Відзначимо, що наближені методи застосовуються в різних розділах математики: в теорії диференціальних рівнянь, в крайових задачах і рівняннях математичної фізики, в деяких областях теоретичної фізики: прикладної астрономії і атмосферної оптики [1, 6].

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Ріманові простори другого наближення.

Розглянемо рімановий простір V_n , віднесений до координат $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ з метричним тензором $g_{ij}(x)$. Зафіксуємо в V_n точку $M_0(x_0^h)$ і побудуємо новий простір $\tilde{V}_n^2$, визначив його метричний тензор $\tilde{g}_{ij}$ наступним чином

$$\tilde{g}_{ij}(y) = g_{ij} + \frac{1}{3} R_{il_1 l_2 j} y^{l_1} y^{l_2}, \quad (1.1)$$

де $g_{ij} = g_{ij}(M_0)$, $R_{il_1 l_2 j} = R_{il_1 l_2 j}(M_0)$.

Далі формули типу (1.1) будемо записувати у вигляді

$$\tilde{g}_{ij}(y) = g_{ij} + \frac{1}{3}R_{i\alpha\beta j}y^\alpha y^\beta,$$

вважаючи, що об'єкти простору V_n обчислені у точці M_0 . Якщо у V_n перейти до ріманової системи координат з початком у точці M_0 і розкласти метричний тензор $g_{ij}(x)$ у ряд Тейлора і околі точки M_0 , то побачимо, що простір $\tilde{V}_n^2$ реалізує наближення другого порядку для V_n і тому відражає його геометричні властивості з деяким ступенем точності [3, 9].

Простір $\tilde{V}_n^2$ ми будемо називати простором другого наближення для ріманового V_n .

Відзначимо деякі властивості простору $\tilde{V}_n^2$ [13, 14].

Теорема 1. *Якщо простір V_n піддається ізометричному перетворенню, то наближення $\tilde{V}_n^2$ також піддається ізометричному перетворенню.*

Теорема 2. *Система координат $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$ у просторі $\tilde{V}_n^2$ є рімановою з початком у точці $y^k = 0$, ($k = 1, 2, \dots, n$)*

Теорема 3. *Елементи оберненої матриці для $\|\tilde{g}_{ij}(y)\|$ простору $\tilde{V}_n^2$ мають вигляд*

$$\tilde{g}^{ij}(y) = g^{ij} + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p t^{(p)ij}, \quad (1.2)$$

де

$$t_k^i = \frac{1}{3}R_{l_1 l_2 k}^i y^{l_1} y^{l_2} \quad (1.3)$$

$$t_j^{(2)i} = t_\alpha^i t_j^\alpha$$

$$t_j^{(p)i} = t_\alpha^{(p-1)i} t_j^\alpha, \quad (p = 1, 2, 3 \dots) \quad (1.4)$$

Причому ряди (1.2) збігаються абсолютно та рівномірно на множині $|R_{l_1 l_2 k}^h y^{l_1} y^{l_2}| < \frac{3}{n}$.

Відомо, що дослідження аналітичних нескінченно малих конформних рухів у просторі $\tilde{V}_n^2$

$$y'^h = y^h + \xi^h(y)\delta t$$

зводиться до інтегрування узагальнених рівнянь Кіллінга

$$L_\xi \tilde{g}_{ij} = \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^i} \tilde{g}_{\alpha j} + \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^j} \tilde{g}_{\alpha i} + \tilde{\xi}^\alpha \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial y^\alpha} = \psi(y) \tilde{g}_{ij} \quad (1.5)$$

Якщо задати аналітичну функцію $\psi(y)$

$$\psi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^h \quad (b_k = b_{l_1 \dots l_k} y^{l_1} \dots y^{l_k}), \quad (1.6)$$

де $b_{l_1 \dots l_k}$ - деякі константи, симетричні за нижніми індексами і шукати $\tilde{\xi}(y)$ теж у вигляді аналітичних функцій [2, 7]

$$\tilde{\xi}^h = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^h \quad (a_k^h = a_{l_1 \dots l_k}^h y^{l_1 \dots l_k}). \quad (1.7)$$

$a_{l_1 \dots l_k}^h$ - невідомі константи, симетричні за нижніми індексами, то аналіз рівнянь Кіллінга дає наступний результат: для того, щоб ряди (1.7) визначали компоненти вектора зсуву аналітичних нескінченно малих конформних рухів у наближеному просторі $\tilde{V}_n^2$, необхідно і достатньо виконання наступних умов:

$$\begin{aligned} a_{2p}^h &= \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1} a^{\alpha} t_{\alpha}^{(p)h} + \frac{1}{2p} \left(b_{2p-1} y^h - \frac{1}{2} b_{2p-2} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) + \\ &+ \frac{(-1)^p}{4(2p-1)} \sum_{s=1}^{p-1} \frac{2p-2s-1}{p-s} b_{2p-2s-2}^{\alpha} t_{\alpha}^{(s)h} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \quad (p=2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} a_{2p+1}^h &= \left(b_{2p} y^h - \frac{1}{2} b_{2p-1} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) + \frac{1}{2p} \left[\frac{p+1}{2p+1} b^{\alpha} t_{\alpha}^h + \right. \\ &+ \left. \sum_{s=2}^{p-1} \frac{(-1)^{s+1}(p-s)}{2p-2s+1} b_{2p-2s+1}^{\alpha} t_{\alpha}^{(s)h} \right] g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \quad (p=3, 4, \dots) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$a_{(ij)} = b g_{ij} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} &\frac{4k}{2k+1} \left(a_{(i}^{\alpha} t_{j)\alpha} + \frac{1}{3} a_{\alpha} R_{(ij)l}^{\alpha} y^l \right) + \\ &+ \frac{k}{k+1} \left(b_{(i} g_{j)l} y^l - b_{2k+1} g_{ij} - b_{2k-1} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) - b_{2k-1} t_{ij} = 0, \quad k=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} &\frac{2m+1}{m+1} \left(a_{2m}^{\alpha} t_{(ij)\alpha} + \frac{1}{3} a_{\alpha} R_{(ij)l}^{\alpha} y^l \right) + \\ &+ \frac{2m+1}{2m+3} \left(b_{(i} g_{j)l} y^l - b_{2m+2} g_{ij} - b_{2m} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) - b_{2m} t_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Зауваження 1. Оскільки члени рядів (1.7) виражаються через a^h, a_1^h, b, b_1 об'єкти простору $\tilde{V}_n^2$ в точці M_0 , то з огляду на рівняння (1.10), (1.11) і (1.12) доходимо відомого результату про те, що максимальний порядок r групи Лі аналітичних нескінченно малих конформних рухів у рімановому просторі $\tilde{V}_n^2$ другого наближення задовольняє нерівності

$$r \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

При дослідженні інфінітезимальних рухів у просторі $\tilde{V}_n^2$ умовами тензорного характеру був виділен деякий клас напівсиметричних ріманових просторів, а саме Π_n^2 - простори, тензор кривини яких задовольняє умові [10, 11]:

$$R_{(l_1 l_2) \alpha}^h R_{(ij) l_3}^\alpha + R_{(l_3 l_2) \alpha}^h R_{(ij) l_1}^\alpha + R_{(l_1 l_3) \alpha}^h R_{(ij) l_2}^\alpha = 0 \quad (1.13)$$

Знайдемо узагальнений вектор Кіллінга для простору Π_n^2 . Враховуючи умову (1.13), члени рядів (1.7) матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} a_2^h &= a^\alpha t_\alpha^h + \frac{1}{2} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) \\ a_{2p}^h &= \frac{1}{2p} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) + \frac{(-1)^p (2p-3)}{4(2p-1)(p-1)} \frac{b}{2p-3} \alpha t_\alpha^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \quad (p=2, 3, \dots) \\ a_3^h &= \frac{1}{3} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) \\ a_5^h &= \frac{1}{12} b^\alpha t_\alpha^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} + \frac{1}{5} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) \\ a_{2p+1}^h &= \frac{1}{2p+1} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) + \frac{1}{2p} \cdot \frac{p+1}{2p+1} \frac{b}{2p-3} \alpha t_\alpha^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \quad (p=3, 4, \dots) \end{aligned}$$

А тоді, узагальнений вектор Кіллінга матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^h &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^h = a^h + a_{l_1}^h y^{l_1} + \left[a^\alpha t_\alpha^h + \frac{1}{2} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{3} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) + \frac{1}{4} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) + \\ &+ \frac{1}{12} b^\alpha t_\alpha^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} + \frac{1}{5} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) + \frac{1}{6} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) - \\ &- \frac{3}{2 \cdot 20} b^\alpha b^\alpha t_\alpha^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} + \frac{1}{7} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{7} b^\alpha t_\alpha^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} + \dots \end{aligned}$$

Зводячи подібні отримуємо:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}^h &= a^h + a_{l_1}^h y^{l_1} + a^\alpha t_\alpha^h + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} b^h y^h - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} + \\ &+ \left[\frac{1}{6} b^\alpha + \sum_{p=3}^{\infty} \left(\frac{(-1)^p (2p-3)}{4(p-1)(2p-1)} + \frac{p+1}{2p(2p_1)} \right) \right] b_{2p-3}^\alpha g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^2\end{aligned}$$

Таким чином має місце наступне твердження [15, 16]:

Теорема 4. У просторі другого наближення $\tilde{\Pi}_n^2$ для простору Π_n , узагальнений вектор Кілінга має вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}^h &= a^h + a_{l_1}^h y^{l_1} + a^\alpha t_\alpha^h + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} b^h y^h - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} + \\ &+ \left[\frac{1}{6} b^\alpha + \sum_{p=3}^{\infty} \left(\frac{(-1)^p (2p-3)}{4(p-1)(2p-1)} + \frac{p+1}{2p(2p_1)} \right) \right] b_{2p-3}^\alpha g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^2\end{aligned}$$

2. Нескінченно малі конциркулярні перетворення в рімановому просторі другого наближення для V_n спеціальної структури

Розгляд конциркулярних перетворень, окрім чистого геометричного інтересу, представляє зацікавленість з точки зору загальної теорії відносності, тому що геодезичні кола є траєкторії рівноприскореного руху в теорії Ейнштейна. Крім того існує зв'язок між проєктивними і конциркулярними рухами в V_n .

Означення 1. Геодезичним колом в V_n називається крива з постійною першою і нульовою другою кривинами.

Рівняння геодезичного кола має вигляд

$$\frac{d^3 u^h}{ds^3} + g_{\alpha\beta} \frac{d^2 u^\alpha}{ds^2} \frac{d^2 u^\beta}{ds^2} \frac{du^h}{ds} = 0$$

Означення 2. Векторне поле в X в рімановому просторі V_n називається інфінітезімальним конциркулярним перетворенням або конциркулярним рухом, якщо виконуються умови

$$L_X g_{ij} = \psi g_{ij}$$

$$\psi_{,ij} = \phi g_{ij},$$

де ψ_i, ϕ - функції на V_n (кома - знак коваріантної похідної відносно g_{ij} , $L_X g_{ij}$ - похідна Лі) [8, 12].

Розглянемо випадок, коли простіром V_n служить Π_n , тобто виконується умова

$$R^h_{\cdot(l_1 l_2)\alpha} R^\alpha_{(ij)l_3} + R^h_{\cdot(l_3 l_2)\alpha} R^\alpha_{(ij)l_1} + R^h_{\cdot(l_1 l_3)\alpha} R^\alpha_{(ij)l_2} = 0 \quad (2.1)$$

Простір $\tilde{\Pi}_n^2$ має ту властивість, що компоненти об'єкту зв'язності $\tilde{\Gamma}_{ij}^h(y)$ є лінійними однорідними функціями

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^h = -\frac{1}{3} R^h_{\cdot(ij)l} y^l, \quad (2.2)$$

Будемо вивчати нескінченно малі конциркулярні перетворення в просторі $\tilde{\Pi}_n^2$

Має місце таке твердження:

Теорема 5. *Простір другого наближення $\tilde{\Pi}_n^2$ для просторів Π_n не допускає нескінченно малих конциркулярних перетворень.*

Доведення. Розглянемо рівняння

$$\tilde{\Delta}_{ij} \psi = \phi(y) \tilde{g}_{ij} \quad (2.3)$$

Підрахуємо ліву частину (2.3). Оскільки

$$\psi(y) = b + b_l y^l + b_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} + b_{l_1 l_2 l_3} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} + \dots,$$

то

$$\tilde{\Delta}_i \psi \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y^i} = b_i + 2b_{il_1} y^{l_1} + 3b_{il_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} + \dots + (p+1)b_{il_1 \dots l_p} y^{l_1} \dots y^{l_p} + \dots$$

$$\tilde{\Delta}_{ij} \psi = \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial y^j} - \tilde{\psi}_\alpha \tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^h &= \tilde{g}^{h\alpha} \left(-\frac{1}{3} R_{\alpha(ij)m} y^m \right) = -\frac{1}{3} R^h_{\cdot(ij)m} y^m \\ \tilde{\psi}_\alpha \tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha &= -\frac{1}{3} R^h_{\cdot(ij)m} y^m \left(b_\alpha + 2b_{\alpha l_1} y^{l_1} + 3b_{\alpha l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} + \dots + (p+1)b_{\alpha l_1 \dots l_p} y^{l_1} \dots y^{l_p} + \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{3} \left[b_\alpha R^h_{\cdot(ij)l} y^l + 2b_{\alpha l_1} R^h_{\cdot(ij)l_2} y^{l_1} y^{l_2} + 3b_{\alpha l_1 l_2} R^h_{\cdot(ij)l_3} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} + \dots \right. \\ &\quad \left. + p b_{\alpha l_1 \dots l_{p-1}} R^h_{\cdot(ij)l_p} y^{l_1} \dots y^{l_p} + \dots \right] \end{aligned}$$

Тоді (2.4) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{ij}\psi = & 2b_{ij} + 3b_{ij}y^l + 3 \cdot 4b_{ijl_1l_2}y^{l_1}y^{l_2} + \dots + (p+1) \cdot (p+2)b_{ijl_1\dots l_p}y^{l_1} \dots y^{l_p} + \dots + \\ & + \frac{1}{3} \left[b_{\alpha}R_{(ij)l}^{\alpha}y^l + 2b_{\alpha l_1}R_{(ij)l_2}^{\alpha}y^{l_1}y^{l_2} + 3b_{\alpha l_1l_2}R_{(ij)l_3}^{\alpha}y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} + \dots \right. \\ & \left. + pb_{\alpha l_1\dots l_{p-1}}R_{(ij)l_p}^{\alpha}y^{l_1} \dots y^{l_p} + \dots \right]\end{aligned}$$

Підрахуємо праву частину рівняння (2.3).

$$\begin{aligned}\phi(y) = & c + cy^l + c_{l_1l_2}y^{l_1}y^{l_2} + c_{l_1l_2l_3}y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} + \dots \\ \phi(y)\tilde{g}_{ij}(y) = & \left(g_{ij} + \frac{1}{3}R_{i\alpha\beta j}y^{\alpha}y^{\beta} \right) \Big|_0 \cdot \left(c + c_l y^l + c_{l_1l_2}y^{l_1}y^{l_2} + c_{l_1l_2l_3}y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} + \dots \right) = \\ = & cg_{ij} + c_l g_{ij}y^l + \left(c_{l_1l_2}g_{ij} + \frac{1}{3}cR_{il_1l_2j} \right) \Big|_0 y^{l_1l_2} + \left(c_{l_1l_2l_3}g_{ij} + \frac{1}{3}c_{l_1}R_{il_2l_3j} \right) \Big|_0 y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} + \dots\end{aligned}$$

Отже, рівняння (2.3) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}(2b_{ij})|_0 + & \left[2 \cdot 3b_{ijl} - \frac{1}{3}b_{\alpha}R_{(ij)l}^{\alpha} \right] \Big|_0 y^l + \left[3 \cdot 4b_{ijl_1l_2} - \frac{2}{3}b_{\alpha l_1}R_{(ij)l_2}^{\alpha} \right] \Big|_0 y^{l_1}y^{l_2} + \dots + \\ & + \left[4 \cdot 5b_{ijl_1l_2l_3} - 3 \cdot \frac{1}{3}b_{\alpha l_1l_2}R_{(ij)l_3}^{\alpha} \right] \Big|_0 y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} + \dots + \\ & + \left[(p+1) \cdot (p+2)b_{ijl_1\dots l_p} - p \cdot \frac{1}{3}b_{\alpha l_1\dots l_{p-1}}R_{(ij)l_p}^{\alpha} \right] \Big|_0 y^{l_1} \dots y^{l_p} + \dots = \quad (2.5) \\ & (cg_{ij})|_0 + (cg_{ij})|_0 y^l + \left(c_{l_1l_2}g_{ij} + \frac{1}{3}cR_{il_1l_2j} \right) \Big|_0 y^{l_1}y^{l_2} + \\ & + \left(c_{l_1l_2l_3}g_{ij} + \frac{1}{3}c_{l_1}R_{il_2l_3j} \right) \Big|_0 y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} + \dots + \left(c_{l_1\dots l_p}g_{ij} + \frac{1}{3}c_{l_1} \dots l_{p-2}R_{il_{p-1}l_pj} \right) \Big|_0 y^{l_1} \dots y^{l_p} + \dots\end{aligned}$$

З (2.5) випливає послідовність рівностей:

$$2b_{ij} = cg_{ij} \quad (2.6)$$

$$\left(2 \cdot 3b_{ijl} - \frac{1}{3}b_{\alpha}R_{(ij)l}^{\alpha} \right) y^l = cg_{ij}y^l \quad (2.7)$$

$$\left[3 \cdot 4b_{ijl_1l_2} - 2 \cdot \frac{1}{3}b_{\alpha l_1}R_{(ij)l_2}^{\alpha} \right] y^{l_1}y^{l_2} = \left(c_{l_1l_2}g_{ij} + \frac{1}{3}R_{il_1l_2j} \right) y^{l_1}y^{l_2} \quad (2.8)$$

$$\left[4 \cdot 5b_{ijl_1l_2l_3} - 3 \cdot \frac{1}{3}b_{\alpha l_1l_2}R_{(ij)l_3}^{\alpha} \right] y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} = \left(c_{l_1l_2l_3}g_{ij} + \frac{c_{l_1}}{3}R_{il_2l_3j} \right) y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} \quad (2.9)$$

...

$$\begin{aligned} & \left[(p+1) \cdot (p+2) b_{ijl_1 \dots l_p} - p \cdot \frac{1}{3} b_{\alpha l_1 \dots l_{p-1}} R_{(ij)l_p}^\alpha \right] y^{l_1} \dots y^{l_p} = \\ & = \left(c_{l_1 \dots l_p} g_{ij} + \frac{1}{3} c_{l_1 \dots l_{p-2}} R_{il_{p-1}l_pj} \right) y^{l_1} y^{l_p} \end{aligned} \quad (2.10)$$

З (2.6) випливає:

$$b_{ij} = \frac{c}{2} g_{ij} \quad (2.11)$$

Розглянемо (2.7). Проальтернувавши його за j і i отримуємо:

$$-3 \cdot \frac{1}{3} b_\alpha R_{ijl}^\alpha = c_l g_{ij} - c_j g_{il}$$

Результат просиметрируємо за i і j

$$\begin{aligned} -b_\alpha R_{(ij)l}^\alpha &= 2c_l g_{ij} - c_i g_{jl} - c_j g_{il} \\ b_\alpha R_{(ij)l}^\alpha &= c_i g_{jl} + c_j g_{il} - 2c_l g_{ij} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Співвідношення (2.7) на підставі (2.12) приймає вигляд

$$2 \cdot 3 b_{ijl} - \frac{1}{3} (c_i g_{jl} + c_j g_{il} - 2c_l g_{ij}) = c_l g_{ij}$$

Звідки отримаємо

$$2 \cdot 3 \cdot 3 b_{ijl} = c + i g_{jl} + c_j g_{il} + c_l g_{ij} \quad (2.13)$$

Згортаючи (2.13) з $y^i y^j$ будемо мати:

$$b = \frac{1}{2 \cdot 3} c_{l_1} g_{l_2 l_3} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3}$$

Підставимо (2.13) і (2.7) і, приводячи подібні, отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} (c_i g_{il} + c_j g_{il} + c_l g_{ij}) - \frac{1}{3} b_\alpha R_{(ij)l}^\alpha = c_l g_{ij} \\ & c_i g_{il} + c_j g_{il} + c_l g_{ij} - b_\alpha R_{(ij)l}^\alpha = 3c_l g_{ij} \\ & b_\alpha R_{(ij)l}^\alpha = c_i g_{il} + c_j g_{il} - 2c_l g_{ij} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Таким чином, аналіз рівняння (2.7) дає:

$$b = \frac{1}{2 \cdot 3} c_{l_1} g_{l_2 l_3} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3}$$

а вектори b_i повинні задовольняти рівнянням

$$b_\alpha R_{(ij)l}^\alpha = c_i g_{il} + c_j g_{il} - 2c_l g_{ij} \quad (2.15)$$

І рівняння (2.7) виконуються тотожно на підставі (2.15). Розглянемо рівняння (2.8):

$$\begin{aligned} \left[3 \cdot 4b_{ijl_1l_2} - 2 \cdot \frac{1}{3} b_{\alpha l_1} R_{(ij)l_2}^\alpha \right] y^{l_1} y^{l_2} &= \left(c_{l_1l_2} g_{ij} + \frac{1}{3} R_{il_1l+2j} \right) y^{l_1} y^{l_2} \\ \left[3 \cdot 4b_{ijl_1l_2} - \frac{1}{3} R_{(ij)l_2}^\alpha \right] y^{l_1} y^{l_2} &= \left(c_{l_1l_2} g_{ij} + \frac{1}{3} R_{il_1l_2j} \right) y^{l_1} y^{l_2} \\ 3 \cdot 4b_{ijl_1l_2} y^{l_1} y^{l_2} &= (c_{l_1l_2} g_{ij} + R_{il_1l_2j}) y^{l_1} y^{l_2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Згорнувши останню рівність із $y^i y^j$ отримаємо,

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4b_{l_1l_2l_3l_4} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4} &= c_{l_1l_2} g_{l_2l_3} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4} \\ b_{l_1l_2l_3l_4} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4} &= \frac{1}{3 \cdot 4} c_{l_1l_2} g_{l_2l_3} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Далі, по черзі продиференціюємо (2.17) спочатку по $\frac{\partial}{\partial y^i}$, а потім по $\frac{\partial}{\partial y^j}$, маємо:

$$\begin{aligned} 4b_{il_1l_2l_3} y^{l_1l_2l_3} &= \frac{1}{3 \cdot 2} (c_{il_1} g_{l_2l_3} + c_{l_1l_2} g_{il_3}) y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} \\ 3 \cdot 4b_{il_1l_2l_3} y^{l_1l_2l_3} &= \frac{1}{2 \cdot 3} (c_{ij} g_{l_1l_2} + 2c_{il_2} g_{il_2} + 2c_{jl_1} g_{il_2} + c_{l_1l_2} g_{ij}) y^{l_1} y^{l_2} \end{aligned}$$

Останнє порівняння з (2.16)

$$\frac{1}{2 \cdot 3} (c_{ij} g_{l_1l_2} + 2c_{il_2} g_{il_2} + 2c_{jl_1} g_{il_2} + c_{l_1l_2} g_{ij}) y^{l_1} y^{l_2} = (c_{l_1l_2} g_{ij} + R_{il_1l_2j}) y^{l_1} y^{l_2}$$

Розглянемо рівність приведених коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} (c_{ij} g_{l_1l_2} + c_{l_1l_2} g_{ij} + c_{l_1(i} g_{j)l_2} + c_{l_2(i} g_{j)l_1}) &= 2c_{l_1l_2} g_{ij} + R_{i(l_1l_2j)} \\ c_{ij} g_{l_1l_2} - 5c_{l_1l_2} g_{ij} + c_{l_1(i} g_{j)l_2} + c_{l_2(i} g_{j)l_1} &= R^{i(l_1l_2)j} \end{aligned}$$

Проальтернуємо останню рівність по j і l_2 маємо:

$$\begin{aligned} c_{ij} g_{l_1l_2} - c_{il_2} g_{jl_1} - 5c_{l_1l_2} g_{ij} + 5c_{jl_1} g_{il_2} + c_{l_1} g_{jl_2} - c_{l_1} g_{l_2j} + c_{jl_1} g_{il_2} - c_{l_1l_2} g_{ij} + \\ + c_{l_2} g_{jl_1} - c_{ij} g_{l_1l_2} + c_{l_2j} g_{il_1} - c_{jl_2} g_{il_1} = 3R_{il_1l_2j} \end{aligned}$$

$$R_{il_1l_2j} = 2(c_{jl_1}g_{il_2} - c_{l_1l_2}g_{ij}) \quad (2.18)$$

Просиметризуємо (2.18) за i і l_1 :

$$0 = c_{jl_1}g_{il_2} + c_{ij}g_{l_1l_2} - c_{l_1l_2}g_{ij} - c_{il_2}g_{jl_1}$$

Згорнемо останнє з g^{ij} :

$$\begin{aligned} c_{l_1l_2} + c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}g_{l_1l_2} - nc_{l_1l_2} - c_{l_1l_2} &= 0 \\ c_{l_1l_2} &= \frac{1}{n}c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}g_{l_1l_2} \end{aligned}$$

Отже, (2.18) набуває вигляду:

$$R_{il_1l_2j} = \frac{2}{n}c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}(g_{jl_1}g_{il_2} - g_{l_1l_2}g_{ij}) \quad (2.19)$$

Підставимо (2.19) у рівняння (2.1):

$$\begin{aligned} R_{i(l_1l_2)j} &= \frac{2}{n}c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}(g_{jl_1}g_{il_2} + g_{jl_2}g_{il_1} - 2g_{l_1l_2}g_{ij}) \\ R_{(l_1l_2)k}^h &= \frac{2}{n}c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}\left(g_{kl_1}\delta_{l_2}^h + g_{kl_2}\delta_{l_1}^h - 2g_{l_1l_2}\delta_k^h\right) \\ R_{(l_1l_2)\alpha}^h R_{(ij)l_3}^\alpha &= \left(\frac{2}{n}c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}\right)^2 \left(g_{\alpha l_1}\delta_{l_2}^h + g_{\alpha l_2}\delta_{l_1}^h - 2g_{l_1l_2}\delta_\alpha^h\right) (g_{l_3i}\delta_j^\alpha + g_{l_3j}\delta_i^\alpha - 2g_{ij}\delta_{l_3}^\alpha) = \\ &= \left(\frac{2}{n}c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}\right)^2 \left(g_{jl_1}\delta_{l_2}^h g_{il_3} + g_{l_2j}\delta_{l_1}^h g_{il_3} + g_{il_1}\delta_{l_2}^h g_{jl_3} + g_{il_2}\delta_{l_1}^h g_{jl_3} - \right. \\ &\quad \left. - 2g_{ij}g_{l_3(l_1}\delta_{l_2)}^h - 2g_{l_1l_2}g_{l_3(i}\delta_{j)}^h + 4g_{l_1l_2}g_{ij}\delta_{l_3}^\alpha\right) \end{aligned}$$

Позначимо, через

$$H = \frac{2}{n}c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$$

Тоді умови (2.1) приймають вигляд:

$$\begin{aligned} R_{(l_1l_2)\alpha}^h R_{(ij)l_3}^\alpha + R_{(l_2l_3)\alpha}^h R_{(ij)l_1}^\alpha + R_{(l_1l_3)\alpha}^h R_{(ij)l_2}^\alpha &= H^2 \left(g_{j(l_1}\delta_{l_2)}^h g_{il_3} + g_{j(l_3}\delta_{l_1)}^h g_{il_2} + \right. \\ &+ g_{j(l_3}\delta_{l_2)}^h g_{il_1} + g_{j(l_3}\delta_{l_2)}^h g_{il_1} + g_{j(l_2}\delta_{l_3)}^h g_{il_1} + g_{j(l_1}\delta_{l_2)}^h g_{il_3} - 4g_{ij} \left(g_{l_1l_2}\delta_{l_3}^h + g_{l_3l_2}\delta_{l_1}^h + \right. \\ &+ g_{l_3l_1}\delta_{l_2}^h \left. \right) - 2 \left(g_{l_1l_2}g_{l_3(i}\delta_{j)}^h + g_{l_3l_2}g_{l_1(i}\delta_{j)}^h + g_{l_1l_3}g_{l_2(i}\delta_{j)}^h \right) + 4g_{ij} \left(\delta_{l_3}^\alpha g_{l_1l_2} + \delta_{l_3}^\alpha g_{l_1l_2} + \right. \\ &\quad \left. + \delta_{l_2}^\alpha g_{l_1l_3} + \delta_{l_1}^\alpha g_{l_3l_2} \right) \left. \right) = 0 \end{aligned}$$

Підсумуємо за індексами h і l_3 :

$$H^2 [n(g_{il_2}g_{jl_1} + g_{il_1}g_{jl_2}) - 2g_{l_1l_2}g_{ij}] = 0$$

Згорнемо останнє з g^{il_1} :

$$H^2(n+2)(n-1)g_{jl_2} = 0$$

Звідки випливає, що $H^2 = 0$, а значить $c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = 0$ і $R_{hijk} = 0$.

А це означає, що простір другого наближення $\tilde{\Pi}_n^2$ для простору Π_n^2 не допускає нескінченно малих конциркулярних перетворень. І тим самим, теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Doikov, D., Kiosak, V. (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040001. <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
2. Duistermaat, J. J., Kolk, J. A. C. (2000). *Lie Groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56936-4>
3. Eisenhart, L. P. (1926). *Non-Riemannian Geometry*. Princeton Univ. Press. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 8 (2000).
4. Fernandes, R. L. (2014). *Lectures on Differential Geometry*. University of Illinois Urbana-Champaign, USA. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/12733>
5. Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J. (2004). *Riemannian Geometry*, 3rd edn. Universitext. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-18855-8>
6. Isham, C. J. (1999). *Modern Differential Geometry for Physicists*, 2nd Edition. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/3867>
7. Kiosak, V., Savchenko, A., Makarenko, L. (2022). Invariant transformations that preserve mappings. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120003. <https://doi.org/10.1063/5.0100787>
8. Kiosak, V., Savchenko, A., Gudyreva, O. (2019). On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040001. <https://doi.org/10.1063/1.5130793>
9. Kiosak, V., Latysh, O., Kuzmich, V. (2024). Split curvature. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(3), 232–243. <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i3.2817>
10. Kiosak, V., Prishlyak, O., Gudyreva, O. (2024). On geodesic mappings of three-symmetric spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(1), 56–64. <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i1.2647>
11. Kiosak, V., Prishlyak, O., Lesechko, O. (2021). On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(4), 13–26. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i4.2140>
12. Lesechko, O., Latysh, O., Kamienieva, A. (2019). Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040002. <https://doi.org/10.1063/1.5130794>

-
13. Pokas, S., Bilokobylskyi, I. (2022). Lie group of the second-degree infinitesimal conformal transformations in a symmetric Riemannian space of the first class. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120005.
 14. Pokas, S., Krutoholova, A. (2019). Infinitesimal conformal transformations in a second-approximation Riemannian space of non-zero constant curvature. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040004.
 15. Pokas, S. M. (2014). Infinitesimal conformal transformations in a second-approximation Riemannian space. *Proceedings of the International Geometry Center*, 7(2), 36–50.
 16. Rong, W., Yue, C. (1999). *An Introduction to Differential Geometry and Topology in Mathematical Physics*. Zhejiang University, PR China. <https://doi.org/10.1142/3871>

Pokas S. M., Bilozerova M. O.

INFINITESIMAL TRANSFORMATIONS IN SECOND-ORDER APPROXIMATION RIEMANNIAN SPACES

Summary

The work develops approximate methods for studying the geometric properties of Riemannian spaces using Taylor series expansions. Infinitesimal conformal motions and nontrivial concircular transformations are investigated in the second-order approximation of a Riemannian space with special structure. The displacement vector of the conformal Killing vector is obtained explicitly. The derived conditions are both necessary and sufficient, which makes it possible to study the geometric properties of the spaces themselves as well as their approximations. It is proven that a second-order approximation space, different from a space of constant curvature, does not admit nontrivial concircular transformations. Special coordinate systems are employed to define the second-order approximation. The study is carried out locally using tensor methods without imposing restrictions on the signature or definiteness of the Riemannian metric tensor.

Keywords: Riemannian space, Riemann tensor, Ricci tensor, second-order approximation space, infinitesimal transformations, Lie derivative.

REFERENCES

1. Doikov, D., Kiosak, V. (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040001. <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
2. Duistermaat, J. J., Kolk, J. A. C. (2000). *Lie Groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56936-4>
3. Eisenhart, L. P. (1926). *Non-Riemannian Geometry*. Princeton Univ. Press. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 8 (2000).
4. Fernandes, R. L. (2014). *Lectures on Differential Geometry*. University of Illinois Urbana-Champaign, USA. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/12733>
5. Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J. (2004). *Riemannian Geometry*, 3rd edn. Universitext. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-18855-8>
6. Isham, C. J. (1999). *Modern Differential Geometry for Physicists*, 2nd Edition. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/3867>
7. Kiosak, V., Savchenko, A., Makarenko, L. (2022). Invariant transformations that preserve mappings. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120003. <https://doi.org/10.1063/5.0100787>

8. Kiosak, V., Savchenko, A., Gudyreva, O. (2019). On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040001. <https://doi.org/10.1063/1.5130793>
9. Kiosak, V., Latysh, O., Kuzmich, V. (2024). Split curvature. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(3), 232–243. <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i3.2817>
10. Kiosak, V., Prishlyak, O., Gudyreva, O. (2024). On geodesic mappings of three-symmetric spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(1), 56–64. <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i1.2647>
11. Kiosak, V., Prishlyak, O., Lesechko, O. (2021). On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(4), 13–26. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i4.2140>
12. Lesechko, O., Latysh, O., Kamienieva, A. (2019). Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040002. <https://doi.org/10.1063/1.5130794>
13. Pokas, S., Bilokobylskyi, I. (2022). Lie group of the second-degree infinitesimal conformal transformations in a symmetric Riemannian space of the first class. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120005.
14. Pokas, S., Krutolova, A. (2019). Infinitesimal conformal transformations in a second-approximation Riemannian space of non-zero constant curvature. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040004.
15. Pokas, S. M. (2014). Infinitesimal conformal transformations in a second-approximation Riemannian space. *Proceedings of the International Geometry Center*, 7(2), 36–50.
16. Rong, W., Yue, C. (1999). *An Introduction to Differential Geometry and Topology in Mathematical Physics*. Zhejiang University, PR China. <https://doi.org/10.1142/3871>

UDC 517.925

L. I. Kusik, *CandSc (Physics & Mathematics), Assoc. Prof.*

Odesa National Maritime University

Department of Higher Mathematics

34 Mechnikova St, Odesa, 65003, Ukraine

e-mail: lk09032017@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-1358-9566>

ON ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF ONE CLASS SOLUTIONS OF SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

For the second-order differential equation of general form $y'' = f(t, y, y')$, where $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow \mathbf{R}$ is continuous function, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Δ_{Y_i} is a one-neighborhood of Y_i , $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$ ($i \in \{0, 1\}$) we study the question of the existence of solutions, for which $\lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i$ ($i \in \{0, 1\}$). Among the set of such solutions we separate a sufficiently wide class of so-called $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solutions. Such a solution was previously introduced in the study of the two-term equation $y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y')$, where $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ is continuous function, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0, +\infty[$ ($i = 0, 1$) are continuous regular varying as $z \rightarrow Y_i$ ($i = 0, 1$) functions of orders σ_i ($i = 0, 1$), such that $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$. In this paper a condition under which the right-hand side of the equation as $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ and $t \uparrow \omega$ in some sense close to the multiplication $\alpha_0 p(t) \varphi_0(y)$ with rapidly varying φ_0 function at $y \rightarrow Y_0$, is established. We have obtained necessary and also sufficient conditions of existence of $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solutions, asymptotic representations of these solutions and their first-order derivative and number of parametric family of these solutions. An example is given.

MSC: 34A34, 34E99.

Keywords: two-term differential equation, $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solutions, asymptotic representations of solutions, rapidly varying function, one-, two-parameter family of solutions.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1\(43\).342066](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1(43).342066).

INTRODUCTION

Consider the differential equation

$$y'' = f(t, y, y'), \quad (1.1)$$

where $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow \mathbf{R}$ is continuous function, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Δ_{Y_i} ($i \in \{0, 1\}$) is a one-side neighborhood of Y_i and Y_i ($i \in \{0, 1\}$) is either 0

or $\pm\infty$. We assume that the numbers μ_i ($i = 0, 1$) given by the formula

$$\mu_i = \begin{cases} 1 & \text{if either } Y_i = +\infty, \text{ or } Y_i = 0 \\ & \text{and } \Delta_{Y_i} \text{ is right neighborhood of the point } 0, \\ -1 & \text{if either } Y_i = -\infty, \text{ or } Y_i = 0 \\ & \text{and } \Delta_{Y_i} \text{ is left neighborhood of the point } 0, \end{cases}$$

satisfy the relations

$$\mu_0\mu_1 > 0 \quad \text{for } Y_0 = \pm\infty \quad \text{and} \quad \mu_0\mu_1 < 0 \quad \text{for } Y_0 = 0. \quad (1.2)$$

Conditions (1.2) are necessary for the existence of solutions of Eq.(1.1) defined in a left neighborhood of ω and satisfying the conditions

$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \quad \text{for } t \in [t_0, \omega[\text{ , } \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1). \quad (1.3)$$

One of the classes of Eq. (1.1) solutions with properties (1.3) that admits some asymptotic representations is the class of $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - solutions.

Definition 1.1. A solution y of Eq. (1.1) on interval $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ is called $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - solution, where $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, if, in addition to (1.3), it satisfies the condition

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0.$$

Depending on λ_0 these solutions of Eq.(1.1) have different asymptotic properties (see [1]). For $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ in [2] for $f(t, y, y') = \alpha_0 p(t)|y|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1} \text{sign } y$, where $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ is a continuous function, $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$, such ratios

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1},$$

where

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{if } \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{if } \omega < +\infty, \end{cases}$$

are established.

Definition 1.2. We say that a function f satisfies condition $(FN)_{\lambda_0}$ for $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ if there exist a number $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, a continuous function

$p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ and twice continuously differentiable function $\varphi_0 : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$, satisfying the conditions

$$\varphi'_0(y) \neq 0, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_0(y) = \varphi_0 \in \{0, +\infty\}, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(y) \varphi''_0(y)}{(\varphi'_0(y))^2} = 1, \quad (1.4)$$

such that, for arbitrary continuously differentiable functions $z_i : [a, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}$ ($i = 0, 1$), satisfying the conditions

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_i(t) = Y_i \quad (i = 0, 1),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z'_0(t)}{z_0(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z'_1(t)}{z_1(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1},$$

one has representation

$$f(t, z_0(t), z_1(t)) = \alpha_0 p(t) \varphi_0(z_0(t)) [1 + o(1)] \quad \text{as } t \uparrow \omega \quad (1.5)$$

Note that the choice of α_0 and the functions p and φ_0 in definition 1.2 depends on the choice of $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. It is also obvious that the numbers μ_0, μ_1 determine the signs of any $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solution of Eq. (1.1) and its derivative in a left neighborhood of ω (respectively). Moreover, under condition $(FN)_{\lambda_0}$ sign of second derivative of any $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solution of Eq. (1.1) in a left neighborhood of ω coincides with the value α_0 . Then taking into account (1.2), we have

$$\alpha_0 \mu_1 > 0 \quad \text{for } Y_1 = \pm\infty \quad \text{and} \quad \alpha_0 \mu_1 < 0 \quad \text{for } Y_1 = 0. \quad (1.6)$$

MAIN RESULTS

2. Auxiliary statements

We choose a number $b \in \Delta_{Y_0}$ such that the inequality

$$|b| < 1 \quad \text{for } Y_0 = 0, \quad b > 1 \quad (b < -1) \quad \text{for } Y_0 = +\infty \quad (Y_0 = -\infty)$$

is respected and put

$$\begin{aligned} \Delta_{Y_0}(b) &= [b, Y_0[\quad \text{if } \Delta_{Y_0} \text{ is a left neighborhood of } Y_0, \\ \Delta_{Y_0}(b) &=]Y_0, b] \quad \text{if } \Delta_{Y_0} \text{ is a right neighborhood of } Y_0. \end{aligned}$$

Definition 2.1. Let $f : \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ be a twice continuously differentiable function. We will say that $f \in \Gamma(Y_0, Z_0)$ if it satisfies the following conditions

$$f'(y) \neq 0, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} f(y) = Z_0, \quad Z_0 = \begin{cases} \text{or } 0, \\ \text{either } \pm \infty, \end{cases} \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{f''(y)f(y)}{(f'(y))^2} = 1.$$

First of all, we note that, by virtue of definition 2.1, any function from $\Gamma(Y_0, Z_0)$ - class is rapidly varying as $y \rightarrow Y_0$.

In [3] using the properties of functions from the class Γ introduced and studied in detail in the monograph Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. [4] (Chapter 3, item 3.10), the following auxiliary assertions about the properties of functions from the class $\Gamma(Y_0, Z_0)$ were established.

Lemma 2.1. If $f \in \Gamma(Y_0, Z_0)$ then there exists a continuous function $g : \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, called complementary to f , such that

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{f(y + ug(y))}{f(y)} = e^u \quad \text{for any } u \in \mathbb{R},$$

moreover, the complementary function is uniquely determined up to functions equivalent as $y \rightarrow Y_0$, for which, for example, one of the following functions

$$\frac{\int_Y^y \left(\int_Y^t f(u) du \right) dt}{\int_Y^y f(x) dx} \sim \frac{\int_Y^y f(x) dx}{f(y)} \sim \frac{f(y)}{f'(y)} \sim \frac{f'(y)}{f''(y)} \quad \text{as } y \rightarrow Y_0,$$

where

$$Y = \begin{cases} b & \text{if } \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} f(y) = \pm \infty, \\ Y_0 & \text{if } \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} f(y) = 0, \end{cases}$$

can be chosen.

Lemma 2.2.

1. If $f \in \Gamma(Y_0, Z_0)$ with complementary function g then $\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{g(y)}{y} = 0$.
2. If $f \in \Gamma(Y_0, Z_0)$ with complementary function g then for any continuous function $u : \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ that satisfies the conditions

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} u(y) = u_0 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} f(y + u(y)g(y)) = Z_0,$$

there is a limit relation

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{f(y + u(y)g(y))}{f(y)} = e^{u_0}.$$

Lemma 2.3. *If $f \in \Gamma(Y_0, Z_0)$ strictly monotone with complementary function g then its inverse function $f^{-1} : \Delta_{Z_0} \rightarrow \Delta_{Y_0}$ is slowly varying at $z \rightarrow Z_0$ and satisfies the limit relation*

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Z_0 \\ z \in \Delta_{Z_0}}} \frac{f^{-1}(\lambda z) - f^{-1}(z)}{g(f^{-1}(z))} = \ln \lambda \quad \text{for any } \lambda > 0,$$

moreover for any given $\Lambda > 1$ limit relation is satisfied uniformly in $\lambda \in [\frac{1}{\Lambda}, \Lambda]$.

Note also, it follows from the Representation Theorem for Γ ([5], Chapter 3, item 3.10, position d) that for a function $f \in \Gamma(Y_0, Z_0)$ there exists a continuously differentiable function $f_1 \in \Gamma(Y_0, Z_0)$ such that

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{f(y)}{f_1(y)} = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y f_1(y)}{f_1(y)} = \pm \infty.$$

3. Main results

Now we introduce auxiliary functions and notation as follows:

$$\Phi : \Delta_{Y_0}(b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(y) = \int_B^y \frac{ds}{\varphi_0(s)}, \quad B = \begin{cases} b & \text{if } \int_b^{Y_0} \frac{ds}{\varphi_0(s)} = \pm \infty, \\ Y_0 & \text{if } \int_b^{Y_0} \frac{ds}{\varphi_0(s)} = \text{const}, \end{cases}$$

$$I(t) = \int_A^t \pi_\omega(\tau) p(\tau) d\tau, \quad A = \begin{cases} a & \text{if } \int_a^\omega \pi_\omega(\tau) p(\tau) d\tau = \pm \infty, \\ \omega & \text{if } \int_a^\omega \pi_\omega(\tau) p(\tau) d\tau = \text{const}, \end{cases}$$

$$Y(t) = \Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I(t)), \quad H(t) = \frac{Y(t)\varphi_0'(Y(t))}{\varphi_0(Y(t))}, \quad q(t) = \frac{Y(t)'\pi_\omega(t)}{Y(t)},$$

$$k(t) = q(t) \left(\frac{\varphi_0(Y(t))\varphi_0''(Y(t))}{(\varphi_0'(Y(t)))^2} - 1 \right), \quad h(t) = \int_{t_1}^t \frac{\sqrt{|H(\tau)|}}{\pi_\omega(\tau)} d\tau \quad (t_1 \in [a, \omega]),$$

$$\mu_2 = \text{sign } \varphi_0(y) \quad \text{for } y \in \Delta_{Y_0}.$$

Theorem 3.1. *Let $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ and let the function f satisfies condition $(FN)_{\lambda_0}$. Then, for the existence of $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - solutions of the differential equation (1.1), it is necessary that the conditions (1.2), (1.6) and*

$$\alpha_0 \mu_0 \lambda_0 > 0, \quad \mu_0 \mu_1 \lambda_0 (\lambda_0 - 1) \pi_\omega(t) > 0, \quad \alpha_0 \mu_2 (\lambda_0 - 1) I(t) < 0 \quad \text{for } t \in [a, \omega[\quad (3.1)$$

$$\alpha_0 (\lambda_0 - 1) \lim_{t \uparrow \omega} I(t) = Z_0, \quad (3.2)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I'(t)}{I(t)} = \pm \infty, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\alpha_0 (\lambda_0 - 1) \pi_\omega^2(t) p(t) \varphi_0(Y(t))}{Y(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \quad (3.3)$$

are hold.

Moreover, each solution of this kind admits the asymptotic representations

$$\frac{y'(t)}{\varphi_0(y(t))} = \alpha_0 (\lambda_0 - 1) \pi_\omega(t) p(t) [1 + o(1)], \quad \varphi_0'(y(t)) = -\frac{\lambda_0 (1 + o(1))}{(\lambda_0 - 1) I(t)} \quad \text{as } t \uparrow \omega. \quad (3.4)$$

Remark. Asymptotic representations of $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - solutions of Eq. (1.1) can be written explicitly

$$y(t) = Y(t) \left(1 + \frac{o(1)}{H(t)} \right), \quad y'(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \frac{Y(t)}{\pi_\omega(t)} (1 + o(1)) \quad \text{as } t \uparrow \omega. \quad (3.5)$$

Proof of Theorem 3.1. Let $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ and $y : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_0}$ be an arbitrary $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - solution of Eq. (1.1). Then there is a number $t_1 \in [t_0, \omega[$ such that $y^{(k)}(t) \neq 0$ ($k = 0, 1, 2$), $\text{sign } y^{(k)}(t) = \mu_k$ ($k = 0, 1$) for $t \in [t_1, \omega[$. Moreover, from the equality

$$\left(\frac{y(t)}{y'(t)} \right)' = 1 - \frac{y(t) y''(t)}{(y'(t))^2}$$

and conditions (1.3), the definition of the $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - solution immediately implies that

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}. \quad (3.6)$$

From this, in particular, it follows that the second of the sign representations (3.1) holds. The first of conditions (3.1) can be obtained from the definition

of the $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ - solution of Eq.(1.1). Due to (3.6) and the condition $(FN)_{\lambda_0}$ which the function f satisfies from (1.1) we have

$$y''(t) = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y(t)) [1 + o(1)] \quad \text{as } t \uparrow \omega \quad (3.7)$$

or

$$\frac{y''(t)}{\varphi_0(y(t))} = \alpha_0 p(t) [1 + o(1)] \quad \text{as } t \uparrow \omega. \quad (3.8)$$

Multiplying both parts of (3.8) by $\pi_\omega(t)$, taking into account (3.6), we obtain the first of relations (3.4), whose integration on the interval from t_1 to t leads to the limiting equality

$$\int_{t_1}^t \frac{y'(\tau) d\tau}{\varphi_0(y(\tau))} = \alpha_0 (\lambda_0 - 1) \int_{t_1}^t \pi_\omega(\tau) p(\tau) d\tau [1 + o(1)] \quad \text{as } t \uparrow \omega$$

or by virtue of the definition of the limits of integration A and B

$$\Phi(y(t)) = \alpha_0 (\lambda_0 - 1) I(t) [1 + o(1)] \quad \text{as } t \uparrow \omega. \quad (3.9)$$

It follows from condition (1.4) that the function φ_0 together with its derivative of the first order are rapidly varying as $y \rightarrow Y_o$, because $\lim_{\substack{y \rightarrow Y_o \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y \varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)} =$

$$\pm\infty, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_o \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y \varphi_0''(y)}{\varphi_0'(y)} = \pm\infty.$$

Also from (1.4) as $y \rightarrow Y_o$ the equivalence $\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)} \sim \frac{\varphi_0''(y)}{\varphi_0'(y)}$ follows. In addition, taking to account the L'Hopital rule in the form of Stolz, we can assert that

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_o \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\Phi(y)}{\frac{1}{\varphi_0'(y)}} = \lim_{\substack{y \rightarrow Y_o \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\frac{1}{\varphi_0(y)}}{-\frac{\varphi_0''(y)}{(\varphi_0'(y))^2}} = - \lim_{\substack{y \rightarrow Y_o \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{(\varphi_0(y))^2}{\varphi_0''(y) \varphi_0(y)}, \quad (3.10)$$

hence

$$\Phi(y) \sim -\frac{1}{\varphi_0'(y)} \quad \text{as } y \rightarrow Y_o, \quad \Phi(y) \varphi_0'(y) < 0 \quad \text{for } y \in \Delta_{Y_0}. \quad (3.11)$$

Condition (3.11) implies as $y \rightarrow Y_o$ fulfillment of the equivalences

$$\frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} = \frac{1}{\varphi_0(y)} \sim -\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)}, \quad \frac{\Phi''(y) \Phi(y)}{(\Phi'(y))^2} = \frac{-\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0^2(y)} \Phi(y)}{\frac{1}{\varphi_0^2(y)}} \sim 1. \quad (3.12)$$

Hence taking into account the lemma 2.14 (see [4], Chap. II, Sec. 2.3., P. 54) it follows that the function Φ belongs to the class $\Gamma(Y_0, Z_0)$ with a complementary function g , for which one can choose one of the equivalent functions

$$\frac{\Phi'(y)}{\Phi''(y)} \sim \frac{\Phi(y)}{\Phi'(y)} \sim -\frac{\varphi_0(y)}{\varphi'_0(y)} \quad \text{as } y \rightarrow Y_0.$$

Further from (3.9) by virtue of (3.11) the third of the sign conditions (3.1) follows. Next from (3.9), (3.11) we have

$$\frac{y'(t)\varphi'_0(y(t))}{\varphi_0(y(t))} = -\frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I(t)}[1 + o(1)],$$

which, by virtue (3.6), implies the equality

$$\frac{y(t)\varphi'_0(y(t))}{\varphi_0(y(t))} = -\frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} \frac{\pi_\omega^2(t)p(t)}{I(t)}[1 + o(1)] \quad \text{as } t \uparrow \omega.$$

From here, with allowance, $\frac{y\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)} = \pm\infty$ the first of the limit relations (3.3) follows.

Note that the function Φ retains its sign on Δ_{Y_0} , tends either to 0 or to $\pm\infty$ as $y \rightarrow Y_0$, and increases on Δ_{Y_0} due to $\Phi'(y) > 0$. Therefore, it has an inverse function $\Phi^{-1} : \Delta_{Z_0} \rightarrow \Delta_{Y_0}$, where, due to the second of conditions (1.4) and the increase Φ^{-1}

$$Z_0 = \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \Phi(y) \in \{0, \pm\infty\}, \quad (3.13)$$

$$\Delta_{Z_0} = \begin{cases} [z_0, Z_0[& \text{if } \Delta_{Y_0} \text{ is a left neighborhood of } Y_0, \\]Z_0, z_0] & \text{if } \Delta_{Y_0} \text{ is a right neighborhood of } Y_0, \end{cases} \quad z_0 = \Phi(b).$$

Now from (3.9) implies (3.2) and we find that

$$y(t) = \Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I(t)[1 + o(1)]) \quad \text{as } t \uparrow \omega. \quad (3.14)$$

Note that the function Φ^{-1} belongs to the class $\Gamma(Y_0, Z_0)$ and complementary to it can be chosen as $g(y) = -\frac{\varphi_0(y)}{\varphi'_0(y)}$. From the definition of Z_0 , μ_2 , the third of sign conditions (3.1) $\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I(t)) \in \Delta_{Y_0}$ as $t \in [t_0, \omega[$ and $\lim_{t \uparrow \omega} \Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I(t)) = Y_0$ follow. Therefore, based on the lemma 2.3 we have the limit equality

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I(t)[1 + o(1)]) - \Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I(t))}{\frac{\varphi_0(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I(t)))}{\varphi'_0(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I(t)))}} &= \\ = \lim_{\substack{z \rightarrow Z \\ z \in \Delta_Z}} \frac{\Phi^{-1}(z[1 + o(1)]) - \Phi^{-1}(z)}{\frac{\varphi_0(z)}{\varphi'_0(z)}} &= 0, \end{aligned}$$

which we can rewrite in the form

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I(t)[1 + o(1)]) &= \\ \Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I(t)) + \frac{\varphi_0(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I(t)))}{\varphi'_0(\Phi^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I(t)))} o(1) &\text{ as } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Thus, the first of (3.5) is established. Note that this relation can also be rewritten as

$$y(t) = Y(t)[1 + o(1)] \quad \text{at } t \uparrow \omega, \quad (3.15)$$

since

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{Y(t)\varphi'_0(Y(t))}{\varphi_0(Y(t))} = \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)} = \pm\infty. \quad (3.16)$$

Invoking the first of the limiting equalities (3.6), from (3.15) we obtain the second of the relations (3.5). Now we write (3.7) with using (3.5) in the form

$$y''(t) = \alpha_0 p(t) \varphi_0 \left(Y(t) + \frac{\varphi_0(Y(t))}{\varphi'_0(Y(t))} \right) [1 + o(1)] \quad \text{as } t \uparrow \omega. \quad (3.17)$$

Then, as a complementary to the function $\varphi_0 \in \Gamma(Y_0, Z_0)$, we choose $g(y) = \frac{\varphi_0(y)}{\varphi'_0(y)}$. Then, taking into account that $\lim_{t \uparrow \omega} Y(t) = Y_0$, $Y(t) \in \Delta_{Y_0}$ at $t \in [t_0, \omega]$, we obtain

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\varphi_0 \left(Y(t) + \frac{\varphi_0(Y(t))}{\varphi'_0(Y(t))} o(1) \right)}{\varphi_0(Y(t))} = \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0 \left(y + \frac{\varphi_0(y)}{\varphi'_0(y)} o(1) \right)}{\varphi_0(y)} = 1,$$

which in turn leads to

$$\varphi_0 \left(Y(t) + \frac{\varphi_0(Y(t))}{\varphi'_0(Y(t))} o(1) \right) = \varphi_0(Y(t)) [1 + o(1)] \quad \text{as } t \uparrow \omega.$$

Therefore, relation (3.17) takes the form

$$y''(t) = \alpha_0 p(t) \varphi_0(Y(t)) [1 + o(1)] \quad \text{as } t \uparrow \omega.$$

From the last representation, taking into account the second of the limit equalities (3.6), we obtain the second of conditions (3.3).

The theorem and remark are proved.

To prove sufficient conditions for the existence $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solutions to Eq. (1.1) we need several auxiliary assertions.

Lemma 3.1. 1) If there is a (finite or equal $\pm\infty$) limit

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\left(\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right)^2} \sqrt{\left|\frac{y\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right|} \quad (3.18)$$

then it is equal to 0;

2) if there are (finite or equal $\pm\infty$) limits

$$\gamma = \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y \left(\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right)'}{\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}}, \quad (3.19)$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y \left(\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right)' \int_{y_0}^y \sqrt{\left|\frac{z\varphi'_0(z)}{\varphi_0(z)}\right|} dz}{\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)} \sqrt{\left|\frac{y\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right|}} \quad \text{for } \gamma = \pm\infty, \quad (3.20)$$

then

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\left(\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right)^2} \sqrt{\left|\frac{y\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right|} = 0 \quad (3.21)$$

and

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y \left(\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right)' \int_{y_0}^y \sqrt{\left|\frac{z\varphi'_0(z)}{\varphi_0(z)}\right|} dz}{\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)} \sqrt{\left|\frac{y\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right|}} = 2 \quad \text{for } \gamma = \pm\infty. \quad (3.22)$$

Theorem 3.2. Let $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ and let the function f satisfies condition $(FN)_{\lambda_0}$ and conditions (3.1) - (3.3) are satisfied, as well as

$$\lim_{t \uparrow \omega} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} - q(t) \right) \sqrt{|H(t)|} = 0. \quad (3.23)$$

Then:

1) if $\alpha_0\mu_2 = 1$ and exists (finite or equal to $\pm\infty$) limit (3.18), then differential equation (1.1) has a one-parameter family of $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solutions with asymptotic representations

$$y(t) = Y(t) \left(1 + \frac{o(1)}{H(t)} \right), \quad y'(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \frac{Y(t)}{\pi_\omega(t)} \left(1 + \frac{o(1)}{\sqrt{|H(t)|}} \right); \quad (3.24)$$

2) if $\alpha_0\mu_2 = -1$ and there are (finite or equal to $\pm\infty$) limits (3.19), (3.20), then

$$\lim_{t \uparrow \omega} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} - q(t) \right) \sqrt{|H(t)|} h^2(t) = 0 \quad (3.25)$$

and in each of the cases: $|\gamma| < +\infty$, $\gamma \neq -1$, $3\lambda_0 - 2 + 5\lambda_0\gamma \neq 0$ or $\gamma = \pm\infty$ the differential equation (1.1) has at least one $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solution with asymptotic representations

$$y(t) = Y(t) \left(1 + \frac{o(1)}{h(t)H(t)} \right), \quad y'(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \frac{Y(t)}{\pi_\omega(t)} \left(1 + \frac{o(1)}{h(t)\sqrt{|H(t)|}} \right), \quad (3.26)$$

moreover, in the case $|\gamma| < +\infty$ and $\lambda_0(\gamma + 1)(3\lambda_0 - 2 + 5\lambda_0\gamma) < 0$ there exists a two-parameter family of solutions with the indicated asymptotics.

Proof of Theorem 3.2. Let $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, the function f satisfies condition $(FN)_{\lambda_0}$ and the conditions (3.1) - (3.3) hold, as well as (3.23). Let us show that for Eq.1 (1.1) there is at least one $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solution in each of the cases: $\alpha_0\mu_2 = -1$, $\alpha_0\mu_2 = 1$.

Let's make a transformation

$$y(t) = Y(t) \left(1 + \frac{v_1}{H(t)} \right), \quad y'(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \frac{Y(t)}{\pi_\omega(t)} \left(1 + \frac{v_2}{\sqrt{|H(t)|}} \right) \quad (3.27)$$

and obtain a system of differential equations of the form:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1' = \frac{\sqrt{|H(t)|}}{\pi_\omega(t)} \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} - q(t) \right) \sqrt{|H(t)|} \operatorname{sign} H(t) + \sqrt{|H(t)|} \operatorname{sign} H(t) k(t) v_1 + \right. \\ \quad \left. + \frac{\lambda_0 \operatorname{sign} H(t)}{\lambda_0 - 1} v_2 \right], \\ v_2' = \frac{\sqrt{|H(t)|}}{\pi_\omega(t)} \left[\frac{f\left(t, Y(t, v_1), Y^{[1]}(t, v_2)\right)}{\alpha_0 p(t) \varphi_0(Y(t, v_1))} \frac{q(t)}{\lambda_0} \frac{\varphi_0(Y(t, v_1))}{\varphi_0(Y(t))} + 1 - q(t) + \right. \\ \quad \left. + \left(1 - \frac{q(t)}{2} + \frac{H(t)k(t)}{2} \right) \frac{v_2}{\sqrt{|H(t)|}} \right], \end{array} \right. \quad (3.28)$$

where $Y(t, v_1) = Y(t) \left(1 + \frac{v_1}{H(t)} \right)$, $Y^{[1]}(t, v_2) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \frac{Y(t)}{\pi_\omega(t)} \left(1 + \frac{v_2}{\sqrt{|H(t)|}} \right)$.

Consider system (3.28) on the set $D_0 = [t_0, \omega[\times V_0$, where $V_0 = \{(v_1, v_2) : |v_i| \leq \frac{1}{2}, i = 1, 2\}$, and the number t_0 (taking into account (3.1), (3.2)) is chosen in such a way that $Y(t, v_1) \in \Delta_{Y_0}(b)$ for $t \in [t_0, \omega[$ and $|v_1| \leq \frac{1}{2}$; $Y^{[1]}(t, v_2) \in \Delta_{Y_1}$ at $t \in [t_0, \omega[$ and $|v_2| \leq \frac{1}{2}$; $\alpha_0(\lambda_0 - 1)I(t) \in \Delta_{Z_0}$ at $t \in [t_0, \omega[$.

By virtue of the limit equality (1.4), we have

$$\lim_{t \uparrow \omega} H(t) = \pm \infty. \quad (3.29)$$

Moreover, the second of conditions (3.3) implies

$$\lim_{t \uparrow \omega} q(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}. \quad (3.30)$$

A consequence of condition (3.23) is the limit equality

$$\lim_{t \uparrow \omega} k(t) \sqrt{|H(t)|} = \lim_{t \uparrow \omega} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} - q(t) \right) \sqrt{|H(t)|} = 0.$$

Then, taking into account (1.4), (3.29), (3.30)

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) (Y(t, v_1))'_t}{Y(t, v_1)} &= \lim_{t \uparrow \omega} q(t) + \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) H'(t) v_1}{H^2(t) \left(1 + \frac{v_1}{H(t)} \right)} = \\ &= \lim_{t \uparrow \omega} q(t) \left(1 - \left(\frac{1}{H(t)} + \frac{\varphi_0''(Y(t)) \varphi_0(Y(t))}{(\varphi_0'(Y(t)))^2} - 1 \right) \frac{v_1}{1 + \frac{v_1}{H(t)}} \right) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \end{aligned}$$

uniformly in $|v_1| \leq \frac{1}{2}$.

Also, in view of (1.4), (3.29), (3.23), we obtain

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \left(Y^{[1]}(t, v_2) \right)'_t}{Y^{[1]}(t, v_2)} &= \lim_{t \uparrow \omega} q(t) - 1 - \frac{v_2}{2} \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) H'(t)}{H(t) \sqrt{|H(t)|}} = \frac{1}{\lambda_0 - 1} + \\ &+ \lim_{t \uparrow \omega} \frac{v_2}{2 \left(1 + \frac{v_2}{\sqrt{|H(t)|}} \right)} \left(\frac{q(t)}{\sqrt{|H(t)|}} + \text{sign } H(t) \sqrt{|H(t)|} k(t) \right) = \frac{1}{\lambda_0 - 1} \\ &\text{uniformly in } |v_2| \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also, due to Definition 1.2

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{f \left(t, Y(t, v_1), Y^{[1]}(t, v_2) \right)}{\alpha_0 p(t) \varphi_0(Y(t, v_1))} = 1 \quad \text{uniformly in } (v_1, v_2) \in V_0,$$

those we can write

$$\frac{f \left(t, Y(t, v_1), Y^{[1]}(t, v_2) \right)}{\alpha_0 p(t) \varphi_0(Y(t, v_1))} = 1 + R_1(t, v_1, v_2), \quad (3.31)$$

where $\lim_{t \uparrow \omega} R_1(t, v_1, v_2) = 0$ uniformly in $(v_1, v_2) \in V_0$.

Next, consider the relationship $\frac{\varphi_0(Y(t, v_1))}{\varphi_0(Y(t))}$.

By Lemma 2.2

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\varphi_0(Y(t, v_1))}{\varphi_0(Y(t))} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\varphi_0 \left(Y(t) + \frac{\varphi_0(Y(t)) v_1}{\varphi_0'(Y(t))} \right)}{\varphi_0(Y(t))} = e^{v_1}, \text{ that's why } \frac{\varphi_0(Y(t, v_1))}{\varphi_0(Y(t))} = 1 + v_1 + R(t, v_1),$$

where

$$R(t, v_1) = \frac{\varphi_0(Y(t, v_1))}{\varphi_0(Y(t))} - 1 - v_1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} R(t, v_1) = 0 \quad \text{uniformly in } |v_1| \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Moreover, it is easy to see that } R'_{v_1}(t, v_1) = \frac{\varphi_0' \left(Y(t) + \frac{\varphi_0(Y(t)) v_1}{\varphi_0'(Y(t))} \right)}{\varphi_0'(Y(t))} - 1.$$

Here $\varphi_0' \in \Gamma(Y_0, Z_0)$ with complementary function $g(y) = \frac{\varphi_0(y)}{\varphi_0'(y)}$. Hence, by Lemma 2.2

$$\lim_{t \uparrow \omega} R'_{v_1}(t, v_1) = e^{v_1} - 1 \text{ or } R'_{v_1}(t, v_1) = v_1 + r(t, v_1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} r(t, v_1) = 0$$

uniformly in $|v_1| \leq \frac{1}{2}$. Hence, for any $\varepsilon > 0$ there also exist $t_1 \in [t_0, \omega[$ and $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$ such that $|R'_{v_1}(t, v_1)| \leq \varepsilon$ at $t \in [t_1, \omega[$, $v_1 \in [-\delta, \delta]$.

Therefore, the function R satisfies the Lipschitz condition in terms of the variable v_1 with the Lipschitz constant ε , we have the estimate (taking into

account $R(t, 0) = 0$)

$$|R(t, v_1)| \leq \varepsilon |v_1| \quad \text{at} \quad t \in [t_1, \omega[\quad \text{and} \quad v_1 \in [-\delta, \delta].$$

Moreover, if we use the Maclaurin formula with a remainder term in the Lagrange form up to a term of the second order, we can write

$$R(t, v_1) = \frac{1}{2} \frac{\varphi_0(Y(t))}{(\varphi_0'(Y(t)))^2} \varphi_0'' \left(Y(t) + \frac{\varphi_0(Y(t))}{\varphi_0'(Y(t))} \xi \right) v_1^2, \quad \text{where } |\xi| \leq |v_1|.$$

In view of (1.4)

$$\varphi_0'' \left(Y(t) + \frac{\varphi_0(Y(t))}{\varphi_0'(Y(t))} \xi \right) = \frac{\left(\varphi_0' \left(Y(t) + \frac{\varphi_0(Y(t))}{\varphi_0'(Y(t))} \xi \right) \right)^2}{\varphi_0 \left(Y(t) + \frac{\varphi_0(Y(t))}{\varphi_0'(Y(t))} \xi \right)} (1 + r_1(t, v_1)),$$

where

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_1(t, v_1) = 0 \quad \text{uniformly in} \quad |v_1| \leq \frac{1}{2}. \quad \text{Further, taking into account that}$$

$\varphi_0, \varphi_0' \in \Gamma(Y_0, Z_0)$ have the complementary function $g(y) = \frac{\varphi_0(y)}{\varphi_0'(y)}$, based on Lemma 2.2, we have

$$\varphi_0'' \left(Y(t) + \frac{\varphi_0(Y(t))}{\varphi_0'(Y(t))} \xi \right) = \frac{(\varphi_0'(Y(t)))^2}{\varphi_0(Y(t))} e^\xi (1 + r_2(t, v_1)), \quad \text{where } \lim_{t \uparrow \omega} r_2(t, v_1) = 0$$

uniformly in $|v_1| \leq \frac{1}{2}$.

Therefore

$$R(t, v_1) = \frac{1}{2} e^\xi (1 + r_1(t, v_1)) (1 + r_2(t, v_1)) v_1^2. \quad (3.32)$$

Hence, for any $\varepsilon > 0$ there also exist $t_1 \in [t_0, \omega[$ and $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$ such that

$$|R(t, v_1)| \leq (1 + \varepsilon) |v_1|^2 \quad \text{as} \quad t \in [t_1, \omega[, \quad v_1 \in [-\delta, \delta]. \quad (3.33)$$

Having chosen an arbitrary ε system (3.28) we will further consider it on the set $D_1 = [t_1, \omega[\times V_1$, where $V_1 = \{(v_1, v_2) : |v_i| \leq \delta, \quad i = 1, 2\}$.

We now rewrite system (3.28) in the form

$$\begin{cases} v_1' &= \frac{\sqrt{|H(t)|}}{\pi_\omega(t)} [f_1(t) + c_{11}(t)v_1 + c_{12}(t)v_2], \\ v_2' &= \frac{\sqrt{|H(t)|}}{\pi_\omega(t)} [f_2(t) + c_{21}(t)v_1 + c_{22}(t)v_2 + V_1(t, v_1, v_2) + V_2(t, v_1, v_2)], \end{cases} \quad (3.34)$$

where

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} - q(t) \right) \sqrt{|H(t)|} \operatorname{sign} H(t), \quad c_{11}(t) = \sqrt{|H(t)|} \operatorname{sign} H(t) k(t), \\ c_{12}(t) &= \frac{\lambda_0 \operatorname{sign} H(t)}{\lambda_0 - 1}, \quad f_2(t) = \frac{q(t)}{\lambda_0} + 1 - q(t), \quad c_{21}(t) = \frac{q(t)}{\lambda_0}; \\ c_{22}(t) &= \left(1 - \frac{q(t)}{2} + \frac{H(t)k(t)}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{|H(t)|}}, \quad V_1(t, v_1, v_2) = \frac{q(t)}{\lambda_0} R_1(t, v_1, v_2)(1 + v_1), \\ V_2(t, v_1, v_2) &= \frac{q(t)}{2\lambda_0} (1 + R_1(t, v_1, v_2)) e^\xi (1 + r_1(t, v_1)) (1 + r_2(t, v_1)) v_1^2. \end{aligned}$$

Here, in view of (3.23), (3.29), (3.30), (3.18), the representation of the function R_1 , we have

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \omega} f_1(t) &= 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} f_2(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} c_{11}(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} c_{12}(t) = \frac{\lambda_0 \mu_0 \mu_2}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} c_{21}(t) = \\ &= \frac{1}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} h(t) = \pm \infty, \quad \lim_{t \uparrow \omega} V_1(t, v_1, v_2) = 0 \quad \text{uniformly in } (v_1, v_2) \in V_1, \\ \lim_{|v_1| + |v_2| \rightarrow 0} \frac{V_2(t, v_1, v_2)}{|v_1| + |v_2|} &= 0 \quad \text{uniformly in } t \in [t_1, \omega[. \end{aligned} \tag{3.35}$$

In this case, the limit matrix of coefficients for v_1, v_2 has the form

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_0 \mu_0 \mu_2}{\lambda_0 - 1} \\ \frac{1}{\lambda_0 - 1} & 0 \end{pmatrix},$$

whose characteristic equation

$$\rho^2 - \frac{\lambda_0 \mu_0 \mu_2}{(\lambda_0 - 1)^2} = 0. \tag{3.36}$$

Note that $\operatorname{sign}(\mu_0 \mu_2 \lambda_0) = \alpha_0 \mu_2 \in \{-1, 1\}$. If we assume that $\alpha_0 \mu_2 = 1$ and (3.18) exists then Eq. (3.36) has two different roots of different signs and, therefore, according to Theorem 2.2 in [4], system (3.34) has a one-parameter family of solutions $(v_1, v_2) : [t_2, \omega[\rightarrow R^2$ ($t_2 \in [t_1, \omega]$) vanishing at $t \uparrow \omega$. By virtue of the transformation (3.27), each such system solution $y : [t_2, \omega[\rightarrow R$ corresponds to a solution $y : [t_2, \omega[\rightarrow R$ of Eq. (1.1) that admits the asymptotic representations (3.24) for $t \uparrow \omega$.

Now consider the situation when $\alpha_0 \mu_2 = -1$. In this case, the characteristic equation (3.36) has two complex conjugate roots. In order to be able to use the theorem (2.2) of [4], we apply two transformations to the system (3.34) in

succession. Let's set the first one like this:

$$v_1(t) = w_1(\tau), \quad v_2(t) = w_2(\tau) + \frac{C}{\tau} w_1(\tau), \quad \tau(t) = \beta h(t),$$

$$\beta = \text{sign}(\pi_\omega(t)) = \begin{cases} 1 & \text{if } \omega = +\infty, \\ -1 & \text{if } \omega < +\infty, \end{cases} \quad (3.37)$$

where the constant C will be chosen later. Note that

$$\tau(t_1) = 0, \quad \tau'(t) > 0 \quad \text{at } t \in]t_1, \omega[\quad \lim_{t \uparrow \omega} \tau(t) = +\infty$$

Transformation (3.37) will bring system (3.34) to the form

$$\begin{cases} w_1' = \beta \left[g_1(\tau) + m_{11}(\tau) w_1 - \frac{|\lambda_0|}{\lambda_0 - 1} w_2 \right], \\ w_2' = \beta \left[g_2(\tau) + \frac{w_1}{\lambda_0 - 1} + m_{21}(\tau) w_1 + m_{22}(\tau) w_2 + W_1(\tau, w_1, w_2) + W_2(\tau, w_1, w_2) \right], \end{cases} \quad (3.39)$$

where

$$\begin{aligned} g_1(\tau(t)) &= f_1(t), \quad m_{11}(\tau(t)) = c_{11}(t) - \frac{|\lambda_0|}{\lambda_0 - 1} \frac{C}{\tau(t)}, \quad g_2(\tau(t)) = f_2(t) - \frac{C}{\tau(t)} f_1(t), \\ m_{21}(\tau(t)) &= c_{21}(t) - \frac{1}{\lambda_0 - 1} + \frac{C}{\tau(t)} (c_{22}(t) - c_{11}(t)) + \frac{C\beta}{\tau^2(t)} + \frac{C^2|\lambda_0|}{\tau^2(t)(\lambda_0 - 1)}, \\ m_{22}(\tau(t)) &= c_{22}(t) + \frac{C|\lambda_0|}{\tau(t)(\lambda_0 - 1)}, \quad W_i(\tau(t), w_1, w_2) = V_i(t, w_1, w_2 + \frac{C}{\tau} w_1) \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Here according to (3.29), (3.30), (3.35)

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} g_i(\tau) &= 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} m_{ii}(\tau) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} m_{21}(\tau) = 0, \\ \lim_{\tau \rightarrow +\infty} W_1(\tau, w_1, w_2) &= 0 \quad \text{uniformly in } (w_1, w_2) \in V_1, \\ \lim_{|w_1| + |w_2| \rightarrow 0} \frac{W_2(\tau, w_1, w_2)}{|w_1| + |w_2|} &= 0 \quad \text{uniformly in } \tau \in [0, +\infty[. \end{aligned} \quad (3.40)$$

For further evaluations, we need to know the behavior of some expressions.

It is easy to see that for $\gamma = \text{const}$, the function $\sqrt{\left| \frac{\varphi'_0(y)}{y\varphi_0(y)} \right|}$ is regularly varying

$\frac{\gamma-1}{2}$ order for $y \rightarrow Y_0$, because

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y \left(\sqrt{\left| \frac{\varphi'_0(y)}{y\varphi_0(y)} \right|} \right)'}{\sqrt{\left| \frac{\varphi'_0(y)}{y\varphi_0(y)} \right|}} &= \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y \left(\frac{\varphi'_0(y)}{y\varphi_0(y)} \right)'}{2 \frac{\varphi'_0(y)}{y\varphi_0(y)}} = \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\left(\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)} \right)' - \frac{\varphi'_0(y)}{y\varphi_0(y)}}{2 \frac{\varphi'_0(y)}{y\varphi_0(y)}} = \\ &= \frac{\gamma-1}{2}. \end{aligned}$$

Further, based on the form of the functions H , q , h , (3.29), (3.30), (3.3), it is easy to verify by L'Hospital's rule that

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{h(t)}{\int_{Y(t_1)}^{Y(t)} \sqrt{\left| \frac{z\varphi'_0(z)}{\varphi_0(z)} \right|} \frac{dz}{z}} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\int_{t_1}^t \sqrt{\left| \frac{Y(s)\varphi'_0(Y(s))}{\varphi_0(Y(s))} \right|} \frac{Y'(s)}{Y(s)q(s)} ds}{\int_{Y(t_1)}^{Y(t)} \sqrt{\left| \frac{z\varphi'_0(z)}{\varphi_0(z)} \right|} \frac{dz}{z}} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{1}{q(t)} = \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0}. \quad (3.41)$$

Using the representation of a regularly varying function and the properties of slowly varying functions, from the last limit equality at $t \uparrow \omega$ we have

$$h(t) \sim \frac{1}{q(t)} \int_{Y(t_1)}^{Y(t)} \sqrt{\left| \frac{z\varphi'_0(z)}{\varphi_0(z)} \right|} \frac{dz}{z} \sim \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} \frac{2}{\gamma + 1} \sqrt{|H(t)|}. \quad (3.42)$$

Now we can find

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau(m_{22}(\tau) + m_{11}(\tau)) &= \lim_{t \uparrow \omega} \beta h(\tau(t))(c_{22}(t) + c_{11}(t)) = \lim_{t \uparrow \omega} \beta \frac{h(\tau(t))}{\sqrt{|H(\tau(t))|}} \times \\ &\times \left(1 - \frac{q(\tau(t))}{2} + \frac{3k(\tau(t))H(\tau(t))}{2} \right) = \frac{\beta(\lambda_0 - 2 + 3\lambda_0\gamma)}{\lambda_0(\gamma + 1)}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

It is also possible to choose a constant C in such a way that $\tau(m_{22}(\tau) - m_{11}(\tau))$ as $\tau \rightarrow +\infty$ tends to zero. Really,

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau(m_{22}(\tau) - m_{11}(\tau)) &= \lim_{t \uparrow \omega} \beta h(\tau(t)) \left(c_{22}(t) - c_{11}(t) + \frac{2|\lambda_0|C}{(\lambda_0 - 1)\tau(t)} \right) = \\ \lim_{t \uparrow \omega} \beta \frac{h(\tau(t))}{\sqrt{|H(\tau(t))|}} \left(1 - \frac{q(\tau(t))}{2} - \frac{k(\tau(t))H(\tau(t))}{2} \right) &+ \frac{2|\lambda_0|C}{\lambda_0 - 1} = \frac{\beta(\lambda_0 - \lambda_0\gamma - 2)}{\lambda_0(\gamma + 1)} \\ &+ \frac{2|\lambda_0|C}{\lambda_0 - 1}. \end{aligned}$$

Thus, choosing at $\gamma \neq -1$

$$C = \frac{\beta(\lambda_0 - 1)(\lambda_0\gamma + 2 - \lambda_0)}{2|\lambda_0|\lambda_0(\gamma + 1)} \quad (3.44)$$

we get

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau(m_{22}(\tau) - m_{11}(\tau)) = 0. \quad (3.45)$$

Also taking into account (3.38), (3.23), (3.42), (3.45)

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau m_{21}(\tau) = 0. \quad (3.46)$$

If $\gamma = \pm\infty$ then due to (3.22)

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau(m_{22}(\tau) + m_{11}(\tau)) = \frac{3\beta}{2} \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{Y(t) \left(\frac{\varphi'(Y(t))}{\varphi(Y(t))} \right) \int_{Y(t_1)}^{Y(t)} \sqrt{\left| \frac{z\varphi'_0(z)}{\varphi_0(z)} \right|} \frac{dz}{z}}{\frac{\varphi'(Y(t))}{\varphi(Y(t))} \sqrt{\left| \frac{Y(t)\varphi'_0(Y(t))}{\varphi_0(Y(t))} \right|}} = 3\beta, \quad (3.47)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau(m_{22}(\tau) - m_{11}(\tau)) = \frac{2|\lambda_0|C}{\lambda_0 - 1} - \beta$$

and the constant C can be chosen as

$$C = \frac{\beta(\lambda_0 - 1)}{2|\lambda_0|}, \quad (3.48)$$

(3.46) is hold at $\gamma = \pm\infty$. We now apply to system (3.39) the transformation

$$\begin{pmatrix} w_1(\tau) \\ w_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha\tau) & -\sin(\alpha\tau) \\ \frac{\sin(\alpha\tau)}{\sqrt{|\lambda_0|}} & \frac{\cos(\alpha\tau)}{\sqrt{|\lambda_0|}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{z_1(\tau)}{\tau} \\ \frac{z_2(\tau)}{\tau} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

where $\alpha = \frac{\beta\sqrt{|\lambda_0|}}{\lambda_0 - 1}$. Let's get the system

$$\begin{cases} z'_1 &= \frac{1}{\tau} [F_1(\tau) + b_{11}(\tau)z_1 + b_{12}(\tau)z_2 + Z_{11}(\tau, z_1, z_2) + Z_{12}(\tau, z_1, z_2)], \\ z'_2 &= \frac{1}{\tau} [F_2(\tau) + b_{21}(\tau)z_1 + b_{22}(\tau)z_2 + Z_{21}(\tau, z_1, z_2) + Z_{22}(\tau, z_1, z_2)], \end{cases} \quad (3.50)$$

where

$$\begin{aligned}
F_1(\tau) &= \beta\tau^2 \left(g_1(\tau)\cos(\alpha\tau) + \sqrt{|\lambda_0|}g_2(\tau)\sin(\alpha\tau) \right), \\
F_2(\tau) &= \beta\tau^2 \left(-g_1(\tau)\sin(\alpha\tau) + \sqrt{|\lambda_0|}g_2(\tau)\cos(\alpha\tau) \right), \\
b_{11}(\tau) &= 1 + \frac{\beta\tau}{2} (m_{11}(\tau) + m_{22}(\tau) + (m_{11}(\tau) - m_{22}(\tau))\cos(2\alpha\tau) + \\
&\quad + \sqrt{|\lambda_0|}m_{21}(\tau)\sin(2\alpha\tau)), \\
b_{12}(\tau) &= \frac{\beta\tau}{2} \left((m_{22}(\tau) - m_{11}(\tau))\sin(2\alpha\tau) - 2\sqrt{|\lambda_0|}m_{21}(\tau)\sin^2(\alpha\tau) \right), \\
b_{21}(\tau) &= \frac{\beta\tau}{2} \left((m_{22}(\tau) - m_{11}(\tau))\sin(2\alpha\tau) - 2\sqrt{|\lambda_0|}m_{21}(\tau)\cos^2(\alpha\tau) \right), \\
b_{22}(\tau) &= 1 + \frac{\beta\tau}{2} (m_{11}(\tau) + m_{22}(\tau) + (m_{22}(\tau) - m_{11}(\tau))\cos(2\alpha\tau) - \\
&\quad - \sqrt{|\lambda_0|}m_{21}(\tau)\sin(2\alpha\tau)), \\
Z_{1i}(\tau, z_1, z_2) &= \beta\sqrt{|\lambda_0|}\tau^2\sin(\alpha\tau) \times \\
&\quad \times W_i(\tau, \frac{z_1}{\tau}\cos(\alpha\tau) - \frac{z_2}{\tau}\sin(\alpha\tau), \frac{z_1}{\sqrt{|\lambda_0|}\tau}\sin(\alpha\tau) + \frac{z_2}{\sqrt{|\lambda_0|}\tau}\cos(\alpha\tau)) \quad (i = 1, 2), \\
Z_{2i}(\tau, z_1, z_2) &= \beta\sqrt{|\lambda_0|}\tau^2\cos(\alpha\tau) \times \\
&\quad \times W_i(\tau, \frac{z_1}{\tau}\cos(\alpha\tau) - \frac{z_2}{\tau}\sin(\alpha\tau), \frac{z_1}{\sqrt{|\lambda_0|}\tau}\sin(\alpha\tau) + \frac{z_2}{\sqrt{|\lambda_0|}\tau}\cos(\alpha\tau)) \quad (i = 1, 2).
\end{aligned}$$

Now, based on conditions (3.25), (3.43) - (3.48), we note that

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow +\infty} F_i(\tau) &= 0 \quad (i = 1, 2), \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} b_{12}(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} b_{21}(\tau) = 0, \\
\lim_{\tau \rightarrow +\infty} b_{11}(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} b_{22}(\tau) = \begin{cases} \frac{3\lambda_0 - 2 + 5\lambda_0\gamma}{2\lambda_0(\gamma + 1)} & \text{at } \gamma = \text{const} \neq -1, \\ \frac{5}{2} & \text{at } \gamma = \pm\infty. \end{cases}
\end{aligned}$$

In addition, according to (3.40), the boundedness of the functions sine, cosine

$$\lim_{|z_1|+|z_2| \rightarrow 0} \frac{Z_{i2}(\tau, w_1, w_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0 \quad \text{uniformly in } \tau \in [0, +\infty[\quad (i = 1, 2). \quad (3.51)$$

Moreover,

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} Z_{1i}(\tau, z_1, z_2) = 0 \quad \text{uniformly in } (z_1, z_2) \in V_1 \quad (i = 1, 2). \quad (3.52)$$

Then it follows from Theorem 2.2 in [4] that system (3.50) in each of the cases $|\gamma| < +\infty$, $\gamma \neq -1$, $3\lambda_0 - 2 + 5\lambda_0\gamma \neq 0$ or $\gamma = \pm\infty$ has at least one

solution $(z_1, z_2) : [\tau_*, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}^2$ ($\tau_* \in [0, +\infty[$) tending to zero as $\tau \rightarrow +\infty$. Also the inequality $\lambda_0(\gamma + 1)(3\lambda_0 - 2 + 5\lambda_0\gamma) < 0$ is satisfied, there exists a two-parameter family of such solutions. According to the transformations (3.27), (3.34), (3.37), (3.49) each of these solutions corresponds to a solution of equation (1.1), for which the asymptotic representations (3.26) are valid for $t \uparrow \omega$.

The theorem is completely proven.

For instance, the differential equation $y'' = \sum_{i=1}^k \alpha_{i0} p_i(t) \varphi_{i0}(y)$, where there is $j \in \{1, \dots, k\}$ such that $p_j(t) = \frac{|c\lambda_0|}{(\lambda_0 - 1)^2} \frac{|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}-2}}{\varphi_{j0}\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right)}$, $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)}{p_j(t)} = 0$ ($j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j$), $\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_{i0}(y)}{\varphi_{j0}(y)} = 1$ ($j \in \{1, \dots, k\}$), $c = \text{const}$, $c\mu_0 > 0$ satisfies the conditions of Theorem 1, Theorem 2 as $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$. Here $Y(t) = c|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}$, $H(t) = \frac{Y(t)\varphi'_{j0}(Y(t))}{\varphi_{j0}(Y(t))}$.

CONCLUSION

In this paper, for essentially nonlinear nonautonomous differential equations of the second order in a sense, closed to two-term equations with rapidly varying nonlinearity with respect to the desired function, necessary and also sufficient conditions of existence and asymptotic representations of $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ —solutions for $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ at $t \uparrow \omega$ ($\omega \leq +\infty$) are established. In the future, it will be of interest to obtain similar results in the cases $\lambda_0 = 1$, $\lambda_0 = 0$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Кусик Л.И.** Асимптотическое поведение решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка *дис... канд. физ.- мат. наук: 01.01.02*. Одесса. 2016. 145 р.
2. **Евтухов В.М.** Асимптотическое поведение решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка типа Эмдена - Фаулера. *дис... канд. физ.- мат. наук: 01.01.02*. Одесса. 1998. 154 с.
3. **Черникова А.Г.** Асимптотична поведінка розв'язків звичайних диференціальних рівнянь зі швидко змінними нелінійностями. *дис... канд. физ.- мат. наук: 01.01.02*. Одеса. 2019. 156 с.
4. **Bingham N.H., Goldic C.M., Teugels J.L.** Regular variation. Encyclopedia of

mathematics and its applications. Cambridge University Press. 1987. 494 p.

5. **Евтухов В.М., Самойленко А.М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений: Укр. Мат. Ж. 2010. Т.62, №1. С. 52 - 80.

Кусік Л. І.

ПРО АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Резюме

Для диференціального рівняння другого порядку загального виду $y'' = f(t, y, y')$, де $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow \mathbf{R}$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Δ_{Y_i} – односторонній окіл Y_i , $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$ ($i \in \{0, 1\}$) розглянуто питання існування розв'язків, для яких $\lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i$ ($i \in \{0, 1\}$). Серед множини таких розв'язків відокремлюємо достатньо широкий клас т. з. $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків. Такого типу розв'язки раніше було введено при вивченні двочленного рівняння $y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y')$, де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ – неперервна функція, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0, +\infty[$ ($i = 0, 1$) – неперервні правильно змінні при $z \rightarrow Y_i$ ($i = 0, 1$) функції порядків σ_i ($i = 0, 1$), $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$. У даній роботі встановлено умову, за якій права частина рівняння в деякому сенсі є близькою при $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ та $t \uparrow \omega$ до добутку $\alpha_0 p(t) \varphi_0(y)$, де функція φ_0 є швидко змінною при $y \rightarrow Y_0$. При виконанні цієї умови знайдено необхідні, а також достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків, встановлено асимптотичні зображення таких розв'язків та їх похідних першого порядку, вказано кількість параметричних сімей таких розв'язків. Наведено приклад.

Ключові слова: двочленне диференціальне рівняння, $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язок, асимптотичні зображення розв'язків, швидко змінна функція, одно-, двопараметрична сім'я розв'язків.

REFERENCES

1. Kusik L.I. Asimptoticheskoye povedeniye resheniy nelineynogo differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka [Asymptotic representations of solutions of second-order nonlinear differential equations.] dis.... cand. fiz.-mat. nauk: 01.01.02. Odesa. 2016. 145 p.
2. Evtukhov V. M. Asimptoticheskoye povedeniye resheniy odnogo nelineynogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka tipa Emdena - Faulera [The asymptotic behavior of the solutions of one nonlinear second-order differential equation of the Emden - Fowler type]. dis.... cand. fiz.-mat. nauk: 01.01.02 . Odessa. 1998. 154 p.
3. Chernikova A. G. Asimptotichna povedinka roz'vyazkiv zvychaynykh dyferentsial'nykh rivnyan'zi shvydko zminnymy nelineynostyamy [Asymptotic behavior of solutions of ordinary differential equations with rapidly varying nonlinearities]. dis.... cand. fiz.-mat. nauk: 01.01.02 . Odesa. 2019. 156 p.
4. Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press. 1987. 494 p.
5. Evtukhov V.M., Samoylenko A.M. Usloviya sushchestvovaniya ischezayushchikh v obooy tochke resheniy u veshchestvennykh neavtonomnykh sistem kvazilineynykh differentsial'nykh uravneniy [Existence conditions solutions vanishing at a singular point for

real non-autonomous systems quasilinear differential equations]. Ukr. Mat. Zh. 2010. V.62, No. 1. pp. 52 - 80.

UDC 517.764

O. G. Savchenko, DSc (Physics & Mathematics), Prof.

Kherson State University

Department of Algebra, Geometry and Mathematical Analysis

27 Universytetska St, Kherson, 73000, Ukraine

e-mail: savchenko.o.g@ukr.net

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-4687-5542>

N. G. Konovenko, CandSc (Physics & Mathematics), Assoc. Prof.

Odesa National University of Technology

Department of Physical and Mathematical Sciences

112 Kanatna St, Odesa, 65039, Ukraine

e-mail: ngkonovenko@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8631-0688>

ON SPECIAL 2F-PLANAR MAPPINGS OF PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES WITH f -STRUCTURE

Some questions of the theory of 2F-planar mappings of manifolds endowed with an affine structure of a certain type are considered. We have proved that these mappings can be of three types: complete (of the fundamental type) and canonical of types I and II.

Previously, we studied in detail the complete and canonical 2F-planar mappings of the first type. In this article, we consider the main questions for canonical 2F-planar mappings of type II.

Theorems were proved that give a regular method that allows for any pseudo-Riemannian space with an absolutely parallel f -structure (V_n, g_{ij}, F_i^h) either to find all spaces $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$, on which V_n admits a canonical 2F-planar mapping of the second type, or to prove that there are no such spaces.

In particular, we showed that a pseudo-Riemannian space with an absolutely parallel f -structure, in which there is a concircular or quasi-concircular vector field, admits a non-trivial canonical 2F-planar mapping of the second type.

MSC: 57R30.

Keywords: affine connected space, Riemannian space, Riemannian tensor, Ricci tensor, f -structure.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1\(43\).342067](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1(43).342067).

1. INTRODUCTION

In the works [3; 4] we considered $2F$ -planar mappings ([2]) which are a natural generalization of geodesic mappings ([1]) of affine-connected and Riemannian spaces, as well as holomorphically-projective and F -planar ([7; 9]) mappings of manifolds endowed with a certain type affiner structure.

In [2] the concept of $2F$ -planar mapping ($2FPM$) of affinely connected spaces was introduced and it was shown that $2FPM$ between the spaces (V_n, g_{ij}, F_i^h) , $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ with metric tensors $g_{ij}, \bar{g}_{ij}$ and affiner structures $F_i^h, \bar{F}_i^h$, respectively, necessarily preserves the structure.

In other words, in the common with respect to the mapping coordinate system (x^i) we have

$$F_i^h(x) = \bar{F}_i^h(x), \quad h, i = 1, 2, \dots, n.$$

In [2], $2FPM$ s of pseudo-Riemannian spaces with a structure of the form

$$F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta = \delta_i^h$$

were also researched.

Continuing the study of $2FPM$ in [3], we found out that a pseudo-Riemannian space with an absolutely parallel f -structure is a product of two spaces, one of which is Kahler, and also that the class of pseudo-Riemannian spaces with an absolutely parallel f -structure is closed with respect to the considered mappings. It was also shown that under the condition of covariant constancy of the f -structure, non-trivial $2F$ -planar mappings can be of three types: complete and canonical of type I, II.

In [3] it is proved that $2FPM$, depending on the type, induces on the product components, which represent the mapped spaces, a geodesic [1], holomorphic-projective [9] or affine [1] mapping.

In [4] we constructed geometric objects invariant with respect to the considered mappings, identified classes of pseudo-Riemannian spaces with absolutely parallel f -structure that admit $2FPM$ (of the main type and canonical) onto a flat space, and obtained their metrics in a special coordinate system.

In [5] we considered the basic questions of the theory of $2FPM$ of the main type. Theorems have been proved that give a regular method that allows for any pseudo-Riemannian space with absolutely parallel f -structure

(V_n, g_{ij}, F_i^h) to either find all spaces $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ onto which V_n admits a 2F"=planar mapping of the main type, or to prove that there are no such spaces.

The study is carried out in tensor form, locally, in the class of real rather smooth, and in the general case analytic functions.

MAIN RESULTS

2. 2FPMs OF PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES WITH ABSOLUTELY PARALLEL f "=STRUCTURE

1°. Consider the pseudo-Riemannian spaces (V_n, g_{ij}, F_i^h) and $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$, in which affinor structures are given. In the common with respect to the mapping coordinate system (x^i) 2F"=planar mapping

$$(V_n, g_{ij}, F_i^h) \xrightarrow{2FPM} (\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h),$$

is characterized by the fundamental equations [2]:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_i \delta_j^h + \phi_{(i} F_{j)}^h + \sigma_{(i} F_{j)}^h, \quad (1)$$

$$F_i^h(x) = \bar{F}_i^h(x), \quad (2)$$

where

$$F_i^h = F_i^h, \quad F_i^h = F_\alpha^h F_i^\alpha.$$

$\Gamma_{ij}^h, \bar{\Gamma}_{ij}^h$ are the Christoffel symbols of $V_n, \bar{V}_n$, respectively; $\psi_i(x), \phi_i(x), \sigma_i(x)$ are certain covectors; brackets (i, j) denote the symmetrization with respect to the corresponding indices; comma « $\cdot$ » is a sign of the covariant derivative in respect to the connection of V_n .

2FPM is considered trivial when $\psi_i = \phi_i = \sigma_i = 0$.

We will assume that the affinor F_i^h defines a f -structure in (V_n, g_{ij}, F_i^h) [8],[6], i.e. the following conditions hold

$$F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta + F_i^h = 0, \quad i, h, \alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$Rg \|F_i^h\| = 2k \quad (2k < n).$$

If the affine structure is consistent with the metric V_n and $\bar{V}_n$ in the form

$$\begin{aligned} F_{ij}^1 + F_{ji}^1 &= 0, & \bar{F}_{ij}^1 + \bar{F}_{ji}^1 &= 0, \\ F_{ij}^1 &= g_{i\alpha} F_j^\alpha, & \bar{F}_{ij}^1 &= \bar{g}_{i\alpha} F_j^\alpha, \end{aligned} \quad (4)$$

and is absolutely parallel in V_n , i.e.

$$F_{i,j}^h = 0, \quad (5)$$

then, as shown in [3], we have

$$F_{i|j}^h = 0. \quad (6)$$

Here " , " and " | " are the signs of the covariant derivative in V_n and $\bar{V}_n$, respectively

In [3] we found out that under the conditions (3)-(6) between the vectors ψ_i, ϕ_i, σ_i in the fundamental equations (1) there is a dependence

$$\psi_\alpha F_i^\alpha = 0, \quad \sigma_i = \psi_i - \phi_\alpha F_i^\alpha, \quad \phi_i = \sigma_\alpha F_i^\alpha, \quad (7)$$

and also that the condition $\sigma_i = 0$ implies $\psi_i = \phi_i = 0$, i.e. in this case 2FPM is trivial. Therefore, for nontrivial 2F-planar mappings (V_n, g_{ij}, F_i^h) onto $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ with the fundamental equations (1) one of the following options occurs:

$$\begin{aligned} I \quad & \psi_i = 0, \quad \phi_i \neq 0, \quad \sigma_i \neq 0; \\ II \quad & \psi_i \neq 0, \quad \phi_i = 0, \quad \sigma_i \neq 0; \\ III \quad & \psi_i \neq 0, \quad \phi_i \neq 0, \quad \sigma_i \neq 0. \end{aligned}$$

We call the 2F-planar mapping *canonical I(II) type* and denote it by 2FPM(I), 2FPM(II) in cases I,II and 2FPM of *fundamental type* in case III.

Further in this article, we consider only 2FPM(II).

2°. Let us define an operation of contraction with an affnor, which is called *conjugation* with respect to the corresponding indices and is denoted as follows

$$\begin{aligned} A_{i\dots}^{\dots} &= A_{\alpha\dots}^{\dots} F_i^\alpha, & A_{\dots}^{\bar{i}\dots} A_{\dots}^{\alpha\dots} &= F_\alpha^{\bar{i}}, \\ A_{\dots}^{\bar{i}\dots} &= A_{\alpha\dots}^{\dots} F_i^\alpha, & A_{\dots}^{\bar{i}\dots} &= A_{\dots}^{\alpha\dots} F_\alpha^{\bar{i}}. \end{aligned}$$

3. LINEAR EQUATIONS OF THE THEORY OF 2FPM(II)

1°. The pseudo-Riemannian space V_n with an absolutely parallel f -structure admits a non-trivial mapping

$$(V_n, g_{ij}, F_i^h) \xrightarrow{2FPM(II)} (\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h),$$

onto the space $\bar{V}_n$, if and only if in the common with respect to the mapping coordinate system (x^i) the fundamental equations of the considered mapping have the form:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_i \delta_j^h + \sigma_i \overset{2}{F}_j^h, \quad (8)$$

$$F_i^h(x) = \bar{F}_i^h(x), \quad (9)$$

where in accordance with (7)

$$\psi_\alpha \overset{1}{F}_i^\alpha = 0, \quad \sigma_i = \psi_i. \quad (10)$$

Relations (8) in (V_n, g_{ij}, F_i^h) are the system of nonlinear differential equations in partial derivatives of the first order with respect to the components of the tensor $\bar{g}_{ij}(x)$ and the vector $\psi_i(x) \neq 0$, under conditions (10).

The modern theory of differential equations does not provide regular methods for investigating the conditions for the existence and uniqueness of solutions to this system.

Using methods developed in the theory of geodesic mappings of Riemannian spaces [1; 9], we reduce the fundamental equations of 2FPM(II) (8) to a form that allows for efficient investigation.

2°. From relations (8) and (10) it follows

$$\bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha(x) = \Gamma_{i\alpha}^\alpha(x) + (n - 2k + 1)\psi_i(x),$$

$$Rg\|F_i^h\| = 2k \quad (2k < n),$$

therefore the vector ψ_i is gradient, that is, there exists invariant $\psi(x)$ such that

$$\psi_i = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^i}. \quad (11)$$

Next, since $\bar{g}_{ij|k} = 0$ in $\bar{V}_n$, equation (1) can be written in an equivalent form

$$\bar{g}_{ij,k} = \psi_{(i}\bar{g}_{j)k} + 2\psi_k \bar{F}_{ij}^2 + \psi_{(i} \bar{F}_{j)k}^2, \quad (12)$$

where

$$\begin{aligned} \bar{F}_{ij}^2 &= \bar{g}_{i\alpha} \bar{F}_j^{\alpha 2}, \\ \bar{F}_{ij}^2 &= \bar{F}_{ji}^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Let us consider a nondegenerate tensor

$$\tilde{g}_{ij} = \bar{g}_{i\alpha} \left(a\delta_j^\alpha + c \bar{F}_j^{\alpha 2} \right), \quad (14)$$

where a, c are some invariants.

After covariant differentiation (14) in V_n taking into account the conditions (12) we obtain:

$$\tilde{g}_{ij,k} = \phi_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \sigma_{(i} \tilde{F}_{j)k}^2 + T_{ijk}, \quad (15)$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{ij}^2 &= \tilde{g}_{i\alpha} \tilde{F}_j^{\alpha 2}, \\ T_{ijk} &= \bar{g}_{ij}(a_{,k} + 2a\psi_k) + \bar{F}_{ij}^2(c_{,k} + 2a\psi_k). \end{aligned}$$

We choose the invariants a and c such that $T_{ijk} = 0$, i.e.

$$\bar{g}_{ij}(a_{,k} + 2a\psi_k) + \bar{F}_{ij}^2(c_{,k} + 2a\psi_k) = 0. \quad (16)$$

Contracting the obtained relations with $\bar{F}_k^j$ by the index j and comparing the result with the original equality, we conclude that (16) are equivalent to a system of first-order partial differential equations

$$\begin{aligned} a_{,k} + 2a\psi_k &= 0, \\ c_{,k} + 2a\psi_k &= 0. \end{aligned}$$

This system is completely integrated and its general solution, taking into account (11), has the form

$$a = C_1 e^{-2\psi}, \quad c = C_2 + C_1 e^{-2\psi(x)},$$

C_1, C_2 - arbitrary constants. We will be satisfied with any partial solution, for which

$$\tilde{g}_{ij}(x) \neq a\bar{g}_{ij}(x), \quad \det \|\tilde{g}_{ij}\| \neq 0,$$

therefore we choose $C_1 = C_2 = 1$ and thus,

$$\tilde{g}_{ij} = e^{-2\psi} \bar{g}_{i\alpha} \left(\delta_j^\alpha + (1 + e^{2\psi}) F_j^\alpha \right). \quad (17)$$

The matrix $(\tilde{g}_{ij})$ is nondegenerate. It is easy to verify that the tensor

$$\tilde{g}^{ij} = e^{2\psi} \bar{g}^{i\alpha} \left(\delta_\alpha^j + (1 + e^{-2\psi}) F_\alpha^j \right) \quad (18)$$

satisfies the condition

$$\tilde{g}_{i\alpha} \tilde{g}^{\alpha j} = \delta_i^j.$$

Let us differentiate this identity covariantly in V_n :

$$\tilde{g}_{i\alpha,k} \tilde{g}^{\alpha j} + \tilde{g}_{i\alpha} \tilde{g}^{\alpha j}_{,k} = 0.$$

From here we find

$$\tilde{g}^{ij}_{,k} = -\tilde{g}_{\alpha\beta,k} \tilde{g}^{\alpha i} \tilde{g}^{\beta j}$$

and, according to (15),(16),

$$a_{ij,k} = \lambda_{(i} (g_{j)k} + F_{j)k}^2), \quad (19)$$

where

$$a_{ij} = \tilde{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}, \quad (20)$$

$$\lambda_i = -\psi_{,\alpha} \tilde{g}^{\alpha\beta} g_{\beta i}. \quad (21)$$

In view of (10) we have

$$\lambda_{\bar{i}} = 0. \quad (22)$$

As easy to see, from (4), (20) it follows that the tensor a_{ij} satisfies the conditions

$$a_{i\alpha} F_j^\alpha = a_{j\alpha} F_i^\alpha, \quad \det \|a_{ij}\| \neq 0. \quad (23)$$

Let us contract (19) with g^{ij} by indices i, j . Then taking into account (22) it turns out that the vector λ_i is gradient, since

$$a_{\alpha\beta,k}g^{\alpha\beta} = (a_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta})_{,k} = 2\lambda_k.$$

Therefore, if a pseudo-Riemannian space (V_n, g_{ij}, F_i^h) with an absolutely parallel f -structure admits a nontrivial 2FPM(II) onto the space $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$, i.e., it satisfies (12), (3), (4), (5), then there must exist in it a nonsingular symmetric tensor a_{ij} that satisfies (19)(22),(23) for some nonzero vector λ_i .

The converse is also true. In fact, if a_{ij} and λ_i , satisfy equations (19),(22), (23), then for

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ij} &= a^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}, \\ a_{i\alpha} a^{\alpha j} &= \delta_i^j\end{aligned}$$

take place (15) when $T_{ijk} = 0$ and $\psi_i = -\lambda_\beta g^{\beta\alpha} \tilde{g}_{\alpha i}$.

Let $\tilde{\Gamma}_{ij}^h$ be the Christoffel symbols of the second kind derived from the tensor $\tilde{g}_{ij}$. Given that

$$2\tilde{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha = \tilde{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^i} = \tilde{g}^{\alpha\beta} (\tilde{g}_{\alpha\beta,i} + 2\tilde{g}_{\alpha\gamma} \Gamma_{\beta i}^\gamma),$$

taking into account (15), (7) we find

$$\psi_i = \tilde{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\alpha \quad (24)$$

which indicates the gradient of the vector σ_i .

But then for the tensor

$$\bar{g}_{ij} = e^{-2\psi} \tilde{g}_{i\alpha} \left(\delta_j^\alpha + (1 + e^{2\psi}) F_j^\alpha \right)$$

from (17) and (15) the conditions (12) follow. Obviously, $\bar{g}_{ij}$ is a metric tensor of a pseudo-Riemannian space with a completely parallel f -structure $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_j^h)$.

Thus, the proved

Theorem 1. *In order for a pseudo-Riemannian space with an absolutely parallel f -structure (V_n, g_{ij}, F_j^h) to admit 2FPM(II)s, it is necessary and sufficient that in this space there exists a non-singular, symmetric, doubly covariant tensor a_{ij} that satisfies the equations (19), (23) for some vector $\lambda_i \neq 0$, related by the conditions (22).*

Equations (19) represent a linear form of the fundamental equations of the theory of canonical 2F-planar mappings of the second type of spaces with f -structure.

2°. A useful corollary follows from the proved theorem. Before formulating it, let us recall that a Riemannian space (V_n, g_{ij}) , in which there exists a vector field $\xi_i \neq 0$, satisfying the equation

$$\xi_{i,j} = \rho g_{ij} \quad (25)$$

is called *equidistant* [1; 9]. Such vector fields are called *conccircular* [1; 9]. An equidistant space is considered to be of the fundamental type when $\rho \neq 0$ and of the special type when (19).

Theorem 2. *Every pseudo-Riemannian space with a absolutely parallel f -structure (V_n, g_{ij}, F_j^i) in which there exists a conccircular vector field ξ_i , that satisfies equation (25) when $\rho \neq 0$, admits a nontrivial 2FPM(II) provided that $\xi_{\bar{i}} \neq 0$.*

Indeed, let there exist a vector field ξ_i in (V_n, g_{ij}, F_j^h) satisfying (25) and $\xi_{\bar{i}} \neq 0$. Then for the tensor

$$a_{ij} = C_1 g_{ij} + C_2 \overset{2}{F}_{ij} + C_3 (\xi_i + \xi_{\bar{i}})(\xi_j + \xi_{\bar{j}})$$

with such constants $C_1, C_2, C_3 \neq 0$, that a_{ij} will be non-singular, we have:

$$a_{ij,k} = \lambda_{(i} (g_{j)k} + \overset{2}{F}_{j)k}),$$

where

$$\lambda_i = C_3 (\xi_i + \xi_{\bar{i}}).$$

By direct verification, we will see that for a_{ij} and $\lambda_i \neq 0$, the properties (22) and (23) hold. Hence by Theorem 3.1 (V_n, g_{ij}, F_j^i) admits 2FPM(II).

3°. Let us generalize the concept of a conccircular vector field. To do this, we introduce into consideration vector fields that satisfy the conditions

$$\zeta_{i,j} = \rho_1 g_{ij} + \rho_2 \overset{2}{F}_{ij}. \quad (26)$$

Let us call them *quasiconccircular*.

It takes place

Theorem 3. *Every pseudo-Riemannian space with a absolutely parallel f -structure (V_n, g_{ij}, F_j^i) , in which there exists a quasi-concircular vector field ζ_i , that satisfies equation (26), admits a 2FPM(II) under the conditions $\rho_1 \neq \rho_2$, $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$, $\zeta_{\bar{i}} \neq 0$.*

Let in (V_n, g_{ij}, F_j^h) there is a vector field ζ_i , which satisfies (26) and $\rho_1 \neq \rho_2$, $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$, $\zeta_{\bar{i}} \neq 0$.

Then, by direct calculation, we can verify that the vector field

$$(\rho_1 - \rho_2)\zeta_i - \rho_2\zeta_{\bar{i}}$$

is concircular and, therefore, in accordance with Corollary 3.2, our space admits 2FPM(II).

4. FUNDAMENTAL THEOREMS OF THE THEORY OF 2FPM(II) OF PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES WITH ABSOLUTELY PARALLEL f -STRUCTURE

1°. Let us be given a pseudo-Riemannian space with an absolutely parallel f -structure (V_n, g_{ij}, F_i^h) , i.e. we know its metric tensor $g_{ij}(x)$ and the affinor of the f -structure $F_i^h(x)$. The question is whether the space (V_n, g_{ij}, F_i^h) allows the first type canonical 2F-planar mappings is reduced to the study of equations (19) with respect to the tensor a_{ij} and the vector $\lambda_i \neq 0$, which satisfies the conditions (22), (23).

To do this, let us consider the integrability conditions of the equations (19). Taking into account the Ricci identity, they have the form:

$$a_{\alpha(j}R_{i)kl}^{\alpha} = Q_{(ij)[kl]}, \quad (27)$$

where

$$Q_{ijkl} = \lambda_{i,l}(g_{jk} + \overset{2}{F}_{jk}),$$

the square brackets denote the operation of alternation by the corresponding indices.

Hence, using suitable algebraic transformations, we find

$$(n - 2k)\lambda_{i,l} = \nu \left(g_{il} + \overset{2}{F}_{il} \right) + \left(a_{\alpha\beta} R_{i.l}^{\alpha\beta} + a_{i\alpha} R_l^{\alpha} \right) \quad (28)$$

where $\nu = \lambda_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ – invariant.

In equations (28) new unknown invariant ν has appeared, for which differential conditions must also be found. To do this, we write the integrability conditions of the last equation:

$$(n - 2k + 3)\lambda_{\alpha} R_{ilk}^{\alpha} = \left(\nu_{, [k} - \lambda_{\alpha} R_{[k}^{\alpha} \right) \left(g_{l]i} + F_{l]i}^2 \right) - a_{\alpha\beta} \left(R_{ilk, \cdot}^{\alpha \beta} + \delta_i^{\beta} R_{..lk, \delta}^{\alpha\delta} \right). \quad (29)$$

Hence, by certain algebraic transformations, we find:

$$(n - 2k - 1)\nu_{, k} = 2(n - 2k + 1)\lambda_{\alpha} R_k^{\alpha} + a_{\alpha\beta} \left(R_{k, \cdot}^{\alpha \beta} + R_{..k, \delta}^{\alpha\delta\beta} \right). \quad (30)$$

Equations (19), (28) and (30) form a closed system of the first order partial differential equations of Cauchy type with respect to the unknown functions a_{ij} , λ_i , ν . Let us denote it by (A). In the theory of differential equations regular methods have been developed for such systems. Thus, we proved

Theorem 4. *In order for a pseudo-Riemannian space with an absolutely parallel f -structure $(V_n, g_{ij}(x), F_i^h(x))$ to admit a canonical 2F-planar mapping of the second type, it is necessary and sufficient that the system of differential equations (A) has a nontrivial solution*

$$a_{ij}(x) \left(= a_{ji}(x), \quad \det \|a_{ij}(x)\| \neq 0 \right), \quad \lambda_i \neq 0, \quad \nu(x),$$

which satisfies the conditions (23).

2°. From the theory of differential equations it is known that the system (A) has at most one solution for each set of Cauchy initial values

$$a_{ij}(x_{\circ}) = a_{ij}, \quad \lambda_i(x_{\circ}) = \lambda_i, \quad \nu(x_{\circ}) = \nu,$$

therefore the number of arbitrary constants in the general solution of the equations (A) is limited. Note that this system is not always compatible and the existence of non-trivial solutions depends on whether the set of integrability conditions (A) and their differential extensions are compatible.

The integrability conditions of (19) are obtained from (27) after replacing the derivative of the vector λ_i with the expressions (28) in the form:

$$a_{\alpha\beta} T_{ijkl}^{\alpha\beta} = 0, \quad (31)$$

where

$$T_{ijkl}^{\alpha\beta} = 2k(n-2k) \left(\delta_j^\beta R_{.ikl}^\alpha + \delta_i^\beta R_{.jkl}^\alpha \right) + T_{(ij)[kl]}^{1\alpha\beta},$$

$$T_{ijkl}^{1\alpha\beta} = \left(R_{.i\gamma.}^\alpha{}^\beta - R_{\gamma.}^\alpha \delta_i^\beta \right) \left(2k(\delta_l^\gamma + F_l^{2\gamma}) g_{jk} + (2k\delta_l^\gamma + n F_l^{2\gamma}) F_{jk}^2 \right).$$

We obtain the integrability conditions of (28) from (29) after replacing the derivatives of ν in them with the expressions (30) in the form:

$$a_{\alpha\beta} P_{ilk}^{\alpha\beta} + (n-2k+3)(n-2k-1) \lambda_\alpha \tilde{Q}_{il\gamma}^\alpha \left(\delta_l^\gamma + F_l^{2\gamma} \right) = 0, \quad (32)$$

where

$$P_{ilk}^{\alpha\beta} = \left(R_{ik\gamma.}^\alpha{}^\beta + \delta_i^\beta R_{.k\gamma,\delta}^{\alpha\delta} \right) \left(\delta_l^\gamma + F_l^{2\gamma} \right)$$

$$\tilde{Q}_{ilk}^\alpha = g^{\alpha\beta} g_{i\gamma} Q_{\beta lk}^\gamma,$$

$$Q_{ilk}^h = R_{ilk}^h - \frac{1}{n-2k-1} \left((\delta_k^h + F_k^{2h}) R_{il} - (\delta_l^h + F_l^{2h}) R_{ik} \right), \quad (33)$$

$$n-2k-1 \neq 0, \quad k = \frac{1}{2} Rg \|F_i^h\| \neq 1.$$

Note that the tensor (33) is invariant under canonical 2FPM of the second type. It was built by us in [4].

Similarly, the integrability conditions of equations (30) are as follows:

$$a_{\alpha\beta} S_{kl}^{\alpha\beta} + \lambda_\alpha L_{kl}^\alpha = 0, \quad (34)$$

where $S_{kl}^{\alpha\beta}$ and L_{kl}^α are expressed in a certain way through the internal objects of V_n . We do not provide them due to their complexity.

Let us denote the integrability conditions of the system (A), which we present in the form (31),(33),(34), by (B), and their differential extensions by

$(B_1), (B_2), (B_3), \dots$ As we can see, $(B), (B_1), (B_2), (B_3), \dots$ are a system of linear homogeneous algebraic equations with respect to a_{ij}, λ_i, ν with coefficients from V_n . Since the number of unknown functions is limited, there will be a natural number s such that (B_s) and the following extensions will be the consequences of $(B), (B_1), (B_2), (B_3), \dots, (B_{s-1})$.

From the analytical theory of differential equations, for the system (A) there is a nontrivial solution in the neighborhood of the point M_o if and only if the system of equations $(B), (B_1), (B_2), (B_3), \dots, (B_{s-1})$ have a nontrivial solution at this point.

True

Theorem 5. *In order for a pseudo-Riemannian space with an absolutely parallel f -structure $(V_n, g_{ij}(x), F_i^h(x))$ to admit a canonical 2F-planar mapping of the second type, it is necessary and sufficient that the system of homogeneous algebraic equations $(B), (B_1), (B_2), (B_3), \dots, (B_{s-1})$ has in (V_n, g_{ij}, F_i^h) a nontrivial solution*

$$a_{ij}(x) \left(= a_{ji}(x), \quad \det \|a_{ij}(x)\| \neq 0 \right), \quad \lambda_i(x) \neq 0, \quad \nu(x),$$

which satisfies the conditions (22), (23).

CONCLUSION

Theorems 4.1 and 4.2 can be considered as the fundamental theorems of the theory of the first type canonical 2F-planar mappings of pseudo-Riemannian spaces with absolutely parallel f -structure, since they give a regular method that allows for any such space (V_n, g_{ij}, F_i^h) either to find all pseudo-Riemannian spaces $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ onto which V_n admits 2FPM(II)s, or to prove that there are no such spaces. However, it should be recognized that for large n directly solving of this problem may be technically quite difficult. Therefore, it is very important to develop other approaches to studying the problem of the existence of 2FPM(II) and their features.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Синюков Н.С.** Геодезические отображения римановых пространств / Н.С.Синюков – М.: Наука, 1979. – 255 с.

2. **Раад Кадем** О $2F$ -планарных отображениях аффинносвязных пространств / Raad Kadem // Abstracts of the Colloquium on Differential Geometry, Eger, Hungary. – 1989. – р. 20–25.
3. **Коновенко Н.** $2F$ -планарные отображения псевдо-римановых пространств с f -структурой / Н.Коновенко, И.Курбатова, К.Цвентух // Proc. Intern. Geom. Center – 2018. –Т.11, №1.– С. 39–51.
4. **Коновенко Н.** Специальные классы псевдо-римановых пространств с f -структурой, допускающие $2F$ -планарные отображения / Н.Коновенко, И.Курбатова, // Proc. Intern. Geom. Center – 2018. –Т.11, №4.– С. 18–33.
5. **Курбатова І.** Основні теореми теорії $2F$ -планарних відображень псевдориманових просторів з f -структурою / І.Курбатова, Н.Коновенко // Proc. Intern. Geom. Center – 2020. –Т.13, №1.– С. 9–22.
6. **Широков А.П.** Структуры на дифференцируемых многообразиях / А.П.Широков //Итоги науки.Сер. Мат. Алгебра. Топол. Геом. 1967 – 1969. – С. 127–188.
7. **Микеш Й.** О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности/ Й.Микеш, Н.С.Синюков // Sov. Math.– 1983. – Т. 27, № 1. – С. 63–70.
8. **Yano K.** On a structure defined by a tensor field f of type $(1, 1)$ satisfying $f^3 + f = 0$ / K. Yano. – Tensor (N.S.), The Tensor Society. Tensor. New Series.- 1963.-Vol.14.–P.99-109.
9. **Mikes J.** Differential Geometry of Special Mappings / J. Mikes, E.Stepanova, A.Vanzurova. – Palacky Univ. Press: Olomouc, Czech Republic, 2019. – 320 p.

Савченко О. Г., Коновенко Н. Г.

ПРО СПЕЦІАЛЬНІ $2F$ -ПЛАНАРНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ПСЕВДО-РІМАНОВИХ ПРОСТОРІВ
З f -СТРУКТУРОЮ

Резюме

Розглядаються деякі питання теорії $2F$ -планарних відображень многовидів, які наділені афінорною структурою певного типу. Ми довели, що ці відображення можуть бути трьох видів: повні (основного типу) і канонічні I, II типів.

Раніше ми докладно вивчали повні та канонічні першого типу $2F$ -планарні відображення. У цій статті розглядаються основні питання для канонічних $2F$ -планарних відображень II типу.

Було доведено теореми, які дають регулярний метод, що дозволяє для будь-якого псевдоріманового простору з абсолютно паралельною f -структурою (V_n, g_{ij}, F_i^h) або знайти всі простори $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$, на які V_n допускає канонічне $2F$ -планарне відображення другого типу, або довести, що таких просторів немає.

Ми, зокрема, показали, що псевдорімановий простір з абсолютно паралельною f -структурою, в якому існує конциркулярне або квазіконциркулярне векторне поле, допускає нетривіальне канонічне $2F$ -планарне відображення другого типу.

Ключові слова: простір афінної зв'язності, рімановий простір, тензор Рімана, тензор Річчі, f -структура.

REFERENCES

1. Sinyukov N.S. (1979). *Geodesicheskiye otobrazheniya rimanovikh prostranstv* [Geodesic mappings of Riemannian spaces]. М.: Nauka, 255 p.
2. Raad Kadem (1989). О $2F$ -планарных отображениях аффинносвязных пространств [On $2F$ -planar mappings of affine connectedness spaces]. *Abstracts of the Colloquium on Differential Geometry, Eger, Hungary*, P. 20–25.
3. Konovenko, N., Kurbatova, I., Tsvetoukh, K. (2018). $2F$ -planar mappings of pseudo-Riemannian spaces with f -structure [2F-planarniye otobrazhenia pseudo-rimanovikh prostranstv s f -strukturoy]. *Proc. Intern. Geom. Center*, Vol. 11, №1, P. 39–51.
4. Konovenko, N., Kurbatova, I. (2018). Special classes of pseudo-Riemannian spaces with f -structure admitting $2F$ -planar mappings [Specialniye klassy pseudo-rimanovikh prostranstv s f -strukturoy, dopuskayuschiye 2F-planarniye otobrazheniya]. *Proc. Intern. Geom. Center*, Vol. 11, №4, P. 18–33.
5. Kurbatova, I., Konovenko, N. (2020). Basic theorems of the theory of $2F$ -planar mappings of pseudo-Riemannian spaces with f -structure [Osnovny teoremy teorii 2F-planarnykh vidobrazhen pseudo-rimanovikh prostoriv z f -strukturoyu]. *Proc. Intern. Geom. Center*, Vol. 13, №1, P. 19–22.
6. Shirokov, A.P. (1969). Structures on differentiable manifolds [Struktury na differentsiruyemykh mnogoobraziyakh]. *Itogi nauki. Ser. Mat. Algebra. Topol. Geom. 1967*, P. 127–188.

7. Mikes, J., Sinyukov, N.S. (1983). O quasi-planarnykh otobrazheniyakh prostranstv affinnoy svyaznosti [On quasiplanar mappings of spaces of affine connection]. *Sov.Math.*, Vol. 27, №1. – P. 63–70.
8. Yano, K. (1963). On a structure defined by a tensor field f of type $(1, 1)$ satisfying $f^3 + f = 0$. *Tensor (N.S.)*, *The Tensor Society. Tensor. New Series*, vol.14. – p.99-109.
9. Mikes, J., Stepanova, E., Vanzurova, A., (2019). *Differential Geometry of Special Mappings* Palacky Univ. Press: Olomouc, Czech Republic– 320 p.

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ (скорочений варіант)

Журнал «Дослідження в математиці і механіці» має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень, огляди з актуальних проблем за тематикою видання, а також повідомлення про ювілеї, знаменні дати та події.

Статті публікуються українською або англійською мовою.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Електронну версію рукопису слід надсилати на e-mail журналу

rmm-journal@onu.edu.ua

або завантажувати через сайт журналу

www.rmm-journal.onu.edu.ua

Вона повинна складатися з

- 1) вихідного TeX-файла,
- 2) PDF-файла,
- 3) всіх допоміжних файлів (графіки, рисунки, ілюстрації тощо),
- 4) документа з анкетними даними авторів (прізвище, ім'я, по батькові, місце роботи, e-mail, адреса для листування та телефон).

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи L^AT_EX відповідно до вимог та з використанням шаблону, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті. Також вимоги можна отримати в редакційній колегії журналу.

Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 25 сторінок.

Структура статті:

- УДК;
- список авторів;
- місце роботи авторів;
- назва статті;
- резюме мовою оригіналу обсягом не менше 100 слів;
- Mathematical Subject Classification (2010);

- список ключових слів мовою оригіналу;
- основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України «Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України» від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується подана стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером у квадратних дужках;
- список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформлюється відповідно до Державного стандарту України ДСТУ 7.1:2006 «Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання» та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008);
- анотація іншою мовою повинна містити назву, список авторів, резюме обсягом не менше 100 слів та список ключових слів;
- додатково, якщо стаття написана українською мовою, після анотації англійською мовою додається список літератури у транслітерації, оформлений у відповідності до міжнародного стандарту *Harvard* (зразок та правила оформлення можна знайти в шаблоні статті на сайті).

Усі надіслані статті проходять анонімне рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу «Дослідження в математиці і механіці».

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, зокрема й у співавторстві.

Редакційна колегія журналу
«Дослідження в математиці і механіці»
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Змієнка Всеволода, 2
м. Одеса, 65082

Українською та англійською мовами

Згідно з Рішенням Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення № 1407 від 26.06.2025 р. журнал зареєстрований як друковане медіа і внесений до Реєстру суб'єктів у сфері медіа з ідентифікатором R30-06164.

Затверджено до друку вченою радою
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова
Протокол № 6 від 17 грудня 2024 р.

Відповідальний за випуск *О. О. Максимов*
Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*
Технічний редактор *М. М. Бушин*

Наклад 100 пр. Зам. № 346(69).

Адреса редколегії:
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Видавництво і друкарня «Астропринт»
вул. Разумовська, 21, м. Одеса, 65091, Україна
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
astro_print@ukr.net
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Дослідження в математиці і механіці. — 2024. — Т. 29, вип. 1(43). —
С. 1–105.