

ISSN 2519–206X

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ДОСЛІДЖЕННЯ В МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

Науковий журнал

Виходить 2 рази на рік

Журнал заснований у січні 1997 р.

Том 28. Випуск 1–2 (41–42). 2023

Одеса
«Астропринт»
2023

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

Редакційна колегія журналу

Головний редактор — М. О. Перестюк, д. ф.-м. н., проф., акад. НАНУ (Україна)

Заступник головного редактора — В. М. Євтухов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Відповідальний редактор — О. Д. Кічмаренко, д. ф.-м. н., доц. (Україна)

A. Alifov, д. ф.-м. н., проф. (Азербайджан)

A. Ashyralyev, д. ф.-м. н., проф. (Туреччина)

S. Dashkovskiy, Dr. habil., проф. (Німеччина)

F. Iacoviello, PhD, проф. (Італія)

I. T. Kiguradze, д. ф.-м. н., проф. (Грузія)

С. К. Асланов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Н. Д. Вайсфельд, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

П. Д. Варбанець, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Д. В. Дмитришин, д. т. н., проф. (Україна)

A. A. Дороговцев, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. В. Капустян, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

П. І. Когут, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Ан. О. Кореновський, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. Ф. Кривий, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

В. Є. Круглов, к. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. Меньшиков, д. ф.-м. н., проф. (Шотландія)

A. V. Плотніков, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

В. Г. Попов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Н. В. Скрипник, д. ф.-м. н., доц. (Україна)

О. М. Станжицький, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

I. M. Черевко, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Відповідальний за випуск — К. С. Бондаренко

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу

масової інформації серія КВ № 21400–11200ПР від

17 червня 2015 р.

Журнал внесений до переліку наукових фахових видань наказами

Міністерства освіти і науки України № 527 від 24.05.2018 р.

та № 775 від 16.07.2018 р.

ISSN 2519–206X

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

RESEARCHES
in MATHEMATICS
and MECHANICS

Scientific journal

Published twice a year

Journal founded in January, 1997

Volume 28. Issue 1–2 (41–42). 2023

Odesa
«Astroprint»
2023

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

Editorial board of the journal

Editor-in-chief — M. O. Perestyuk, D.Sc., prof., academ. NANU (Ukraine)

Deputy Editor-in-chief — V. M. Evtukhov, D.Sc., prof. (Ukraine)

Executive Editor — O. D. Kichmarenko, D.Sc., docent (Ukraine)

A. Alifov, D.Sc., prof. (Azerbaijan)

A. Ashyralyev, D.Sc., prof. (Turkey)

S. K. Aslanov, D.Sc., prof. (Ukraine)

I. M. Cherevko, D.Sc., prof. (Ukraine)

S. Dashkovskiy, Dr. habil., prof. (Germany)

D. V. Dmitrishin, D.Sc., prof. (Ukraine)

A. A. Dorogovtsev, D.Sc., prof. (Ukraine)

O. V. Kapustyan, D.Sc., prof. (Ukraine)

I. T. Kiguradze, D.Sc., prof. (Georgia)

P. I. Kogut, D.Sc., prof. (Ukraine)

An. O. Korenovskiy, D.Sc., prof. (Ukraine)

V. Ye. Kruglov, PhD, prof. (Ukraine)

O. F. Kryvyi, D.Sc., prof. (Ukraine)

F. Iacoviello, D.Sc., prof. (Italy)

O. Menshykov, D.Sc., prof. (Scotland)

A. V. Plotnikov, D.Sc., prof. (Ukraine)

V. G. Popov, D.Sc., prof. (Ukraine)

N. V. Skripnik, D.Sc., docent (Ukraine)

O. M. Stanzhytskyi, D.Sc., prof. (Ukraine)

P. D. Varbanets, D.Sc., prof. (Ukraine)

N. D. Vaysfeld, D.Sc., prof. (Ukraine)

Publication Editor — K. S. Bondarenko

The certificate of mass media state registration under the number № 21400–11200IIP issued on June 17, 2015.

The journal was included in the list of scientific specialized publications by the orders of Ministry of education and science of Ukraine №527 issued on May 24, 2018 and № 775 issued on July 16, 2018.

ЗМІСТ

ХРОНІКА

До 85-річчя академіка НАН України Анатолія Михайловича Самойленка	7
До 85-річчя професора Віктора Олександровича Плотнікова	12

МАТЕМАТИКА

<i>Євтухов В. М., Голубев С. В.</i> Асимптотична поведінка розв'язків двочленних диференціальних рівнянь з експоненційною нелінійністю	15
<i>Зіновеев І. В., Дзундза Н. С.</i> Розв'язання основних крайових задач для ортотропного шару	27
<i>Круглов В. Є.</i> Метод ланцюгів розв'язування лінійного різницевого рівняння скінченного порядку та деякі його застосування	40
<i>Лесечко О., Соловійов А.</i> Конформно-пласкі келерові простори	47
<i>Лейко С. Г.</i> L-інтеграл для ізопериметричних екстремалей повороту	64
<i>Максимов А. Л., Прокоф'єва С. В.</i> Підхід до ефективних методів розв'язання багатомірних ейкональних рівнянь	77
<i>Пришляк О. О., Стась С. О.</i> Функції Морса та функції корозмірності 1 на проєктивній площині	103
<i>Собчук В. В., Зеленська І. О.</i> Особливості побудови рівномірної асимптотики розв'язку системи диференціальних рівнянь з точкою звороту при додатних коефіцієнтах матриці	120
<i>Стехун А. О.</i> Про асимптотику розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь асимптотично близьких до лінійних	139
<i>Турчин Є. В.</i> Одне нове узагальнення розподілу Коші	159
<i>Шарай Н. В., Шинкаренко В. М.</i> Асимптотичне зображення розв'язків близьких до лінійних диференціальних рівнянь третього порядку	172
<i>Якімова Н.А.</i> Операції над блочними предикатними матрицями	185
<i>Fesenko A. A.</i> Direct solution of the dynamical elasticity problem for a quarter space	200
Інформація для авторів	217

CONTENTS

CHRONICLE

To the 85th anniversary of the Academician of the National Academy
of Sciences of Ukraine Anatoly Mykhailovych Samoilenko 7

To the 85th anniversary of Professor Viktor Oleksandrovykh Plotnikov 12

MATHEMATICS

Evtukhov V. M., Golubev S. V. Asymptotic behavior of solutions of
two-part differential equations with exponential nonlinearity 15

Zimovieiev I. V., Dzundza N. S. Solving basic boundary value prob-
lems for an orthotropic layer 27

Kruglov V. E. The chain method for solving a finite-order linear dif-
ference equation and some of its applications 40

Lesechko O., Soloviov A. Conformally flat Kählerian spaces 47

Leiko S. L-integral for isoperimetric extremals of rotation 64

Maximov A. L., Prokofieva S. V. Approach to Effective Methods for
Solution of Multidimensional Eiconal Equations 77

Prishlyak A. O., Stas S. O. Morse and codimension 1 functions on
the projective plane 103

Sobchuk V. V., Zelenska I. O. Features of the construction of uni-
form asymptotic solution of a system of differential equations with a
turning point with positive coefficients of the matrix 120

Stekhun A. On the asymptotics of solutions of non-autonomous dif-
ferential equations asymptotically close to linear 139

Turchyn I. A new generalization of Cauchy distribution 159

Sharai N. V., Shinkarenko V. M. Asymptotic representation of solu-
tions close to linear differential equations of the third order 172

Yakimova N.A. Operations on block predicate matrices 185

Fesenko A. A. Direct solution of the dynamical elasticity problem for
a quarter space 200

Information for authors 217

ХРОНІКА

ДО 85-РІЧЧЯ АКАДЕМІКА НАН УКРАЇНИ АНАТОЛІЯ МИХАЙЛОВИЧА САМОЙЛЕНКА



Видатний математик Анатолій Михайлович Самоїленко народився 2 січня 1938 р. на Житомирщині в с. Потіївка, середню школу закінчив у м.Малина. У 1960 р. закінчив з відзнакою механіко-математичний факультет Київського державного університету імені Т. Г. Шевченка і на запрошення академіка Ю.О. Митропольського вступив до аспірантури Інституту математики АН УРСР. Тема його кандидатської дисертації «Застосування асимптотичних методів для дослідження нелінійних

диференціальних рівнянь із «нерегулярною» правою частиною» вливалася в науковий напрям, який саме в той час бурхливо розвивався та набирала світової популярності — київської школи нелінійної механіки, заснованої академіками М. М. Криловим і М.М. Боголюбовим. У 1963 р. відбувся успішний захист кандидатської дисертації, а вже у 1967 Анатолій Михайлович захистив докторську дисертацію на тему “Деякі питання теорії періодичних і квазіперіодичних систем”, ставши наймолодшим в Україні доктором наук. Після закінчення аспірантури А. М. Самоїленко протягом наступних 11 років працює в Інституті математики АН.

З 1974 р. А. М. Самоїленко очолював кафедру інтегральних та диференціальних рівнянь Київського державного університету імені Т. Г. Шевченка. Математичний талант і організаторські здібності Анатолія Михайловича здобули йому заслужений авторитет і повагу наукової спільноти. У 1978 р. Анатолій Михайлович як визнаний науковець був обраний членом-кореспондентом АН УРСР. У 1987 р. А.М. Самоїленко повернувся до Інституту математики АН УРСР, який очолював наступного року й залишався

незмінним директором відомого математичного центру до останніх днів свого життя – до 4 грудня 2020р. За цей час Анатолій Михайлович зарекомендував себе не тільки як видатний учений, а й як умілий організатор науки.

У 1995 р. А. М. Самойленка обрали академіком НАН України, а в 2006-2020 рр. він обіймав посаду академіка-секретаря Відділення математики НАН України. Анатолій Михайлович Самойленко також був обраний дійсним членом Європейської академії наук (2002), членом-кореспондентом Accademia Peloritana dei Pericolanti (Мессіна, Сицилія, 2006) та іноземним членом АН Республіки Таджикистан (2011).

Наукові результати Анатолія Михайловича Самойленка з актуальних проблем якісної та аналітичної теорії диференціальних рівнянь, нелінійної механіки і теорії нелінійних коливань, математичної фізики, теорії функцій здобули світове визнання серед математичної спільноти. Він по праву вважається основоположником цілого ряду важливих напрямів досліджень у цих галузях. Загальне число його наукових публікацій перевищило 600 і включає в себе близько 40 монографій, понад два десятки підручників і навчальних посібників.

У 1965–1966 рр. А. М. Самойленко запропонував новий ефективний метод для знаходження періодичних розв'язків звичайних диференціальних систем, який у подальшому почали називати “чисельно-аналітичним методом Самойленка”. Надалі цей метод одержав всесвітній розвиток і застосування при розв'язанні широкого класу нелінійних крайових задач у багатьох роботах як самого автора, так і його учнів, а відповідні результати були втілені в численних монографіях.

У середині 1960-х рр. А. М. Самойленко під впливом робіт А. М. Колмогорова, В. І. Арнольда, М. М. Крилова, М. М. Боголюбова, Ю. Мозера, Ю. О. Митропольського проводив інтенсивні дослідження актуальних задач теорії багаточастотних нелінійних коливань і запропонував модернізацію асимптотичного методу послідовних заміन змінних, який у 1969 р. назвали “методом прискореної збіжності”. Разом із Ю. О. Митропольським і одноосібно за допомогою цього методу він отримав низку нових важливих результатів із теорії багаточастотних коливань, а також узагальнив асимптотичний метод усереднення, що знайшло продовження, зокрема, у спільних роботах із Р. І. Петришиним і багатьма іншими учнями. Важли-

ве місце в наукових пошуках А. М. Самойленка посідають питання теорії інваріантних тороїдальних многовидів нелінійних динамічних систем. Поняття функції Гріна задачі про інваріантний тор лінійного розширення динамічної системи на торі, введене А. М. Самойленком у 1969 р., виявилось надзвичайно плідним і дало новий поштовх до розвитку найрізноманітніших аспектів теорії збурень і стійкості тороїдальних многовидів. У математичній літературі це поняття відоме як “функція Гріна – Самойленка”.

Разом із В. Л. Куликом А. М. Самойленком розроблено теорію знаковміних функцій Ляпунова для дослідження обмежених на всій осі розв’язків лінійних неавтономних диференціальних систем і лінійних розширень динамічних систем на торі. Результати з цієї теорії узагальнено разом із Ю. В. Теплінським для випадку злічених систем, разом із О. М. Станжицьким — для стохастичних диференціальних рівнянь. Підсумком циклу робіт стала монографія «Элементы математической теории многочастотных колебаний» (М.: Наука, 1987), перевидана англійською під назвою «Elements of the mathematical theory of multifrequency oscillations» (Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1991).

Доведена в 1968 р. теорема про еквівалентність скінченно диференційовної функції кількох змінних її поліному Тейлора є важливим внеском А. М. Самойленка до теорії особливостей відображень. На основі теорії узагальнених обернених операторів А. М. Самойленко й О. А. Бойчук розвинули теорію нетерових крайових задач для диференціальних рівнянь, рівнянь із запізненням, рівнянь із імпульсною дією й сингулярно збурених систем. У подальшому цю теорію було застосовано для відшукування обмежених на всій дійсній осі розв’язків систем диференціальних і різницевих рівнянь за умови дихотомії на півосях для відповідної однорідної системи. Ще один загально визнаний цикл робіт Анатолія Михайловича пов’язаний з теорією систем з імпульсною дією. Теорія імпульсних систем диференціальних рівнянь є найбільш затребуваним внеском А. М. Самойленка до математичної науки. Особливо активне формування цієї теорії за участю А. М. Самойленка та його учнів відбулося в 1970–1980 рр. У монографії «Диференціальні рівняння з імпульсним впливом», яка була видана в 1987 р. у співавторстві з М. О. Перестюком, вперше у світовій літературі систематично викладено основні результати цієї теорії. Доповнену спільно з

С. І. Трофимчуком новими результатами монографію перевидано в 1995 р. англійською мовою під назвою “Impulsive differential equations”. Ця книга є найбільш цитованою працею А. М. Самойленка.

Учні Анатолія Михайловича захистили 36 докторських і 89 кандидатських дисертацій. Представники створеної ним наукової школи розвивають науку в Україні, Болгарії, Казахстані, Молдові, Німеччині, Польщі, Словаччині, Таджикистані, Туреччині, Угорщині, Чехії, Чилі й багатьох інших країнах. На особливу увагу заслуговує педагогічна діяльність професора А. М. Самойленка в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Національному технічному університеті України «КПІ імені Ігоря Сікорського» та інших закладах вищої освіти. Яскравий лекторський талант Анатолія Михайловича, його вміння чітко, ясно та емоційно викладати матеріал на основі розроблених ним оригінальних лекційних курсів завжди справи незабутнє враження на слухачів. На основі лекційних курсів А. М. Самойленка і його учнів у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Національному технічному університеті України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського” та інших закладах вищої освіти створено серію підручників і збірників задач із теорії диференціальних рівнянь, які мали багато перевидань.

А. М. Самойленко був головним редактором цілої низки наукових журналів: “Український математичний журнал” (переклад англійською “Ukrainian Mathematical Journal” у видавництві Springer), “Нелінійні коливання” й “Український математичний вісник” (переклад англійською обох журналів “Journal of Mathematical Sciences” у видавництві Springer), “Математичний вісник Наукового товариства імені Шевченка”, “Збірник праць Інституту математики НАН України”; був членом редколегій журналів “Доповіді Національної академії наук України”, “Вісник Національної академії наук України”, “У світі математики”, “Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics”, “Miskolc Mathematical Notes”, “Georgian Mathematical Journal”, “International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations”. Анатолій Михайлович активно займався громадською роботою був президентом Всеукраїнської благодійної організації „Фонд сприяння розвитку математичної науки” та керівником благодійного фонду сприяння розвитку талановитих дітей та юнацтва міста Малина, був членом Київського, Українського та Американського математичних товариств.

Багаторічну наукову, педагогічну і громадську діяльність Анатолій Михайловича Самойленка відзначено низкою високих нагород і звань. Він нагороджений орденами Дружби народів (1984), “За заслуги” III ступеня (2003), “князя Ярослава Мудрого” V, VI і III ступенів (2008, 2013, 2018), Почесною Грамотою Президії Верховної Ради України (1987); був лауреатом Державних премій України в галузі науки і техніки (1985, 1996), Державної премії України в галузі освіти (2012), Республіканської премії ім. М. Островського (1968), премій Академії наук України ім. М. М. Крилова (1981), М. М. Боголюбова (1998), М. М. Лаврентьєва (2000), М. В. Остроградського (2004), Ю. О. Митропольського (2010) і М. Г. Крейна (2020); удостоєний звань “Заслужений діяч науки і техніки України” (1998) та “Соросівський професор” (1996).

Видатні наукові здобутки Анатолія Михайловича продовжують розвиватися та втілюватися в нових дослідженнях його великої наукової родини, а ім’я Анатолія Михайловича Самойленка назавжди залишиться в історії світової математичної науки.

*DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305243](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305243) Станжицький О. М.
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри загальної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка*

ДО 85-РІЧЧЯ ПРОФЕСОРА ВІКТОРА ОЛЕКСАНДРОВИЧА ПЛОТНІКОВА

Віктор Олександрович Плотніков, відомий математик, народився 5 січня 1938 року в місті Ленінграді в сім'ї робітників, під час Великої Вітчизняної війни мешкав у блокадному Ленінграді, потім його сім'я переїхала до Одеси. Середню освіту Віктор Олександрович отримав в Одесі. У 1955 р В. О. Плотніков вступив до Одеського державного університету імені І. І. Мечникова.

У той час на фізико-математичному факультеті університету була зібрана група студентів, які факультативно спеціалізувалися в галузі обчислювальної математики, програмуванні на ЕОМ, розв'язуванні задач на аналогових обчислювальних машинах. В 1959-1960 навчальному році В. О. Плотніков пройшов виробничу практику в Інституті прикладної механіки МДУ. Дипломна робота В. О. Плотнікова «Оптимізація траєкторій багатоступеневих ракет» укладалася в тематику досліджень академіка М. М. Моїсеєва, який у 1962 році в Одеському університеті кілька лекцій з теорії оптимального керування. І в 1963-1964 рр. В. О. Плотніков пройшов річне стажування у відділі академіка М. М. Моїсеєва, під час якого Віктор Олександрович відвідував семінари академіка М. М. Моїсеєва в ОЦ АН СРСР, лекції академіка Л. С. Понтрягіна в Інституті математики АН СРСР, лекції на механіко-математичному факультеті МДУ. Це стажування визначило подальші наукові інтереси Віктора Олександровича в області оптимального керування і асимптотичних методів. Уже в 1965 р В. О. Плотніков виступає з доповіддю «Розв'язання однієї задачі оптимального керування методом Беллмана» на конференції з оптимального математичного програмування в Академмістечку Новосибірська. Розробка асимптотичних методів та їх



реалізація на обчислювальній техніці відкрили перспективи дослідження складних систем, що містять істотно різні по масі елементи, розв'язання абсолютно нових задач, наприклад, в динаміці суднових комплексів. Саме тому в наступні роки посилюються взаємні наукові зв'язки Віктора Олександровича з кафедрою теорії механізмів і деталей машин Одеського інституту інженерів морського флоту, яку очолював відомий вчений професор В. І. Небеснов, з'являються нові наукові роботи В. І. Небеснова, В. О. Плотнікова з теорії оптимального керування.

Кандидатська дисертація, яку В. О. Плотніков захистив в Одеському університеті в 1969 році під керівництвом проф. В. І. Небеснова, була присвячена чисельно-асимптотичним методам розв'язання задач оптимального керування.

У 1972 р. В. О. Плотніков стає завідувачем кафедри обчислювальної математики і у складі кафедри створюється секція, що займається розробкою асимптотичних методів в задачах оптимального керування та їх застосуванням до дослідження динаміки і оптимального керування механічними системами. У 1974 р. на основі секції екстремальних задач кафедри обчислювальної математики була організована кафедра оптимального керування (з 1996 р. — кафедра оптимального керування та економічної кібернетики). Віктор Олександрович завідував цією кафедрою з моменту її заснування і до останніх хвилин свого життя.

У 1980 р. В. О. Плотніков захистив у Ленінградському університеті докторську дисертацію на тему «Асимптотичні методи в задачах оптимального керування» (науковий консультант проф. В. І. Небеснов, опоненти академік М. М. Моїсєєв, проф. А. А. Первозванський, проф. В. С. Новоселов). З 1982 р. В. О. Плотніков — професор кафедри оптимального керування. У 1987-1988 навч. році Віктор Олександрович — декан механіко-математичного факультету.

З 1986 р. до 2006 р. В. О. Плотніков очолював спеціалізовану вчену раду К 41.051.05 по захисту кандидатських дисертацій з математики при Одеському університеті. Завдяки саме його зусиллям тільки в цій спецраді була відкрита спеціальність 01.01.09 — варіаційне числення та теорія оптимального керування.

Математичний таланти ученого поєднувався з педагогічною діяльністю Віктора Олександровича. Він блискуче читав лекції, багато сил віддав

роботі зі своїми учнями. Віктор Олександрович підготував 21 кандидата наук з України, Алжиру, Болгарії, В'єтнаму, Йорданії. Учні Віктора Олександровича продовжують наукові дослідження в галузі асимптотичних методів в задачах оптимального керування та застосовують його до широкого класу нових задач.

В. О. Плотніков опублікував понад 250 наукових і науково-методичних робіт, в тому числі 6 монографій.

В. О. Плотніков заснував наукову школу з теорії асимптотичних методів дослідження задач оптимального керування та диференціальних рівнянь з багатозначною і розривною правою частиною. Результати досліджень наукової школи В. О. Плотнікова широко відомі в Україні та світі.

Віктором Олександровичем і його учнями було отримано обґрунтування теорем М. М. Боголюбова і А. М. Тихонова для диференціальних включень, обґрунтовано побудову асимптотичного розв'язку задачі Коші і крайової задачі для систем диференціальних рівнянь, що містять сингулярні збурення, запізнення, імпульсні дії на скінченному і нескінченному проміжках, доведені теореми існування та єдиності розв'язків квазідиференціальних рівнянь в локально-компактних і повних метричних просторах, обґрунтовано метод усереднення для квазідиференціальних рівнянь в метричних просторах, розроблені алгоритми чисельних і чисельно-асимптотичних методів розв'язання задач оптимального керування. Розробка цих питань має значення не тільки як узагальнення теорії диференціальних рівнянь, а й завдяки численным застосуванням до дослідження задач оптимального керування, теорії ігор, економіки. Все це поклало початок математичним дослідженням асимптотичних методів в теорії диференціальних включень в Україні і закордоном.

Наукові ідеї та напрямки, започатковані В.О. Плотніковим розвиваються і поглиблюються в роботах його учнів та в роботах українських і зарубіжних науковців.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305246](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305246) Кічмаренко О. Д.

*доктор фізико-математичних наук, доцент,
завідувач кафедри оптимального керування і
економічної кібернетики факультету мате-
матики, фізики та інформаційних техноло-
гій Одеського національного університету імені
І.І.Мечникова*

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

В. М. Євтухов, С. В. Голубєв

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОЧЛЕННИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЕКСПОНЕНЦІЙНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Для двочленого неавтономного звичайного диференціального рівняння четвертого порядку з експоненціальною нелінійністю виду $y^{(4)} = \alpha_0 p_0(t)[1 + r(t)]e^{\sigma y}$ де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma \neq 0$, функція $p_0(t)$ є неперервною або неперервно диференційованою і відмінною від нуля у деякому лівому околі ω ($\omega \leq +\infty$), $r(t)$ неперервна функція така, що $\lim_{t \uparrow \omega} r(t) = 0$, досліджується асимптотична поведінка при $t \uparrow \omega$ одного класу $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків. Для цього рівняння в роботі [1] були отримані необхідні та достатні умови існування таких розв'язків в випадку коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$. При цьому доведення достатніх умов існування було здійснено при деяких додаткових умовах які є достатньо жорсткими. Мета даної роботи це спроба покращити результати отримані в роботі [1] для достатніх умов існування. Зроблена спроба поширення результатів цієї роботи на умови які є менш жорсткими. На відміну від [1] при доведенні основного результату в цій роботі передбачається, що існує скінченна або нескінченна границя $\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t)q'(t)$.

Досліджуване рівняння зводиться до системи рівнянь, для якої потрібно визначити існування зникаючих у нескінченності розв'язків. Цей факт встановлюється з використанням відомих результатів з роботи [2]. Разом з цим отримана відповідь на питання про кількість розв'язків рівняння зі знайденими асимптотичними зображеннями.

MSC: 34E05.

Ключові слова: неавтономні диференціальні рівняння, експоненціальна нелінійність, $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язки, асимптотична поведінка $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305248](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305248).

Вступ

Розглянемо двочленне неавтономне диференціальне рівняння четвертого порядку виду

$$y^{(4)} = \alpha_0 p_0(t)[1 + r(t)]e^{\sigma y} \quad (\sigma \neq 0), \quad (1)$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p_0 : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ – неперервна або неперервно диференційована функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $r : [a, \omega[\rightarrow]-1, +\infty[$ – неперервна

функція така, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} r(t) = 0. \quad (2)$$

Неважко помітити, що у цьому рівнянні функція $e^{\sigma y}$ ($\sigma \neq 0$) є швидко змінною функцією при $y \rightarrow Y_0 = \pm\infty$ (по Карамата). При цьому в якості околів Δ_{Y_0} точок $Y_0 = \pm\infty$ можемо обирати проміжки

$$\Delta_{Y_0} = \begin{cases}]0, +\infty[, & \text{якщо } Y_0 = +\infty, \\]-\infty, 0[, & \text{якщо } Y_0 = -\infty. \end{cases}$$

Означення 1. Розв'язок y дифференціального рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє наступні умови

$$y(t) \in \Delta_{Y_0} \quad \text{при } t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0 = \pm\infty,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm\infty, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(3)}(t)]^2}{y^{(2)}(t)y^{(4)}(t)} = \lambda_0.$$

З цього означення, зокрема, випливає, що число

$$\nu_0 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } Y_0 = +\infty, \\ -1, & \text{якщо } Y_0 = -\infty. \end{cases}$$

визначає знаки будь-якого $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язку і його першої похідної в будь-якому лівому околі ω . Для таких $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків в роботі [1] були доведені наступні дві теореми про необхідні та достатні умови їх існування у випадку коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$. Для їхнього формулювання введемо наступні допоміжні позначення.

Допоміжні позначення

$$K(\lambda_0) = \frac{(\lambda_0 - 1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)}, \quad \pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty, \end{cases}$$

$$J_0(t) = \int_{A_0}^t \pi_\omega^3(\tau) p_0(\tau) d\tau, \quad J_1(t) = \int_{A_1}^t \frac{p_0(\tau)}{J_0(\tau)} d\tau,$$

$$J_i(t) = \int_{A_i}^t J_{i-1}(\tau) d\tau \quad (i = 2, 3), \quad Y(t) = -\frac{1}{\sigma} \ln(\alpha_0(-\frac{1}{\sigma})K(\lambda_0)J_0(t)),$$

$$q(t) = \frac{Y'(t)}{\alpha_0 J_3(t)}.$$

де межа інтегрування

$$A_0 = \begin{cases} \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega \pi_\omega^3(\tau)p_0(\tau) d\tau < +\infty, \\ a, & \text{якщо } \int_a^\omega \pi_\omega^3(\tau)p_0(\tau) d\tau = +\infty, \end{cases}$$

$$A_1 = \begin{cases} a_0, & \text{якщо } \int_{a_0}^\omega \frac{p_0(\tau)}{|J_0(\tau)|} d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_{a_0}^\omega \frac{p_0(\tau)}{|J_0(\tau)|} d\tau < +\infty, \end{cases} \quad a_0 \in [a, \omega],$$

$$A_i = \begin{cases} a_0, & \text{якщо } \int_{a_0}^\omega |J_{i-1}(\tau)| d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_{a_0}^\omega |J_{i-1}(\tau)| d\tau < +\infty \end{cases} \quad (i = 2, 3),$$

Теорема 1 ([1]). Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$. Тоді для існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків необхідно, щоб виконувалися нерівності

$$\alpha_0 \nu_0 \lambda_0 (2\lambda_0 - 1)(3\lambda_0 - 2) > 0, \quad \alpha_0 \nu_1 K(\lambda_0) \pi_\omega(t) > 0,$$

$$\alpha_0 \sigma K(\lambda_0) J_0(t) < 0 \quad \text{при } t \in]a, \omega[\quad (3)$$

і наступні умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_0'(t)}{J_0(t)} = \pm\infty, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_1'(t)}{J_1(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} q(t) = 1 \quad (4)$$

причому кожний такий розв'язок допускає при $t \uparrow \omega$ наступні асимптотичні зображення

$$y(t) = -\frac{1}{\sigma} \ln(\alpha_0(-\frac{1}{\sigma})K(\lambda_0)J_0(t)) + o(1),$$

$$y^{(k)}(t) = \alpha_0 J_{4-k}(t)[1 + o(1)], \quad (k = 1, 2, 3) \quad (5)$$

Теорема 2 ([1]). *Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$, функція p_0 є неперервною і виконуються умови (3)-(4). Нехай крім того*

$$\lim_{t \uparrow \omega} (1 - q(t))|Y(t)|^{\frac{3}{4}} = 0 \quad \text{и виконується нерівність} \quad \alpha_0 \sigma > 0 \quad (6)$$

Тоді диференціальне рівняння (1) має двопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ розв'язків, які задовольняють при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\begin{aligned} y(t) &= Y(t) + o(1), \quad y'(t) = \alpha_0 J_3(t) \left[1 + \frac{o(1)}{|Y(t)|^{\frac{3}{4}}} \right], \\ y''(t) &= \alpha_0 J_2(t) \left[1 + \frac{o(1)}{|Y(t)|^{\frac{1}{2}}} \right], \quad y'''(t) = \alpha_0 J_1(t) \left[1 + \frac{o(1)}{|Y(t)|^{\frac{1}{4}}} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

У цій роботі здійснюється спроба зняти першу умову (6) яка є досить жорсткою та замінити на менш жорстку умову.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Для диференціального рівняння (1) має місце наступне твердження

Теорема 3. *Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$, функція p_0 неперервно диференційована і виконуються умови (3)-(4) та друга з умов (6). Нехай, крім того, існує скінченна або нескінченна границя $\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t)q'(t)$. Тоді диференціальне рівняння (1) має двопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ розв'язків, які задовольняють при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення*

$$\begin{aligned} y(t) &= Y(t) + o(1), \quad y'(t) = \alpha_0 J_3(t) \left[q(t) + \frac{o(1)}{|Y(t)|^{\frac{3}{4}}} \right], \\ y''(t) &= \alpha_0 J_2(t) \left[1 + \frac{o(1)}{|Y(t)|^{\frac{1}{2}}} \right], \quad y'''(t) = \alpha_0 J_1(t) \left[1 + \frac{o(1)}{|Y(t)|^{\frac{1}{4}}} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Для доведення цієї теореми знадобиться наступне допоміжне твердження

Лема 1. *Нехай для функції*

$$\pi_\omega(t)q'(t) \quad (9)$$

існує скінченна або рівна $\pm\infty$ границя. Тоді цією границею для функції (9) може бути тільки 0. Тобто

$$\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t)q'(t) = 0. \quad (10)$$

Доведення. Припустимо протилежне. Дійсно, якби ця границя була відмінна від нуля, то мала б місто рівність

$$q'(t) = \frac{\xi(t)}{\pi_\omega(t)} \quad (11)$$

де функція ξ неперервна на деякому проміжку $[t_0, \omega[\subset]a, \omega[$ і така, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} \xi(t) = \begin{cases} \text{або } const \neq 0, \\ \text{або } \pm \infty, \end{cases}$$

Крім того

$$\int_{t_0}^t \frac{d\tau}{\pi_\omega(\tau)} = \ln \left| \frac{\pi_\omega(t)}{\pi_\omega(t_0)} \right| \rightarrow \pm \infty, \quad \text{при } t \uparrow \omega$$

то після інтегрування (11) на проміжку від t_0 до t приходимо до висновку, що

$$q(t) \rightarrow \pm \infty \quad \text{при } t \uparrow \omega$$

Однак, це суперечить третій умові (4). Отже, у разі існування скінченної або такої, що дорівнює $\pm \infty$ границі

$$\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t) q'(t) = 0.$$

Лемму доведено.

Доведення теореми 3.

Покажемо, що рівняння (1) за умов (3), другої з (6) та (10) має хоча б один $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язок, який задовольняє при $t \uparrow \omega$ асимптотичним зображенням (8) і з'ясуємо питання про кількість таких розв'язків. Для цього, спочатку, рівняння (1) за допомогою замін

$$y(t) = Y(t) + y_1(t), \quad y^{(k)}(t) = \alpha_0 J_{4-k}(t) [1 + y_{k+1}(t)], \quad (k = 1, 2, 3) \quad (12)$$

(таких же самих як і при доведенні теореми 2)

зведемо до системи диференціальних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = \alpha_0 J_3(t) [1 - q(t) + y_2], \\ y_2' = \frac{J_3'(t)}{J_3(t)} (y_3 - y_2), \\ y_3' = \frac{J_2'(t)}{J_2(t)} (y_4 - y_3), \\ y_4' = \frac{J_1'(t)}{J_1(t)} \left[(1 + r(t)) \frac{e^{\sigma(Y(t)+y_1)}}{e^{\sigma Y(t)}} - 1 - y_4 \right], \end{array} \right. \quad (13)$$

Уточнимо вигляд четвертого рівняння системи. Розкладаючи $\frac{e^{\sigma(Y(t)+y_1)}}{e^{\sigma Y(t)}}$ при фіксованому $t \in [t_1, \omega[$ за формулою Тейлора за змінною y_1 в околі нуля із залишковим членом у формі Лагранжа, отримаємо

$$\frac{e^{\sigma(Y(t)+y_1)}}{e^{\sigma Y(t)}} = 1 + y_1 + \frac{1}{2!} \frac{e^{\sigma(Y(t)+\xi_1)}}{e^{\sigma Y(t)}} y_1^2, \quad \text{де } |\xi_1| < |y_1|$$

Тому останнє рівняння системи запишеться у вигляді

$$y_4' = \frac{J_1'(t)}{J_1(t)} \left[(1 + r(t)) \left(1 + y_1 + \frac{1}{2} e^{\xi_1} \right) y_1^2 - 1 - y_4 \right]$$

Таким чином отримаємо систему диференціальних рівнянь виду

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = \alpha_0 J_3(t) [1 - q(t) + y_2], \\ y_2' = \frac{J_3'(t)}{J_3(t)} (y_3 - y_2), \\ y_3' = \frac{J_2'(t)}{J_2(t)} (y_4 - y_3), \\ y_4' = \frac{J_1'(t)}{J_1(t)} [r(t) + (1 + r(t)) y_1 - y_4 + R(t, y_1)], \end{array} \right. \quad (14)$$

де функція

$$R(t, y_1) \quad \text{при деяких} \quad 0 < \delta < \frac{1}{2} \quad \text{і} \quad t_1 \in [a, \omega[\quad \text{задовольняє оцінці}$$

$$|R(t, y_1)| \leq y_1^2 \quad \text{при} \quad |y_1| \leq \delta, \quad t \in [t_1, \omega[$$

Далі отриману систему будемо розглядати на множині $\Omega = [t_1, \omega[\times \mathbb{R}_\delta^4$ де

$$\mathbb{R}_\delta^4 = \{ (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 : |y_i| \leq \delta, (i = 1, \dots, 4) \}.$$

На відміну від теореми 2, застосуємо до системи (14) нове допоміжне перетворення де

$$y_1(t) = z_1(t), \quad y_2(t) = z_2(t) + q(t) - 1, \quad y_3(t) = z_3(t), \quad y_4(t) = z_4(t) \quad (15)$$

сенс якого полягає у виключенні доданка $(1 - q(t))$ з першого рівняння системи.

Крім того введемо допоміжні функції $\xi_i(t)$ де $i = 1, \dots, 4$,

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \frac{\alpha_0 \pi_\omega(t) J_3(t)}{Y(t)}, & \xi_2(t) &= \frac{\pi_\omega(t) J'_3(t)}{J_3(t)}, \\ \xi_3(t) &= \frac{\pi_\omega(t) J'_2(t)}{J_2(t)}, & \xi_4(t) &= \frac{\pi_\omega(t) J'_1(t)}{J_1(t)}. \end{aligned}$$

і перепишемо систему рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} z'_1 = \frac{Y(t)}{\pi_\omega(t)} \{\xi_1(t) z_2\}, \\ z'_2 = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \{\xi_2(t) (z_3 - z_2) - \pi_\omega(t) q'(t)\}, \\ z'_3 = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \{\xi_3(t) (z_4 - z_3)\}, \\ z'_4 = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \{\xi_4(t) [r(t) + (1 + r(t)) z_1 - z_4 + R(t, z_1)]\}, \end{cases} \quad (16)$$

За умовою (4) теореми 1 функції $\xi_i(t)$ при $i = 1, \dots, 4$ мають наступні границі

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \omega} \xi_1(t) &= \frac{3\lambda_0 - 2}{\lambda_0 - 1}, & \lim_{t \uparrow \omega} \xi_2(t) &= \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1}, \\ \lim_{t \uparrow \omega} \xi_3(t) &= \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, & \lim_{t \uparrow \omega} \xi_4(t) &= \frac{1}{\lambda_0 - 1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Щоб асимптотично при $t \uparrow \omega$ вирівняти множники у правій частині рівнянь системи (16), застосуємо до неї наступне перетворення

$$\begin{aligned} z_1(t) &= v_1(t), & z_2(t) &= |Y(t)|^{-\frac{3}{4}} v_2(t), \\ z_3(t) &= |Y(t)|^{-\frac{1}{2}} v_3(t), & z_4(t) &= |Y(t)|^{-\frac{1}{4}} v_4(t). \end{aligned} \quad (18)$$

В результаті отримуємо систему квазілінійних диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} v_1' = h(t)[f_1(t) + c_{11}(t)v_1 + c_{12}(t)v_2 + c_{13}(t)v_3 + c_{14}(t)v_4], \\ v_2' = h(t)[f_2(t) + c_{21}(t)v_1 + c_{22}(t)v_2 + c_{23}(t)v_3 + c_{24}(t)v_4], \\ v_3' = h(t)[f_3(t) + c_{31}(t)v_1 + c_{32}(t)v_2 + c_{33}(t)v_3 + c_{34}(t)v_4], \\ v_4' = h(t)[f_4(t) + c_{41}(t)v_1 + c_{42}(t)v_2 + c_{43}(t)v_3 + c_{44}(t)v_4 + V(t, v_1)], \end{cases} \quad (19)$$

в якій функція $h(t)$ має вигляд

$$h(t) = \frac{|Y(t)|^{\frac{1}{4}}}{\pi_\omega(t)},$$

функції $f_i(t)$ де $i = 1, \dots, 4$ мають вигляд

$$f_1(t) = 0, \quad f_2(t) = \pi_\omega q(t)' |Y(t)|^{-\frac{1}{4}} \text{sign } Y(t), \quad f_3(t) = 0, \quad f_4(t) = \xi_4(t)r(t). \quad (20)$$

Крім того коефіцієнти системи $c_{ik}(t)$ ($i, k = 1, \dots, 4$) (19) дорівнюють

$$\begin{aligned} c_{11}(t) &= 0, & c_{12}(t) &= \xi_1(t) \text{sign } Y(t), & c_{13}(t) &= 0, & c_{14}(t) &= 0 \\ c_{21}(t) &= 0, & c_{22}(t) &= 0, & c_{23}(t) &= \xi_2(t), & c_{24}(t) &= 0 \\ c_{31}(t) &= 0, & c_{32}(t) &= 0, & c_{33}(t) &= 0, & c_{34}(t) &= \xi_3(t) \\ c_{41}(t) &= \xi_4(t)(1 + r(t)), & c_{42}(t) &= 0, & c_{43}(t) &= 0, & c_{44}(t) &= 0. \end{aligned}$$

Функція $h(t)$ задовольняє умови

$$h(t) \neq 0, \quad \text{та при } t_0 \leq t < \omega \quad \int_{t_0}^{\omega} |h(t)| dt = +\infty. \quad (21)$$

Функції $f_i(t)$ де $i = 1, \dots, 4$ згідно з (2), (10) та четвертої умови (17) задовольняють

$$\lim_{t \uparrow \omega} f_i(t) = 0 \quad \text{при } (i = 1, \dots, 4). \quad (22)$$

За рахунок умов на функції $\xi_i(t)$ (17), для $c_{ik}(t)$ мають місце наступні граничні умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} c_{ik}(t) = c_{ik}^0 \quad \text{при } (i, k = 1, \dots, 4). \quad (23)$$

Тому

$$\begin{aligned}
c_{11}^0 &= 0, & c_{12}^0 &= \frac{3\lambda_0 - 2}{\lambda_0 - 1} \left(\frac{\nu_0}{\text{sign } \sigma} \right) \quad \text{де} \quad \frac{\nu_0}{\text{sign } \sigma} = \text{sign } Y(t), \\
c_{13}^0 &= 0, & c_{14}^0 &= 0, & c_{21}^0 &= 0, & c_{22}^0 &= 0, & c_{23}^0 &= \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1}, & c_{24}^0 &= 0, \\
c_{31}^0 &= 0, & c_{32}^0 &= 0, & c_{33}^0 &= 0, & c_{34}(t) &= \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \\
c_{41}^0(t) &= \frac{1}{\lambda_0 - 1}, & c_{42}^0 &= 0, & c_{43}^0 &= 0, & c_{44}^0 &= 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Крім того функція $V(t, v_1)$ з (19), яка має вигляд

$$V(t, v_1) = \xi_4(t)R(t, v_1),$$

та при деяких $N > 0$ та при $0 < \delta < \frac{1}{2}$ і $t_1 \in [a, \omega[$

задовольняє оцінку

$$|V(t, v_1)| \leq Nv_1^2 \quad \text{при} \quad |v_1| \leq \delta, \quad t \in [t_1, \omega[.$$

Крім того з урахуванням оцінки на $R(t, v_1)$ маємо

$$\lim_{v_1 \rightarrow 0} \frac{V(t, v_1)}{|v_1|} = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad t \in [t_0, \omega[. \tag{25}$$

Гранична матриця C , елементами якої є c_{ik}^0 ($i, k = 1, \dots, 4$) має наступний вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3\lambda_0 - 2}{\lambda_0 - 1} \left(\frac{\nu_0}{\text{sign } \sigma} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \\ \frac{1}{\lambda_0 - 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

З урахуванням знакових умов (3), характеристичне рівняння граничної матриці C має вигляд

$$\lambda^4 + \frac{\alpha_0}{\sigma} \frac{|3\lambda_0 - 2||2\lambda_0 - 1||\lambda_0|}{(\lambda_0 - 1)^4} = 0 \tag{27}$$

Це характеристичне рівняння має дві пари комплексно-спряжених коренів з дійсними частинами, відмінними від нуля. Тоді для системи рівнянь (19)

виконуються всі умови з теореми 2.2 роботи [3]. Згідно з цією теоремою, дана система має двопараметричну сім'ю розв'язків $(v_1, v_2, v_3, v_4): [t_2, \omega[\rightarrow \mathbb{R}_\delta^4$ ($t_2 \in [t_0, \omega[$), які прямують до 0 при $t \uparrow \omega$. Кожному такому розв'язку, з урахуванням заміни (12), (15), (18), відповідає розв'язок $y : [t_2, \omega[\rightarrow \mathbb{R}$ диференціального рівняння (1), для якого асимптотичні зображення (8) мають місце при $t \uparrow \omega$. Також легко перевірити, враховуючи ці асимптотичні зображення та форму рівняння (1), що побудовані нами розв'язки є $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язками які задовольняють умовам означення 1. Теорема повністю доведена.

Отримані в даній роботі результати доповнюють відомі результати робіт Євтухова В.М., Дрік Н.Г., Шинкаренко В.М., Харькова В.М.

Висновки

Отже, для двочленого неавтономного звичайного диференціального рівняння четвертого порядку з експоненціальною нелінійністю виду $y^{(4)} = \alpha_0 p_0(t)[1 + r(t)]e^{\sigma y}$ де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma \neq 0$, функція $p_0(t)$ є неперервною або неперервно диференційованою і відмінною від нуля у деякому лівому околі ω ($\omega \leq +\infty$), $r(t)$ неперервна функція така, що $\lim_{t \uparrow \omega} r(t) = 0$, досліджена асимптотична поведінка при $t \uparrow \omega$ одного класу $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків.

Досліджуване рівняння зведене до системи рівнянь, для якої потрібно визначити існування зникаючих у нескінченності розв'язків. Разом з цим отримана відповідь на питання про кількість розв'язків рівняння зі знайденими асимптотичними зображеннями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Євтухов В. М., Голубев С. В.** Асимптотична поведінка розв'язків диференціальних рівнянь з експоненціальною нелінійністю / В. М. Євтухов, С. В. Голубев // Дослідження в математиці і механіці. — 2022. — Т. 27, №1–2(38–39). — С. 25–39.
2. **Євтухов В. М., Самойленко А. М.** Умови існування розв'язків, що зникають в особливій точці, у дійсні неавтономних систем квазілінійних диференціальних рівнянь / В. М. Євтухов, А. М. Самойленко // Укр. Мат. Ж. — 2010. — Т. 62, №1. — С. 52–80.
3. **Євтухов В. М., Самойленко А. М.** Асимптотичні представлення розв'язків неавтономних звичайних диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями / В. М. Євтухов, А. М. Самойленко // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 5. — С. 628–650.

Evtukhov V. M., Golubev S. V.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF TWO-PART DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH EXPONENTIAL NONLINEARITY

Summary

For a two-term nonautonomous ordinary differential equation of the fourth order with an exponential nonlinearity of the form $y^{(4)} = \alpha_0 p_0(t)[1 + r(t)]e^{\sigma y}$ where $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma \neq 0$, the function $p_0(t)$ is continuous or continuously differentiable and nonzero in some left neighbourhood of ω ($\omega \leq +\infty$), $r(t)$ is a continuous function such that $\lim_{t \uparrow \omega} r(t) = 0$, the asymptotic behaviour at $t \uparrow \omega$ of one class of $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -solutions is studied. For this equation, in [1], the necessary and sufficient conditions for the existence of such solutions were obtained in the case when $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$. The proof of sufficient conditions for existence was carried out under some additional conditions that are quite strict. The aim of this paper is to improve the results obtained in [1] for sufficient conditions of existence. An attempt is made to extend the results of this paper to conditions that are less stringent. In contrast to [1], the proof of the main result in this paper assumes that there is a finite or infinite limit $\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t)q'(t)$. The equation under study is reduced to a system of equations for which it is necessary to determine the existence of solutions vanishing at infinity. This fact is established using the known results of [2]. The question of the number of solutions of the equation with the found asymptotic images is also solved.

Key words: non-autonomous differential equations, exponential nonlinearity, $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ - solutions, asymptotic behavior of $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ - solutions.

REFERENCES

1. Evtukhov, V. M., Golubev, S. V. (2022). Asimptotychna povedinka rozv'yazkiv odnogo klasu neliniynykh dyferentsialnykh rivnyan chetvertogo poryadku [Asymptotic behaviour of solutions of one class of the fourth-order nonlinear differential equations.] *Research in Mathematics and Mechanics*, Vol. 27, Iss. 1–2(38–39), P. 25–39.
2. Evtukhov V.M., Samojlenko A.M. (2010). Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point. *Ukr.Mat. J*, Vol. 62, №1, P. 52–80.

3. Evtukhov V.M., Samoilenko A.M. (2011). Asymptotic representations of solutions of nonautonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities *Differential' nye Uravnenja*, Vol. 47, № 5, P. 628–650.

УДК 539.3

І. В. Зіновєєв, Н. С. Дзундза

Запорізький національний університет

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСНОВНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ШАРУ

Розглядаються перша, друга основні та змішана крайові задачі лінійної теорії пружності для однорідного ортотропного шару постійної товщини. На шар діє поверхнєве навантаження. Внутрішні зусилля відсутні. Потрібно визначити напруження та переміщення в довільній точці шару, за умови плоскої деформації. Побудовано розв'язки поставлених задач. Розв'язок задачі шукається у просторі трансформант одновимірного інтегрального перетворення Фур'є, де встановлюється співвідношення між трансформантами функції напружень та трансформантами переміщень і напружень. Шукані величини виражаються через чотири допоміжні функції, які пов'язані з трансформантами напружень і переміщень на верхній межі. Для отримання істинних значень напружень і переміщень в точках ортотропного шару до знайдених трансформант напружень і переміщень застосовується обернене інтегральне перетворення Фур'є. Отримано числові розв'язки для конкретних випадків та проведено аналіз результатів.

MSC: 74A10, 74B05, 74E10.

Ключові слова: ортотропний шар, плоска деформація, напружено деформований стан, функція напружень, інтегральне перетворення Фур'є.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305252](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305252).

Вступ

Досить часто в інженерній практиці виникають задачі в яких необхідно визначити напружено-деформований стан певного пружного тіла, його частини, елементів конструкцій. Для розв'язання таких задач застосовуються аналітичні, чисельні та чисельно-аналітичні методи. Зазвичай аналітичні розв'язки задач про знаходження НДС пластин отримуються за допомогою наближених методів, які базуються на зведенні початкової тривимірної задачі до більш простої двовимірної задачі.

Одним з таких методів є метод пом'якшення нев'язок розглянутий в роботах Кільчинського О. О. і Масалітіної Є. В. [1; 2], що застосовувався для розв'язання задачі про НДС ортотропної пластини під дією поверхневих навантажень. Застосування чисельно-аналітичного методу для дослідження НДС товстостінних прямокутних ізотропних пластин наведено в роботі

Григоренка О. Я. [3]. За допомогою методу сплайн-колокації вихідна тривимірною крайова задача зводиться до систем звичайних диференціальних рівнянь, яка розв'язується методом дискретної ортогоналізації.

Також варто зазначити ефективність застосування методу граничних елементів для розрахунку ортотропних пластин. Загалом метод граничних елементів суттєво зменшив обчислювальні зусилля за рахунок зменшення розмірності задачі, оскільки дискретизувати потрібно лише границю. В роботах Jianguo W., Maokuang H. [4] і Dos Reis [5] побудовано фундаментальні розв'язки ортотропних товстих пластин з урахуванням деформації поперечного зсуву і проаналізовано за допомогою методу граничних елементів.

Необхідно також відзначити застосування методу інтегральних перетворень Фур'є описаних в роботі Антоненко Н. М., Величка І. Г. [6], для визначення контактних напружень ізотропної смуги на абсолютно жорсткій півплощині.

У даній роботі узагальнено підхід розроблений для ізотропних плоско паралельних шарів [6; 7] на випадок ортотропного матеріалу в межах загальної схеми, що представлена в роботі [8].

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Постановка завдання.

Метою роботи є побудова розв'язків першої основної, другої основної та змішаної крайових задач лінійної теорії пружності про визначення напружено деформованого стану ортотропного шару в умовах плоскої деформації.

Відомими є навантаження на поверхнях шару (перша основна крайова задача) або переміщення точок поверхонь шару (друга основна крайова задача) або на одній поверхні відомі напруження, а на другій переміщення (змішана задача).

Під шаром будемо розуміти однорідне пружне ортотропне тіло постійної товщини h обмежене паралельними площинами. Навантаження шару є таким, що деформація є плоскою. Потрібно визначити напруження та переміщення в довільній точці шару, за умови, плоскої деформації.

Віднесемо шар до прямокутної декартової системи координат (рис. 1).

Тоді шар займає область $G(x, y) : \{-\infty < x < +\infty, -h \leq y \leq 0\}$, що

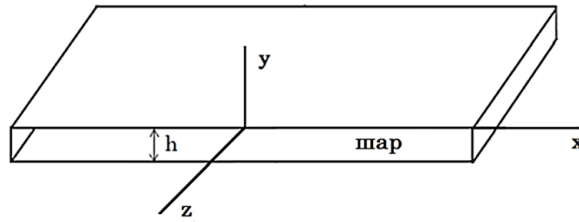


Рис. 1. Постановка задачі

обмежена площинами $y = 0$ і $y = -h$.

Матеріал шару характеризується пружними константами ν_{xz} , ν_{xy} , ν_{yz} , E_x , E_y .

Розглянемо задачу в трьох постановках, що відповідають основним крайовим (межовим) задачам механіки деформованого твердого тіла.

Перша основна крайова задача для ортотропного шару.

1. на межах $y = 0$ та $y = -h$ задані навантаження:

$$\begin{aligned}\sigma_y(x, 0) &= f_1(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = f_2(x), \\ \sigma_y(x, -h) &= f_3(x), \quad \tau_{xy}(x, -h) = f_4(x).\end{aligned}\quad (1)$$

2. на нескінченності напруження прямують до нуля:

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \sigma_y(x, y) = 0, \quad \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \tau_{xy}(x, y) = 0. \quad (2)$$

Друга основна крайова задача для ортотропного шару.

На межах $y = 0$ та $y = -h$ задані переміщення:

$$u_y(x, 0) = g_1(x), \quad u_x(x, 0) = g_2(x), \quad u_y(x, -h) = g_3(x), \quad u_x(x, -h) = g_4(x). \quad (3)$$

Змішана крайова задача для ортотропного шару.

1. на верхній межі $y = 0$ задані навантаження:

$$\sigma_y(x, 0) = p_1(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = p_2(x). \quad (4)$$

2. на нижній межі $y = -h$ задані переміщення:

$$u_y(x, -h) = 0, \quad u_x(x, -h) = 0. \quad (5)$$

3. на нескінченності напруження прямують до нуля.

Для розв'язання поставлених задач визначаємо функцію напружень $\varphi(x, y)$ як розв'язок бігармонічного рівняння плоскої теорії пружності для ортотропного матеріалу [9].

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \nu_{yz}\nu_{zy}}{E_y} \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \left(\frac{1 + \sqrt{\nu_{xy}\nu_{yx}}}{\sqrt{E_x E_y}} - \frac{\nu_{xy} + \nu_{xz}\nu_{zy}}{E_y} \right) \times \\ & \times \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1 - \nu_{xz}\nu_{zx}}{E_x} \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{yx}, \nu_{yz}, \nu_{zx}, \nu_{zy}, E_x, E_y$ – пружні константи матеріалу шару.

Функція напружень $\varphi = \varphi(x, y)$ пов'язана з напруженнями та переміщеннями залежностями:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} &= c_{11}\sigma_x - c_{12}\sigma_y, \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = c_{33}\tau_{xy}, \end{aligned} \quad (7)$$

де $c_{11} = \frac{1 - \nu_{xz}\nu_{zx}}{E_x}$, $c_{12} = \frac{\nu_{xy} + \nu_{xz}\nu_{zy}}{E_y}$, $c_{33} = \frac{2(1 + \sqrt{\nu_{xy}\nu_{yx}})}{\sqrt{E_x E_y}}$ – константи пружності в законі Гука для ортотропного матеріалу [9].

Вважаємо, що у нескінченно віддалених точках при $x \rightarrow \pm\infty$ напруження та функція напружень прямують до нуля (2) та задовольняють умовам існування одновимірного інтегрального перетворення Фур'є за змінною x (при кожному значенні y). Це дозволяє отримати розв'язок задачі в просторі трансформант Фур'є [7].

2. Розв'язання задач.

Розв'язання задачі будемо проводити за схемою, що запропонована в [8].

1. Бігармонічне рівняння (6) та крайові умови (для першої основної задачі умови (1), (2), для другої задачі умови (3), для змішаної – (4), (5)) піддаються одновимірному інтегральному перетворенню Фур'є [10]:

$$\bar{F}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) \cdot e^{i\xi x} dx, \quad F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\xi, y) \cdot e^{-i\xi x} d\xi,$$

де $\bar{F}(\xi, y)$ - трансформанта Фур'є функції $F(x, y)$, ξ - параметр перетворення.

Внаслідок цього переходимо до задачі в просторі трансформант Фур'є. Рівняння (6) в частинних похідних в просторі трансформант перетворюється на звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку.

$$A_1 \frac{\partial^4 \bar{\varphi}}{\partial y^4} - 2A_3 \xi^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} + A_2 \xi^4 \bar{\varphi} = 0, \quad (8)$$

де $A_1 = \frac{1-\nu_{yz}\nu_{zy}}{E_y}$, $A_2 = \frac{1-\nu_{xz}\nu_{zx}}{E_x}$, $A_3 = \frac{1+\sqrt{\nu_{xy}\nu_{yx}}}{\sqrt{E_x E_y}} - \frac{\nu_{xy}+\nu_{xz}\nu_{zy}}{E_y}$ - константи пружності.

Крайові умови (1) в просторі трансформант приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_y(\xi, 0) &= \bar{f}_1(\xi), \bar{\tau}_{xy}(\xi, 0) = \bar{f}_2(\xi), \\ \bar{\sigma}_y(\xi, -h) &= \bar{f}_3(\xi), \bar{\tau}_{xy}(\xi, -h) = \bar{f}_4(\xi). \end{aligned} \quad (9)$$

2. Знаходиться розв'язок диференціального рівняння (8) - трансформанта функції напружень та трансформанти напружень й переміщень [7] відповідно до формул:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x(\xi, y) &= \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2}, \quad \bar{\sigma}_y(\xi, y) = -\xi^2 \bar{\varphi}, \quad \bar{\tau}_{xy}(\xi, y) = i\xi \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}, \\ \bar{u}_x(\xi, y) &= \frac{i}{\xi} (c_{11} \bar{\sigma}_x(\xi, y) - c_{12} \bar{\sigma}_y(\xi, y)), \\ \bar{u}_y(\xi, y) &= \frac{i}{\xi} (c_{33} \bar{\tau}_{xy}(\xi, y) - \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}). \end{aligned} \quad (10)$$

3. Із умов на верхній межі шару знаходяться дві з чотирьох допоміжних функцій $\alpha(\xi), \beta(\xi), \gamma(\xi), \delta(\xi)$, що задаються формулами (11)

$$\begin{aligned} \alpha(\xi) &= \bar{\sigma}_y|_{y=0}, \beta(\xi) = \frac{r}{\sqrt{a_1}} \bar{u}_y|_{y=0}, \\ \gamma(\xi) &= -i\xi \bar{u}_x|_{y=0}, \delta(\xi) = -\frac{i\xi}{r\sqrt{a_1}} \bar{\tau}_{xy}|_{y=0}, \end{aligned} \quad (11)$$

а інші дві знаходяться із умов на нижній межі.

Наприклад для першої основної задачі знаходяться $\alpha(\xi) = \bar{f}_1(\xi)$ і $\delta(\xi) = \bar{f}_2(\xi)$, а для другої $\beta(\xi) = \frac{r}{\sqrt{a_1}} \cdot \bar{g}_1(\xi)$ і $\gamma(\xi) = -i\xi \cdot \bar{g}_1(\xi)$.

4. Знаходяться вирази трансформант напружень і переміщень через допоміжні функції $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$, $\delta(\xi)$.
5. Обчислюються істинні значення напружень та переміщень за допомогою зворотного інтегрального перетворення Фур'є.

Продемонструємо більш детально застосування цієї схеми на прикладі першої основної крайової задачі.

Розв'язок $\bar{\varphi}(\xi, y)$ рівняння (8) визначається формулою:

$$\bar{\varphi}(\xi, y) = A(\xi) \sinh(t) + B(\xi) \sqrt{a_1} y \sinh(t) + C(\xi) \cosh(t) + D(\xi) \sqrt{a_1} y \cosh(t), \quad (12)$$

де $r = |\xi|$, $\sqrt{a_1} = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}$, $t = ry\sqrt{a_1}$.

Виразимо $\bar{\varphi}(\xi, y)$ через допоміжні функції $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$, $\delta(\xi)$ (11).

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\xi, y) = & (3a_1 c_{11} \delta + c_{12} \delta - c_{33} \delta - \beta + ry(\gamma - \alpha(a_1 c_{11} + c_{12}))) \cdot \frac{\sinh(ry\sqrt{a_1})}{2a_1 c_{11} r^2} - \\ & - \frac{\cosh(ry\sqrt{a_1})}{2\sqrt{a_1} c_{11} r^2} \cdot (2\sqrt{a_1} c_{11} \alpha + ry(a_1 c_{11} \delta + c_{12} \delta - c_{33} \delta - \beta)). \end{aligned} \quad (13)$$

Трансформанти напружень та переміщень визначаються формулами:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x = & (2\gamma a_1 - 4a_1 c_{11} \alpha - 2c_{12} \alpha - \sqrt{a_1} ry(a_1 c_{11} \delta + c_{12} \delta - c_{33} \delta - \beta)) \cdot \frac{\cosh(ry\sqrt{a_1})}{2c_{11}} - \\ & - \frac{\sinh(ry\sqrt{a_1})}{2c_{11}} \cdot (\sqrt{a_1} ry(a_1 c_{11} \alpha + c_{12} \alpha - \gamma) - (a_1 c_{11} - c_{12} + c_{33}) \delta - \beta), \\ \bar{\sigma}_y = & (2\sqrt{a_1} c_{11} \alpha + ry(a_1 c_{11} \delta + c_{12} \delta - c_{33} \delta - \beta)) \cdot \frac{\cosh(ry\sqrt{a_1})}{2\sqrt{a_1} c_{11}} - \\ & - \frac{\sinh(ry\sqrt{a_1})}{2a_1 c_{11}} \cdot (3a_1 c_{11} \delta + c_{12} \delta - c_{33} \delta - \beta + ry(\gamma - a_1 c_{11} \alpha - c_{12} \alpha)), \\ \bar{\tau}_{xy} = & (2\sqrt{a_1} c_{11} \delta + ry(\gamma - a_1 c_{11} \alpha - c_{12} \alpha)) \cdot \frac{i\xi \cosh(ry\sqrt{a_1})}{2c_{11} r} - \\ & - \frac{i\xi \sinh(ry\sqrt{a_1})}{2\sqrt{a_1} c_{11} r} \cdot (\sqrt{a_1} ry(a_1 c_{11} \delta + c_{12} \delta - c_{33} \delta - \beta) + 3a_1 c_{11} \alpha + c_{12} \alpha - \gamma), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_x = & (\sqrt{a_1} c_{11} (\gamma - 2c_{12} \alpha - 2a_1 c_{11} \alpha) - ry(a_1 c_{11} + c_{12})(a_1 c_{11} + c_{12} \delta - c_{33} \delta - \beta)) \cdot \\ & \cdot \frac{i \cosh(ry\sqrt{a_1})}{2\sqrt{a_1} c_{11} \xi} + \frac{i \sinh(ry\sqrt{a_1})}{2a_1 c_{11} \xi} \cdot (\sqrt{a_1} ry(a_1 c_{11} + c_{12})(\gamma - a_1 c_{11} \alpha - c_{12} \alpha) + a_1^2 c_{11}^2 \delta + \\ & + a_1 c_{11} (2c_{12} \delta + c_{33} \delta + \beta) + c_{12} (c_{12} \delta - c_{33} \delta - \beta)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_y = & (a_1 c_{11} ry(\gamma - 2c_{12} \alpha + c_{33} \alpha) - a^2 c_{11}^2 ry \alpha + ry(c_{12} - c_{33})(\gamma - c_{12} \alpha) + \\ & + 2a_1 c_{11} \beta) \cdot \frac{\cosh(ry\sqrt{a_1})}{2c_{11} r} - \frac{\sinh(ry\sqrt{a_1})}{2c_{11} r} \cdot (a_1 c_{11} ry(2c_{12} \delta - 2c_{33} \delta - \beta) + \\ & + a_1^2 c_{11}^2 ry \delta + 5a_1 \sqrt{a_1} c_{11}^2 \alpha + ry(c_{12} - c_{33})(c_{12} \delta - c_{33} \delta - \beta) + \\ & + 3a_1 c_{11} (2c_{12} \alpha - c_{33} \alpha - \gamma) - (c_{12} - c_{33})(\gamma - c_{12} \alpha)). \end{aligned} \quad (15)$$

З умов на поверхні шару $\alpha(\xi) = \bar{f}_1$ і $\delta(\xi) = \bar{f}_2$. Із умов на нижній межі шару отримаємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих функцій $\beta(\xi)$ і $\gamma(\xi)$. Розв'язавши систему отримаємо:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{\Delta} \cdot (-\sqrt{a_1}\bar{f}_2\xi(3a_1c_{11}+c_{12}-c_{33}) \cdot C^2 + 2a_1\sqrt{a_1}c_{11}\xi(\sqrt{a_1}rh\bar{f}_3 - \bar{f}_1S) \cdot C + \\ &+ 2a_1\sqrt{a_1}c_{11}(ir^2h\bar{f}_4 + \bar{f}_3\xi) \cdot S - 2a_1^2c_{11}rh\bar{f}_1\xi + a_1^2\sqrt{a_1}c_{11}r^2h^2\bar{f}_2\xi + a_1\sqrt{a_1}\bar{f}_2\xi \cdot \\ &\cdot (3c_{11} + r^2h^2(c_{12} - c_{33})) + \sqrt{a_1}\bar{f}_2\xi(c_{12} - c_{33})), \\ \gamma &= \frac{1}{\Delta} \cdot (-\sqrt{a_1}\bar{f}_1\xi(c_{12}+3a_1c_{11}) \cdot C^2 + 2a_1\sqrt{a_1}c_{11}(ir^2h\bar{f}_4 - \bar{f}_2\xi S) \cdot C + \\ &+ 2a_1c_{11}r(i\bar{f}_4 - \xi a_1h\bar{f}_3) \cdot S + \sqrt{a_1}\xi(\bar{f}_1a_1(c_{12}r^2h^2 + 3c_{11}) + \\ &+ a_1^2c_{11}\bar{f}_1r^2h^2 + 2a_1\sqrt{a_1}c_{11}\bar{f}_2rh + c_{12}\bar{f}_1)),\end{aligned}\quad (16)$$

де $\Delta = \sqrt{a_1}\xi(a_1r^2h^2 - C^2 + 1)$, $C = \cosh(ry\sqrt{a_1})$, $S = \sinh(ry\sqrt{a_1})$.

Знайдені вирази для $\alpha(\xi)$, $\delta(\xi)$ та $\beta(\xi)$, $\gamma(\xi)$ (16) підставляємо в (14), (15). Отримані вирази підлягають зворотному інтегральному перетворенню Фур'є, що дає істинні значення шуканих величин.

Аналогічні дії застосовуються для розв'язання другої основної та змішаної задач. Наведемо необхідні формули, що відповідають пункту (3) схеми розв'язання.

Для другої крайової задачі відомими є функції $\beta(\xi) = \frac{r}{\sqrt{a_1}} \cdot \bar{g}_1(\xi)$ і $\gamma(\xi) = -i\xi \cdot \bar{g}_1(\xi)$. Інші дві функції $\alpha(\xi)$ і $\delta(\xi)$ знаходяться з відповідних умов на нижній межі (3) і описуються формулам:

$$\begin{aligned}\alpha &= ((3a_1c_{11}+c_{12}-c_{33})(a_1^2c_{11}^2+a_1c_{11}(2c_{12}+c_{33})+c_{12}(c_{12}-c_{33})) \cdot C^2\bar{g}_2 - \\ &- 2a_1c_{11}\bar{g}_1 \cdot (a_1^2c_{11}^2 + a_1c_{11}(2c_{12} + c_{33}) + c_{12}(c_{12} - c_{33})) \cdot SC + \\ &+ 2a_1\sqrt{a_1}c_{11}c_{12}rh\bar{g}_1 \cdot (c_{12} - c_{33}) + 2a_1^2\sqrt{a_1}c_{11}^2rh\bar{g}_1(2c_{12} - c_{33}) + 2a_1^3\sqrt{a_1}c_{11}^3rh\bar{g}_1 - \\ &- a_1^4c_{11}^3r^2h^2\bar{g}_2 - 3a_1^3c_{11}^3\bar{g}_2 - a_1^2c_{11}^2\bar{g}_2(a_1r^2h^2(3c_{12} - 2c_{33}) + 7c_{12} + 2c_{33}) - \\ &- a_1c_{11}\bar{g}_2(c_{12} - c_{33}) \cdot (a_1r^2h^2(3c_{12} - 2c_{33}) + 5c_{12} + c_{33}) - \\ &- c_{12}\bar{g}_2(c_{12} - c_{33})^2(a_1r^2h^2 + 1)) \cdot \frac{i}{4a_1\sqrt{a_1}c_{11}^2r\xi\Delta_1}, \\ \delta &= ((a_1\sqrt{a_1}c_{11}rh\bar{g}_1(c_{12}^2 - c_{33}^2) - (a_1^2\sqrt{a_1}c_{11}^2rh\bar{g}_1(c_{12} - 2c_{33}) - a_1^3\sqrt{a_1}c_{11}^3rh\bar{g}_1 + \\ &+ \sqrt{a_1}c_{12}rh\bar{g}_1(c_{12} - c_{33})^2 + a_1^2c_{11}^2\bar{g}_2(a_1r^2h^2(3c_{12} - 2c_{33}) - 4.5c_{12} - c_{33}) + \\ &+ c_{11}^3\bar{g}_2 \cdot (a_1^4r^2h^2 - 1.5a_1^3) + a_1c_{11}\bar{g}_2(c_{12} - c_{33})(a_1r^2h^2(3c_{12} - c_{33}) - 2.5c_{12} - 0.5c_{33}) + \\ &+ c_{12}\bar{g}_2(c_{12} - c_{33})^2(a_1r^2h^2 - 0.5)) \cdot C^2 + (2a_1\sqrt{a_1}c_{11}rh\bar{g}_2(c_{12} - c_{33})^2 +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4a_1^2\sqrt{a_1}c_{11}^2 \cdot rh\bar{g}_2(c_{12} - c_{33}) + 2a_1^3\sqrt{a_1}c_{11}^3 rh\bar{g}_2 - a_1c_{11}^3\bar{g}_1(a_1^3r^2h^2 - a_1^2) - \\
& -a_1^2c_{11}^2\bar{g}_1(-2c_{12} - c_{33} + a_1r^2h^2(3c_{12} - 2c_{33})) - a_1\bar{g}_1(c_{12} - c_{33})(a_1c_{11}r^2h^2(3c_{12} - \\
& - c_{33}) - c_{12}) - a_1c_{12}r^2h^2 \cdot \bar{g}_1(c_{12} - c_{33})^2 S - a_1\sqrt{a_1}c_{11}rh\bar{g}_1(c_{12} - c_{33})(2c_{12} + c_{33}) - \\
& - a_1^2\sqrt{a_1}c_{11}^2 rh\bar{g}_1(c_{12} + c_{33}) - \sqrt{a_1}c_{12}rh\bar{g}_1(c_{12} - c_{33})^2 - \\
& - 0.5c_{11}^3\bar{g}_2(a_1^4r^2h^2(3c_{12} - 2c_{33}) - 7c_{12} - 2c_{33}) - \\
& - 0.5a_1c_{11}\bar{g}_2(c_{12} - c_{33})(a_1r^2h^2(3c_{12} - c_{33}) - 5c_{12} - c_{33}) \cdot \frac{i}{4a_1\sqrt{a_1}c_{11}^2 r\xi\Delta_1}, \\
\Delta_1 = & \frac{i}{4a_1\sqrt{a_1}c_{11}^2 r\xi} \cdot ((5a_1^2c_{11}^2 + 3a_1c_{11}(2c_{12} - c_{33}) + c_{12}(c_{12} - c_{33}))(a_1^2c_{11}^2 + \\
& + a_1c_{11} \cdot (2c_{12} - c_{33}) + c_{12}(c_{12} - c_{33})) \cdot C^2 - a_1^5c_{11}^4 r^2h^2 - a_1^4c_{11}^3(5c_{11} + \\
& + 2r^2h^2(2c_{12} - c_{33})) - a_1^2c_{11}(3c_{11}(6c_{12}^2 - 2c_{12}c_{33} - c_{33}^2) + \\
& + 2c_{12}r^2h^2(2c_{12} - c_{33})(c_{12} - c_{33})) - a_1c_{12} \cdot \\
& \cdot (2c_{11}(4c_{12} - c_{33}) + c_{12}r^2h^2(c_{12} - c_{33})) - c_{12}^2(c_{12} - c_{33})^2).
\end{aligned} \tag{17}$$

Для змішаної задачі допоміжними функціями є $\alpha(\xi) = \bar{p}_1(\xi)$ і $\delta(\xi) = \bar{p}_2(\xi)$.
З умов (5) знаходимо $\beta(\xi)$ і $\gamma(\xi)$:

$$\begin{aligned}
\beta = & 2a_1c_{11}(a_1^2c_{11}^2 + a_1c_{11}(2c_{12} + c_{33}) + c_{12}(c_{12} - c_{33})) \cdot \frac{CS\bar{p}_1}{\Delta} + (a_1^2c_{11}^2 + \\
& + 2a_1c_{11}c_{12} + a_1c_{11}c_{33} + c_{12}^2 - c_{12}c_{33})(3a_1c_{11} + c_{12} - c_{33}) \cdot \frac{S^2\bar{p}_2}{\Delta}, \\
\gamma = & (a_1^2c_{11}^2 + a_1c_{11}(2c_{12} + c_{33}) + c_{12}(c_{12} - c_{33}))(a_1c_{11} - c_{12}) \cdot \frac{S^2\bar{p}_1}{\Delta} + \\
& + 2a_1c_{11} \cdot (a_1^2c_{11}^2 + a_1c_{11}(2c_{12} + c_{33}) + c_{12}(c_{12} - c_{33}))(a_1c_{11} - c_{12}) \cdot \frac{SC\bar{p}_2}{\Delta},
\end{aligned} \tag{18}$$

де $\Delta = (a_1^2c_{11}^2 + a_1c_{11}(2c_{12} + c_{33}) + c_{12}(c_{12} - c_{33}))(a_1c_{11} - c_{12}) \cdot C^2 + (a_1c_{11} - c_{12})(3a_1c_{11} + c_{12} - c_{33})$, $C = \cosh(ry\sqrt{a_1})$, $S = \sinh(ry\sqrt{a_1})$.

Таким чином маємо всі необхідні формули для розв'язання поставлених задач. Отримані формули піддаємо оберненому інтегральному перетворенню Фур'є. Для окремих випадків вдається отримати аналітичні вирази, в загальному випадку проводиться чисельне інтегрування за допомогою адаптивних алгоритмів.

3. Числові розрахунки.

Розглянемо ортотропний шар, матеріал якого $\nu_{xy} = 0.26$, $\nu_{xz} = 0.19$, $\nu_{yz} = 0.41$, $\nu_{zy} = 0.30$, $E_x = 3.86 \cdot 10^{10}$ Па, $E_y = 8.27 \cdot 10^9$ Па. Товщина шару $h = 1$ м.

3.1. Перша основна крайова задача.

На межі $y = 0$ діє зовнішнє навантаження $\sigma_y(x, 0) = \frac{1}{x^2+1}$ (Па), $\tau_{xy}(x, 0) = 0$ (Па), на межі $y = -1$ навантаження $\sigma_y(x, -1) = -\frac{1}{x^2+1}$ (Па), $\tau_{xy}(x, -1) = 0$ (Па).

Як бачимо на рис. 2 значення $\sigma_y(0, 0) = 1$, $\sigma_y(0, -1) = -1$, що свідчить про виконання умов на верхній та нижній межі. Характер навантаження шару обумовлює симетричність розподілу напружень в шарі при цьому максимальні по модулю значення напружень спостерігаються вздовж лінії дії максимального нормального навантаження.

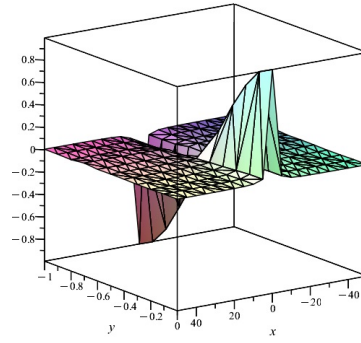


Рис. 2.: Значення напруження $\sigma_y(x, y)$

3.2. Друга основна крайова задача.

Відомі переміщення на верхній межі $u_y(x, 0) = \frac{10^{-4}}{x^2+1}$ (м), $u_x(x, 0) = 0$ (м) та на нижній межі $u_y(x, -1) = -\frac{10^{-4}}{x^2+1}$ (м), $u_x(x, -1) = 0$ (м).

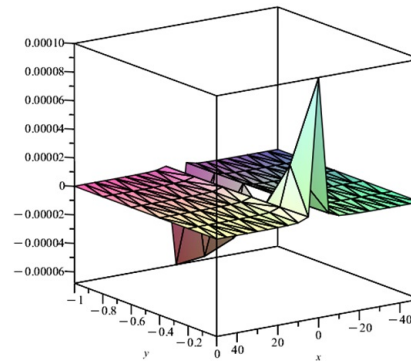
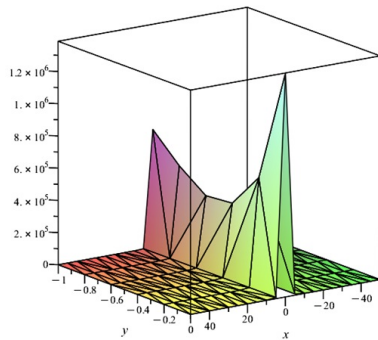
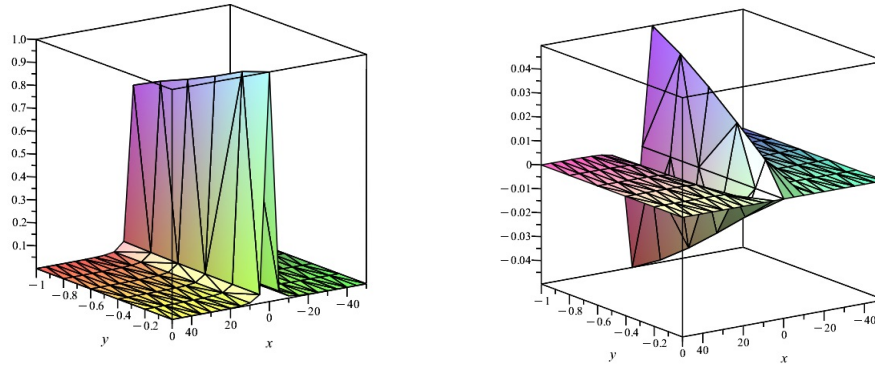


Рис. 3.: Значення напруження $\sigma_y(x, y)$ і переміщення $u_y(x, y)$

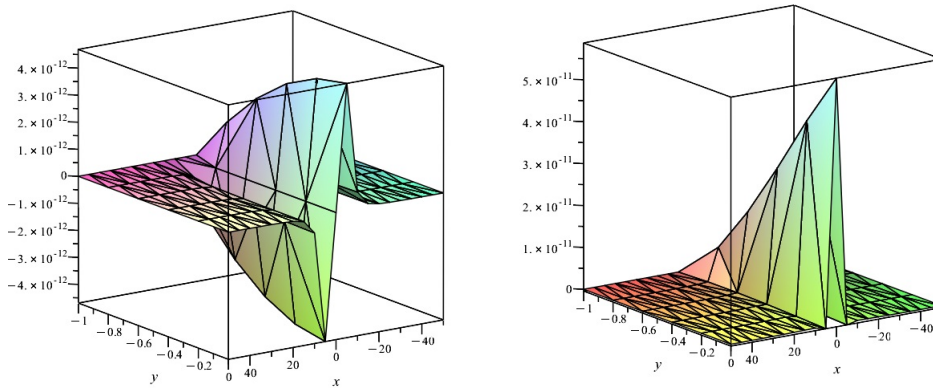
Отримані результати цілком узгоджуються з очікуваною картиною: максимальні значення поблизу $x = 0$, а за глибиною значення напружень і переміщень зменшуються і прямують до 0. Спостерігається виконання умов на верхній та нижній межах $u_y(0, 0) = 0.0001$, $u_y(0, -1) = -0.0001$.

3.3. Змішана крайова задача.

На межі $y = 0$ діє зовнішнє навантаження $\sigma_y(x, 0) = \frac{1}{x^2+1}$ (Па), $\tau_{xy}(x, 0) = 0$ (Па). На межі $y = -1$ переміщення дорівнюють нулю.

Рис. 4.: Значення напружень $\sigma_y(x, y)$ і $\tau_{xy}(x, y)$

Як бачимо на рис. 4 отримані значення напружень приймають найбільші значення поблизу $x = 0$ для кожного y , а при віддалені від $x = 0$ значення напружень зменшуються та на нескінченності прямують до нуля. Окрім того отримані результати свідчать про виконання умов на верхній межі $\sigma_y(0, 0) = 1$ і $\tau_{xy}(0, 0) = 0$.

Рис. 5.: Значення переміщень $u_x(x, y)$ і $u_y(x, y)$

Отримані результати для переміщень $u_x(x, y)$ і $u_y(x, y)$ демонструють симетричний характер деформування. Максимальні значення нормальних переміщень $u_y(x, y)$ відповідають лінії дії максимального нормального навантаження. На нижній межі переміщення дорівнюють нулю, що свідчить про виконання крайових умов.

ВИСНОВКИ

В роботі наведено підхід до розв'язання крайових задач лінійної теорії пружності для ортотропного шару в умовах плоскої деформації. Отримано чисельно-аналітичні розв'язки першої, другої та змішаної крайових задач, що представлені в просторі трансформант. Проведено числові розрахунки виконано їх аналіз. В перспективі планується поширення описаного методу на багат шарові основи з ортотропними шарами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Кільчинський О. О.** Уточнений метод пом'якшення нев'язок для ортотропної пластини / О. О. Кільчинський, Є. В. Массалітіна // Зб. наук. праць ДЕТУТ. Транспортні системи і технології. — 2014. — № 24. — С. 163–172.
2. **Кільчинський О. О.** Метод пом'якшення нев'язок для круглої пластини під дією масових сил / О. О. Кільчинський, Є. В. Массалітіна // Український математичний журнал. — 2018. — Т. 70, № 4. — С. 481–494.
3. **Григоренко О. Я.** Розв'язання тривимірних крайових задач про згин прямокутних пластин / О. Я. Григоренко, А. С. Бергульов, С. М. Яремченко // Доп. НАН України. — 2010. — № 10. — С. 44–51.
4. **Jianguo W.** Boundary element method for orthotropic thick plates / W. Jianguo, H. Maokuang // Acta Mechanica Sinica. — 1991. — Vol. 7, № 3. — P. 258–266.
5. **Dos Reis A.** The boundary element method applied to orthotropic shear deformable plates / A. Dos Reis, E. Lima Albuquerque, L. Palermo Junior // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2013. — Vol. 37, № 4, P. 738–746.
6. **Антоненко Н. М.** Узагальнення задачі про односторонній контакт смуги з півплощиною / Н. М. Антоненко, І. Г. Величко // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. — 2010. — № 1. — С. 12–18.
7. **Приварніков А. К.** Двовимірні граничні завдання теорії пружності для багат шарових основ / А. К. Приварніков. — Запоріжжя: Запорізький державний університет, 1990. — 84 с.
8. **Дзундза Н. С.** Алгоритм знаходження напружено-деформованого стану пружного ортотропного шару / Н. С. Дзундза, І. В. Зіновеев // Scientific discussion. — 2022. — Т. 1, № 64. — С. 16–20.
9. **Timoshenko S. P.** Theory of Elasticity / S. P. Timoshenko, J. N. Goodier. — N.-Y.: McGraw-Hill, 1970. — 888 p.
10. **Bracewell R. N.** The Fourier Transform and Its Applications / R. N. Bracewell. — Boston: McGraw-Hill, 2000. — 422 p.

Zinovieiev I. V., Dzundza N. S.

SOLVING BASIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR AN ORTHOTROPIC LAYER

Summary

We consider the first, second basic and mixed boundary value problems of the linear theory of elasticity for a homogeneous orthotropic layer of constant thickness. The layer is subjected to a surface load. There are no internal forces. It is required to determine the stresses and displacements at an arbitrary point of the layer, assuming plane deformation. The solutions to the problem are constructed. The solution to the problem is sought in the space of transformants of the one-dimensional integral Fourier transform, where the relationship between the transformants of the stress function and the transformants of displacements and stresses is established. The desired values are expressed through four auxiliary functions that are associated with the stress and displacement transforms at the upper boundary. To obtain the true values of stresses and displacements at the points of the orthotropic layer, the inverse integral Fourier transform is applied to the found stress and displacement transforms. Numerical solutions for specific cases are obtained and the results are analyzed.

Key words: orthotropic layer, plane deformation, stress-strain state stress function, integral Fourier transform.

REFERENCES

1. Kilchynskiy, O. O., Massalitina, E. V. (2014). Utochnenyi metod pomiakshennia neviazok dlia ortotropnoi plastyny [Refined method of residual softening for an orthotropic plate]. *Collection of scientific works of DETUT. Transport Systems and Technologies*, №24, P. 163–172.
2. Kilchynskiy, O. O., Massalitina, E. V. (2018). Metod pomiakshennia neviazok dlia kruhloi plastyny pid diieiu masovykh syl [Method for mitigating inelasticities for a round plate under the action of mass forces]. *Proceedings of the International Conference Issues of Optimization of Computing*, Vol. 70, №5, P. 481–494.
3. Grigorenko, O. Y., Bergulev, A. S. and Yaremchenko, C. M. (2010). Rozviazannia tryvymirnykh kraiovykh zadach pro zghyn priamokutnykh plastyn [Solution of three-dimensional boundary value problems on bending of rectangular plates]. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, Vol. 10, P. 44–51.
4. Jianguo, W., Maokuang, H. (1991). Boundary element method for orthotropic thick plates. *Acta Mechanica Sinica*. Vol. 7, № 3. P. 258–266.

5. Dos Reis, A., Lima Albuquerque, E., Palermo Junior, L. (2013). The boundary element method applied to orthotropic shear deformable plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. Vol. 37, № 4. P. 738–746.
6. Antonenko, N. M., Velichko, I. G. (2010). Uzhahalennia zadachi pro odnostorononii kontakt smuhy z pivploshchynoiu [Generalization of the problem of one-sided contact of a strip with a half-plane]. *Bulletin of Zaporizhzhia National University. Physical and mathematical sciences*. №1, P. 12–18.
7. Pryvarnikov, A. K. (1990). *Dvovymirni hranychni zavrannia teorii pruzhnosti dlia bahatosharovykh osnov [Two-dimensional boundary value problems of elasticity theory for multilayer bases]*. Zaporizhzhia: Zaporizhzhia State University, 84 p.
8. Dzundza, N. S., Zinovieiev, I. V. (2022). Alhorytm znakhodzhennia napruzhenodeformovanoho stanu pruzhnoho ortotropnoho sharu [Algorithm for finding the stress-strain state of an elastic orthotropic layer]. *Scientific discussion*. Vol. 1, № 64. P. 16–20.
9. Timoshenko, S. P., Goodier, J. N. (1970). *Theory of Elasticity.*, New York: McGraw-Hill, 888 p.
10. Bracewell, R. N. (2000). *The Fourier Transform and Its Applications*. Boston: McGraw-Hill, 422 p.

УДК 517.929.2:517.925.4

В. Є. Круглов

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

МЕТОД ЛАНЦЮГІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ СКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ ТА ДЕЯКІ ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

В цій роботі наведено схему методу ланцюгів стосовно розв'язання скінченного лінійного різницевого рівняння, і приведено формулу загального розв'язку цього рівняння. Як наслідок, наведено формулу загального розв'язку різницевого рівняння зі сталими коефіцієнтами, яка цілком залежить тільки від коефіцієнтів цього рівняння. Розглянуті розв'язки лінійних диференціальних рівнянь у вигляді узагальненого степеневого ряду, коефіцієнти якого знаходяться методом ланцюгів. Внаслідок перестановки елементів степеневого ряду розв'язок рівняння містить нову функцію, а саме: гіпергеометричну функцію дробового порядку.

MSC: 39A06.

Ключові слова: ланцюг, різницеве рівняння, гіпергеометрична функція дробового порядку.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305254](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305254).

Вступ

Ця стаття є огляд робіт автора, в яких розроблено метод ланцюгів для розв'язання лінійного різницевого рівняння і застосовано його для побудови розв'язків деяких лінійних диференціальних рівнянь.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Схема методу ланцюгів.

Розглянемо лінійне різницеве рівняння порядку n

$$l_{n+k} = a_{1k}l_{n+k-1} + a_{2k}l_{n+k-2} + \dots + a_{nk}l_k, a_{nk} \neq 0, k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

де $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}$ — відомі функції цілочисельного аргументу k .

Використовується покрокове розв'язання рівняння (1), тобто на кожному черговому кроці використання рівняння (1) враховуються розв'язки, які були знайдені на попередніх кроках, і запис коефіцієнтів рівняння (1) у вигляді a_{jk} не дає можливості встановити закономірності, які існують між цими коефіцієнтами.

За результатами рекурсії з'являються добутки, які утворені елементами набору $M_{n,n+k}$, і які мають наступну структуру: довільні два сусідніх множників в кожному з добутків задовольняють правилу множення $-\dots a_k^{(i_1)} a_{k+i_1}^{(i_2)} \dots, i_1, i_2 = \overline{1, n}$ (i_1 та i_2 можуть бути рівними).

Ланцюгом, який складається з елементів набору $M_{n,n+k}$, називають добуток максимально можливої кількості елементів з цього набору, але для довільних двох сусідніх множників в цьому добутку повинно використовуватися сформульоване вище правило множення.

Звідси випливає, що довільний ланцюг починається з якого-небудь начального елемента набору $M_{n,n+k}$ і завершується одним з кінцевих елементів цього набору.

Структура довільного ланцюга така

$$a_n^{(i_1)} a_{n+i_1}^{(i_2)} a_{n+i_1+i_2}^{(i_3)} \dots a_{n+i_1+i_2+\dots+i_{r-1}}^{(i_r)}, \quad n + i_1 + \dots + i_{r-1} + i_r = n + k.$$

Порядком ланцюга називають суму рангів усіх множників, які утворюють цей ланцюг. З елементів набору $M_{n,n+k}$ можна скласти ланцюги тільки порядку k , бо $i_1 + i_2 + \dots + i_r = k$.

Функція $f_{k,n+k}$ – це сума усіх ланцюгів порядку k , які можна скласти з елементів набору $M_{n,n+k}$. Підрахуємо тепер кількість доданків у функції $f_{k,n+k}$.

Нехай ланцюг порядку k має x_1 елементів рангу один, x_2 елементів рангу два, і т.д., x_n елементів рангу n . Тоді $k = x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n$. Тоді кількість усіх ланцюгів порядку k , які можна скласти з елементів набору $M_{n,n+k}$, дорівнює

$$Q_k^{(n)} = \sum_{x_1+2x_2+\dots+nx_n=k} \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)!}{x_1!x_2!\dots x_n!}.$$

Аналогічно будується функція $f_{k-1,n+k}$. Це сума ланцюгів порядку $k-1$, які утворюються з елементів набору $M_{n+1,n+k} = (a_{n+1}^{(1)}, \dots, a_{n+k-1}^{(1)}; a_{n+1}^{(2)}, \dots, a_{n+k-2}^{(2)}; \dots; a_{n+1}^{(p)}, \dots, a_q^{(p)})$, і кількість таких ланцюгів

$$Q_{k-1}^{(n)} = \sum_{x_1+2x_2+\dots+nx_n=k-1} \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)!}{x_1!x_2!\dots x_n!},$$

і т.д. Кількість ланцюгів порядку $k-m$ (тобто доданків у функції $f_{k-m,n+k}$), які утворюються з елементів набору $M_{n+m,n+k} = (a_{n+m}^{(1)}, \dots, a_{n+k-1}^{(1)};$

де числа $R_k^{(n)}$, якщо $k = \overline{1, n}$ або $k > n$, знаходяться за формулами (7), (8).

Можна довести, що серед розв'язків (9) знаходяться відомі розв'язки типу $k^m \lambda^s$, де λ – корінь характеристичного рівняння

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n.$$

Приклад наведено в [1], де розглянуто рівняння $l_{k+2} = al_{k+1} + bl_k$.

Розв'язок його подається формулою

$$l_{2+k} = (al_1 + bl_0) \sum_{m=0}^{[k/2]} C_{k-m}^m a^{k-2m} b^m + bl_1 \sum_{m=0}^{[k/2]} C_{k-m-1}^m a^{k-2m-1} b^m.$$

З цієї формули випливає:

- 1) якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2$ та $l_1 = \lambda_1, l_0 = 1$, то $l_{2+k} = \lambda_1^{2+k}$,
 - 2) якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a}{2}$ та $l_1 = \lambda_1 = \frac{a}{2}, l_0 = 1$, то $l_{2+k} = \left(\frac{a}{2}\right)^{2+k} \lambda_1^{2+k}$,
- а при $l_1 = \lambda_1, l_0 = 0$ $l_{2+k} = (2+k)\lambda_1^{2+k}$.

2. Застосування методу ланцюгів до розв'язування лінійних диференціальних рівнянь.

В комплексній площині вивчаються диференціальні рівняння, відповідно в [3], [4], [5]

$$t^2(A_1 t^2 + B_1 t + C_1)u'' + t(A_2 t^2 + B_2 t + C_2)u' + (A_3 t^2 + B_3 t + C_3)u = 0, C_1 \neq 0, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n (A_i t^2 + B_i t + C_i) t^i u^{(i)} = 0, C_n \neq 0, \quad (11)$$

де A_i, B_i, C_i – відомі числа: дійсні або комплексні;

$$t^2 P_1(t)u'' + t P_2(t)u' + P_3(t)u = 0, \quad (12)$$

де функції $P_i(t), i = \overline{1, 3}$, аналітичні в околі фуксової нульової точки і для них в цьому околі мають місце розвинення

$$P_i(t) = a_{i_0} + a_{i_1} t + a_{i_2} t^2 + \dots, \quad a_{i_0} \neq 0. \quad (13)$$

При розв'язуванні цих рівнянь використовується єдиний підхід, а саме: розв'язок рівняння в околі фуксової точки $t = 0$ відшукується у вигляді узагальненого степеневого ряду (розв'язок Фробеніуса)

$$u(t) = t^\rho (l_0 + l_1 t + l_2 t^2 + \dots), \quad l_0 \neq 0. \quad (14)$$

де параметри ρ, l_i потрібно знайти.

Відомо [6], що цей ряд абсолютно збігається в кільці $0 < |t| < R$, де R — відстань від точки $t = 0$ до найближчої особливої точки диференціального рівняння.

Висновки

Для рівнянь (10)–(12) відносно параметрів l_i отримані різницеві рівняння третього порядку. Для розв'язку цих різницевих рівнянь використовується метод ланцюгів. В подальшому, враховуючи досить громіздку структуру параметрів l_i , і для того, щоб ряд (14) став більш прозорим, робимо перегрупування членів ряду. В наслідок це дозволило ряд (14) записати як лінійну комбінацію стандартних гіпергеометричних рядів і введеному в цих роботах гіпергеометричного ряду дробового порядку, а саме

$$F_{q/k}(a_1, a_2; 1, b_1; t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a_1 + q/k)_m (a_2 + q/k)_m}{(1 + q/k)_m (b_1 + q/k)_m} t^m, q = \overline{1, k-1},$$

де $(a)_m = a(a+1) \dots (a+m-1)$.

Стоїть задача: вивчити властивості гіпергеометричного ряду дробового порядку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Kruglov V. E.** Construction of a fundamental system of solutions of a linear finite-order difference equation / V. E. Kruglov // UMJ — 2009. — V. 61(6). — P. 923–944.
2. **Kruglov V. E.** On n-arithmetical triangles constructed for polynomial coefficients / V. E. Kruglov // RM. — 2016. — Vol. 60(8). — P. 29.
3. **Kruglov V. E.** Solution of a second-order Poincare–Perron-type equation and differential equations that can be reduced to it / V. E. Kruglov // UMJ. — 2008. — Vol. 60(7). — P. 1055–1071.
4. **Kruglov V. E.** Solution of the linear differential equation of n-th order with four singular points / V. E. Kruglov // Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. — 2010. — Vol. 32. — P. 23–35.
5. **Kruglov V. E.** Solution of a linear second-order differential equation with coefficients analytic in the vicinite of a fuchsian zero point / V. E. Kruglov // UMJ. — 2013. — V. 64(10). — P. 1572–1585.
6. **Ince E. L.** Ordinary differential equations / E. L. Ince. — L., 1927. — 558 p.

Kruglov V. E.

THE CHAIN METHOD FOR SOLVING A FINITE-ORDER LINEAR DIFFERENCE EQUATION AND SOME OF ITS APPLICATIONS

Summary

A scheme of the chain method for solving a finite linear difference equation is given in this paper, and a formula for this equation's general solution of is given. As a result, the formula for the general solution of a difference equation with constant coefficients is given. This formula depends entirely only on the coefficients of this equation. Considered solutions of linear differential equations in the form of a generalized power series, the coefficients of which are found by the chain method. As a result of permuting the elements of the power series, the solution of the equation contains a new function, namely: a hypergeometric function of fractional order.

Key words: chain, difference equation, hypergeometric function of fractional order.

REFERENCES

1. Kruglov V. E. (2009). Construction of a fundamental system of solutions of a linear finite-order difference equation. *UMJ*, Vol. 61(6), P. 923–944.
2. Kruglov V. E. (2016). On n-arithmetical triangles constructed for polynomial coefficients. *RM*, Vol. 60(8), P. 29.
3. Kruglov V. E. (2008). Solution of a second-order Poincare–Perron-type equation and differential equations that can be reduced to it. *UMJ*, Vol. 60(7), P. 1055–1071.
4. Kruglov V. E. (2010). Solution of the linear differential equation of n-th order with four singular points. *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.*, Vol. 32, P. 23–35.
5. Kruglov V. E. (2013). Solution of a linear second-order differential equation with coefficients analytic in the vicinite of a fuchsian zero point. *UMJ*, Vol. 64(10), P. 1572–1585.
6. Ince E. L. (1927). *Ordinary differential equations*. L, 558 p.

УДК 514.07

О. Лесечко, А. Соловійов

Одеська державна академія будівництва та архітектури,
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

КОНФОРМНО-ПЛАСКІ КЕЛЕРОВІ ПРОСТОРИ

Досліджуються геометричні властивості келерових просторів, які допускають конформні відображення, відмінні від гомотетичних відображень, на плоскі псевдоріманові простори. В роботі доведено, що не існує не плоских конформно-пласких келерових просторів, розмірність яких відмінна від чотирьох. Показано, що чотиривимірні конформно-пласкі простори можуть бути вкладені в шестимірні плоскі псевдоріманові простори. В конформно-пласких келерових просторах побудовано ідемпотентний коваріантно сталий не пропорційний метричному тензор i , таким чином, доведено, що вказані простори є звідними псевдорімановими просторами.

Дослідження ведуться локально, тензорними методами без обмежень на сигнатуру та знаковизначенність метричного тензору келерового простору. В роботі широко застосовується спеціальна операція (спряження), що введена для келерових просторів, та її властивості для тензорів Рімана та Річчі.

MSC: 53B35.

Ключові слова: псевдоріманові простори, тензор Річчі, тензор Рімана, келерові простори, конформні відображення, конформно-пласкі келерові простори.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305257](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305257).

Вступ

Простори, які допускають конформні відображення на евклідові простори при умові, що в них існує поле коваріантно сталого кососиметричного афінора, вперше дослідив П.А. Широков [1]. Суттєвою умовою в цих дослідженнях була знаковизначенність метричного тензора простору. Пізніше, але вже як окремий об'єкт дослідження, псевдоріманові простори з кососиметричним коваріантно сталим афінором вивчав Е. Келер [2]. Такий тип спеціальних псевдоріманових просторів зразу привернув увагу дослідників завдяки широкому колу застосувань, і самі простори дістали назву келерових просторів. Технічні труднощі, що виникають при дослідженні келерових просторів, дозволяє долати спеціальна операція, яка має назву — спряження [3].

Метою роботи є дослідження умов, яким задовольняють метричний тензор та інші внутрішні об'єкти келерового конформно-плаского простору, зокрема, тензори Рімана та Річчі.

Дослідження в статті ведуться локально, тензорними методами без обмежень на знак та сигнатуру метричного тензора.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Келерові простори

Келеровим простором K_n ($n = 2N$) називається псевдоріманів простір з метричним тензором $g_{ij}(x)$, у якому існує структура $F_i^h(x)$, що задовольняє співвідношенням [4; 5]:

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = -\delta_i^h; \quad F_{(ij)} = 0; \quad F_{i,j}^h = 0, \quad (1)$$

де $F_{ij} \equiv g_{i\alpha} F_j^\alpha$, кома — знак ковариантної похідної по зв'язності K_n .

Зауважимо, що келерові простори вперше вивчалися П. А. Широковим, які він назвав А-просторами. Потім ці простори вивчав Є. Келер. В літературі, як правило, ці простори називають келерові.

Задля зручності введемо в K_n операцію спряження :

$$A_{\bar{i}\dots} \equiv A_{\alpha\dots} F_i^\alpha; \quad B^{\bar{i}\dots} \equiv B^{\alpha\dots} F_\alpha^i. \quad (2)$$

Тут A і B довільні тензори будь-якої валентності. В силу (1) та (2) мають місце наступні властивості:

$$\begin{aligned} A_{\bar{i}} &= -A_i; & B^{\bar{i}} &= -B^i; \\ A_{\bar{\alpha}} B^\alpha &= A_\alpha B^{\bar{\alpha}}; & A_{\bar{\alpha}} B^{\bar{\alpha}} &= -A_\alpha B^\alpha; \\ (A_{\bar{i}})_{,j} &= A_{\bar{i},j}; & (B^{\bar{i}})_{,j} &= B^{\bar{i},j}. \end{aligned} \quad (3)$$

Метричний тензор та символи Кронекера задовольняють співвідношенням:

$$g_{i\bar{j}} = g_{ij}; \quad g_{\bar{i}j} = -g_{i\bar{j}}; \quad \delta_i^h = \delta_i^{\bar{h}} = F_i^h; \quad \delta_{\bar{i}}^{\bar{h}} = -\delta_i^h. \quad (4)$$

Тензори Рімана и Річчі додатково до відомих тотожностей задають наступним властивостям:

$$R_{\bar{h}\bar{i}jk} = R_{hijk}; \quad R_{\bar{\alpha}jk}^\alpha = 2R_{j\bar{k}}; \quad R_{\bar{i}\bar{j}} = R_{ij}. \quad (5)$$

До внутрішніх об'єктів K_n відносять об'єкти, що визначаються з метричного тензора g_{ij} та структури F_i^h .

Розглянемо келерові простори зі спеціальним видом тензора Рімана.

2. Конформно-пласкі простори.

Конформно-пласким називають псевдоріманів простір V_n , в якому виконуються умови [6]

$$R_{hijk} = P_{hk}g_{ij} - P_{hj}g_{ik} + P_{ij}g_{hk} - P_{ik}g_{hj}, \quad (6)$$

$$P_{ij,k} - P_{ik,j} = 0, \quad (7)$$

тут

$$P_{ij} = \frac{1}{n-2} \left(R_{ij} - \frac{1}{2(n-1)} Rg_{ij} \right). \quad (8)$$

Подіємо операцією спряження по індексах i, j в формулі (8), переконаємось, що

$$P_{ij} = P_{i\bar{j}}; \quad P_{ij} + P_{i\bar{j}} = 0. \quad (9)$$

Подіємо операцією спряження по індексам j, k в рівняння (6) та віднімемо отримане від (6)

$$P_{hk}g_{ij} - P_{hj}g_{ik} + P_{ij}g_{hk} - P_{ik}g_{hj} - P_{h\bar{k}}g_{i\bar{j}} + P_{h\bar{j}}g_{i\bar{k}} - P_{i\bar{j}}g_{h\bar{k}} + P_{i\bar{k}}g_{h\bar{j}} = 0. \quad (10)$$

Згорнемо по індексам i, j

$$(n-4)P_{hk} - P_{g_{hk}} = 0, \quad (11)$$

тут $P = P_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$.

Із (11) переконаємось, що $P = 0$, а значить, $R = 0$ та має місце

Теорема 1. Конформно-пласкі келерові простори мають нульову скалярну кривину.

При $n > 4$ має місце наступна властивість

Теорема 2. Не існує конформно-пласких келерових просторів K_n , $n > 4$, відмінних від пласких.

Доведемо, що виконується

Теорема 3. Конформно-пласкі келерові простори K_n , $n = 4$ мають коваріантно сталий тензор Рімана.

Доведення.

Подіємо операцією спряження по індексам i, j в рівнянні (7), отримаємо

$$P_{ij,k} - P_{ik,\bar{j}} = 0. \quad (12)$$

Просиметруємо по індексам i, k та переконаємось, що

$$P_{ij,k} + P_{kj,i} = 0. \quad (13)$$

Перепозначимо індекси i та j та додамо до (7), будемо мати

$$P_{ij,k} = 0. \quad (14)$$

А це веде до

$$R_{hijk,l} = 0. \quad (15)$$

Що й треба було довести.

Псевдоріманові простори, в яких тензор Рімана є коваріантно сталим, називають *симетричними* [7].

Зауважимо, що із (8) для $n = 4$ витікає

$$P_{ij} = \frac{1}{2}R_{ij} \quad (16)$$

і тоді (6) прийме вигляд

$$R_{hijk} = \frac{1}{2}(R_{hk}g_{ij} - R_{hj}g_{ik} + R_{ij}g_{hk} - R_{ik}g_{hj}). \quad (17)$$

Псевдоріманові простори, в яких тензор Річчі коваріантно сталий, називають *Річчі симетричними*. Симетричні псевдоріманові простори є Річчі симетричними [5; 8].

Умови інтегрування для Річчі симетричних просторів

$$R_{\alpha i}R_{jkl}^{\alpha} + R_{\alpha j}R_{ikl}^{\alpha} = 0. \quad (18)$$

Підставляючи значення тензора Рімана, отримаємо

$$R_{\alpha i}R_l^{\alpha}g_{jk} - R_{\alpha i}R_k^{\alpha}g_{jl} + R_{\alpha j}R_l^{\alpha}g_{ik} - R_{\alpha j}R_k^{\alpha}g_{il} = 0. \quad (19)$$

Згорнемо по індексам j, k

$$4R_{\alpha i}R_l^\alpha = \rho g_{il}, \quad (20)$$

де $\rho = R_{\alpha\beta}R_\gamma^\alpha g^{\beta\gamma}$.

Коваріантно диференціюючи останнє переконаємось, що $\rho = const$.

Таким чином,

Наслідок 1. *В конформно-пласких келерових просторах, відмінних від пласких, тензор Річчі задовольняє умовам (26).*

Як відомо, клас конформно-пласких просторів не перевищує двох.

Розглянемо простори першого класу.

3. Простори першого класу.

Простором V_n першого класу називають гіперповерхню плаского простору.

Його тензорні ознаки, необхідні та достатні умови мають вигляд

$$R_{hijk} = \epsilon(b_{hk}b_{ij} - b_{hj}b_{ik}), \quad (21)$$

тут $\epsilon = \pm 1$; $b_{hi} = b_{ih}$,

$$b_{ij,k} = b_{ik,j}. \quad (22)$$

Згортаючи (15), отримаємо

$$R_{ij} = \epsilon(bb_{ij} - b_{\alpha j}b_i^\alpha), \quad (23)$$

де $b = b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$; $b_j^i = b_{\alpha j}g^{\alpha i}$.

Запишемо (23) в вигляді

$$b_{\alpha i}b_j^\alpha = bb_{ij} - \epsilon R_{ij}. \quad (24)$$

Домножимо (21) на b_m^h та згорнемо по h

$$b_m^\alpha R_{\alpha ijk} = \epsilon(b_m^\alpha b_{\alpha k}b_{ij} - b_m^\alpha b_{\alpha j}b_{ik}). \quad (25)$$

Після врахування (21) та (24) дістанемо

$$b_m^\alpha R_{\alpha ijk} = bR_{mijk} - R_{mk}b_{ij} + R_{mj}b_{ik}. \quad (26)$$

Подіємо операцією спряження по індексам j, k та віднімемо отримане від рівняння (26)

$$R_{mj}b_{ik} - R_{mk}b_{ij} - R_{m\bar{j}}b_{i\bar{k}} + R_{m\bar{k}}b_{i\bar{j}} = 0. \quad (27)$$

Згорнемо по індексам m, j

$$R_{\alpha k}b_i^\alpha = \frac{R}{2}b_{ik}. \quad (28)$$

Для конформно-пласких келерових просторів першого класу доведено

Теорема 4. *Не існує конформно-пласких келерових просторів першого класу відмінних від пласких.*

Доведення.

Рівняння (28) прийме вигляд

$$R_{\alpha i}b_j^\alpha = 0. \quad (29)$$

Домножуючи (21) на R_j^i таке, що $R_j^i = R_{\alpha j}g^{\alpha i}$, та згортаючи по i , отримаємо

$$R_i^\alpha R_{\alpha jkl} = 0. \quad (30)$$

Врахуємо (17)

$$R_{\alpha i}R_l^\alpha g_{jk} - R_{\alpha i}R_k^\alpha g_{jl} + R_{il}R_{jk} - R_{ik}R_{jl} = 0. \quad (31)$$

Згорнемо по індексам j, k

$$R_{\alpha i}R_l^\alpha = 0. \quad (32)$$

Тоді (31) прийме вигляд

$$R_{il}R_{jk} - R_{ik}R_{jl} = 0. \quad (33)$$

Подіємо операцією спряження по індексам j, k

$$R_{il}R_{jk} - R_{i\bar{k}}R_{j\bar{l}} = 0. \quad (34)$$

Симетруючи по індексам i та k , дістанемо

$$R_{il}R_{jk} + R_{kl}R_{ji} = 0. \quad (35)$$

Перепозначимо індекси i та l та додамо до (33), це дозволить переконатись, що $R_{ij} = 0$.

Таким чином, теорему доведено.

Наслідок 2. Клас конформно-пласких келерових просторів дорівнює двом.

Розглянемо властивості конформно-пласких келерових просторів, які витікають із того, що вони допускають конформні відображення на пласкі псевдоріманові простори.

4. Конформні відображення

Нехай V_n ($n > 2$) псевдоріманів простір з метричним тензором $g_{ij}(x)$ і \bar{V}_n також псевдоріманів простір з метричним тензором $\bar{g}_{ij}(x)$. Конформним відображенням називають взаємно-однозначну відповідність між точками просторів V_n і \bar{V}_n таке, що

$$\bar{g}_{ij}(x) = e^{2\sigma(x)} g_{ij}(x), \quad (36)$$

тут σ - деяка функція [9].

Якщо σ - стала, то відображення називають *гомотетією*. Надалі, якщо це не обумовлено, ми обмежимося розглядом відображень відмінних від гомотетичних.

З (36) отримаємо

$$\bar{g}^{ij} = e^{-2\sigma} g^{ij}.$$

Мають місце формули:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \delta_i^h \sigma_j + \delta_j^h \sigma_i - \sigma^h g_{ij}; \quad (37)$$

для тензора Рімана

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \delta_k^h \sigma_{ij} - \delta_j^h \sigma_{ik} + g^{h\alpha} (\sigma_{\alpha h} g_{ij} - \sigma_{\alpha j} g_{ik}) + \Delta_1 \sigma (\delta_k^h g_{ij} - \delta_j^h g_{ik}); \quad (38)$$

для тензора Річчі

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n-2)\sigma_{ij} + (\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma) g_{ij}; \quad (39)$$

для скалярної кривини

$$\bar{R} = e^{-2\sigma} (R + 2(n-1)\Delta_2 \sigma + (n-1)(n-2)\Delta_1 \sigma). \quad (40)$$

Тут і надалі $\sigma_i \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} \equiv \sigma_{,i}$, $\sigma^h = \sigma_{\alpha} g^{\alpha h}$,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{,ij} - \sigma_{,i} \sigma_{,j}. \quad (41)$$

$\Delta_1\sigma$ і $\Delta_2\sigma$ - перший і другий символи Бельтрамі, що визначаються

$$\Delta_1\sigma = g^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta}; \quad \Delta_2\sigma = g^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha\beta},$$

кома ”,” — знак коваріантної похідної по зв'язності V_n .

Об'єкти конформно відповідного V_n простору \bar{V}_n позначатимемо рискою.

Введемо в розгляд інваріант S такий, що

$$\sigma = -\ln|S|, \quad (42)$$

тоді (36) наберуть вигляду

$$\bar{g}_{ij}(x) = S^{-2}g_{ij}.$$

Послідовно диференціюючи (42), отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{,i} &= -\frac{1}{S}S_{,i}; \\ \sigma_{,ij} &= -(S \cdot S_{,ij} - S_{,i}S_{,j}) \cdot S^{-2}; \\ \sigma_{ij} &= -S_{,ij} \cdot S^{-1}. \end{aligned}$$

Крім того

$$\Delta_1\sigma = \Delta_1S \cdot S^{-2}; \quad \Delta_2\sigma = (\Delta_1S - S\Delta_2S) \cdot S^{-2}.$$

Для конформно-пласких келерових просторів, відмінних від пласких, з (46) отримуємо

$$\Delta_2\sigma + \Delta_1\sigma = 0 \quad (43)$$

або

$$\Delta_1S = \frac{S}{2}\Delta_2S.$$

Тоді для тензора Річчі

$$R_{ij} + 2(\sigma_{,ij} - \sigma_{,i}\sigma_{,j}) + \Delta_1\sigma g_{ij} = 0 \quad (44)$$

або

$$R_{ij} - 2S^{-1}S_{,ij} + \Delta_1SS^{-2}g_{ij} = 0$$

та

$$R_{ij} = \frac{2}{S}S_{,ij} - \frac{\Delta_1S}{S^2}g_{ij}. \quad (45)$$

Домножимо рівняння (17) на σ^α :

$$2\sigma_{,\alpha}R_{ijk}^\alpha = \sigma_\alpha R_k^\alpha g_{ij} - \sigma_\alpha R_j^\alpha g_{ik} + \sigma_{,k}R_{ij} - \sigma_{,j}R_{ik}. \quad (46)$$

На останнє рівняння подіємо операцією спряження по індексам j, k та віднімемо отриманий вираз, тоді дістанемо

$$\begin{aligned} \sigma_{,\alpha}R_k^\alpha g_{ij} - \sigma_{,\alpha}R_j^\alpha g_{ik} + \sigma_{,k}R_{ij} - \sigma_{,j}R_{ik} - \sigma_\alpha R_{\bar{k}}^\alpha g_{i\bar{j}} + \\ + \sigma_{,\alpha}R_{\bar{j}}^\alpha g_{i\bar{k}} - \sigma_{,\bar{k}}R_{i\bar{j}} + \sigma_{,\bar{j}}R_{i\bar{k}} = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Отримаємо наступний вираз після того, як просиметруємо по i, j попередню рівність

$$\begin{aligned} 2\sigma_{,k}R_{ij} - \sigma_{,j}R_{ik} - \sigma_{,i}R_{jk} + 2\sigma_{,\alpha}R_k^\alpha g_{ij} - \sigma_{,\alpha}R_j^\alpha g_{ik} - \\ - \sigma_{,\alpha}R_i^\alpha g_{jk} - \sigma_{,\bar{j}}R_{i\bar{k}} - \sigma_{,\bar{i}}R_{\bar{j}k} - \sigma_{,\alpha}R_{\bar{j}}^\alpha g_{i\bar{k}} - \sigma_{,\alpha}R_{\bar{i}}^\alpha g_{\bar{j}k} = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Домножимо на вектор $\sigma^k, \sigma^k = \sigma_{,\alpha}g^{\alpha k}$

$$\sigma_{,\alpha}\sigma^\alpha R_{ij} - \sigma_{,j}R_i^\alpha \sigma_{,\alpha} - \sigma_{,i}R_j^\alpha \sigma_{,\alpha} - \sigma_{,\alpha}\sigma^\beta R_\beta^\alpha g_{ij} - \sigma_{,\bar{j}}R_{\bar{i}}^\alpha \sigma_{,\alpha} - \sigma_{,\bar{i}}R_{\bar{j}}^\alpha \sigma_\alpha = 0. \quad (49)$$

Якщо $\Delta_1 \neq 0$, то

$$R_{ij} = \frac{1}{\Delta_1 \sigma} (\sigma_{,j}R_i^\alpha \sigma_\alpha + \sigma_{,i}R_j^\alpha \sigma_\alpha + \sigma_{,\bar{j}}R_{\bar{i}}^\alpha \sigma_{,\alpha} + \sigma_{,\bar{i}}R_{\bar{j}}^\alpha \sigma_\alpha - \sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta}R^{\alpha\beta} g_{ij}). \quad (50)$$

Таким чином,

Теорема 5. Тензор Річчі конформно-пласких келерових просторів задовольняє умовам (44) якщо вектор σ_i не ізотропний.

Отже, конформно-пласкі келерові простори є узагальнено квазі-ейнштейновими псевдорімановими просторами [10].

Псевдоріманів простір V_n з метричним тензором g_{ij} називають *локально звідним*, якщо в деякому околі кожної його точки M є можливість вибрати таку систему координат y^1, y^2, \dots, y^n , відносно якої основна матрична форма має вигляд

$$I = g_{pq}(y^r)dy^p dy^q + g_{\sigma\mu}(y^\nu)dy^\sigma dy^\mu, \quad (51)$$

$$(p, q, r = 1, 2, \dots, m; \sigma, \mu, \nu = m + 1, m + 2, \dots, n).$$

Тут g_{pq} залежать лише від y^1, y^2, \dots, y^m , а $g_{\sigma\mu}$ — тільки від $y^{m+1}, y^{m+2}, \dots, y^n$.

В подальшому, локально звідні простори будемо називати просто звідними.

Таким чином, звідний псевдоріманів простір $V_n(g_{ij})$, згідно з означенням, являє собою добуток двох псевдоріманових просторів $V_m^1(g_{pq})$ та $V_{n-m}^2(g_{\sigma\mu})$

$$g_{ij} = \left(\begin{array}{c|c} g_{pq} & 0 \\ \hline - & - \\ 0 & | \ g_{\sigma\mu} \end{array} \right) \quad (52)$$

Кожен із просторів V_m^1 та V_{n-m}^2 може в свою чергу приводитись чи не приводитись, і тому формулу (51) можна записати у вигляді

$$ds^2 = \sum_{k=1}^r ds_k^2 \quad (r > 1),$$

де ds_k^2 — квадратична форма простору V_{m_k} ($m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$).

Псевдоріманів простір V_n звідний тоді і тільки тоді, коли в ньому існує симетричний тензор $a_{ij} = cg_{ij}$ (при деякому сталому c), що задовольняє умовам

$$a_{i\alpha} a_j^\alpha = a_{ij} \quad (53)$$

та

$$a_{ij,k} = 0, \quad (54)$$

де $a_j^i = a_{\alpha j} g^{\alpha i}$.

Рівняння (56) та (53) це інваріантна (відносно вибору системи координат) умова, необхідна та достатня для того, щоб псевдоріманів простір V_n був звідним.

В такому вигляді її сформулював П.А. Широков [11].

Тензор a_{ij} , що задовольняє умові (53), називають *ідемпотентним*, а умові (54) — *коваріантно сталим*.

Вимогу ідемпотентності можна замінити на побажання, щоб матриця тензора a_{ij} мала прості елементарні дільники та дійсні корені (це довів

Г. Кручкович [14, р.163-201]). В такому вигляді ознака наводиться в якості вправи в книзі Л. П. Ейзенхарта "Ріманова геометрія"[13], але без вимоги існування дійсних коренів. Як легко переконатись, без цього ознака є помилковою.

Умови інтегрованості для рівняння (54) з урахуванням тотожності Річчі будуть

$$a_{\alpha i} R_{jkl}^{\alpha} + a_{\alpha j} R_{ikl}^{\alpha} = 0. \quad (55)$$

Циклюючи останнє по (i, k, l) , отримаємо

$$a_{\alpha i} R_{jkl}^{\alpha} + a_{\alpha k} R_{jli}^{\alpha} + a_{\alpha l} R_{jik}^{\alpha} = 0. \quad (56)$$

Згортаючи по індексам (j, k) , будемо мати

$$a_{\alpha i} R_l^{\alpha} - a_{\alpha l} R_i^{\alpha} = 0. \quad (57)$$

Тут

$$R_j^i = R_{\alpha j} g^{\alpha i}. \quad (58)$$

Про тензори a_{ij} та b_{ij} , для яких виконуються умови

$$a_i^{\alpha} b_{\alpha j} = a_j^{\alpha} b_{\alpha i}, \quad (59)$$

кажуть, що вони комутують.

Теорема 6. В звідних псевдоріманових просторах V_n , існує ідемпотентний тензор, що комутує з тензором Річчі V_n .

Для конформно-пласких просторів із (55) отримаємо

$$\begin{aligned} a_{\alpha i} P_l^{\alpha} g_{jk} - a_{\alpha i} P_k^{\alpha} g_{jl} + a_{il} P_{jk} - a_{ik} P_{jl} + a_{\alpha j} P_l^{\alpha} g_{ik} - \\ - a_{\alpha j} P_k^{\alpha} g_{il} + a_{jl} P_{ik} - a_{jk} P_{il} = 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Проальтернуємо по індексам j та l з урахуванням леми

$$\begin{aligned} a_{\alpha i} P_l^{\alpha} g_{jk} - a_{\alpha i} P_j^{\alpha} g_{lk} - a_{\alpha j} P_k^{\alpha} g_{il} + a_{l\alpha} P_k^{\alpha} g_{ij} + \\ + a_{il} P_{jk} - a_{ij} P_{lk} + a_{lk} P_{ij} - a_{jk} P_{il} = 0. \end{aligned} \quad (61)$$

Перепозначимо індекси i та l

$$a_{\alpha l} P_i^{\alpha} g_{jk} - a_{\alpha l} P_j^{\alpha} g_{ik} - a_{\alpha j} P_k^{\alpha} g_{il} + a_{i\alpha} P_k^{\alpha} g_{lj} +$$

$$+a_{il}P_{jk} - a_{lj}P_{ik} + a_{ik}P_{lj} - a_{jk}P_{il} = 0. \quad (62)$$

Додамо рівняння (62) та (60)

$$a_{\alpha l}P_i^\alpha g_{jk} - a_{\alpha j}P_k^\alpha g_{il} + a_{il}P_{jk} - a_{jk}P_{il} = 0. \quad (63)$$

Згорнемо (63) по індексам j та k

$$a_{\alpha l}P_i^\alpha = \hat{a}g_{il} - \frac{P}{n}a_{il} + \frac{a}{n}P_{il}, \quad (64)$$

тут $\hat{a} = a_{\alpha\beta}P^{\alpha\beta} \cdot \frac{1}{n}$; $a = a_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$.

Підставимо рівняння (64) в (63)

$$a_{il} \left(P_{jk} - \frac{P}{n}g_{jk} \right) - a_{jk} \left(P_{il} - \frac{P}{n}g_{il} \right) + \frac{a}{n}P_{il}g_{jk} - \frac{a}{n}P_{jk}g_{il} = 0. \quad (65)$$

Так як $P_{jk} - \frac{P}{n}g_{jk} \neq 0$, то можемо підібрати вектор ξ^i такий, що $\left(P_{\alpha\beta} - \frac{P}{n}g_{\alpha\beta} \right) \xi^\alpha \xi^\beta = 1$. Домножимо (65) на $\xi^j \xi^k$ та згорнемо по індексам j та k

$$a_{il} = \frac{1}{\tau}P_{il} + \frac{2}{\tau}g_{il}, \quad (66)$$

тут

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \xi^\alpha \xi^\beta \left(a_{\alpha\beta} - \frac{a}{n}g_{\alpha\beta} \right); \\ \frac{2}{\tau} &= \xi^\alpha \xi^\beta \left(\frac{a}{n}P_{\alpha\beta} - \frac{P}{n}a_{\alpha\beta} \right). \end{aligned}$$

Таким чином, має місце

Теорема 7. В конформно-пласких просторах V_n тензор a_{ij} , що задовольняє рівнянням (55) є лінійною комбінацією тензора P_{ij} та метричного тензора g_{ij} .

Для келерових конформно-пласких просторів після врахування рівнянь (16) умови (66) приймуть вид

$$a_{ij} = \frac{1}{\tau}R_{ij} + \frac{2}{\tau}g_{ij}. \quad (67)$$

Тоді умова ідемпотентності тензора a_{ij} матиме вигляд

$$\left(\frac{1}{\tau}R_{\alpha i} + \frac{2}{\tau}g_{\alpha i} \right) \left(\frac{1}{\tau}R_j^\alpha + \frac{2}{\tau}\delta_j^\alpha \right) = \frac{1}{\tau}R_{ij} + \frac{2}{\tau}g_{ij}. \quad (68)$$

Врахувавши (20) отримаємо

$$\left(\frac{1}{\tau} \frac{2}{\tau} - \frac{1}{2}\right) R_{ij} + \left(\frac{1}{16} \frac{1^2}{\tau} \cdot \rho + \frac{2^2}{\tau}\right) g_{ij} = 0. \quad (69)$$

Згорнувши, переконаємось, що

$$\frac{1}{16} \frac{1^2}{\tau} \cdot \rho + \frac{2^2}{\tau} - \frac{2}{\tau} = 0 \quad (70)$$

та

$$\frac{1}{\tau} \left(\frac{2}{\tau} - \frac{1}{2}\right) = 0. \quad (71)$$

Так як $\frac{1}{\tau} \neq 0$, то із останнього витікає $\frac{2}{\tau} = \frac{1}{2}$.

Тоді із рівняння (70) отримаємо

$$\frac{1^2}{\tau} \cdot \rho = 4.$$

Тобто

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{\sqrt{\rho}}.$$

Визначимо сталу ρ через внутрішні об'єкти келерового простору. Для цього згорнемо рівняння (20), тоді

$$\rho = R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}. \quad (72)$$

Тепер рівняння (67) прийме остаточний вигляд

$$a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}}} R_{ij} + \frac{1}{2} g_{ij}. \quad (73)$$

Таким чином, нами побудований в конформно-пласкому келеровому просторі коваріантно сталий ідемпотентний тензор, а значить має місце

Теорема 8. *Конформно-пласкі келерові простори належать до звідних псевдоріманових просторів.*

ВИСНОВКИ

Доведено, що існують лише чотирьохвимірні келерові простори. Ці простори є симетричними псевдорімановими просторами з нульовою скалярною кривиною. По вигляду, який за необхідністю має тензор Річчі вказаних просторів, їх можна віднести до спеціальних майже ейнштейнових просторів. Конформно-пласкі келерові простори не можуть бути реалізовані в якості гіперповерхні плаского псевдоріманового простору. Їх клас за необхідністю дорівнює двом.

Метричний тензор конформно-пласких келерових просторів в спеціальній системі координат допускає реалізацію у вигляді $V_2 \times V_2$. Тензорна ознака зведення, необхідна і достатня умова, полягає в існуванні коваріантно сталого не пропорційного метричному тензору ідемпотентного тензора. Доведено, що такий тензор є лінійною комбінацією тензора Річчі та метричного тензора. Умови ідемпотентності дозволили обчислити коефіцієнти цієї лінійної комбінації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Широков П. А.** Постійні поля векторів і тензорів другого порядку в ріманових просторах / П. А. Широков // Изв.Каз.ун. — 1925. — Т.2, №25. — С. 256–280.
2. **Kähler E.** Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metric / E. Kähler // Sem. Hamburg. Univ. — 1933. — Vol.9. — P. 173–186.
3. **Lesechko O.** Conformally flat Kähler spaces / O. Lesechko, O. Latysh, and T. Sychak // AIP Conference Proceedings. — 2020. — Vol. 2302. — 040004. <https://doi.org/10.1063/5.0034024>.
4. **Fedorova A.** The only Kähler manifold with degree of mobility at least 3 is (CP(n), g Fubini-Study) / A. Fedorova, V. Kiosak, V. Matveev, S. Rosemann // Proceedings of the London Mathematical Society. — 2012. <https://doi.org/10.1112/plms/pdr053>.
5. **Mikeš J.** Geodesic mappings of manifolds with affine connection / J. Mikeš, V. Kiosak, O. Vanžurova. — Palacký University Press, Olomouc, 2008.
6. **Hinterleitner I.** $\varphi(\text{Ric})$ -Vector Fields on Conformally Flat Spaces / I. Hinterleitner, V. Kiosak // Proceedings of American Institute of Physics. — 2009. — Vol.1191. — P. 98–103. <https://doi.org/10.1063/1.3275604>.
7. **Kiosak V.** Holomorphically Projective Mappings of Special Kähler Manifolds / V. Kiosak, O. Savchenko, T. Shevchenko // AIP Conference Proceedings. — 2018. — Vol.2025. — 08004. <https://doi.org/10.1063/1.5064924>.

8. **Кіосак В.** Геодезичні Річчі-симетричні псевдоріманові простори / В. Кіосак, Л. Кусік, В. Ісаєв // Праці Міжнародного центру геометрії. — 2022. — Т.15, №2. — С. 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
9. **Kiosak V.** On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces / V. Kiosak, O. Savchenko, O. Gudyreva // AIP Conference Proceedings. — 2019. — Vol.2164. — 040001. <https://doi.org/10.1063/1.5130793>.
10. **Hinterleitner I.** Special Einstein's equations on Kähler manifolds / I. Hinterleitner, V. Kiosak // Archivum Mathematicum. — 2010. — Vol.46, №5. — P. 333–337.
11. **Широков П. А.** Про конкурентні напрямки в риманових просторах / П. А. Широков // Изв.Каз.ун. — 1939. — Т.3, №7. — С. 77-87.
12. **Каган В. Ф.** Субпроективні простори / В. Ф. Каган. — М.: Фізматліт, 1961.
13. **Ейзенхарт Л. П.** Риманова геометрія / Л. П. Ейзенхарт. — М.: ІЛ, 1948.

Lesechko O., Soloviov A.

CONFORMALLY FLAT KÄHLERIAN SPACES

Summary

We study the geometric properties of Kähler spaces admitting conformal mappings, other than homothetic mappings, to flat pseudo-Riemannian spaces. It is proved that there are no non-flat conformally flat Kählerian spaces with dimensions other than four. It is shown that four-dimensional conformally flat spaces can be embedded in six-dimensional flat pseudo-Riemannian spaces. An idempotent covariantly stable metric tensor is constructed in conformally flat Kählerian spaces and thus it is proved that these spaces are reduced pseudo-Riemannian spaces.

The study is carried out locally, using tensor methods without restrictions on the signature and signification of the metric tensor of the Kählerian space. In this paper, we make extensive use of a special operation (conjugation) introduced for Kählerian spaces and its properties for Riemann and Ricci tensors.

Key words: pseudo-Riemannian spaces, Ricci tensor, Riemann tensor, Kählerian spaces, conformal mappings, conformally flat Kählerian spaces.

REFERENCES

1. Shirokov, P.A. (1925). Postiyni polya vectoriv i tenzoriv drugogo poryadku v rimanovukh prostorakh [Constant fields of vectors and tensors of second order on Riemannian spaces]. *Izv. Kaz.f.m.o.*, Vol. 2, №25, P. 256–280.
2. Kähler, E. (1933). Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metric. *Sem. Hamburg. Univ.*, Vol. 9, P. 173–186.
3. Lesechko, O., Latysh, O., Sychak, T. (2020). Conformally flat Kähler spaces. *AIP Conference Proceedings*. Vol. 2302, 040004. <https://doi.org/10.1063/5.0034024>.
4. Fedorova, A., Kiosak, V., Matveev, V., Rosemann, S. (2012). The only Kähler manifold with degree of mobility at least 3 is (CP(n), g Fubini-Study), *Proceedings of the London Mathematical Society*. <https://doi.org/10.1112/plms/pdr053>.
5. Mikeš, J., Kiosak, V., Vanžurova, O. (2008). *Geodesic mappings of manifolds with affine connection*, Palacký University Press, Olomouc.
6. Hinterleitner, I., Kiosak, V. (2009). $\varphi(\text{Ric})$ -Vector Fields on Conformally Flat Spaces. *Proceedings of American Institute of Physics*, Vol. 1191, P. 98–103. <https://doi.org/10.1063/1.3275604>.

7. Kiosak, V., Savchenko, O., Shevchenko, T. (2018). Holomorphically Projective Mappings of Special Kähler Manifolds. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2025, 08004. <https://doi.org/10.1063/1.5064924>.
8. Kiosak, V., Kusik, L., Isaiev, V. (2022). Geodezychni Richi-symetrychni psevdorimanovi prostory [Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces]. *Proceedings of the International Geometry Center*, Vol. 15, P. 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
9. Kiosak, V., Savchenko, O., Gudyreva, O. (2019). On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2164, 040001. <https://doi.org/10.1063/1.5130793>.
10. Hinterleitner, I., Kiosak, V.(2010). Special Einstein's equations on Kähler manifolds. *Archivum Mathematicum*, Vol. 46, №5, P. 333–337.
11. Shirokov, P.A. (1939). Pro konkurentni napryamky v rimanovykh prostorakh [On competitive directions in Riemannian spaces]. *Izv.Kaz.f.m.o.*, Vol. 3, №7, P. 77–87.
12. Kagan, V. (1961). *Subproektyvni prostory [Subprojective spaces]*. Moscow:Fizmatgiz.
13. Eisenhart, L. (1997). *Riemanova geometriya [Riemannian geometry]*. Princeton University Press.

УДК 514.7

С. Г. Лейко

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

І-ІНТЕГРАЛ ДЛЯ ІЗОПЕРИМЕТРИЧНИХ ЕКСТРЕМАЛЕЙ ПОВОРОТУ

В даній роботі розглянуто геодезичний потік на сферичному дотичному розшаруванні двомірного ріманового многовиду з метрикою Сасакі та показано, що, якщо базисний многовид локально ізометричний поверхні обертання, то відповідна потоку гамільтонова система цілком інтегрована за Ліувіллем. Звідси, як наслідок, знаходяться траєкторії потоку в квадратурах.

MSC: 53B20.

Ключові слова: псевдоріманові простори, екстремалі повороту, інтеграл Клеро, варіаційна задача.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305259](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305259).

Вступ

Як відомо, гамільтонові рівняння складають один з найважливіших класів диференціальних рівнянь. Зокрема, рівняння цього виду виникають в задачі знаходження геодезичних кривих на ріманових многовидах. При цьому серед всіх гамільтонових систем випадок цілком інтегрованих з'являється вкрай рідко [1-4]. В даній роботі розглянуто геодезичний потік на сферичному дотичному розшаруванні двомірного ріманового многовиду з метрикою Сасакі та показано, що, якщо базисний многовид локально ізометричний поверхні обертання, то відповідна потоку гамільтонова система цілком інтегрована за Ліувіллем. Звідси, як наслідок, знаходяться траєкторії потоку в квадратурах.

Дане дослідження виникло у зв'язку з вивченням автором варіаційних задач для функціоналів повороту кривих [5-9]. З'ясувалось, що базисні траєкторії потоку (тобто проєкції траєкторій потоку на базу) являються ізопериметричними екстремалами повороту та характеризуються деякими екстремальними властивостями. Знайдений нами для цих екстремалей інтеграл (узагальнюючий інтеграл Клеро для геодезичних кривих) виявився саме тим відсутнім інтегралом для повної інтегрованості геодезичного потоку на сферичному дотичному розшаруванні з метрикою Сасакі [11; 12]

в випадку, коли базисний многовид локально ізометричний поверхні обертання. Остання обставина аналогічна тому, як класичний інтеграл Клеро приводить до повної інтегруємості геодезичного потоку на поверхні обертання [1; 2].

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Ізопериметричні екстремалі повороту на двовимірних ріманових многовидах

В рімановому просторі (M^n, g) розглянемо функціонал, який має довжину $l[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j)^{0.5} dt$ та функціонал абсолютного повороту $\theta[\gamma] = \int_0^l k_g dl$. Тут γ деяка параметризована крива, $\dot{x}^i \equiv \xi^i = \frac{dx^i}{dl}$ — компоненти дотичного вектору $\dot{\gamma}$, l — довжина дуги на кривій γ , k_g — її перша кривина Френе, а у випадку двовимірного простору $n = 2$ це абсолютна геодезична кривина.

Розглянемо для функціоналу поворота ізопериметричну варіаційну задачу

$$\delta\theta = 0, \quad l[\gamma] = \hat{l} = const$$

з фіксованими кінцями

$$\gamma(t_0) = p_0, \quad \gamma(t_1) = p_1.$$

Використанням стандартного методу Ейлера-Лагранжа, ми отримали, що розв'язок зазначеної задачі в двовимірному просторі задовольняють рівнянню

$$k_g = cK, \tag{1}$$

де c — ізопериметрична стала, яка залежить від фіксованої довжини \hat{l} , K — гаусова кривина простору. Крім того, в особливому випадку $K = 0$, розв'язком задачі являється довільна допустима крива (класу C^4 без точок розпрямлення). Криві, які задовольняють рівняння (1), названі нами ізопериметричними екстремаллями повороту (ІЕП) двовимірного простору (M^2, g) [6].

Відмітимо, що рівняння (1) раніше розглядалися в дослідженнях А. Пуанкаре у зв'язку з вивченням замкнутих геодезичних кривих овальної поверхні, до якого зводилась астрономічна «задача про три тіла» [13, с.229]. Нами встановлені екстремальні властивості ізопериметричних екстремалей повороту і отримані їх диференціальні рівняння у нормальній формі [8].

В випадку, якщо простір (M^2, g) реалізований на поверхні евклідового простору, ізопериметричним екстремалям повороту дана механічна інтерпретація [9].

На поверхнях обертання нами знайдений наступний інтеграл

$$r \sin w = e c \sin \varphi + c_1, \quad e = \pm 1, \quad c_1 = \text{const}, \quad (2)$$

де w — кут між екстремаллю та меридіаном в їх спільній точці, r — відстань від своєї точки до вісі обертання, φ — кут, який утворений дотичною до меридіану з віссю обертання [8].

2. Геодезичні криві на сферичному дотичному розшаруванні двовимірного ріманового многовиду з метрикою Сасаки

Метрика Сасаки вперше була розглянута на сферичному дотичному розшаруванні одиничних векторів $T_1 M^n$, а потім П. Надь узагальнив її на $T_\rho M^n$ — сферичне дотичне розшарування векторів, квадрат довжини яких є сталою $\rho > 0$ [10-12].

Нехай (M^2, g) — двовимірне рімановий многовид з метрикою

$$dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j, \dots = 1, 2.$$

Метрика Сасаки g^* дотичного розшарування TM^2 в індукованих координатах x^i, y^i

$$dt^2 = g_{ij} dx^i dx^j + g_{ij} Dy^i Dy^j, \quad Dy^k = dy^k + \Gamma_{ij}^k y^i dx^j \quad (3)$$

обмежується на сферичне дотичне розшарування $T_\rho M^2$ рівністю

$$g_{ij} y^i y^j = \rho.$$

Тут $\Gamma_{ij}^k(x^1, x^2)$ — коефіцієнти ріманової зв'язності (символи Христофеля) відносно метрики g .

Візьмемо в координатному околі многовиду (M^2, g) напівгеодезичні координати x^1, x^2 . Тоді

$$dl^2 = (dx^1)^2 + G(x^1, x^2)(dx^2)^2,$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{G_1}{2}, \quad \Gamma_{12}^2 = -\frac{G_1}{2G}, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{G_2}{2G},$$

решта символів Христофелю рівні нулю та гаусова кривина

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{11}}{G}.$$

В якості третьої координати x^3 на $T_\rho M^2$ візьмемо кут між дотичним вектором y^i та дотичним вектором $\frac{\partial}{\partial x^1}$ до першої координатної лінії в точці (x^1, x^2) . У цьому випадку

$$y^1 = \sqrt{\rho} \cos x^3, \quad y^2 = \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{G}} \sin x^3.$$

В координатах (x^1, x^2, x^3) метрика Сасаки g^* на $T_\rho M^2$ в силу (3) набуває вигляд

$$dt^2 = g_{\alpha\beta}^* dx^\alpha dx^\beta, \quad \alpha, \beta, \dots = 1, 2, 3,$$

$$(g_{\alpha\beta}^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & G + \rho \left((\sqrt{G})_1 \right)^2 & \rho (\sqrt{G})_1 \\ 0 & \rho (\sqrt{G})_1 & \rho \end{pmatrix}.$$

Звідси знаходимо компоненти взаємного метричного тензору $g^{*\alpha\beta}$

$$(g^{*\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & G^{-1} & -G^{-1} (\sqrt{G})_1 \\ 0 & -G^{-1} (\sqrt{G})_1 \rho^{-1} & G^{-1} \left((\sqrt{G})_1 \right)^2 \end{pmatrix}.$$

Та символи Христофелю першого та другого роду

$$\Gamma_{12,3}^* = \Gamma_{13,2}^* = -\Gamma_{23,1}^* = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{23}^*}{\partial x^1},$$

$$\Gamma_{12,2}^* = -\Gamma_{22,1}^* = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}^*}{\partial x^1},$$

$$\Gamma_{22,2}^* = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}^*}{\partial x^2}, \quad \Gamma_{22,3}^* = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{23}^*}{\partial x^2},$$

(решта – нулі);

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{*1} = g^{*1\gamma}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^* = \Gamma_{\alpha\beta,1}^*,$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{*2} = g^{*2\gamma}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^* = G^{-1}\Gamma_{\alpha\beta,2}^* - G^{-1}\left(\sqrt{G}\right)_1\Gamma_{\alpha\beta,3}^*,$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{*3} = g^{*3\gamma}\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^* = -G^{-1}\left(\sqrt{G}\right)_1\Gamma_{\alpha\beta,2}^* + \left[\rho^{-1} + G^{-1}\left(\left(\sqrt{G}\right)_1\right)^2\right]\Gamma_{\alpha\beta,3}^*.$$

Відносно введених координат x^α елемент повороту $d\Theta$ і абсолютна геодезична кривина $k_g(l)$ базисної кривої $x^i(l)$ набуває вигляд

$$d\Theta = dx^3 + \left(\sqrt{G}\right)_1 dx^2,$$

$$k_g = e \frac{d\Theta}{dl} = e \left(\frac{dx^3}{dl} + \left(\sqrt{G}\right)_1 \frac{dx^2}{dl} \right),$$

де знак $e = \pm 1$ вибирається так, щоб отримати абсолютне значення геодезичної кривини.

Якщо метрику Сасаки dt^2 записати у вигляді

$$dt^2 = (dx^1)^2 + \left(G + \rho \left(\left(\sqrt{G}\right)_1\right)^2\right) (dx^2)^2 + 2\rho \left(\sqrt{G}\right)_1 dx^2 dx^3 + \rho (dx^3)^2,$$

в силу попередніх рівностей, отримаємо

$$dt^2 = dl^2 + \rho d\Theta^2. \quad (4)$$

Розглянемо диференціальні рівняння геодезичних кривих $x^\alpha(t)$ на сферичному дотичному розшаруванні $T_\rho M^2$ з метрикою Сасаки g^* , віднесених до натурального параметру, тобто

$$\frac{d^2 x^\gamma}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{*\gamma} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0. \quad (5)$$

Підставивши сюди знайдені значення символів Христофеля, отримаємо

$$\frac{d^2 x^1}{dt^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = \rho \left(\sqrt{G}\right)_{11} \frac{dx^2}{dt} \frac{d\Theta}{dt}. \quad (6)$$

$$\frac{d^2 x^2}{dt^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = -\rho G^{-1} \left(\sqrt{G}\right)_{11} \frac{dx^1}{dt} \frac{d\Theta}{dt}. \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^3}{dt^2} + \left((\sqrt{G})_{11} - \rho G^{-1} \left((\sqrt{G})_1 \right)^2 (\sqrt{G})_{11} + \right. \\ \left. + G^{-1} G_1 (\sqrt{G})_1 \right) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^2}{dt} + \left((\sqrt{G})_{12} - \frac{1}{2} G^{-1} G_2 (\sqrt{G})_1 \right) \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 - \\ - \rho G^{-1} (\sqrt{G})_1 (\sqrt{G})_{11} \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^3}{dt} = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

З перших двох рівнянь системи(5) витікає, що вздовж геодезичної кривої $x^\alpha(t)$ на $T_\rho M^2$ має місце $g_{ij} \xi^i(t) \xi_1^j(t) = 0$, де $\xi^i(t) = \frac{dx^i}{dt}$ — дотичний вектор відповідної базисної кривої $x^i(t)$,

$$\xi_1^k \equiv \nabla_t \xi^k = \frac{d\xi^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \xi^i \xi^j$$

— коваріантна похідна вздовж базисної кривої $x^i(t)$ відносно ріманової зв'язності ∇ на базі M^2 . Отже, вздовж кожної базисної кривої

$$h \equiv \frac{1}{2} g_{ij} \xi^i(t) \xi^j(t) = const. \quad (9)$$

Обчислюючи геодезичну кривину базисних кривих $x^i(t)$, отримаємо внаслідок (5), (9)

$$\begin{aligned} k_g^2(t) &= \frac{\langle \xi, \xi \rangle \langle \xi_1, \xi_1 \rangle - \langle \xi, \xi_1 \rangle^2}{\langle \xi, \xi \rangle^3} = g_{ij} \xi_1^i(t) \xi_1^j(t) [g_{ij} \xi^i(t) \xi^j(t)]^{-2} = \\ &= (2h)^{-2} \left[\rho^2 (\sqrt{G})_{11}^2 \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 + \rho^2 G^{-1} (\sqrt{G})_{11}^2 \left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 \right] = \\ &= \rho^2 (2h)^{-2} G^{-1} (\sqrt{G})_{11}^2 \left[G \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 \right] \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 = \\ &= \rho^2 K^2 (2h)^{-1} \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2. \end{aligned}$$

Так як параметр вибраний натуральним, то

$$g_{\alpha\beta}^* \xi^\alpha(t) \xi^\beta(t) = g_{ij} \xi^i(t) \xi^j(t) + \rho \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 = 1.$$

Значить, вздовж геодезичних

$$2h + \rho a^2 = 1, \quad (10)$$

$$a \equiv \frac{d\Theta}{dt} = \frac{dx^3}{dt} + \left(\sqrt{G}\right)_1 \frac{dx^2}{dt} = const. \quad (11)$$

Таким чином,

$$k_g = \frac{e\rho a}{\sqrt{2h}} K. \quad (12)$$

Неважко переконатись в тому, що внаслідок (11) рівняння (8) витікає з перших двох рівнянь (6), (7).

Рівняння (11) дає проміжний інтеграл геодезичних та означає, що дотичний вектор $\frac{dx^i}{dt}$ вздовж базисної кривої $x^i(t)$ робить простий гвинтовий рух: $\Theta = at + a_0$, $a, a_0 - const$. В свою чергу, рівняння (12) показує, що базисна крива являється ізопериметричною екстремаллю повороту простору (M^2, g) с ізопериметричною сталою $c = \frac{e\rho a}{\sqrt{2h}}$.

Таким чином, результату П. Надя [10] можемо надати наступне формулювання

Теорема 1. *Якщо крива $x^\alpha(t)$ являється геодезичною в сферичному дотичному розшаруванні $T_\rho M^2$ з метрикою Сасаки dt^2 , тоді на базисному многовиді M^2 ненулевої гаусової кривини K базисна крива $x^i(t)$ є ізопериметричною екстремаллю повороту з ізопериметричною сталою $c = \frac{e\rho a}{\sqrt{2h}}$, $e = \pm 1$, її дотичний вектор $\frac{dx^i}{dt}$ здійснює вздовж неї поступовий рух зі сталою довжиною \sqrt{h} та простий гвинтовий поворот $\Theta = at + a_0$ зі сталою швидкістю a .*

3. Геодезичний потік на $T_\rho M^2$

Розглянемо кодотичне розшарування $T^*(T_\rho M^2)$ з локальними координатами x^α, p_α та природною канонічною симплектичною структурою $w = dp_\alpha \wedge dx^\alpha$. Візьмемо функцію Гамільтона

$$H(x, p) = \frac{1}{2} g^{*\alpha\beta} p_\alpha p_\beta$$

та відповідний їй гамільтонів потік $\dot{x} = sgrad H$ відносно симплектичної структури w на $T^*(T_\rho M^2)$. Так як H — перший інтеграл цього потоку, то одиничний кодотичний пучок $T_1^*(T_\rho M^2) = \{x^* \in T^*(T_\rho M^2) : \|p\| = 1\}$ інваріантний відносно потоку $sgrad H$. Обмеження цього потоку на $T_1^*(T_\rho M^2)$ буде геодезичним потоком на $T_\rho M^2$. За природного ізоморфізму $T^*(T_\rho M^2) \rightarrow T(T_\rho M^2)$ траєкторії геодезичного потоку $sgrad H$ переходять у криві, які складаються з дотичних векторів в $T_\rho M^2$.

Нехай Φ^t — локальна 1-параметрична група перетворень, породжена потоком $sgradH$. Окремі перетворення з Φ^t переводять пару $(x(0), p(0))$ в пару $(x(t), p(t)) = \Phi^t(x(0), p(0))$, де для отримання $x(t)$ необхідно провести геодезичну через точку $x(0)$ в напрямку ковектора $p(0)$ і тоді $x(t)$ відстоїть від $x(0)$ на відстані t вздовж цієї геодезичної, а ковектор $p(t)$ дотичний цієї геодезичної в $x(t)$ та спрямований так же, як і $p(0)$. Таким чином, при отриманні $x(t) = (x^\alpha(t))$ на базі необхідно проводити ізопериметричну екстремаль повороту через вихідну точку $x^i(0)$. З цією метою інтегруємо систему (6), (7) з урахуванням проміжного інтегралу (11) та стало a визначимо початковими даними:

$$a = \frac{dx^3(0)}{dt} + \left(\sqrt{G}\right)_1 \frac{dx^2(0)}{dt}.$$

Нарешті, для визначення компоненти траєкторії $x^3(t)$, інтегруємо рівняння (11) за вищевказаною сталою a .

Як відомо, гамільтоніан $H(x, p)$ являється основним першим інтегралом геодезичного потоку. З (11) маємо ще один перший інтеграл

$$a = p_\alpha \left(g^{*3\alpha} + \left(\sqrt{G}\right)_1 g^{*2\alpha} \right) = p^{-1} p_3.$$

Аналогічно, з (9) отримаємо перший інтеграл

$$h = \frac{1}{2} g_{ij} g^{*i\alpha} g^{*j\beta} p_\alpha p_\beta,$$

але в силу (10) інтеграли H, a, h залежні: $2H = 2h + \rho a^2$.

В випадку, коли многовид (M^2, g) локально ізометричний поверхні обернення, можливо вказати додатковий інтеграл потоку, який витікає з знайденого нами узагальненого інтегралу Клеро. Дійсно, нехай многовид (M^2, g) локально ізометричний поверхні обернення з меридіаном $f(r)$, де r — відстань до вісі обернення. Тоді

$$dl^2 = F^2 + r^2(dx^2)^2, \quad F = \sqrt{1 + f^2},$$

де x^2 — довгота точки. Вводячи нову координату $x^1 : dx^1 = Fdr$, отримаємо метрику dl^2 в вигляді

$$dl^2 = (dx^1)^2 + r^2(dx^2)^2,$$

тобто координати x^1, x^2 напівгеодезичні та $r(x^1) = \sqrt{G}$. Неважко переко-
натись в тому, що $\sin \varphi = F^{-1} = \left(\sqrt{G}\right)_1$. Так як ізопериметрична стала
для базисної траєкторії рівна $c = \frac{e\rho a}{\sqrt{2h}} = \frac{ep_3}{\sqrt{2h}}$, то тим самим узагальнений
інтеграл Клеро (2) набуває вигляд

$$k = \sqrt{G} \sin x^3 + \frac{p_3}{\sqrt{2h}}.$$

Враховуючи, що $\sin x^3 = \sqrt{\frac{G}{2h}} \frac{dx^2}{dt}$, отримаємо

$$k = \frac{G}{\sqrt{2h}} g^{*2\alpha} p_\alpha + \frac{p_3}{\sqrt{2h}} \left(\sqrt{G}\right)_1 = \frac{p_2}{\sqrt{2h}}.$$

Звідси витікає, що в даному випадку друга компонента p_2 імпульсу також
являється інтегралом геодезичного потоку.

Розглянемо дужку Пуасона канонічної симплектичної структури

$$\{F_1, F_2\} = \sum_{\alpha} \frac{\partial F_1}{\partial p_\alpha} \frac{\partial F_2}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial F_2}{\partial p_\alpha} \frac{\partial F_1}{\partial x^\alpha}.$$

Так як в розглянутому випадку гамільтоніан H не залежить відразу від
двох змінних x^2, x^3 , то неважко перевірити, що інтеграли H, p_2, p_3 знахо-
дяться у інволюції, тобто

$$\{H, p_2\} = \{H, p_3\} = \{p_2, p_3\} = 0.$$

Очевидно, що вказані три інтеграли незалежні та розв'язні відносно ім-
пульсів p_1, p_2, p_3 . Отже, виконана Теорема Ліувилля [1; 2] і функції H, p_2, p_3
утворюють повне інволютне сімейство інтегралів гамільтонових рівнянь

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}.$$

Тим самим має місце

Теорема 2. *Якщо рімановий многовид (M^2, g) локально ізометричний
поверхні обернення, то геодезичний потік сферичного дотичного розши-
рення $T_p M^2$ з метрикою Сасаки цілком інтегрований.*

Як витікає з результатів роботи [8], відповідна квадратура для бази-
сних траєкторій (які не є паралелями) має в координатах радіус-довгота
наступний вигляд

$$x^2 = \int_{r_0}^r \frac{ec + c_1 F}{r(r^2 - (ecF^{-1} + c_1)^2)^{\frac{1}{2}}} dr + x_0^2.$$

При $c = 0$ ця квадратура співпадає з відомою квадратурою для геодезичних кривих на поверхні обернення [14].

ВИСНОВКИ

В даній роботі розглянуто геодезичний потік на сферичному дотично-му розшаруванні двомірного ріманового многовиду з метрикою Сасакі та показано, що, якщо базисний многовид локально ізометричний поверхні обертання, то відповідна потоку гамільтонова система цілком інтегрована за Ліувіллем. Звідси, як наслідок, знаходяться траєкторії потоку в квадратурах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Фоменко А.Т.** Симплектична геометрія. Методи та додатки / А. Т. Фоменко. — М.: МГУ, 1988. — 413 с.
2. **Трофімов В.В.** Алгебра та геометрія інтегрованих диференціальних рівнянь. / В.В. Трофімов, А.Т.Фоменко. — М.: Факторіал, 1995. — 448 с.
3. Праці семінару з векторного та тензорного аналізу з їх додатками до геометрії, механіки та фізики. Наукове видання. — М.: МГУ, 1993. — Т. 25, № 1. — 127 с.
4. Праці семінару з векторного та тензорного аналізу з їх додатками до геометрії, механіки та фізики. Наукове видання. — М.: МГУ, 1993. — Т. 25, № 2. — 151 с.
5. **Лейко С.Г.** Варіаційні задачі для функціоналів повороту та спин-відображення псевдоріманових просторів / С. Г. Лейко // Изв. Вузів. Математика. — 1990. — № 10. — С. 9–17.
6. **Лейко С.Г.** Поворотні дифеоморфізми на поверхнях евклідова простору / С. Г. Лейко // Мат. замітки. — 1990. — Т. 47, № 3. — С. 52–57.
7. **Лейко С.Г.** Екстремалі функціоналів повороту кривих псевдо ріманова простору та траєкторії спин-частин в гравітаційних полях / С. Г. Лейко // Докл. РАН. — 1992. — Т. 325, № 4. — С. 659–664.
8. **Лейко С.Г.** Ізопериметричні екстремалі повороту на поверхнях у евклідовому просторі E^3 / С. Г. Лейко // Изв. вузів. Математика. — 1996. — № 6. — С. 25–32.
9. **Лейко С.Г.** Механічна інтерпретація ізопериметричних екстремалей повороту на поверхнях / С. Г. Лейко // Вісник Одеського держ. ун-ту. — 1999. — Т.4, №4. — С. 102–105.

10. **Nagy P.** On the tangent sphere bundle of Riemannian 2-manifold / P. Nagy // 1977. — № 29. — P. 203–208.
11. **Sasaki S.** On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifold / S. Sasaki // 1 Tohoku Math. J. — 1958. — № 10. — P. 338–354.
12. **Sasaki S.** On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifold / S. Sasaki // 2 Tohoku Math. J. — 1962. — № 14. — P. 146–155.
13. **Бляшке В.В.** Дифференціальна геометрія. / В.В. Бляшке. — М.-Л. ОНТИ-НКТП ССРСР, 1935. — 332 с.
14. **Каган В.Ф.** Основи теорії поверхонь у тензорному викладенні. / В.Ф. Каган. Ч.1. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. — 512 с.

Leiko S.

L-INTEGRAL FOR ISOPERIMETRIC EXTREMALS OF ROTATION

Summary

In this paper, the geodetic flux on a spherical tangent bundle of a two-dimensional Riemannian manifold with the Sasaki metric is considered and it is shown that, if the basis manifold is locally isometric of the surface of rotation, then the Hamiltonian system corresponding to the flow is fully integrated according to Liouville. Hence, as a consequence, the flow trajectories are in quadratures.

Key words: pseudo-Riemannian spaces, rotation extremals, Clairaut integral, variational problem.

REFERENCES

1. Fomenko, A.T. (1988). *Symplektychna geometriya. Metody ta dodatky [Symplektychna heometriia. Metody ta dodatky]*. M.: MGU, 413 p.
2. Trofimov, V.V., Fomenko, A.T. (1995). *Algebra ta heometriia intehrovanykh dyferentsialnykh rivnian*. M.: Faktorial, 448 p.
3. *Pratsi seminaru z vektornoho ta tenzornoho analizu z yikh dodatkamy do heometrii, mekhaniky ta fizyky*. (1993). Naukove vydannia, M.: MHU, Vol. 25, №1, 127 p.
4. *Pratsi seminaru z vektornoho ta tenzornoho analizu z yikh dodatkamy do heometrii, mekhaniky ta fizyky*. (1993). Naukove vydannia, M.: MHU, Vol. 25, №2, 151 p.
5. Leiko, S.H. (1990). Variatsiini zadachi dlia funktsionaliv povorotu ta spynvidobrazhennia psvedorimanovykh prostoriv. *Izv. Vuzov. Matematika*, №10, P. 9–17.
6. Leiko, S.H. (1990). Povorotni dyfeomorfizmy na poverkhniakh evklidova prostoru. *Mat. zamitky*, Vol. 47, №3, P. 52–57.
7. Leiko, S.H. (1992). Ekstremali funktsionaliv povorotu kryvykh psevdorimanova prostoru ta traiektorii spyn-chastyn v hravitatsiinykh poliakh. *Dokl. RAN*, Vol. 325, № 4, P. 659–664.
8. Leiko, S.H. (1996). Izoperymetrychni ekstremali povorotu na poverkhniakh u evklidovomu prostori E^3 . *Izv. vuzov. Matematika*, № 6, P. 25–32.
9. Leiko, S.H. (1999). Mekhanichna interpretatsiia izoperymetrychnykh ekstremalei povorotu na poverkhniakh. *Visnyk Odeskoho derzh. un-tu*, T.4, №4, P. 102–105.
10. Nagy, P. (1977). On the tangent sphere bundle of Riemannian 2-manifold. № 29, P. 203–208.
11. Sasaki, S. (1958). On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifold. *1 Tohoku Math .J.*, № 10, P. 338–354.

12. Sasaki, S. (1962). On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifold. *2 Tohoku Math. J.*, № 14, P. 146–155.
13. Bliashke, V.V. (1935). *Dyferentsialna heometriia*. M.-L. ONTY-NKTP SSSR, 332 p.
14. Kahan, V.F. (1947). *Osnovy teorii poverkhon u tenzornomu vykladenni, Ch.1*. M.-L.: HYTTL, 512 p.

УДК 519.6(045)

А. Л. Максимов, С. В. Прокоф'єва

Одеській національний університет ім. І. І. Мечнікова

ПІДХІД ДО ЕФЕКТИВНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ БАГАТОМІРНИХ ЕЙКОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У статті представлено розширений метод розв'язування ейконального рівняння в чотиривимірному просторі зі слабкими деформаціями. Ейкональне рівняння, поєднує хвильову оптику з геометричною оптикою та має різні фізичні інтерпретації, включаючи задачі пошуку найкоротших шляхів та обчислення електромагнітних або гравітаційних потенціалів. Запропонований метод розширює техніку трасування сфери до просторів багатьох вимірів з деформаціями і продемонстровано для задачі в просторі чотирьох вимірів. Метод використовує неявні функції для опису границь об'єктів, що побудовані з скінченного або нескінченного числа багатомірних примітивів. Нелінійне трасування сфери досягається генерацією на кожному кроці трасування звичайних (багатомірних) диференціальних рівнянь першого порядку з використанням гібридного методу розв'язання, що поєднує метод Ейлера, коли сфера знаходиться близько до границі, з методами вищого порядку, коли сфера знаходиться далеко від границь. Вплив нелінійних перетворень на процес трасування реалізується за допомогою матриці Якобі деформації. Підхід реалізовано як шейдерну програму на мові GLSL, а вплив нелінійних перетворень визначається за допомогою параметра перетворення, який впливає на матрицю Якобі. Обчислювальна продуктивність методу оцінюється через середню та максимальну частоти кадрів для різних значень параметра. Запропонований підхід може знайти застосування в таких галузях, як комп'ютерна графіка, часозалежна комп'ютерна томографія, сейсмічна томографія та астрофізичне моделювання, оптимальне керування.

MSC: 39-08, 53-08, 78M34.

Ключові слова: ейконал, рівняння, деформація, трасування, матриця Якобі, метод Ейлера, шейдер, GLSL.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305260](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305260).

Вступ

У поданій статті розглянуто питання побудови моделі та ефективного розв'язання окремого випадку ейконального рівняння у чотиривимірному просторі (який за бажання можна інтерпретувати як три виміри + час) для випадку, коли у цьому просторі є слабкі деформації (нелінійності).

Ейкональне рівняння - це нелінійне диференціальне рівняння, що виводиться із рівнянь Максвелла і пов'язує хвильову оптику з геометричною

оптикою. Це рівняння має декілька фізичних інтерпретацій, серед яких задача пошуку найкоротшого шляху та електромагнітний потенціал.

Досліджуваний випадок ейконального рівняння можна розглядати з точки зору завдань варіаційного обчислення, де ми можемо інтерпретувати деформований простір з границями як чотиривимірний многовид, в якому найкоротші (геодезичні) лінії не є прямими. У лінійному випадку (відсутність деформації) це рівняння можна розв'язати геометрично та ефективно запрограмувати. Такий підхід потребує відносно низьку обчислювальну потужність, тому застосовується в багатьох сферах, наприклад, у комп'ютерній графіці. Як правило, ейкональне рівняння використовується для 3-вимірного простору. Однак у разі деформованого простору розмірності більше 2, загально визнаний ефективний метод розв'язання невідомий.

Області застосування представленого підходу — спеціалізована комп'ютерна графіка, часозалежні комп'ютерна томографія, сейсмографія в геології, моделювання космічних нелінійних просторово-часових ефектів в астрофізиці, оптимальне керування.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Крайова задача для ейконального рівняння. Нелінійну крайову задачу для ейконального рівняння можна сформулювати так:

задано область Ω і функцію $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$, яка представляє локальний опір руху (наприклад, показник оптичного заломлення). Ця функція керує системою від початкового стану $\mathcal{P}_s \subset \Omega$ до цільового стану $\mathcal{P}_g \subset \delta\Omega$ з мінімально можливим значенням u (наприклад, відстані або часу).

Завдання — знайти розв'язок $u(p)$ ейконального рівняння:

$$|\nabla u(p)| = F(p), \quad (1)$$

$$F(p) > 0 \text{ for } p \in \Omega \subset \mathbb{R}^N,$$

$$u(p) = 0 \text{ for } p \in \mathcal{P}_g$$

Після розв'язання $u(p)$ представляє поле відстаней (або часів прибуття), що містить значення (наприклад, час), необхідне для переходу від будь-якої точки p до найближчої точки в \mathcal{P}_s за умови місцевого опору $F(p)$ руху.

Існує варіант рішення $\bar{u}(p)$, що доповнює $u(p)$, і яке представляє поле відстані, що містить значення, необхідні для переходу від будь-якої точки p до найближчої точки в \mathcal{P}_g за зворотним локальним опором $F(p)$ руху.

2. Дискретний підхід до розв'язування ейконального рівняння

На сьогоднішній день існує багато алгоритмів розв'язування ейконального рівняння для випадку 2d дискретного кодування нелінійностей (а в деяких випадках і для 3d сіток). Серед них можна виділити наступні популярні алгоритми: FMM (Fast Marching Method) - метод швидкого маршу, UFMM (Untidy Fast Marching Method)- "брудний"метод швидкого маршу, GMM (Group Marching Method)- груповий метод швидкого маршу, LSM (Lock Sweeping Method)- метод разблокуючого замітання, DDQM (Double Dynamic Queue Method)- метод подвійної динамічної черги [7]. Ці алгоритми використовуються в таких галузях, як комп'ютерний зір, медична томографія, геологія тощо. Загальна їх базова риса - обчислювальна динаміка (хвильовий метод) на регулярних сітках в просторах малих розмірів.

Дискретні підходи показують досить хороші результати для особливих випадків - малорозмірних (2D і, набагато рідше, 3D) просторів, де необхідно обирати потрібні алгоритми для кращої продуктивності. Однак цей підхід має кілька проблем - чим вище число розмірності простору, тим істотніше збільшується час обчислення алгоритмів. Крім того, навіть у просторі малої розмірності, але у якому відсутні явні межі простору, дискретний підхід не працює просто тому, що неможливо зберігати таку кількість вузлів сітки у пам'яті комп'ютера.

3. Використання функції знакової відстані SDF для рівняння ейконала

Поле відстані зі знаком (SDF) для рівняння ейконала є неявним представленням граничних умов і може представляти поле потенціалу для простору без явних меж. Такі поля дозволяють розв'язувати завдання у постановці (1) навіть з нескінченними просторами. Збільшення кількості вимірів простору не погіршує продуктивність так сильно, як при дискретному підході. Крім того, дослідження [11] демонструє можливість роботи з частково деформованими просторами.

Якщо Ω є підмножиною метричного простору P з метрикою d , тоді функція відстані зі знаком f визначається як (2) та ілюструється на рис.

1.

$$f(p) = \begin{cases} d(p, \partial\Omega) & p \in \Omega \\ -d(p, \partial\Omega) & p \in \Omega^c \end{cases}, \quad (2)$$

де $\partial\Omega$ позначає межу Ω , і відстань $d(p, \partial\Omega) = \inf_{p_0 \in \partial\Omega} d(p, p_0)$.

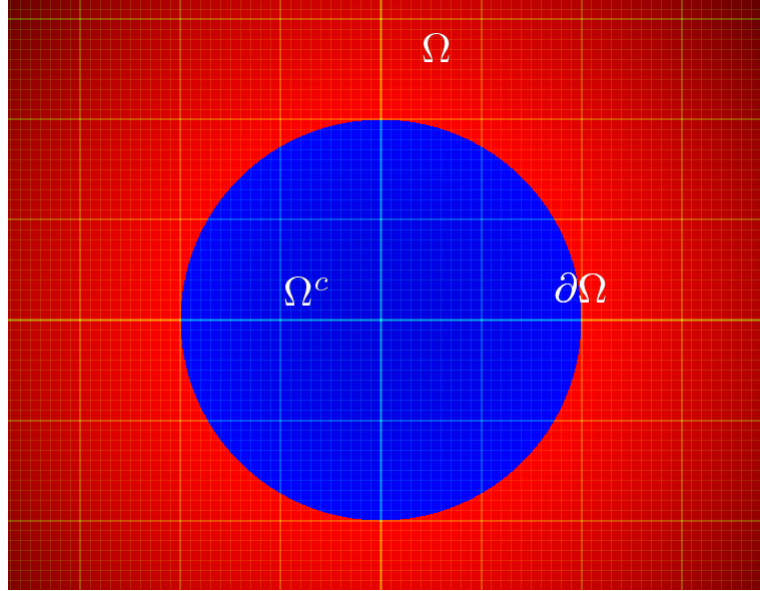


Рис. 1: Границя $\partial\Omega$ і підмножини Ω , Ω^c метричного простору P для визначення функції відстані зі знаком.

Якщо Ω є підмножиною \mathbb{R}^n з кусково гладкою границею, то функція відстані зі знаком диференційована майже всюди, а для евклідової метрики її градієнт задовольняє рівнянню

$$|\nabla f| = 1 \quad (3)$$

У випадку тривимірного простору формула (3) має такий вигляд:

$$|\nabla f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = 1 \quad (4)$$

Якщо межа $\partial\Omega$ знаходиться в C^k для $k \geq 2$, то $d(p)$ знаходиться в C^k у точках, досить близьких до межі $\partial\Omega$ [3]. Зокрема, на межі $\partial\Omega$ функція $f(p)$ задовольняє

$$\nabla f(p) = N(p) \quad (5)$$

де N — нормальне векторне поле (відносно до межі). Цей факт можна використовувати для терміналізації та оцінки плавності розв'язків в алгоритмах [13].

Алгоритми обчислення функції відстані зі знаком можуть бути, наприклад, загальними методами рівнів для підмножин простору. Будь-яка неявна функція $\Psi(p)$ задовольняє (2), але не завжди задовольняє (3). Але можна перетворити $\Psi(p)$ на $\tilde{f}(p)$, що задовольняє (2) і добре наближається до (3) використовуючи

$$\tilde{f}(p) = \frac{\Psi(p)}{|\nabla \Psi(p)|}, \quad (6)$$

4. Методи розв'язування рівняння ейконала за допомогою SDF

4.1. Маршування променя. Для розв'язання рівняння ейконала для полів відстаней в однорідному просторі можна використовувати метод маршування променя. З певної початкової позиції в багатовимірному просторі промінь просувається до тих пір, поки він не потрапить на граничну умову (гіперповерхню складеного багатовимірного об'єкта).

Якщо граничні умови неявно виконані за межами поля, то широко використана технологія розв'язання — це маршування променя від стартової точки в полі SDF доти, поки граничні умови не будуть виконані [14]. Точніше, треба знайти точку на промені $\mathbf{p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, де $\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}_0 + s \mathbf{n}$, яка в той же час лежить на границі $\partial\Omega$, що представлена неявним рівнянням $f(p) = 0$. У цій нотації s - це відстань (скаляр) від стартової точки, і \mathbf{n} це нормальний вектор променя.

Інформація про цю точку на поверхні $\partial\Omega$ може бути використана для подальших обчислень (нормаль, кривизна, і т.д.). Точку перетину променя з поверхнею $\partial\Omega$, заданою неявною граничною умовою, можна обчислити шляхом застосування методів знаходження коренів, що в загальному випадку є нетривіальною математичною задачею. Це було причиною розробки алгоритму маршування променя Перліном та Хоффертом [15]. Наприклад, точку перетину з неявною границею можна знайти шляхом обчислювання значення поля з фіксованими кроками, доки не буде досягнуто значення, близького до нуля.

Цей підхід можна проілюструвати псевдокодом:

Вибрати фіксований крок $step > 0$

Вибрати малий параметр $eps > 0$

Для заданого одиничного вектора n :

```
point = vector(0);
while(SDF(samplingPoint) > eps)
    point += step * n;
```

4.2. Трасування сфер Техніка маршу променю має одну головну проблему, а саме фіксований розмір кроку. Якщо розмір занадто малий, тоді алгоритму знадобиться занадто багато часу, щоб досягти точки на граничній умові. Якщо розмір кроку занадто великий, на марші променю можна пропустити значення, близьке до нуля (граничну умову!). Трасування сфери є розширенням алгоритму маршування променю, у якому розмір кроку не є фіксованим, а динамічно змінюється вздовж променя, встановлюючи для нього значення з даних поля відстані. Це гарантує, що промінь не пропустить граничну умову, оскільки поле SDF повертає відстань до найближчої граничної умови (яка може не лежати на промені!). У той же час промінь може проходити через порожній простір швидше [14].

Це налаштування розміру кроку розв'язує проблему перевищення кроку під час маршу променів. Алгоритм не може пропустити малі межі, оскільки розмір кроку буде зменшено поблизу межі, і промінь ніколи не переступить через саму межу. Трасування сфер названо на честь необмежених сфер, створених уздовж променя.

У цьому алгоритмі кількість кроків залежить від початкової точки променя. Наприклад, якщо шлях променя паралельний границі, то розмір кроку не зростає на цій ділянці шляху. Це може призвести до значних витрат на обчислення. Тому необхідно визначити мінімальний поріг розміру кроку $0 < \epsilon \ll 1$ і максимальну кількість кроків.

Псевдокод для трасування сфери:

Вибрати малий параметр $eps > 0$

Для заданого одиничного вектора n :

```
point=vector(0);
step = SDF(point);
while(abs(step) > eps)
```

```

step = SDF(point);
point += step * n;

```

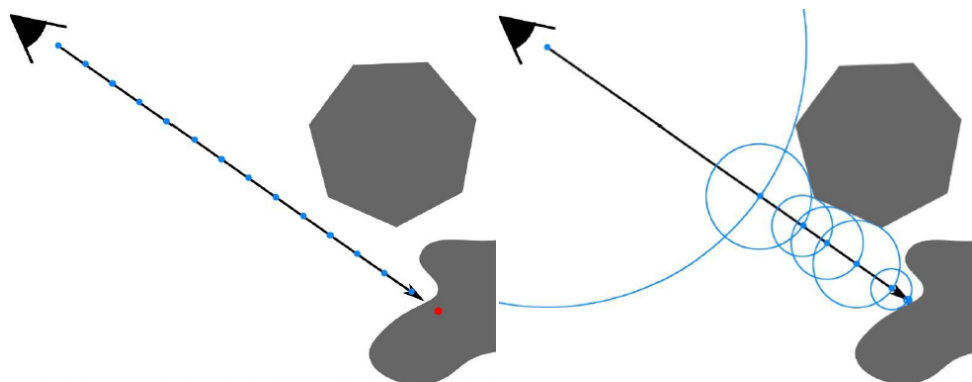


Рис. 2: Алгоритми маршування променю (ліворуч) і трасування сфери (праворуч).

5. Розв'язування ейконального рівняння за допомогою SDF в просторі з нелінійними перетвореннями

Нелінійне перетворення можна виразити як деформацію $D(p)$.

Розв'язання

$$f(D^{-1}\mathbf{p}(s)) = 0 \quad (7)$$

- поширений підхід до введення малих деформацій D у SDF. Цей підхід дозволяє кожен крок для трасування сфери з нелінійним перетворенням переписати так, щоб під час крокування вздовж променя в деформованому просторі кожна точка перетворювалася назад у недеформований простір, щоб знайти мінімальну відстань до найближчої (інверсно-деформованої) границі. Кожен крок буде виглядати так:

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{p}_i + |f(D^{-1}\mathbf{p}(s))|\mathbf{n}. \quad (8)$$

Тут \mathbf{n} нормований вектор напрямку променю.

Однак існує серйозне обмеження через складність обчислення D^{-1} . Це обчислення має бути доступним і ефективним. D^{-1} можна легко обчислити для афінних і деяких нелінійних перетворень, але це, як правило, складна операція. Крім того, має бути виконана умова $\|\nabla(f \circ D^{-1})\| \leq 1$, щоб задовольнити умову використання трасування сфери. Проблема в тому,

що f повертає відстань у недеформованому просторі, але промінь крокує у деформованому просторі. Якщо перетворення D є неперервними за Ліпшицем і асоційована константа Ліпшица $\lambda \geq \|\nabla(f \circ D^{-1})\|$ відома, тоді можна крокувати відповідно до $|f(\mathbf{p}_i)|/\lambda$. Для більш складних деформацій, ніж афінні перетворення, константи Ліпшица може бути важко або неможливо обчислити аналітично [11].

Всі труднощі викликані тим, що промінь трасується в деформованому просторі, а відстань обчислюється в недеформованому. У разі трасування в недеформованому просторі немає необхідності враховувати межі Ліпшица. Однак прямиий промінь у деформованому просторі деформується в деяку криву в недеформованому просторі

Згідно з [12] для деформування параметричних кривих, можна переписати рівняння променя в деформованому просторі як інтеграл:

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}(0) + s\mathbf{n} = \mathbf{p}(0) + \int_0^s \mathbf{n} d\sigma = \mathbf{p}(0) + \int_0^s \mathbf{p}'(\sigma) d\sigma. \quad (9)$$

В інтегралі $\mathbf{p}'(\sigma) = \mathbf{n}$ є першою похідною $\mathbf{p}(s)$ і є константою в недеформованому просторі. Щоб отримати рівняння променя в деформованому просторі, необхідно застосувати зворотну деформацію D^{-1} до попереднього рівняння:

$$\widehat{\mathbf{p}}(s) = D^{-1}(\mathbf{p}(0)) + \int_0^s J_D^{-1}(\mathbf{p}(\sigma))\mathbf{n} d\sigma. \quad (10)$$

Досить обчислити якобіан $J_{D^{-1}}$ зворотної деформації D^{-1} всередині інтеграла. Згідно з теоремою оберненої функції, якобіан зворотної деформації в деякій точці \mathbf{p} є оберненим якобіаном прямої деформації у відповідній точці $\widehat{\mathbf{p}}$. У цьому випадку якобіан є $n \times n$ матрицею. Після параметризації інтеграла (10) на довжину дуги в недеформованому просторі ми отримаємо інтеграл променя

$$\widehat{\mathbf{p}}(\widehat{s}) = D^{-1}(\mathbf{p}_0) + \int_0^{\widehat{s}} \widehat{\mathbf{n}}(\widehat{\mathbf{p}}(\sigma)) d\sigma \quad (11)$$

де

$$\widehat{\mathbf{n}}(\widehat{\mathbf{p}}) = \frac{J_D^{-1}(\widehat{\mathbf{p}})\mathbf{n}}{\|J_D^{-1}(\widehat{\mathbf{p}})\mathbf{n}\|} \quad (12)$$

Параметр \widehat{s} і поле відстані зі знаком $f(\widehat{\mathbf{p}})$ визначені в одному метричному просторі. Але все одно потрібно один раз обчислити D^{-1} для початкової точки \mathbf{p}_0 променя в деформованому просторі.

5.1. Задачі для необмеженого нелінійного ейконального рівняння

Нескінченні періодичні або квазіперіодичні функції можна використовувати в багатьох областях. Наприклад, для опису поверхні моря, архітектурних споруд тощо. Основною проблемою необмеженого нелінійного рівняння ейконала є великий обчислювальний час, отже, погана продуктивність. SDF може розв'язувати необмежене ейконального рівняння завдяки обчислюванню по модулю (операція $\text{mod}()$) без різкого зниження продуктивності.

6. Метод розв'язування необмеженого нелінійного ейконального рівняння Трасування сфери з деякими доповненнями може бути використано для розв'язування необмеженого нелінійного ейконального рівняння.

6.1. Базові функції та операції відстані зі знаком Трасування сфери засноване на використанні функції відстані зі знаком. Для кожного базового примітиву [17] має існувати функція відстані зі знаком. Функції (як точні, так і наближені) можна розширити для роботи з n -вимірним евклідовим метричним простором.

Формула (6) дає наближення першого порядку функції відстані зі знаком, яка є чудовою поблизу границі та хорошою для асимптотики для великих відстаней [18]. Однак використання формули (6) може погіршити поведінку деяких алгоритмів, заснованих на градієнті функції відстані зі знаком. Обчислювальні експерименти показують хорошу евристику для таких ситуацій. Вона складається з використання формули (6) для оцінки відстані до межі та водночас із використанням нормалізованого градієнта $|\nabla\Psi(p)|$ як хорошого наближення справжнього градієнта поля відстані.

Для певного класу базових фігур було розроблено хороші формули наближення як для відстані, так і для градієнта. Наприклад, використовують (14), тобто модифікацію (6) для узагальнених 2-вимірних кіл (13) (див. рис. 3):

$$\Psi(x, y)_l = x^l + y^l - r^l \quad (13)$$

$$\tilde{f}(p) = \frac{\Psi(p)}{|\nabla\Psi(p)|_q}, \quad (14)$$

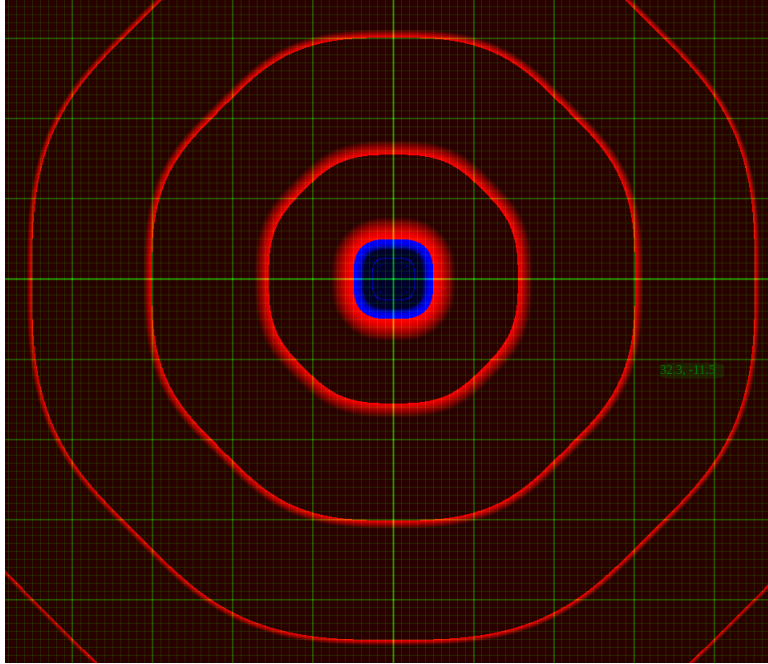


Рис. 3: Апроксимовано полем відстані (6) для узагальнених кіл.

де $|\cdot|_q$ – метрика Мінковського з $q = 1 - 2/l$ (Fig. 4)

Точна формула (15) для знакового поля відстані сфери є уніфікованою для будь-якої кількості вимірів. Тут \mathbf{p} - точка в n -мірному просторі, r - радіус сфери.

$$\text{sdSphere}(\mathbf{p}, r) = |\mathbf{p}/r| - 1 \quad (15)$$

Формула (16) для еліпсоїда наближена. Тут \mathbf{p} - точка в n -мірному просторі, r - значення великих півосей еліпсоїда. Операція $./$ - це паралельне ділення компонентів вектора чисельника на компоненти вектора знаменника.

$$\text{sdEllipsoid}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = (|\mathbf{p}./\mathbf{r}| - 1); \quad (16)$$

Найпростіша операція об'єднання реалізована як мінімальна відстань до найближчої межі:

$$\text{sd}_1(\mathbf{p}) \cup \text{sd}_2(\mathbf{p}) = \min(\text{sd}_1(\mathbf{p}), \text{sd}_2(\mathbf{p})) \quad (17)$$

Операція (18) повторення використовується для створення нескінчен-

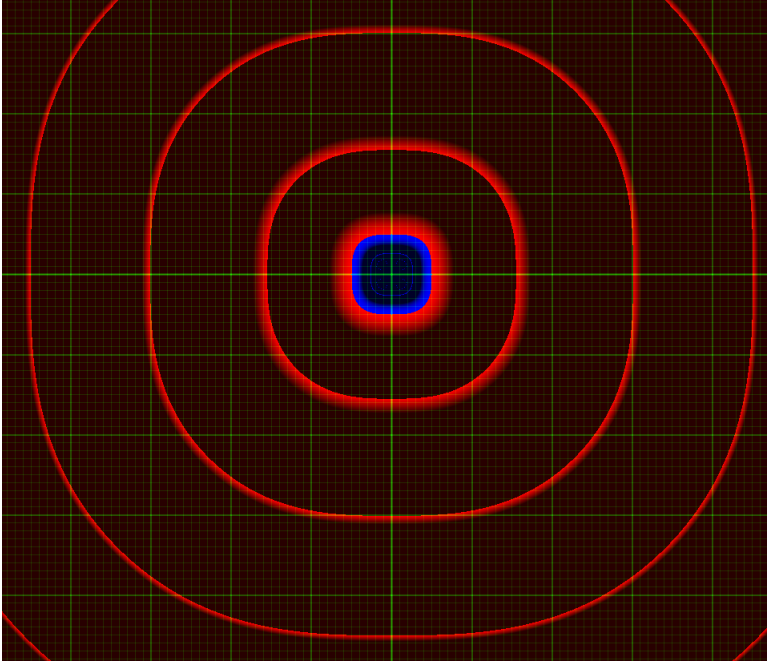


Рис. 4: Виправлене на (14) поле відстані для узагальнених кіл.

них меж із заданим періодом c :

$$\text{opRep}(\mathbf{p}, c) = \mathbf{p} \bmod c - 0.5 \cdot c \quad (18)$$

7. Розширення нелінійного трасування сфери

Розширення алгоритму нелінійного трасування сфери можна записати як

$$\hat{\mathbf{p}}_{i+1} = \hat{\mathbf{p}}_i + |f(\hat{\mathbf{p}}_i)| \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{p}}_i) \quad (19)$$

Однак цей підхід дає велику похибку, якщо промінь сильно викривлений (рис. 5 а). Зменшення розміру кроку покращує точність, але погіршує продуктивність (рис. 5 б). Тому було запропоновано обчислювати підкроки без використання SDF для мінімальної відстані до найближчої межі (рис. 5 с). Кожен крок i від $\hat{\mathbf{p}}_i$ до $\hat{\mathbf{p}}_{i+1}$ можна розглядати як звичайне диференціальне рівняння першого порядку $\mathbf{y}'(\hat{\mathbf{p}}) = \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{p}})$ з початковою умовою $\mathbf{y}_0 = \hat{\mathbf{p}}_i$.

Тоді наступний крок можна обчислити як $\hat{\mathbf{p}}_{i+1} = R(\hat{\mathbf{p}}_i, f(\hat{\mathbf{p}}_i))$, де R — будь-який розв'язувач звичайного диференціального рівняння, який приймає початкову умову та мінімальну відстань до найближчого об'єкта як

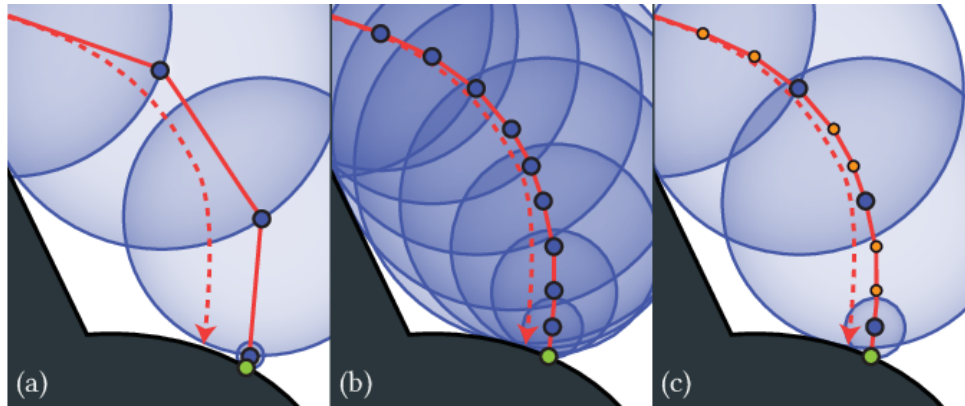


Рис. 5: З сильно вигнутим променем розмір кроку може бути занадто великим для хорошої точності (а). Хоча збільшення кількості кроків покращує точність, це негативно впливає на продуктивність обчислень (б). Представлений метод додає невелику кількість кроків і дає таку ж точність (с).

параметри. Вибраний розв'язувач може ділити $f(\hat{\mathbf{p}}_i)$ на підмножини, щоб досягти заданого допустимого відхилення, але йому не потрібно перераховувати $f(\hat{\mathbf{p}})$. Завдяки параметризації довжини дуги будь-який правильний розв'язувач гарантує, що кожна підмножина залишається всередині сфери навколо $\hat{\mathbf{p}}_i$ (рис. 6) і, таким чином, задовольняє умову відстеження сфери [11].

Розв'язувач звичайних диференціальних рівнянь слід вибирати ретельно, оскільки він сильно впливає на продуктивність обчислень. Композиції деформацій сильно змінюють промінь у деяких локаціях простору. Крім того, чим ближче промінь до границі, тим меншою стає мінімальна відстань $f(\hat{\mathbf{p}})$. У цьому випадку простіший інтегратор Ейлера, такий як (19), часто є достатньо хорошим. Уніфікований розв'язувач або не зможе правильно обчислювально відтворити промінь, або, для дуже частого простого випадку, коли промінь незначно змінюється, розв'язувачу знадобиться багато часу обчислення.

Гібридний підхід полягає у використанні інтегратора Рунге-Кутта, коли $f(\hat{\mathbf{p}})$ є відносно великим у порівнянні з $\hat{\epsilon}$. У цій роботі розглядалися наступні розв'язувачі ОДУ: метод інтегрування Ейлера, метод 4-го порядку Хойна та Рунге-Кутта.

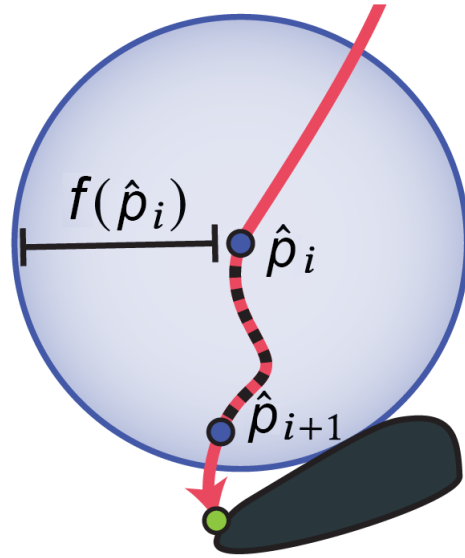


Рис. 6: Додаткові підкроки.

Інтегратор Ейлера — чисельна процедура першого порядку для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь із заданим початковим значенням. У випадку трасування сфери ми могли б зробити це все ще крокуючи вздовж променя в деформованому просторі, трансформуючи кожну точку назад у недеформований простір, щоб обчислювати поле відстані. Коли промінь знаходиться близько до межі та мінімальна відстань менша за $a \cdot \hat{\epsilon}$, де a — це порогове значення, вибране користувачем, достатньо простого інтегрування Ейлера. Формула інтегратора Ейлера виглядає наступним чином:

$$\hat{\mathbf{p}}_{i+1} = \hat{\mathbf{p}}_i + h \cdot \mathbf{rd}(\hat{\mathbf{p}}_i) \quad (20)$$

де,

- $\mathbf{rd} = \nabla f(D \cdot \mathbf{p}_i)$ — нормалізована функція напрямку променя, змінювана нелінійною деформацією D ,
- $\hat{\mathbf{p}}_i$ - це точка в просторі об'єкта,
- $h = |\hat{\mathbf{p}}_i - \hat{\mathbf{p}}_{i-1}|$ - це параметр кроку метода,

Метод Хойна або метод середнього нахилу дає більш точне наближення, ніж інтегратор Ейлера. Він дає явну формулу для обчислення y_{i+1} .

Основна ідея полягає у виправленні деяких помилок оригінального методу Ейлера[20]:

$$y_{i+1} = y_i + h\left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right) \quad (21)$$

де $k_1 = g(x_i, y_i)$, $k_2 = g(x_i + h, y_i + h \cdot k_1)$.

Модифікована версія методу Хойна для нелінійного трасування сфери:

$$\hat{\mathbf{p}}_{i+1} = \hat{\mathbf{p}}_i + h\left(\frac{1}{2}\mathbf{k}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\right) \quad (22)$$

де $\mathbf{k}_1 = \mathbf{rd}(\hat{\mathbf{p}}_i)$, $\mathbf{k}_2 = \mathbf{rd}(\hat{\mathbf{p}}_i + h \cdot \mathbf{k}_1)$.

Метод четвертого порядку Рунге-Кутта найчастіше використовується для розв'язування ОДУ. Потім за допомогою ітераційної формули [21] обчислюється наближене значення в наступних точках:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i \\ \Delta y_i &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \quad (23)$$

де

$$\begin{aligned} k_1 &= g(x_i, y_i), \\ k_2 &= g\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}\right), \\ k_3 &= g\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2}\right), \\ k_4 &= g(x_i + h, y_i + h \cdot k_3). \end{aligned}$$

Цей метод має четвертий порядок точності. Це означає, що помилка на одному кроці становить $O(h^5)$, а загальна помилка за кінцевий інтервал інтегрування становить $O(h^4)$.

Модифікована версія кроків для класичного методу Рунге-Кутта для нелінійного трасування сфери: [21]:

$$\hat{\mathbf{p}}_{i+1} = \hat{\mathbf{p}}_i + \Delta \hat{\mathbf{p}}_i, \quad (24)$$

де $\Delta \hat{\mathbf{p}}_i = (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)/6$,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \hat{\mathbf{rd}}(\hat{\mathbf{p}}_i), \\ \mathbf{k}_2 &= \hat{\mathbf{rd}}(\hat{\mathbf{p}}_i + h \cdot \mathbf{k}_1/2), \\ \mathbf{k}_3 &= \hat{\mathbf{rd}}(\hat{\mathbf{p}}_i + h \cdot \mathbf{k}_2/2), \\ \mathbf{k}_4 &= \hat{\mathbf{rd}}(\hat{\mathbf{p}}_i + h \cdot \mathbf{k}_3). \end{aligned}$$

Algorithm 1 Гібридний алгоритм трасування променю

Require: $r_0, rd, maxd$

```
 $p \leftarrow r_0 + rd * t$   
for  $i = 0$  to  $i = RAY\_STEP$  do  
  if  $abs(h) \geq epsilon$  OR  $t \leq maxd$  then  
    break  
  end if  
   $res \leftarrow map(p)$   
   $h \leftarrow res.x$   
  if  $abs(h) < epsilon * a$  then  
     $p = euler(rd, h)$   
  else  
     $p = R(rd, h)$   
  end if  
   $t+ = h$   
end for  
if  $t \geq maxd$  then return  $(t, -1)$   
else return  $(t, 1)$   
end if
```

8. Алгоритмічна реалізація та тестування

8.1 Алгоритмічна реалізація

Основою реалізації є гібридний алгоритм трасування променю, який трасує промінь у заданому напрямку.

Гібридний алгоритм трасування променя приймає початкову точку променя $r0$, напрямок променя rd і максимальну довжину променя $maxd$. Максимальна довжина використовується для економії часу на обчислення, якщо промінь не може досягти межі на своєму шляху. Для першого кроку промінь залишається прямим, щоб можна було знайти наступну точку. Наступними кроками є цикл, доки довжина променя t не перевищує максимальну довжину $maxd$ або відстань до найближчої точки h менше заданого порогу $epsilon$. В середині циклу спочатку перевіряється, якщо відстань h до найближчої точки менше, ніж порогове значення $epsilon * a$, то використовується інтегратор Ейлера для скорочення часу обчислення. Якщо відстань до найближчої границі досить велика, то ця відстань використовується в ODE розв'язувачі R , щоб знайти наступну точку на промені. Тоді h додається до довжини променя t . Алгоритм повертає t та -1 , якщо t більше максимальної довжини $maxd$, інакше 1 .

Розв'язувач ODE використовує нормалізований вектор на кожному кроці. Щоб знайти його, спочатку обчислюється обернена матриця Якобі $inverseJacobian$, а потім за допомогою оберненої матриці модифікується напрямок променя rd і далі нормалізується вектор результату:

Algorithm 2 Алгоритм отримання модифікованого нормалізованого вектору

Require: $jacobian, rd, point$

$inverseJacobian \leftarrow inverse(jacobian)$

$normVector \leftarrow normalize(inverseJacobian * rd)$

return $normVector$

8.2. Реалізація та тестування

Програма трасування сфери в 4-вимірному просторі була реалізована як шейдер з використанням мови GLSL. Шейдер використовує для візуалізації графічний процесор. Усі обчислення проводилися на графічному процесорі Nvidia GeForce GTX 1060. Чотиривимірні об'єкти в процесі візуалізації проектувалися спочатку у тривимірний простір зі спеціально

підібраними кольорами та освітленням, а потім стандартні методи відображення обчислювали двовимірні кадри тривимірних проєкцій. Візуалізація обчислень дозволяє відстежувати (і навіть відчувати) час обчислення, а також досить легко контролювати помилки обчислень.

Трасування сфери було реалізовано з параметром, який визначає ефект від нелінійного перетворення. Було розглянуто 4 значення цього параметру: 0, 0,2, 0,45, 0,65. Коли параметр дорівнює 0, то нелінійне перетворення взагалі не впливає (рис. 7). З параметром 0,2 важко побачити різницю між лінійним і нелінійним трасуванням сфери (рис. 8). Параметри 0,45 і 0,6 дають більшу деформацію границям (рис. 9 і 10).

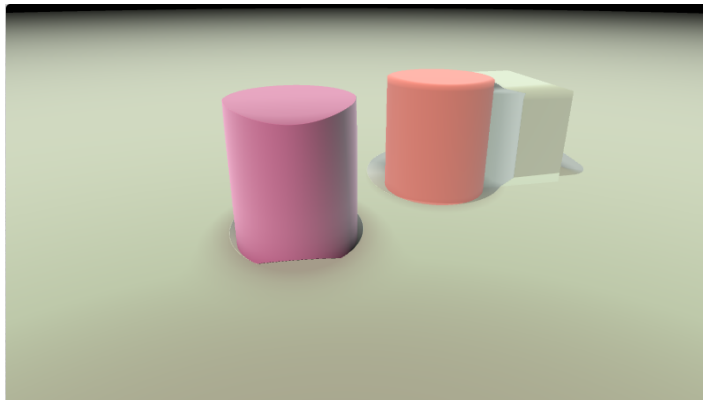


Рис. 7: Лінійне трасування сфери

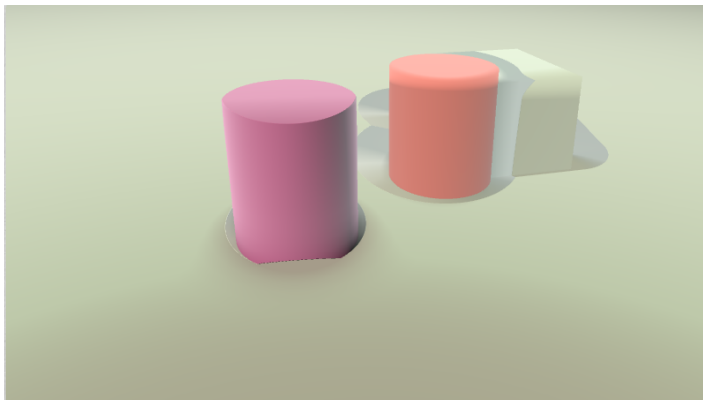


Рис. 8: Нелінійне трасування сфери з параметром = 0.2

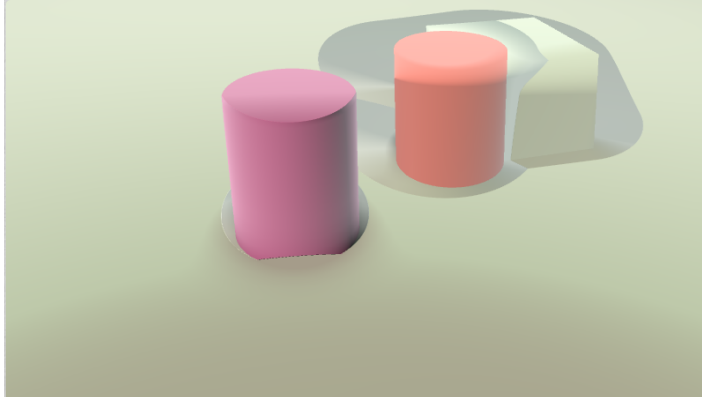


Рис. 9: Нелінійне трасування сфери з параметром = 0.45

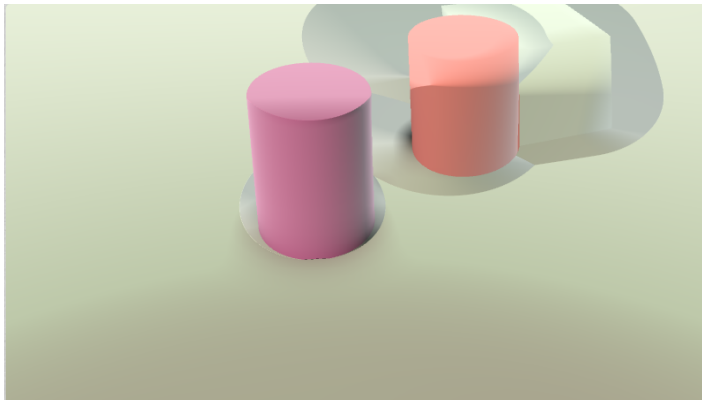


Рис. 10: Нелінійне трасування сфери з параметром = 0.65

Результати представлені в таблиці 1. Для кожного значення параметру розраховувалися середній FPS (кадрів в секунду) і максимальний FPS. Для трасування лінійної сфери як середній, так і максимальний FPS досить високі, це забезпечує плавну якість відео. При нелінійній трасуванні сфери середній FPS значно знижується. Чим більше значення параметра, тим нижчий середній FPS. Це впливає на продуктивність шейдера, що створює враження перегляду слайд-шоу. Слід зазначити, що обчислення виконувались для чотиривимірного простору, для якого стандартні розв'язувачі видавали би результати за час на порядки більше (якби вони взагалі могли бути застосовані).

	Parameter			
	0.0	0.20	0.45	0.65
Avg FPS	51.3	20.6	16.4	12.9
Max FPS	60.1	31.9	27.1	22.5

Табл. 1: Трасування сфери з різним параметром нелінійного перетворення.

Зміни в візуалізації однакові для нескінченних меж. Починаючи з параметру = 0,45, зміни стають більш помітними (рис. 11-14).

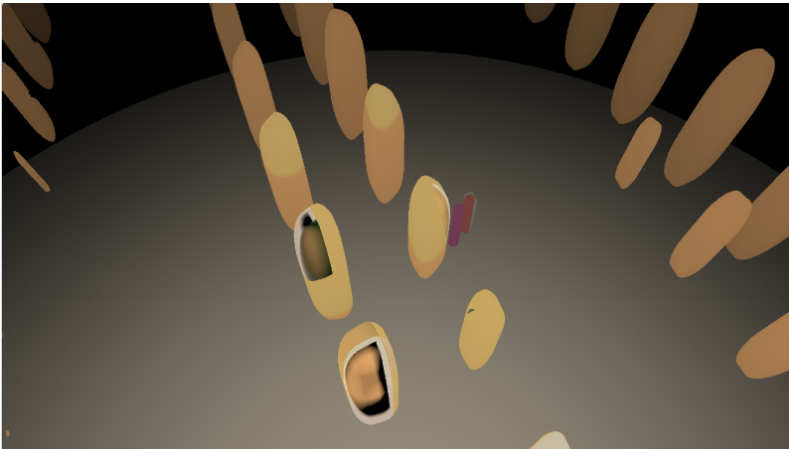


Рис. 11: Лінійне трасування сфери

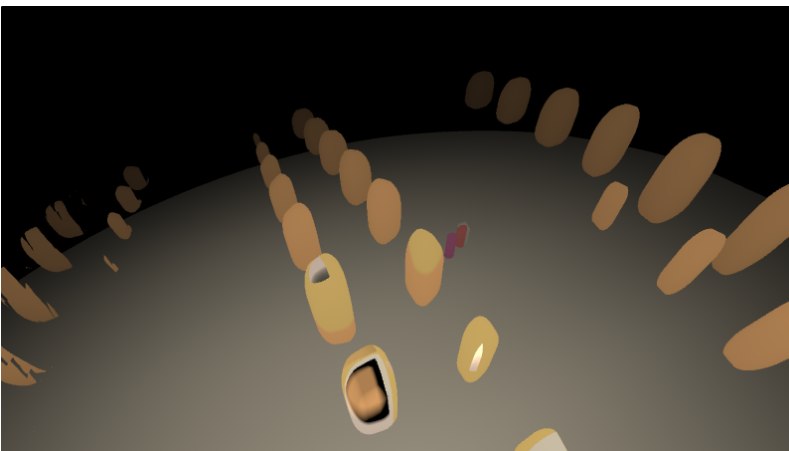


Рис. 12: Нелінійне трасування сфери з параметром = 0.2



Рис. 13: Нелінійне трасування сфери з параметром $= 0.45$

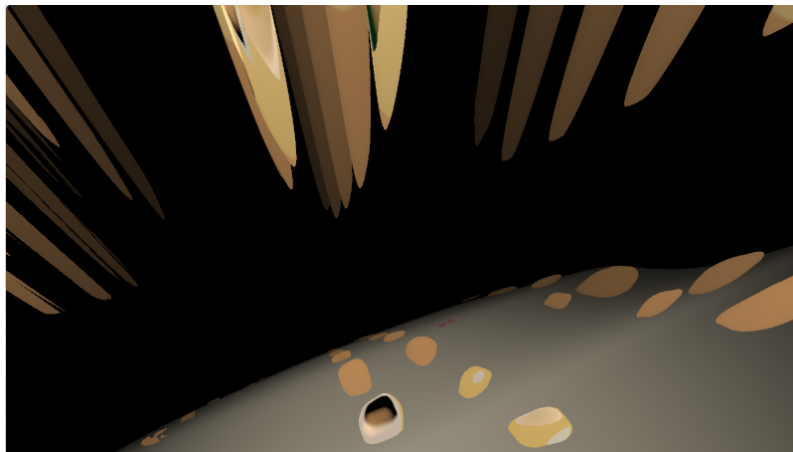


Рис. 14: Нелінійне трасування сфери з параметром $= 0.65$

Середній FPS і максимальний FPS підраховувалися також для меж нескінченного повторення з однаковими параметрами нелінійного перетворення - 0, 0,2, 0,45 і 0,65 (Таблиця 2). Середній FPS для трасування лінійної сфери з нескінченними періодичними межами вдвічі нижчий, ніж для нескінченних меж. Застосування нелінійного перетворення також сильно знижує FPS.

	Parameter			
	0.0	0.20	0.45	0.65
Avg FPS	29.6	6.9	6.1	5.8
Max FPS	30.1	9.1	8.6	8.3

Табл. 2: Sphere tracing for infinite periodic boundaries.

Висновки

У рамках цієї роботи був розглянутий частковий випадок ейконального рівняння та проаналізовані існуючі методи його розв'язання. Також був розглянутий розширений метод трасування сфер (sphere tracing) для нелінійних трансформацій. У роботі запропоновано спосіб використання розширеного способу для 4-мірного простору та продемонстровано на практиці.

Для розширення методу трасування сфер до 4-мірного використовуються відповідні вдосконалені версії неявних функцій, які описують примітивні границі.

Для нелінійного трасування сфер на кожному кроці ітерації розглядається крайова задача, де кожен крок є звичайним диференціальним рівнянням першого порядку з початковою умовою результату попереднього кроку. Диференціальне рівняння виглядає як функція від точки, в якій перераховується значення нормального вектора. Для цього використовується добуток зворотньої матриці Якобі та вектора, який задає напрямлення променю. Універсальний підхід не є доцільним, оскільки виконує забагато обчислень у випадку, коли промінь знаходиться доволі близько до границі або не може відтворити викривлення променю достатньо точно. Тому було обрано змішаний підхід – за замовчуванням використовувати будь-який доволі точний метод розв'язання звичайних диференціальних рівнянь та у випадку, коли відстань між границею та променем є доволі малою – використовувати метод Ейлера.

Розширений метод трасування сфер був реалізований як шейдер на мові GLSL. Для матриці Якобі використовувався спеціальний параметр, який задає вплив нелінійної трансформації на промінь. Для різних значень цього параметра було визначено середню та максимальну кількість кадрів

за секунду під час роботи шейдєру.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Javaid M. 4D printing applications in medical field: A brief review / M. Javaid, A. Haleem // *Clinical Epidemiology and Global Health*. — 2019. — V.7, №3. — P. 317–321.
2. Kwong Y. Four-dimensional computed tomography (4DCT): A review of the current status and applications / Y Kwong., A. O. Mel, G. Wheele, J. M. Troupis // *Journal of Medical Imaging and Radiation Oncology*. — 2015. — P. 545–554.
3. Polacci M. Crystallisation in basaltic magmas revealed via in situ 4D synchrotron X-ray microtomography / M. Polacci, F. Arzilli, G. La Spina, N. Le Gall, B. Cai, M. E. Hartley, D. Di Genova, N. T. Vo, S. Nonni, R. C. Atwood, E. W. Llewelin, P. D. Lee, M. R. Burton // *Scientific Reports*. — 2018.
4. Irmak E. Concept of 4th Dimension for Databases / Irmak E., Kurtuldu . // 14th International Conference on Machine Learning and Applications (ICMLA). — 2015. — P. 1159–1162.
5. Raytracing 4D fractals, visualizing the four dimensional properties of the Julia set [Електронний ресурс]. — 2008. — Режим доступу до ресурсу: [\http://www.codinginstinct.com/2008/11/raytracing-4d-fractals-visualizing-four.html](http://www.codinginstinct.com/2008/11/raytracing-4d-fractals-visualizing-four.html)
6. Prokofieva S. Methods for solving partial types of the eikonal equation / S. Prokofieva // Madrid: Barca Academy Publishing, Madrid, Spain, 2021. — P. 192–194.
7. Sethian, J. A. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts / J. A. Sethian // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 1999. — V.96, №4. — P. 1591–1595.
8. Gmez J. V. Fast Methods for Eikonal Equations: An Experimental Survey / J. V. Gmez, S. Garrido, D. Alvarez, L. E. Moreno // *IEEE Access*. — 2019.
9. Dijkstra E. A note on two problems in connection with graphs / E. Dijkstra // *Numerische Mathematik* — 1959. — V.1 — P. 269-271.
10. Zhao H. Fast sweeping method for eikonal equations / H. Zhao // *Mathematics of Computation* — 2005. — V.74 — P. 603-627.
11. Seyb D. Non-linear sphere tracing for rendering deformed signed distance fields / D. Seyb, A. Jacobson, D. Nowrouzezahrai, W. Jarosz // *ACM Trans. Graph.* — 2019. — V.38, №6. — P. 12
12. Barr A. H. Global and Local Deformations of Solid Primitives / A. H. Barr // *Computer Graphics (Proceedings of SIGGRAPH)*. — 1984. — V.18, №3. — P. 21–30.
13. Signed distance function [Електронний ресурс]. — Режим доступу до ресурсу: [\https://en.wikipedia.org/wiki/Signed_distance_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Signed_distance_function)
14. Tomczak L. J. GPU Ray Marching of Distance Fields / L. J. Tomczak // *Technical University of Denmark*. — 2012.

-
15. Perlin K. Hypertexture / K. Perlin, E. M. Hoffert // In ACM SIGGRAPH Computer Graphics. — 1989. — V23, №3. — P. 253-262.
 16. Wright D. Dynamic Occlusion with Signed Distance Fields. Advances in Real-Time Rendering / D. Wright // SIGGRAPH. — 2015.
 17. Distance functions [Електронний ресурс]. — Режим доступу до ресурсу: [\https://www.iquilezles.org/www/articles/distfunctions/distfunctions.htm](https://www.iquilezles.org/www/articles/distfunctions/distfunctions.htm)
 18. Taubin G. Distance Approximations for Rasterizing Implicit Curves / G. Taubin // ACM Transactions on Graphics. — 1994. — V.13, 1. — P. 3–42.
 19. Euler's method [Електронний ресурс]. — Режим доступу до ресурсу: [\https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method)
 20. Heun's method [Електронний ресурс]. — Режим доступу до ресурсу: [\https://en.wikipedia.org/wiki/Heun](https://en.wikipedia.org/wiki/Heun)
 21. Runge-Kutta's method [Електронний ресурс]. — Режим доступу до ресурсу: [\https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta_methods](https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta_methods)

Maximov A. L., Prokofieva S. V.

APPROACH TO EFFECTIVE METHODS FOR SOLUTION OF MULTIDIMENSIONAL
EICONAL EQUATIONS

Summary

The article presents an extended method of solving the eiconal equation in four-dimensional space with weak deformations. The eiconal equation combines wave optics with geometric optics and has various physical interpretations, including the task of finding the shortest paths and calculation of electromagnetic or gravitational potentials. The proposed method extends the sphere tracing technique to spaces of many dimensions with deformations and demonstrated for the problem in the space of four dimensions. The method uses implicit functions for describing the boundaries of objects built from a finite or an infinite number of multidimensional primitives. Nonlinear sphere tracing is achieved by generation at each trace step ordinary (multidimensional) differential equations of the first order using a hybrid solution method combining the Euler method, when the sphere is close to the boundary, with higher order methods, when the sphere is far from the boundaries. Influence of non-linear transformations the tracing process is implemented using the Jacobian deformation matrix. The approach is implemented as a shader program in the GLSL language, and the effect of nonlinear transformations is determined using of the transformation parameter that affects the Jacobian matrix. The computational performance of the method is evaluated through average and maximum frame rates for different parameter values. The proposed approach can find application in such fields, as computer graphics, time-dependent computer tomography, seismic tomography, astrophysical modeling and optimal control.

Key words: eiconal, equation, deformation, tracing, Jacobi matrix, Euler method, shader, GLSL.

REFERENCES

1. Javaid M. 4D printing applications in medical field: A brief review / M. Javaid, A. Haleem // *Clinical Epidemiology and Global Health*. — 2019. — V.7, №3. — P. 317–321.
2. Kwong Y. Four-dimensional computed tomography (4DCT): A review of the current status and applications / Y Kwong., A. O. Mel, G. Wheel, J. M. Troupis // *Journal of*

- Medical Imaging and Radiation Oncology. — 2015. — P. 545–554.
3. Polacci M. Crystallisation in basaltic magmas revealed via in situ 4D synchrotron X-ray microtomography / M. Polacci, F. Arzilli, G. La Spina, N. Le Gall, B. Cai, M. E. Hartley, D. Di Genova, N. T. Vo, S. Nonni, R. C. Atwood, E. W. Llewellyn, P. D. Lee, M. R. Burton // Scientific Reports. — 2018.
 4. Irmak E. Concept of 4th Dimension for Databases / Irmak E., Kurtuldu . // 14th International Conference on Machine Learning and Applications (ICMLA). — 2015. — P. 1159–1162.
 5. Raytracing 4D fractals, visualizing the four dimensional properties of the Julia set [Електронний ресурс]. — 2008. — Режим доступу до ресурсу: [\http://www.codinginstinct.com/2008/11/raytracing-4d-fractals-visualizing-four.html](http://www.codinginstinct.com/2008/11/raytracing-4d-fractals-visualizing-four.html)
 6. Prokofieva S. Methods for solving partial types of the eikonal equation / S. Prokofieva // Madrid: Barca Academy Publishing, Madrid, Spain, 2021. — P. 192–194.
 7. Sethian, J. A. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts / J. A. Sethian // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1999. — V.93, №4. — P. 1591–1595.
 8. Gmez J. V. Fast Methods for Eikonal Equations: An Experimental Survey / J. V. Gmez, S. Garrido, D. Alvarez, L. E. Moreno // IEEE Access. — 2019.
 9. Dijkstra E. A note on two problems in connection with graphs / E. Dijkstra // Numerische Mathematik — 1959. — V.1 — P. 269-271.
 10. Zhao H. Fast sweeping method for eikonal equations / H. Zhao // Mathematics of Computation — 2005. — V.74 — P. 603-627.
 11. Seyb D. Non-linear sphere tracing for rendering deformed signed distance fields / D. Seyb, A. Jacobson, D. Nowrouzezahrai, W. Jarosz // — ACM Trans. Graph. — 2019. — V.38, №6. — P. 12
 12. Barr A. H. Global and Local Deformations of Solid Primitives / A. H. Barr // Computer Graphics (Proceedings of SIGGRAPH). — 1984. — V.18, №3. — P. 21–30.
 13. Signed distance function [Електронний ресурс]. — Режим доступу до ресурсу: [\https://en.wikipedia.org/wiki/Signed_distance_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Signed_distance_function)
 14. Tomczak L. J. GPU Ray Marching of Distance Fields / L. J. Tomczak // Technical University of Denmark. — 2012.
 15. Perlin K. Hypertexture / K. Perlin, E. M. Hoffert // — In ACM SIGGRAPH Computer Graphics. — 1989. — V23, №3. — P. 253-262.
 16. Wright D. Dynamic Occlusion with Signed Distance Fields. Advances in Real-Time Rendering / D. Wright // SIGGRAPH. — 2015.
 17. Distance functions [Електронний ресурс]. — Режим доступу до ресурсу: [\https://www.iquilezles.org/www/articles/distfunctions/distfunctions.htm](https://www.iquilezles.org/www/articles/distfunctions/distfunctions.htm)
 18. Taubin G. Distance Approximations for Rasterizing Implicit Curves / G. Taubin // ACM Transactions on Graphics. — 1994. — V.13, 1. — P. 3–42.

19. Euler's method [Электронный ресурс]. — Режим доступа до ресурсу:
\https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method
20. Heun's method [Электронный ресурс]. — Режим доступа до ресурсу:
\<https://en.wikipedia.org/wiki/Heun>
21. Runge-Kutta's method [Электронный ресурс]. — Режим доступа до ресурсу:
\https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta_methods

УДК 517.91

О. О. Пришляк, С. О. Стась

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ФУНКЦІЇ МОРСА ТА ФУНКЦІЇ КОРОЗМІРНОСТІ 1 НА ПРОЕКТИВНІЙ ПЛОЩИНІ

Для опису топологічних властивостей функцій на двовимірних многовидах використовується інваріант, що називається графом Ріба. У випадку простих функцій Морса на замкнутих орієнтованих двовимірних многовидах, це повний топологічний інваріант для пошарової еквівалентності. У разі неорієнтованого двовимірного многовиду, а також многовидів з межею потрібна додаткова інформація для побудови повного топологічного інваріанта. Якщо лінійний порядок заданий на множині вершин, то він стає повним топологічним інваріантом відносно топологічної еквівалентності.

У роботі досліджується топологічна класифікація функцій Морса та функцій корозмірності 1 на проективній площині. У цих випадках граф Ріба є орієнтованим кореневим деревом. Отримано аналітичний вираз для кількості орієнтованих графів Ріба з коренем. Для функцій корозмірності 1 для фіксованої кількості критичних точок побудовані всі можливі графи Ріба.

MSC: 58K05, 37D15.

Ключові слова: пошарова еквівалентність, функція Морса, функція корозмірності 1, граф Ріба, проективна площина, топологічна класифікація, топологічна теорія функцій, неорієнтовані многовиди, топологічні інваріанти.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305262](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305262).

ВСТУП

У роботах Кронрода [9] та Ріба [21] було введено інваріант (граф Ріба), який описує топологічні властивості функцій на двовимірних многовидах. У випадку простих функцій Морса на замкнутих орієнтованих двовимірних многовидах, це повний топологічний інваріант для пошарової еквівалентності. Якщо лінійний порядок заданий на множині вершин, то він стає повним топологічним інваріантом відносно топологічної еквівалентності.

У разі неорієнтованого двовимірного многовиду, а також многовидів з межею потрібна додаткова інформація для побудови повного топологічного інваріанта. Для некомпактних многовидів, граф Ріба може бути не гаусдорфовим простором, що викликає додаткові труднощі при роботі з ним. Якщо функція не проста, то крім графіка Ріба інформація про необхідні

структури функції в околі кожного критичної точки рівні. Інший спосіб визначити топологічну структуру функцій Морса — це використовувати векторні поля Морса-Смейла із заданими значеннями функції в особливих точках. Тому топологічна класифікація Морса-Смейла векторні поля тісно пов'язані з класифікацією функцій. Топологічна класифікація векторних полів для замкнених поверхнях була отримана у роботах [15; 16; 24], а для поверхонь з межею у [10; 13; 16], для 3-многовидів у [4; 20].

Оскільки потоки Морса є градієнтними потоками для функцій Морса, то якщо зафіксувати значення функції в критичних точках, то потік визначає структуру функції [11].

Крім того, топологічні інваріанти функцій на неорієнтованих поверхнях будувались у роботі [11], а у [2; 7; 8; 14] для поверхонь з межею, у [19] для некомпактних поверхонь. Цій тематиці також присвячені роботи [1; 7; 8; 11; 18; 19; 22; 26], а для многовидів з межею роботи [5; 6; 8], а для 3- та 4-вимірних многовидів [12; 17].

Основні поняття топологічної теорії функцій містяться у роботах [14; 25; 26].

Основною метою даної роботи є дослідження топологічних властивостей графів Ріба простих графів Морса функцій на проективній площині та підрахувати їх кількість для фіксованої кількості критичних точок.

Автори вдячні студентам Ю. Зелений та А. Власенко за паралельні обчислення деяких чисел графів Ріба функцій Морса.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Топологія та геометрія проективної площини

В цьому розділі ми притримуємося термінології та означень з [23]. *Дійсна проективна пряма* це множина прямих на площині, що проходять через початок координат, або ж можна сказати, що це множина одновимірних підпросторів двовимірного простору. Відстань між прямими визначається як найменший кут між ними, наприклад, гострий кут. Топологічні властивості — це ті властивості, що зберігаються при гомеоморфізмах, тобто бієктивних неперевних в обидва боки відображеннях. Геометричні властивості, з іншого боку, зберігаються при ізометриях, які є бієктивними відображеннями, що зберігають відстань або довжину кривої. Для дослі-

дження топологічних та геометричних властивостей проєктивної прямої побудуємо відображення $p : \mathbb{R}P^1 \rightarrow S_{1/2}$, яке відображає проєктивні прямі на коло радіуса $1/2$. Формула для цього відображення полягає в присвоєнні кожній прямій відповідного кута нахилу α , а потім відображенні цього кута на координати на колі за формулою

$$p(\alpha) = (1/2 \cos(2\alpha), 1/2 \sin(2\alpha)).$$

Дійсна проєктивна площина – це множина одновимірних підпросторів тривимірного евклідового простору.

Розглянемо сферу S^2 з радіусом 1 та центром у початку координат в тривимірному евклідовому просторі. Всяка пряма, яка проходить через початок координат, перетинає сферу за парою діаметрально протилежних точок. Тому існує взаємно-однозначне відображення між прямими та парами діаметрально протилежних точок на сфері.

Проєктивна площина є факторпростором двовимірної сфери за відношенням еквівалентності породженим симетрією відносно центра сфери (клас еквівалентності це пара діаметрально протилежних точок):

$$\mathbb{R}P^2 = S^2 / \sim, \text{ де } p \sim p \text{ або } p \sim -p, \quad p \in S^2.$$

На S^2 можна задати дію групи $Z_2 = \{1, -1\}$ як $1p = p$ і $-1p = -p$. Тоді проєктивна площина є множина орбіт цієї дії:

$$\mathbb{R}P^2 = S^2 / Z_2.$$

Давайте опишемо ще один метод створення проєктивної площини. В топології точки називаються склеєними, якщо вони належать одному класу еквівалентності в процесі факторизації. Щоб склеїти діаметрально протилежні точки на сфері, спочатку склеїмо точки верхньої півсфери з точками нижньої півсфери (за винятком екватора). Потім ортогонально проєктуємо отриману нижню півсферу на горизонтальну площину. Отримаємо двовимірний диск (круг) D^2 , де необхідно склеїти симетричні точки на межі.

Означення 1.

$$\mathbb{R}P^2 = D^2 / \sim, \text{ де } p \sim p \text{ або } p \sim -p, \quad p \in \partial D^2.$$

Замість проєкціювання перпендикулярно до площини, ми можемо використати центральну проєкцію нижньої півсфери з центра сфери на площину $z = -1$. Ця проєкція забезпечить бієктивне відображення точок нижньої півсфери на точки площини, тоді як точки екватора будуть відображені на точки в нескінченності.

Проективна площина є евклідовою площиною, до якої додано нескінченно віддалені точки. На проективній площині існує множина нескінченно віддалених точок, кожна з яких відповідає класу еквівалентності паралельних прямих. Ці класи еквівалентності називаються *напрямками*, а множина нескінченно віддалених точок утворює проективну пряму.

Повсякденне використання проективної площини та відстаней відбувається, коли ми спостерігаємо об'єкти в тривимірному просторі. У такому випадку, ми сприймаємо промені, які випромінюють з об'єкту та падають на сітківку нашого ока. Відстані та розміри об'єктів оцінюються на основі кутів між цими променями, що відображає проективну метрику або відстань на сфері (сітківці). При зміні положення голови, наша сприйнятливність змінюється, що може призводити до проективних перетворень (ізометричних перетворень сфери).

Теорема 1. [23] *Існує замкнена крива на проективній площині, яка розбиває її на дві частини. Одна з цих частин гомеоморфна листу Мьобіуса, а інша – двовимірному диску.*

Наслідок 1. [23] *Якщо від довільної точки проективної площини віддалити достатньо малий регулярний окіл, то отримана множина буде гомеоморфна листу Мьобіуса.*

Наслідок 2. [23] *Проективна площина є поверхнею без орієнтації.*

Проективною прямою називається множина прямих, об'єднання яких є двовимірним підпростором евклідового простору. Оскільки площина, яка проходить через початок координат, перетинає одиничну сферу S^2 у колі радіуса 1 з центром у початку координат (велике коло), то якщо діаметрально протилежні точки на цьому колі будуть ототожнені, то отримана множина знову буде колом. Це означає, що проективна пряма гомеоморфна колу, тобто є замкненою кривою.

Теорема 2. [23] *Найкоротша крива між двома точками на проективній площині є відрізок проективної прямої.*

2. Функція Морса на $\mathbb{R}P^2$

Нехай M – гладкий замкнений двовимірний многовид, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ – гладка функція.

Означення 2. Невиродженою критичною точкою називається критична точка $x \in M$, якщо в деяких локальних координатах x_1, x_2 матриця

$$H = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

є невинродженою.

На двовимірному многовиді існує 3 типи невинроджених критичних точок функції: сідло, локальний мінімум та максимум.

Означення 3. Функція Морса – це гладка функція $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, у якій всі критичні точки є невинродженими.

Означення 4. Функція Морса називається *простою*, якщо всі її критичні точки лежать на різних рівнях, тобто $f(p) \neq f(q)$, якщо $p \neq q$, в інакшому випадку – *складною*.

Означення 5. Компонента лінії рівня $f^{-1}(y)$ функції Морса називається *шаром*.

Означення 6. Дві функції Морса називаються *пошарово еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм поверхні на себе, який переводить шари однієї функції в шари іншої, а також локальні мінімуми на локальні мінімуми.

Означення 7. Фактор-простір M/\sim з орієнтацією ребер відповідно до напрямку зростання функції називається *графом Ріба*, де $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ – функція Морса, $x_1 \sim x_2$, якщо x_1 і x_2 належать одному шару. Графи Ріба розглядаються з урахуванням ізоморфізму орієнтованих графів.

Приклади графів Ріба показані на рис. 1, 2.

Дві прості функції Морса на орієнтовній поверхні є пошарово еквівалентні тоді й тільки тоді, коли їх графи Ріба ізоморфні. На неорієнтовних поверхнях є кілька нееквівалентних функцій з однаковими графами Ріба. Використаємо додаткові інваріанти для класифікації функцій Морса, в разі проективної площини маємо наступне.

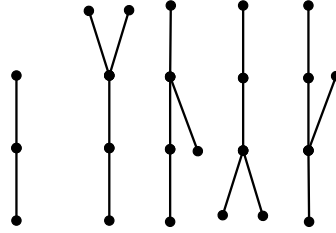


Рис. 1: 1 граф Ріба з одним сідлом і 4 графи Ріба з двома сідлами

Теорема 3. *Граф Ріба простої функції Морса на проективній площині має такі властивості:*

- 1) *граф є деревом;*
- 2) *граф має одну вершину валентності 2, інші вершини мають ступені 1 або 3;*
- 3) *лише вершини ступеня 1 є джерелами та стоками.*

Доведення. 1) Якщо граф не є деревом, то він має цикл, який відповідає зв'язній сумі з тором або пляшкою Кляйна, що означає, що рід неорієнтованої поверхні більший або дорівнює 2, що неможливо.

2) Кожна вершина ступеня 2 відповідає неорієнтованому атому (мебіусовій стрічці з отвором). Якщо таких вершин більше однієї, то рід поверхні буде більше одиниці.

3) Джерела та стоки відповідають локальним екстремумам функції, а вершини ступеня 2 та 3 - сідловим точкам.

Теорема 4. *Дві прості функції Морса на $\mathbb{R}P^2$ є пошарово еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх графи Ріба ізоморфні.*

Доведення. Розглянемо окіл критичного рівня, який відповідає вершині з валентністю 2 на графі Ріба. Після розрізання вздовж двох регулярних траєкторій градієнтного поля, цей окіл матиме нову форму. Функція Морса на орієнтованій поверхні буде топологічно еквівалентна до функції на цих двох частинах околу, якщо їх границі будуть мати збережену або змінену орієнтацію. Ізотопії (гомеоморфізми) до ідентичного відображення або симетрії відносно осі визначають топологічну еквівалентність функцій на комірці. Таким чином, топологічна еквівалентність функцій визначається за допомогою цих гомеоморфізмів на комірці, центральній частині та доповненні до U .

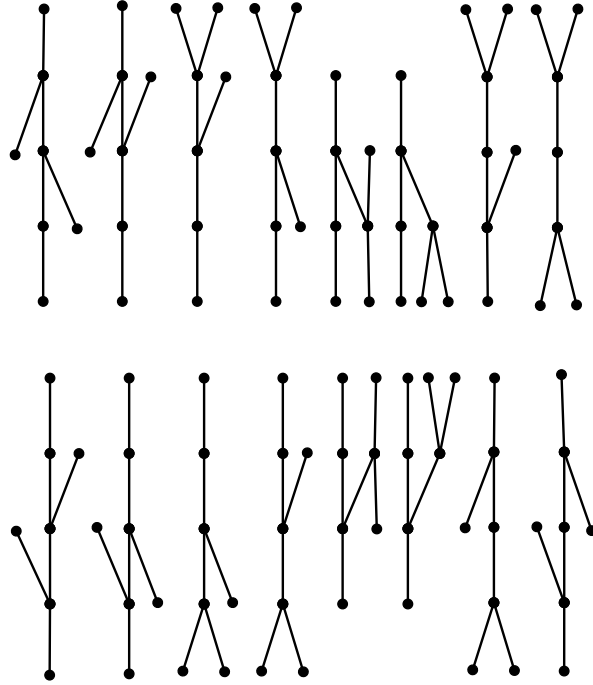


Рис. 2: 16 графів Ріба функцій Морса на RP^2 з трьома сідловими критичними точками.

3. Кількість графів Ріба для функцій Морса на проєктивній площині

Для отримання кількості топологічно невизначених морсових функцій на проєктивній площині спочатку розраховуємо кількість графів Ріба з заданою кількістю критичних точок типу сідла.

Теорема 5. Число K_k орієнтованих графів Ріба з коренем та k сідловими точками можна обчислити за допомогою наступних рекурсивних формул: для парного $k = 2n$

$$K_{2n} = 3(K_0K_{2n-1} + K_1K_{2n-2} + \dots + K_{n-1}K_n);$$

для непарного $k = 2n + 1$

$$K_{2n+1} = 3(K_0K_{2n} + K_1K_{2n-1} + \dots + K_{n-1}K_{n+1}) + \frac{3K_n^2 + K_n}{2}.$$

Доведення. Розглянемо сідло, найближче до кореня. Воно є вершиною ступеня 3. Видаляємо це сідло з графа. Отримаємо три зв'язні компо-

ненти. Одна з них – це ребро, що з'єднує сідло з коренем. Інші дві компоненти можна розглядати як кореневі графи Ріба, де коренем є віддалене сідло. Припустимо, що в першому з цих графів є не менше вершин, ніж у другому.

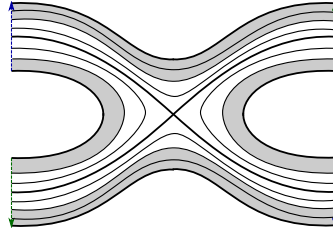


Рис. 3: Окіл критичного рівня.

Тоді є три варіанти:

- 1) В обох графах, ребро, що виходить з кореня, направлене вгору у початковому графі,
- 2) У першому графі це ребро направлене вгору, а в другому – вниз,
- 3) У другому графі воно направлене вгору, а в першому – вниз.

Якщо ребро спрямоване вниз у даному випадку, то це призводить до зворотніх орієнтацій у дереві з коренем. Обидва графи пов'язані тільки за умовою, що мають однакову кількість вершин. Якщо кількість вершин різна, то графи не можуть бути ізоморфними, тому кількість неізоморфних початкових графів з такими підграфами дорівнюватиме кількості неізоморфних підграфів, помножених між собою. Це дає першу формулу. Якщо кількість вершин у першому і другому графах співпадає, то другий і третій варіанти збігаються і їх треба порахувати тільки один раз. Крім того, у першому варіанті неізоморфні графи були пораховані двічі, а ізоморфні – один раз. Враховуючи це, ми можемо отримати другу формулу.

З використанням цих формул ми отримуємо такі початкові значення:

$K_0 = 1$	$K_5 = 540$	$K_{10} = 2392866$
$K_1 = 2$	$K_6 = 2736$	$K_{11} = 13570386$
$K_2 = 6$	$K_7 = 14396$	$K_{12} = 77815161$
$K_3 = 25$	$K_8 = 77649$	$K_{13} = 450418536$
$K_4 = 111$	$K_9 = 427608$	$K_{14} = 2628225684$

Теорема 6. Кількість N_k топологічно нерівносильних простих функцій Морса на $\mathbb{R}P^2$ можна обчислити за допомогою наступної формули

$$N_k = K_0 K_{k-1} + K_1 K_{k-2} + \dots + K_{k-1} K_0.$$

Доведення. Граф Ріба, який відповідає простій функції Морса на проєктивній площині, розбивається на два кореневі орієнтовані графи Ріба з вершинами степеня 2. Це означає, що загальна кількість графів Ріба може бути обчислена як сума добутків відповідних корневих графів Ріба.

Використовуючи це, ми отримуємо:

$N_1 = 1$	$N_6 = 1824$	$N_{11} = 9046744$
$N_2 = 4$	$N_7 = 9589$	$N_{12} = 51876774$
$N_3 = 16$	$N_8 = 51766$	$N_{13} = 300278112$
$N_4 = 74$	$N_9 = 285035$	$N_{14} = 1752150456$
$N_5 = 358$	$N_{10} = 2178244$	$N_{15} = 10295599780$

Усі можливі графи Ріба з 1 та 2 сідловими критичними точками показані на рис. 1, з 3 - на рис. 2.

4. Функції корозмірності 1.

Функції корозмірності 1 – це функції, що виникають в типових однопараметричних сім'ях функцій і змінюють свою структуру при малих змінах параметру. Ці функції бувають двох типів:

1) мають одну вироджену критичну точку, яка заміною системи координат в околі критичної точки зводиться до однієї з двох функцій а) $f(x, y) = x^3 + y^2$, б) $f(x, y) = x^3 - y^2$, всі інші критичні точки є невиродженими і значення функції в різних критичних точках різні;

2) всі критичні точки є невиродженими і лише двоє з них мають однакові значення функції.

У випадку 1а) відбувається скорочення або народження пари критичних точок: точки мінімуму та сідлової точки, а у випадку 1б) – точки максимуму та сідлової точки. На графі Ріба ця точка знаходиться на одному з ребер. В результаті деформації функції на графі Ріба ця точка або щезає або до неї приєднується ребро. Отже, для обчислення числа топологічно не еквівалентних функцій у цьому випадку треба просто знайти число ребер (з урахуванням симетрій) у відповідного графа та помножити його на два.

У випадку функції з двома критичними точками на одному критичному рівні можливі два варіанти: а) точки лежать на різних компонентах рівня, б) точки лежать на одній компоненті рівня. В першому варіанті на графі Ріба треба виділити дві незрівнянні вершини. В другому варіанті, окіл відповідної компоненти утворює атом функції складності два. Якщо цей атом не задається графом Ріба, то треба вказати його тип і вкладення в граф Ріба (молекулу за Болсуновим-Фоменком).

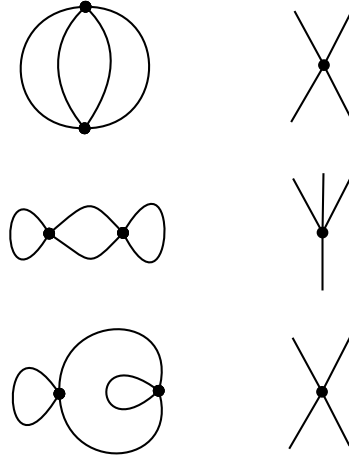


Рис. 4: Орієнтовані атоми складності 2

Оскільки ми розглядаємо функції на проективній площині, то відповідні атоми (околи критичного шару) мають рід 0, якщо вони орієнтовані та рід 1, якщо неорієнтовані. Отже, в орієнтованому випадку можливі такі атоми складності 2: C_2 , D_1 , D_2 , а в неорієнтованому випадку: \tilde{C}_1 , \tilde{D}_1 . Ці атоми зображені на рис. 4 та 5. На цих рисунках зліва зображені критичні рівні, а справа графи Ріба відповідних атомів. Атом отримується із критичного рівня приклеюванням до 2-дисків (околів критичних точок в проекції на площину) стрічок, що є околами кривих, які з'єднують критичні точки. Стрічка приклеюється прямо, якщо крива зображена чорним кольором і перекручується, якщо вона синя. У атома C_2 обидва верхні та обидва нижні ребра рівноправні між собою. У атома D_1 верхні ліва та праве ребра відповідають петлям на критичному рівні, а середнє верхнє ребро – циклу, що складається з двох кратних ребер. Для графа Ріба атому D_2 ліві ребра відповідають петлям. На графі Ріба для \tilde{C}_1 праве верхнє ребро

відповідає циклу, утвореному чорними ребрами, а на графі для \tilde{D}_1 праве верхнє ребро відповідає чорній петлі.

Граф Ріба отримується з графа Ріба простої функції Морса за допомогою стискання в точку ребра, кінцями якого є сідлові точки.

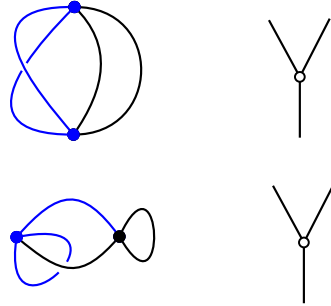


Рис. 5: Неорієновані атоми складності 2

5. Функції корозмірності 1 з малим числом критичних точок.

Функції з 3 критичними точками є функціями Морса загального положення.

Графи Ріба функцій з 4 критичними точками можуть бути отримані із графів Ріба функцій з 5 критичними точками (рис.1), стисканням ребра-листка до сідлової точки степені 3. З урахуванням симетрій, на кожному з чотирьох графів Ріба є по одному такому листку. Отже, існує чотири функції корозмірності 1 з 4 критичними точками.

Графи Ріба функцій з 5 критичними точками отримані з графів Ріба функцій з 5 критичними точками стисканням ребра між сідлами в точку. Можливо отримати лише два графи: Y та перевернене Y . Обидва графи мають в своїй центральній точці неорієнтований атом. Для кожного з них існує по два таких атоми. Отже, всього є чотири функції з 5 критичними точками.

Графи Ріба функцій з 6 критичними точками можуть бути отримані із функцій з 7 критичними точками, стисканням ребра-листка до сідлової точки степені 3, для якого існує друге ребро з такою самою орієнтацією по відношенні до цієї вершини. З урахуванням симетрій, на кожному з 16 графів Ріба існує такі числа листків: 2, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 2. Отже, існує 24 функції корозмірності 1 з 6 критичними точками.

Графи Ріба функцій з 7 критичними точками отримані з графів Ріба

функції з 7 критичними точками стисканням ребра між сідлами в точку. Якщо ребро з'єднає два орієнтовані сідла, то отримаємо орієнтований атом складності 2. Граф Ріба отримаємо з графа Ріба цього атома замкнувши ребра вершинами степені 1, а одне ребро розбивши на два вершиною степені 2. Для атому C_2 обидва верхні (так само як і нижні) ребра рівноправні, тому можливо вибрати 2 способи розташування вершини степені 2. Для графа D_1 можливо два способи вибору верхнього ребра і одине нижнє ребро. З урахуванням перевернутого графа D_1 маємо 6 варіантів. Для графа D_2 всі 4 ребра дають різні варіанти. Отже, всього $2+6+4=12$ топологічно нееквівалентних функцій з орієнтованим атомом степені 2.

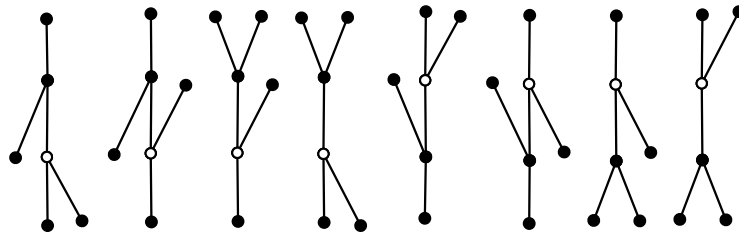


Рис. 6: Графи Ріба з неорієнтованим атомом

На рис. 6 зображені всі можливі графи Ріба з одним неорієнтованим атомом складності 2 і одним простим сідлом. Для кожного з них біла вершина може бути одним з двох атомів складності 2. Якщо у графа є симетрія, яка міняє місцями два інцидентних білій вершині ребра направлених в один бік (догори або до низу) між собою, то для такого графа можливі 2 різні функції, інакше – 4. Отже, для 8 графів на рис. 6 числа нееквівалентних функцій дорівнюють: 2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 2. Загалом маємо 24 функції з неорієнтованим атомом. З урахуванням 12 функцій з орієнтованим атомом маємо всього 36 функцій корозмірності 1 із 7 критичними точками.

Висновки

В цій роботі було отримано топологічну класифікацію функцій Морса та функцій корозмірності 1 на проективній площині. Описані всі можливі топологічні структури функцій з не більше ніж 7 критичними точками. Отримано рекурсивну формулу для знаходження числа топологічно не-

квівалентних функцій Морса із заданим числом критичних точок.

Отримані результати можуть бути корисними для подальшого дослідження топологічних властивостей функцій Морса на різних поверхнях. Наприклад, можна дослідити залежність кількості критичних точок від форми та розміру поверхні, а також дослідити гомотопічну класифікацію функцій Морса на інших класах поверхонь.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Bilun S.** The closed morse 1-forms on closed surfaces. / S. Bilun, A. Prishlyak // *Visn., Mat. Mekh., Kyv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka.* — 2002. — № 8. — P. 77–81.
2. **Bolsinov A.V.** Integrable Hamiltonian systems. Geometry, Topology, Classification. / A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko. — A CRC Press Company, Boca Raton London New York Washington, D.C., 2004 —724 p.
3. **Harary F.** Graph Theory / F. Harary. — Westview Press, 1969. — 274 p.
4. **Hatamian C.** Heegaard diagrams and optimal morse flows on non-orientable 3-manifolds of genus 1 and genus 2. / C. Hatamian , A. Prishlyak. // *Proceedings of the International Geometry Center.* — 2020. — Vol 13, № 3 — P. 33–48 doi: 10.15673/tmgc.v13i3.1779
5. **Hladysh B.I.** Functions with nondegenerate critical points on the boundary of the surface. / B. I. Hladysh, A. O. Pryshlyak // *Ukrainian Mathematical Journal.* — 2016. — Vol. 68,. — P. 29–41. doi: 10.1007/s11253-016-1206-5.
6. **Hladysh B.I.** Deformations in the general position of the optimal functions on oriented surfaces with boundary. / B. I. Hladysh, A. O. Pryshlyak // *Ukrainian Mathematical Journal.* — 2020. — Vol. 71, № 8. — P. 1173–1185. doi: 10.1007/s11253-019-01706-8.
7. **Hladysh B.I.** Topology of functions with isolated critical points on the boundary of a 2-dimensional manifold. / Hladysh B.I., A. O. Prishlyak // *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications.* — 2017. — Vol. 13, № 50. doi: 0.3842/SIGMA.2017.050.
8. **Hladysh B. I.** Simple morse functions on an oriented surface with boundary. // Hladysh B.I., Prishlyak A.O. *Журнал математической физики. анализа, геометрии.* — 2019. — Т. 15, № 3. — С. 354–368. doi: 10.15407/mag15.03.354.
9. **Kronrod A.S.** Functions of two variables. / A. S. Kronrod // *Russian Mathematical Surveys.* — 1950. — Т. 5. — С. 24–134.
10. **Losieva M.** Topology of Morse–Smale flows with singularities on the boundary of a two-dimensional disk. / M. Losieva, A. Prishlyak // *Pr. Mizhnar. Heometr. Tsentr.* — 2016. — Vol. 9, № 2. — P. 32–41, . doi: 10.15673/tmgc.v9i2.279.
11. **Lychak D. P.** Morse functions and flows on nonorientable surfaces. / D. P. Lychak and A. O. Prishlyak. — *Methods of Functional Analysis and Topology.* —2009. — Vol. 15, № 3. — P. 251–258.

12. **Prishlyak A. O.** Conjugacy of Morse functions on 4-manifolds. / A. O. Prishlyak // Russian Mathematical Surveys. — 2001. — Vol. 56, № 1. — С. 170–171.
13. **Prishlyak A. O.** On sum of indices of flow with isolated fixed points on a stratified sets. / A. O. Prishlyak // Zhurnal Matematicheskoi Fiziki, Analiza, Geometrii [Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry]. — 2003. — Vol. 10, № 1. — P. 106–115.
14. **Prishlyak A. O.** Topological properties of functions on two and three dimensional manifolds. / A. O. Prishlyak // Palmarium Academic Publishing. — 2012.
15. **Prishlyak A.** Flows with collective dynamics on a sphere. / A. Prishlyak, A. Prus, S. Huraka // Proc. Int. Geom. Cent. — 2021. — Vol. 14, № 1. — P. 61–80.
16. **Prishlyak A.** Morse-smale flows on torus with hole. / A. Prishlyak, A. Prus // Proceedings of the International Geometry Center. — 2017. — Vol. 10, № 1. — P.47–58.
17. **Prishlyak A.O.** Equivalence of morse function on 3-manifolds / A. O. Prishlyak // Methods of Func. Ann. and Topology. — 1999. — Vol. 5, № 3. — P. 49–53.
18. **Prishlyak A.O.** Conjugacy of morse functions on surfaces with values on a straight line and circle / A. O. Prishlyak // Ukrainian Mathematical Journal. — 2000. — Vol. 52, № 10. — P. 1623–1627.
19. **Prishlyak A.O.** Morse functions with finite number of singularities on a plane. / A. O. Prishlyak // Meth. Funct. Anal. Topol. — 2002. — Vol. 8. — P. 75–78.
20. **Prishlyak A.O.** Topological equivalence of morse-smale vector fields with beh2 on three-dimensional manifolds. / A. O. Prishlyak // Ukrainian Mathematical Journal. — 2002. — Vol. 54, № 4. — P. 603–612
21. **Reeb. G.** Sur les points singuliers d'une forme de pfaff completement integrable ou d'une fonction numerique. / G. Reeb. // C.R.A.S. Paris. — 1946. — Vol. 222. — P. 847–449.
22. **Sharko. V. V.** Functions on manifolds. Algebraic and topological aspects / V. V. Sharko // Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI. — 1993. — Vol. 131. — 193 p.
23. **Білун С.** Геометрія та топологія проєктивної площини / С. Білун, О. Пришляк // У світі математики. — 2022. — P. 1–6.
24. **Кузаконь В.М.** Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти / В.М. Кузаконь, В.Ф. Кириченко, and О.О. Пришляк. // Праці Інституту математики НАН України. — 2013. — № 97. — 500 с.
25. **Пришляк О.О.** Теорія Морса. / О. О. Пришляк. — Вид-во Київський університет, 2002. — 65с.
26. **Пришляк О.О.** Топологія многовидів / О.О. Пришляк // Київський університет, 2015.

Prishlyak A. O., Stas S. O.

MORSE AND CODIMENSION 1 FUNCTIONS ON THE PROJECTIVE PLANE

Summary

The topological properties of functions on two-dimensional spaces are described using an invariant called the Reeb graph. In the case of Morse functions on closed oriented two-dimensional manifolds, this serves as a complete topological invariant for homotopy equivalence. For non-oriented two-dimensional manifolds and manifolds with boundaries, additional information is required to construct a complete topological invariant. If a linear order is imposed on the set of vertices, it becomes a complete topological invariant with respect to topological equivalence.

The research explores the topological classification of Morse functions and functions of corank 1 on the projective plane. In these cases, the Reeb graph is an oriented rooted tree. An analytical expression is derived for the number of oriented Reeb graphs with a root. For functions of corank 1 and a fixed number of critical points, all possible Reeb graphs are constructed.

Key words: Morse function, functions of codim 1, Ribbon graph, topological classification, topological function theory, unoriented manifolds, topological invariants.

REFERENCES

1. **Bilun S.** The closed morse 1-forms on closed surfaces. / S. Bilun, A. Prishlyak // Visn., Mat. Mekh., Kyv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka. — 2002. — № 8. — P. 77–81.
2. **Bolsinov A.V.** Integrable Hamiltonian systems. Geometry, Topology, Classification. / A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko. — A CRC Press Company, Boca Raton London New York Washington, D.C., 2004 —724 p.
3. **Harary F.** Graph Theory / F. Harary. — Westview Press, 1969. — 274 p.
4. **Hatamian C.** Heegaard diagrams and optimal morse flows on non-orientable 3-manifolds of genus 1 and genus 2. / C. Hatamian , A. Prishlyak. // Proceedings of the International Geometry Center. — 2020. — Vol 13, № 3 — P. 33–48 doi: 10.15673/tmge.v13i3.1779
5. **Hladysh B.I.** Functions with nondegenerate critical points on the boundary of the surface. / B. I. Hladysh, A. O. Pryshlyak // Ukrainian Mathematical Journal. — 2016. — Vol. 68,. — P. 29–41. doi: 10.1007/s11253-016-1206-5.

6. **Hladysh B.I.** Deformations in the general position of the optimal functions on oriented surfaces with boundary. / B. I. Hladysh, A. O. Pryshlyak // Ukrainian Mathematical Journal. — 2020. — Vol. 71, № 8. — P. 1173–1185. doi: 10.1007/s11253-019-01706-8.
7. **Hladysh B.I.** Topology of functions with isolated critical points on the boundary of a 2-dimensional manifold. / Hladysh B.I., A. O. Prishlyak // SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. — 2017. — Vol. 13, № 50. doi: 0.3842/SIGMA.2017.050.
8. **Hladysh B. I.** Simple morse functions on an oriented surface with boundary. // Hladysh B.I., Prishlyak A.O. Журнал математической физики. анализа, геометрии. — 2019. — Т. 15, № 3. — С. 354–368. doi: 10.15407/mag15.03.354.
9. **Kronrod A.S.** Functions of two variables. / A. S. Kronrod // Russian Mathematical Surveys. — 1950. — Т. 5. — С. 24–134.
10. **Losieva M.** Topology of Morse–Smale flows with singularities on the boundary of a two-dimensional disk. / M. Losieva, A. Prishlyak // Pr. Mizhnar. Heometr. Tsentr. — 2016. — Vol. 9, № 2. — P. 32–41, . doi: 10.15673/tmgc.v9i2.279.
11. **Lychak D. P.** Morse functions and flows on nonorientable surfaces. / D. P. Lychak and A. O. Prishlyak. — Methods of Functional Analysis and Topology. —2009. — Vol. 15, № 3. — P. 251–258.
12. **Prishlyak A. O.** Conjugacy of Morse functions on 4-manifolds. / A. O. Prishlyak // Russian Mathematical Surveys. —2001. — Vol. 56, № 1. — С. 170–171.
13. **Prishlyak A. O.** On sum of indices of flow with isolated fixed points on a stratified sets. / A. O. Prishlyak // Zhurnal Matematicheskoi Fiziki, Analiza, Geometrii [Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry]. — 2003. — Vol. 10, № 1. — P. 106–115.
14. **Prishlyak A. O.** Topological properties of functions on two and three dimensional manifolds. / A. O. Prishlyak // Palmarium Academic Publishing. — 2012.
15. **Prishlyak A.** Flows with collective dynamics on a sphere. / A. Prishlyak, A. Prus, S. Huraka // Proc. Int. Geom. Cent. — 2021. — Vol. 14, № 1. — P. 61–80.
16. **Prishlyak A.** Morse-smale flows on torus with hole. / A. Prishlyak, A. Prus // Proceedings of the International Geometry Center. — 2017. — Vol. 10, № 1. — P.47–58.
17. **Prishlyak A.O.** Equivalence of morse function on 3-manifolds / A. O. Prishlyak // Methods of Func. Ann. and Topology. — 1999. — Vol. 5, № 3. — P. 49–53.
18. **Prishlyak A.O.** Conjugacy of morse functions on surfaces with values on a straight line and circle / A. O. Prishlyak // Ukrainian Mathematical Journal. — 2000. — Vol. 52, № 10. — P. 1623–1627.
19. **Prishlyak A.O.** Morse functions with finite number of singularities on a plane. / A. O. Prishlyak // Meth. Funct. Anal. Topol. — 2002. — Vol. 8. — P. 75–78.
20. **Prishlyak A.O.** Topological equivalence of morse–smale vector fields with beh2 on three-dimensional manifolds. / A. O. Prishlyak // Ukrainian Mathematical Journal. — 2002. — Vol. 54, № 4. — P. 603–612

-
21. **Reeb. G.** Sur les points singuliers d'une forme de pfaff complètement integrable ou d'une fonction numerique. / G. Reeb. // C.R.A.S. Paris. — 1946. — Vol. 222. — P. 847–449.
 22. **Sharko. V. V.** Functions on manifolds. Algebraic and topological aspects / V. V. Sharko // Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI. — 1993. — Vol. 131. — 193 p.
 23. **Білун С.** Геометрія та топологія проєктивної площини / С. Білун, О. Пришляк // У світі математики. — 2022. — Р. 1–6.
 24. **Кузаконь В.М.** Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти / В.М. Кузаконь, В.Ф. Кириченко, and О.О. Пришляк. // Праці Інституту математики НАН України. — 2013. — № 97. — 500 с.
 25. **Пришляк О.О.** Теорія Морса. / О. О. Пришляк. — Вид-во Київський університет, 2002. — 65с.
 26. **Пришляк О.О.** Топологія многовидів / О.О. Пришляк // Київський університет, 2015.

УДК 519.9

Собчук В. В., Зеленська І. О.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ РІВНОМІРНОЇ АСИМПТОТИКИ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ ПРИ ДОДАТНИХ КОЕФІЦІЄНТАХ МАТРИЦІ

Робота присвячена аналізу коефіцієнтів сингулярного оператора типу Орра-Зоммерфельда у векторній формі включаючи точку звороту. Досліджена система сингулярно збурених диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній. Розглянуто випадок, коли спектр граничного оператора містить кратні і тотожно рівні нулеві елементи. Використовуючи метод істотно особливих функцій, побудовано рівномірну асимптотику розв'язку системи. Для випадку стабільної точки звороту, асимптотика розв'язків системи побудована в секторі, який містить точку звороту. Асимптотика перших двох розв'язків для однорідної задачі побудована з використанням функцій Ейрі та їх похідних. Третій формальний розв'язок однорідної системи для даного випадку виклає певні труднощі. Тому з урахуванням вказаних умов для побудови рівномірної асимптотики розв'язку для заданої системи, використали частинний розв'язок неоднорідної системи в якості третього розв'язку однорідної системи.

MSC: 34A34, 34C60, 34D05, 34E20.

Ключові слова: асимптотичний розв'язок, сингулярно збурена система диференціальних рівнянь, точка звороту, істотно особливі функції, простір безрезонансних розв'язків, рівномірна асимптотика, особлива точка, збурення.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305266](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305266).

Вступ

Досліджуючи динаміку поведінки багатьох систем у фізиці, хімії, біології та інших науках зручно представити математичні моделі таких систем за допомогою систем диференціальних рівнянь. Часто такі математичні моделі описують процеси, які характеризуються швидкою зміною поведінки системи в околі певних особливих точок [7]. В таких випадках ці особливості математично описують, використовуючи так звані системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Варто зазначити, що системи диференціальних рівнянь з точками звороту є окремим класом таких задач. Специфіка поведінки систем в околі особливих точок обумовлена

різними факторами. В загальному випадку має місце зміна характеру поведінки фізичних процесів при досягненні відповідних положень. Власне для сингулярно збурених диференціальних в таких випадках має місце зміна коливного характеру поведінки системи на показниковий. Точки, в яких відбувається така зміна характеру поведінки системи називають точками звороту [?; 3]. Вивчення точок звороту є важливою проблематикою в асимптотичній теорії диференціальних операторів, оскільки інформація про асимптотичну поведінку розв'язків цих диференціальних рівнянь є чи не єдиним способом зрозуміння якісних ефектів їх поведінки. А характер локалізації та поведінка точок звороту спричиняє вирішальний вплив на асимптотику розв'язків відповідних диференціальних рівнянь. У даній статті, спираючись на попередні дослідження [1; 4–6], проаналізовано поведінку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту. Основним фокусом даної роботи є дослідження особливостей побудови асимптотики розв'язків, обумовлених додатнозначністю коефіцієнтів матриці системи, до якої зводиться рівняння типу Орра-Зомерфельда вигляду

$$\varepsilon y'''(x, \varepsilon) + x\tilde{a}(x)y'(x, \varepsilon) + b(x)y(x, \varepsilon) = h(x),$$

Варто зазначити, що додатнозначність коефіцієнтів матриці породжую низку труднощів, які необхідно враховувати при побудові асимптотики розв'язку.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Постановка задачі.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь:

$$\varepsilon Y'(x, \varepsilon) - A(x, \varepsilon)Y(x, \varepsilon) = H(x), \quad (1)$$

де $A(x, \varepsilon)$ має таку структуру

$$A(x, \varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1,$$

а $A_0(x)$ і A_1 матриці вигляду

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \in [0, l]$, $Y(x, \varepsilon) = \text{column}(y_1(x, \varepsilon), y_2(x, \varepsilon), y_3(x, \varepsilon))$ - шукана вектор-функція, $H(x) = \text{column}(0, 0, h(x))$ - задана вектор-функція.

Дослідимо задачу про побудову рівномірної асимптотики розв'язків сингулярно збуреної системи (1) для якої виконуються умови:

С 1. $A_0(x), H(x) \in C^\infty[0, l]$.

С 2. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) > 0$, $b(x) > 0$.

В цій роботі розглянемо випадок, коли $b(x) > 0$. Тоді умова **С 2** матиме вигляд

$$a(x) = x\tilde{a}(x), \quad \tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) > 0. \quad (2)$$

Запишемо характеристичне рівняння, що відповідає системі сингулярно збурених диференціальних рівнянь (1). Воно має вигляд:

$$|A(x, 0) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -b(x) & -a(x) & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - x\tilde{a}(x)\lambda = 0.$$

Коренями даного характеристичного рівняння є

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{x\tilde{a}(x)}.$$

Далі дослідимо випадок коли корінь λ_1 тотожно рівен нулеві, а корені λ_2 і λ_3 злипаються в точці звороту [1]. Оскільки корені характеристичного рівняння уявні, це вказує на стабільність точки звороту $x = 0$ [1].

2. Розширення системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь.

Точка $\varepsilon = 0$ є особливою точкою для рівняння (1). Для виділення всіх істотно особливих функцій та збереження їх як єдиних цілих в системі (1), введемо регуляризуючу змінну

$$t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x), \quad (3)$$

де показник p і регуляризуюча функція $\varphi(x)$ власне й і мають бути визначені.

Згідно методу істотно особливих функцій, необхідною умовою розширення задачі є справедливість співвідношення

$$\tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon)|_{t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)} \equiv Y_k(x, \varepsilon).$$

Тоді для визначення розширеної функції $\tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon)$ одержимо розширене векторне рівняння

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\varepsilon \tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon) \equiv \varepsilon^{1-p} \varphi' \frac{\partial \tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon)}{\partial t} + \\ + \varepsilon \frac{\partial \tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon)}{\partial x} - A(x, \varepsilon) \tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon) = H(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Згідно метода істотно особливих функцій необхідно виділити множини функцій (підпростори), в яких розв'язок досліджуваної задачі містить всі істотно особливі функції і сама задача буде регулярно залежати від малого параметра ε .

Основною метою подальшого дослідження є побудова третього розв'язку розширеного рівняння (4), який буде описано із застосуванням істотно особливих функцій $\psi(x)$ та $\psi'(x)$. В роботі [2] описана схема побудови розв'язків скалярних рівнянь типу Орра-Зоммерфельда.

2.1. Простір безрезонансних розв'язків.

Виділимо таку множину функцій, в якій розширена задача (4) буде регулярно збуреною відносно малого параметра. Для цього розглянемо множину (підпростори) функцій

$$\begin{aligned} D_{1k} &= \alpha_{1k}(x, \varepsilon) U_1(t) + \varepsilon^\gamma \beta_{1k}(x, \varepsilon) U_1'(t), \\ D_{2k} &= \alpha_{2k}(x, \varepsilon) U_2(t) + \varepsilon^\gamma \beta_{2k}(x, \varepsilon) U_2'(t), \\ D_{3k} &= f_k(x, \varepsilon) \psi(t) + \varepsilon^\gamma g_k(x, \varepsilon) \psi'(t), \\ D_{4k} &= \bar{\omega}_k(x, \varepsilon), \end{aligned} \quad (5)$$

де $U_i(t)$, ($i = \overline{1, 2}$) – функції Ейрі-Дородніцина [1].

З підпросторів (5), складемо як пряму суму новий простір

$$D_k = \left[\sum_{i=1}^2 \{D_{ik}\} \oplus D_{3k} \oplus D_{4k} \right].$$

Елемент $\tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon)$ простору D_k має таку структуру:

$$\tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^2 D_{ik}(x, t, \varepsilon) + f_k(x, \varepsilon) \psi(t) + \varepsilon^\gamma g_k(x, \varepsilon) \psi'(t) + \omega_k(x, \varepsilon), \quad (6)$$

де

$$\sum_{k=1}^2 D_{ik}(x, t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{s_1} \alpha_{k1}(x, \varepsilon) \\ \varepsilon^{s_2} \alpha_{k2}(x, \varepsilon) \\ \varepsilon^{s_3} \alpha_{k3}(x, \varepsilon) \end{pmatrix} U_i(t) + \varepsilon^\gamma \begin{pmatrix} \varepsilon^{k_1} \beta_{k1}(x, \varepsilon) \\ \varepsilon^{k_2} \beta_{k2}(x, \varepsilon) \\ \varepsilon^{k_3} \beta_{k3}(x, \varepsilon) \end{pmatrix} U_i'(t),$$

де $\alpha_{ik}(x, \varepsilon)$, $\beta_{ik}(x, \varepsilon)$, $f_k(x, \varepsilon)$, $g_k(x, \varepsilon)$, $\omega_k(x, \varepsilon)$, $k = \overline{1, 3}$ – шукані аналітичні функції, які залежать від параметра $\varepsilon > 0$ що нескінченно диференційовні на проміжку $x \in [0; l]$.

Далі для того, щоб обчислити регуляризуючу змінну згідно з (6), необхідно визначити показник p і функцію $\varphi(x)$. Для цього подіємо розширеним оператором \tilde{L}_ε на вектор функцію $D_k(x, t, \varepsilon)$. Підставимо результат в однорідне розширене рівняння (4), тобто при $H(x) = 0$. Отримаємо

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\varepsilon(\alpha_{ik}(x, \varepsilon)U_{ik}(t) + \varepsilon^\gamma \beta_{ik}(x, \varepsilon)U'_i(t)) &= \varepsilon^{1-p} \alpha_{ik}(x, \varepsilon) \varphi'(x) U'_i(t) + \\ + \varepsilon \alpha'_{ik}(x, \varepsilon) U_i(t) - A(x, \varepsilon) \alpha_{ik}(x, \varepsilon) U_i(t) &+ \varepsilon^{1-p+\gamma} \varphi'(x) \beta_{ik}(x, \varepsilon) U''_i(t) + \\ + \varepsilon^{1+\gamma} \beta'_{ik}(x, \varepsilon) U'_i(t) - \varepsilon^\gamma A(x, \varepsilon) \beta_{ik}(x, \varepsilon) U'_i(t) &= 0. \end{aligned}$$

Для подальших міркувань та перетворень з компонентою $U''(t)$ використаємо модельний оператор Ейрі-Дородніцина

$$U''(t) + tU(t) = 0,$$

$$U''(t) = -tU(t), \quad t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi'(x).$$

Тоді необхідно, щоб коефіцієнти при істотно особливих функціях та їх похідних перетворились в нуль. Відтак випишемо коефіцієнти при істотно особливих функціях та їх похідних:

$$U'_i(t) : \varepsilon^{1-p} \alpha_{ik}(x, \varepsilon) \varphi'(x) - \varepsilon^\gamma [A_0(x) + \varepsilon A_1] \beta_{ik}(x, \varepsilon) = -\varepsilon^{1+\gamma} \beta'_{ik}(x, \varepsilon), \quad (7)$$

$$U_i(t) : -\varepsilon^{1+\gamma-2p} \beta_k(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) - [A_0(x) + \varepsilon A_1] \alpha_{ik}(x, \varepsilon) = -\varepsilon \alpha'_{ik}(x, \varepsilon) \quad (8)$$

де $i = \overline{1, 2}$.

Вимагатимемо, щоб одержані системи (7) і (8) були регулярно збуреними відносно малого параметра $\varepsilon > 0$. З попередніх досліджень

$$p = \frac{2}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}, \quad k_1 = k_2 = s_3 = 0, \quad s_1 = s_2 = k_3 = -\frac{1}{3}. \quad (9)$$

Важливим є наступне твердження

Зауваження 1. Для існування розв'язків систем (7) і (8) необхідно, щоб виконувалась умова $p = \frac{2}{3}$, $\gamma = \frac{1}{3}$.

Векторні рівняння (7) і (8) запишемо у вигляді системи алгебраїчних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{i1}(x, \varepsilon) = \mu^3[\beta_{i2}(x, \varepsilon) - \beta'_{i1}(x, \varepsilon)], \\ \varphi'(x)\alpha_{i2}(x, \varepsilon) - \beta_{i3}(x, \varepsilon) = -\mu^3\beta'_{i2}(x, \varepsilon), \\ \varphi'(x)\alpha_{i3}(x, \varepsilon) + b(x)\beta_{i1}(x, \varepsilon) + a(x)\beta_{i2}(x, \varepsilon) = -\mu^3\beta'_{i3}(x, \varepsilon), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i1}(x, \varepsilon) = \mu^3[\alpha'_{i1}(x, \varepsilon) - \alpha_{i2}(x, \varepsilon)], \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i2}(x, \varepsilon) + \alpha_{i3}(x, \varepsilon) = \mu^3\alpha'_{i2}(x, \varepsilon), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i3}(x, \varepsilon) - b(x)\alpha_{i1}(x, \varepsilon) - a(x)\alpha_{i2}(x, \varepsilon) = \mu^3\alpha'_{i3}(x, \varepsilon). \end{cases} \quad (10)$$

Тут $i = \overline{1; 2}$, $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{3}}$. В подальших міркуваннях, враховуватимо, що $\varepsilon = \mu^3$.

Таким способом, одержана система (10) є регуляризованою. Це означає, що в ході перетворень було правильно виділено, описано та збережено як єдину цілісність усі істотно особливі функції, які містяться у розв'язках системи (1).

3. Побудова формальних розв'язків однорідної системи.

Варто відзначити, що особливістю розширеної задачі (10) є те, що вона регулярно збурена відносно малого параметра $\mu > 0$ у просторі безрезонансних розв'язків (5). Тоді всі компоненти вектор-функцій $\alpha_{ik}(x, \varepsilon)$ і $\beta_{ik}(x, \varepsilon)$ будемо шукати у вигляді рядів

$$\alpha_{ik}(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \alpha_{ikr}(x), \quad \beta_{ik}(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \beta_{ikr}(x). \quad (11)$$

Підставимо ряди (11) у систему (10) для визначення вектор-функцій

$$\alpha_{ikr}(x) = \text{colomn}(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x)),$$

$$\beta_{ikr}(x) = \text{colomn}(\beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x)).$$

Підставивши ряди (11) у розширену задачу (3) і зрівнявши коефіцієнти біля однакових степенів малого параметра $\mu > 0$, для визначення коефіцієнтів рядів отримаємо рекурентну систему задач:

$$\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = 0, \quad r = \overline{0; 2}, \quad \Phi(x)Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{k(r-3)}(x), \quad r \geq 3, \quad (12)$$

за умови, що $Z_{kr}(x) = \text{colomn}(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x), \beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x))$,

а

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \varphi'(x) & -b(x) & a(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 \\ b(x) & -a(x) & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$F \cdot Z_{k(r-3)}(x) = \text{colomn} (z_{i1(r-3)}, z_{i2(r-3)}, z_{i3(r-3)}, z_{i4(r-3)}, z_{i5(r-3)}, z_{i6(r-3)}),$$

де

$$z_{i1(r-3)} = (\beta_{i2(r-3)}(x) - \beta_{i1(r-3)}(x)),$$

$$z_{i2(r-3)} = -\beta_{i2(r-3)}(x),$$

$$z_{i3(r-3)} = -\beta_{i3(r-3)}(x),$$

$$z_{i4(r-3)} = (\alpha_{i1(r-3)}(x) - \alpha_{i2(r-3)}(x)),$$

$$z_{i5(r-3)} = \alpha_{i2(r-3)}(x),$$

$$z_{i6(r-3)} = \alpha_{i3(r-3)}(x).$$

Обчислимо визначник цієї системи (13)

$$\det \Phi(x) = \varphi'^2 [\varphi(x)\varphi'_2(x)]^2 \cdot [\varphi(x)\varphi'^2(x) - a(x)]^2 = 0.$$

Зауважимо, що регуляризуюча функція $\varphi(x)$ поки не визначена. Тому визначимо її як розв'язок задачі:

$$\varphi(x)\varphi'^2(x) = a(x) \equiv x\tilde{a}(x), \quad \varphi(0) = 0. \quad (14)$$

Розв'язавши (14) отримуємо

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{x\tilde{a}(x)} dx \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Запишемо систему рекурентних рівнянь (12) при $r = 0$

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{i10}(x, \varepsilon) = 0, \\ \varphi'(x)\alpha_{i20}(x, \varepsilon) - \beta_{i30}(x, \varepsilon) = 0, \\ \varphi'(x)\alpha_{i30}(x, \varepsilon) + b(x)\beta_{i10}(x, \varepsilon) + a(x)\beta_{i20}(x, \varepsilon) = 0, \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i1}(x, \varepsilon) = \mu^3[\alpha'_{i10}(x, \varepsilon) - \alpha_{i20}(x, \varepsilon)], \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i20}(x, \varepsilon) + \alpha_{i30}(x, \varepsilon) = 0, \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i30}(x, \varepsilon) - b(x)\alpha_{i1}(x, \varepsilon) - a(x)\alpha_{i20}(x, \varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\det \Phi(x) \equiv 0$, то існує нетривіальний розв'язок системи $\Phi(x) \cdot Z_{kr} = 0$, $r = \overline{0; 2}$ вигляду:

$$Z_{ikr}(x) = \text{colomn} \left(0, \frac{1}{\varphi'(x)} \beta_{i2r}(x), -\varphi \varphi'(x) \beta_{i3r}(x), 0, \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x) \right), \quad (15)$$

де $\beta_{ikr}(x)$, $i = \overline{1; 2}$, $k = \overline{1; 3}$, $r = \overline{0; 2}$ – до певного часу довільні, достатньо гладкі функції при $x \in [0; l]$.

Таким способом, отримавши розв'язок системи $\Phi(x) \cdot Z_{kr} = 0$, $r = \overline{0; 2}$, перейдемо до розв'язків неоднорідних систем (13) $\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{k(r-3)}(x)$, $r \geq 3$. Спочатку розглянемо ці системи при $r = 3$. З урахуванням розв'язку (16), отримуємо системи

$$\begin{cases} \varphi'(x) \alpha_{i13}(x) = \beta_{i20}(x) - \beta'_{i10}(x) \equiv \beta_{i20}(x), \\ \varphi'(x) \alpha_{k23}(x) - \beta_{i33}(x) = -\beta'_{i20}(x), \\ \varphi'(x) \alpha_{i33}(x) + b(x) \beta_{i13}(x) + a(x) \beta_{i23}(x) = -\beta'_{i30}(x), \end{cases} \quad (16)$$

та

$$\begin{cases} \varphi(x) \varphi'(x) \beta_{i13}(x) = -\alpha'_{i10}(x) + \alpha_{i20}(x) \equiv \alpha_{i20}(x) \equiv [\varphi'(x)]^{-1} \beta_{i30}(x), \\ \varphi(x) \varphi'(x) \beta_{i23}(x) + \alpha_{i33}(x) = \alpha'_{i20}(x) \equiv \frac{d}{dx} ([\varphi'(x)]^{-1} \beta_{i30}(x)), \\ \varphi(x) \varphi'(x) \beta_{i33}(x) - b(x) \alpha_{i13}(x) - a(x) \alpha_{i23}(x) = \alpha'_{i30}(x) \equiv \\ \equiv \frac{d}{dx} [-\varphi(x) \varphi'(x) \beta_{i20}(x)]. \end{cases} \quad (17)$$

З перших рівнянь систем (16) та (17) визначимо функції

$$\alpha_{i13}(x) = [\varphi'(x)]^{-1} \beta_{i20}(x),$$

$$\beta_{i13}(x) = [\varphi'(x)]^{-2} [\varphi(x)]^{-1} \beta_{i30}(x).$$

Тоді системи (16) і (17) наберуть вигляду

$$\begin{cases} \varphi'(x) \alpha_{i23}(x) - \beta_{i33}(x) = -\beta'_{i20}(x), \\ \varphi'(x) \alpha_{i33}(x) + a(x) \beta_{i23}(x) = -\beta'_{i30}(x) - b(x) \beta_{i13}(x), \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} \varphi(x) \varphi'(x) \beta_{i23}(x) + \alpha_{i33}(x) = \alpha'_{i20}(x) \equiv \frac{d}{dx} ([\varphi'(x)]^{-1} \beta_{i30}(x)), \\ \varphi(x) \varphi'(x) \beta_{k33}(x) - a(x) \alpha_{i23}(x) = \frac{d}{dx} [-\varphi(x) \varphi'(x) \beta_{i20}(x)] + b(x) \alpha_{i13}(x). \end{cases}$$

З (16) та (17) одержимо

$$\beta_{i20}(x) = \beta_{i20}^0 \cdot \exp\left\{\int \frac{b(x) - \varphi'^3(x) - \varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x)}{2a(x)}\right\}, \quad (18)$$

$$\beta_{i30}(x) = \beta_{i30}^0 \cdot \exp\left\{\int \frac{b(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x)}{2a(x)}\right\}, \quad (19)$$

Тепер з умов (18) та (19) однозначно визначимо компоненти розв'язку (15) при $r = \overline{0; 2}$, а саме

$$\beta_{is0}(x) = \beta_{is0}^0 \cdot \tilde{\beta}_{is0}(x),$$

де $i = \overline{1; 2}$, $s = \overline{2; 3}$, $\beta_{is0}^0(x)$ – довільні сталі, $\tilde{\beta}_{is0}(x)$ – частинні, достатньо гладкі розв'язки однорідних систем (15) та (16) при $x \in [0; l]$. При такому визначенні вектор-функцій $Z_{k0}(x)$ існують розв'язки неоднорідних систем (16) та (17) вигляду

$$\begin{aligned} Z_{i3}(x) &= \text{colomn} \left(z_{k13}, z_{k23}, z_{k33}, z_{k43}, z_{k53}, z_{k63} \right), \\ z_{i13} &= (\varphi'(x))^{-1} \beta_{i20}(x) \\ z_{i23} &= \frac{-\beta'_{i20}(x) + \beta_{i33}(x)}{\varphi'(x)}, \\ z_{i33} &= \frac{-\beta'_{i30}(x) - a(x)\beta_{i23}(x) - b(x)(\varphi(x))^{-1}(\varphi'(x))^{-2}\beta_{i30}}{\varphi'(x)}, \\ z_{i43} &= (\varphi(x))^{-1}(\varphi'(x))^{-2}\beta_{i20}(x), \\ z_{i53} &= \beta_{i21}(x), \\ z_{i63} &= \beta_{i31}(x). \end{aligned}$$

Необхідно відмітити, що $\beta_{i21}(x)$ та $\beta_{i31}(x)$, як і в (15), до певного часу довільні, достатньо гладкі функції для всіх $x \in [0; l]$.

Продовжуючи далі розв'язувати системи алгебраїчних рівнянь (16) та (17) при $r > 3$, знайдемо всі необхідні члени ряду для обох систем з точністю до двох довільних сталих $\beta_{i2q}(x)$ та $\beta_{i3q}(x)$, де $r = \overline{0; q}$.

Висновок 1. Лінійно незалежні розв'язки однорідної системи алгебраїчних рівнянь (1) мають вигляд

$$D_{ik}(x, t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ik}(x)U_i(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ik}(x, \varepsilon)U'_i(t)], \quad i = \overline{1; 2}, k = \overline{1; 3}. \quad (20)$$

де

$$\alpha_{ik}(x) = \text{colomn}(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x)),$$

$$\beta_{ik}(x) = \text{colomn}(\beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x)).$$

Тут $\alpha_{ik}(x)$ та $\beta_{ik}(x)$ визначені вектор-функції, $i = \overline{1;2}$, $k = \overline{1;3}$. При чому (26) отримуємо як ітераційні розв'язки систем (16) та (17).

Повертаючись до заміни $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$ одержимо розв'язки системи (1) у вигляді

$$D_{ik}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ik}(x)U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ik}(x, \varepsilon)U'_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))], \quad i = \overline{1;2}, k = \overline{1;3}. \quad (21)$$

Тоді, поступово розв'язуючи (1), отримаємо два формальні розв'язки однорідного рівняння

$$D_{ik}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ikr}(x)U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ikr}(x, \varepsilon)U'_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))]. \quad (22)$$

Третій формальний розв'язок однорідного векторного рівняння ми не можемо отримати з виродженого рівняння, системи (1). В даному випадку точка звороту буде стабільною, як і в попередньому випадку, але розв'язки виродженого рівняння не будуть достатньо гладкими у точці $x = 0$. З урахуванням умов C1 і C2, тобто коли $b(x) > 0$, тобто одержимо $\frac{-b(0)}{a(0)} = \rho < 0$ [1]. Тому повторити логіку і використати міркування, які були описані у випадку А ми не можемо. Оскільки розв'язок виродженого диференціального рівняння системи (1) та його похідні не є достатньо гладкими в точці $x = 0$. Це пояснюється тим, що розв'язок має розрив другого роду в точці звороту. Тому він не може бути використаний для побудови третього лінійно незалежного розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (1). Труднощі, які виникають при побудові третього формального розв'язку опишемо нижче.

4. Побудова формальних частинних розв'язків неоднорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь.

Вивчимо дію розширеного оператора \tilde{L}_ε на елементи простору безрезонансних розв'язків D_{3k} і D_{4k} .

Для подальших міркувань та перетворень з компонентою $\psi''(t)$ використаємо модельний оператор

$$\psi(t)'' + t\psi(t) = 1,$$

$$\psi(t)'' = 1 - t\psi(t), \quad t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi'(x).$$

Прирівняємо коефіцієнти при істотно особливих функціях в лівій та правій частинах рівності, в результаті отримаємо рівняння вигляду

$$\psi'(t) : \varphi'(x)f(x, \varepsilon) - [A_0(x) + \mu^3 A_1]g(x, \varepsilon) = -\mu^3 g'(x, \varepsilon), \quad (23)$$

$$\psi(t) : \varphi(x)\varphi'(x)g_k(x, \varepsilon) + [A_0(x) + \mu^3 A_1]f_k(x, \varepsilon) = \mu^3 f'(x, \varepsilon), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mu^3 \bar{\omega}'(x, \varepsilon) - [A_0(x) + \mu^3 A_1]\bar{\omega}(x, \varepsilon) + \mu^2 \varphi'(x)g_k(x, \varepsilon) = \\ = H(x) - \mu^2 \varphi'(x)g_k(x, \varepsilon). \end{aligned} \quad (25)$$

Вивчивши рівняння (23) та (24), бачимо, що вони мають таку ж структуру як і (7) та (8). Але скористатись прямим результатом (26) ми не можемо, оскільки в цьому випадку не отримаємо очікуваних результатів для системи (25). Для отримання рівномірної асимптотики системи (25) необхідно використати розв'язки (23) та (24), провівши аналогічні міркування як у (7) та (8). Дослідимо системи (23) та (24) і побудуємо їх розв'язки у вигляді рядів:

$$f_k(x, \varepsilon) = \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r f_{kr}(x), \quad g_k(x, \varepsilon) = \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r g_{kr}(x). \quad (26)$$

Для визначення компонент вектор-функцій

$$f_{kr}(x) = \text{column}(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x)),$$

$$g_{kr}(x) = \text{column}(g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x))$$

підставимо ряди (26) у рівняння (23) та (24). Будемо мати наступні системи рекурентних рівнянь:

$$\Phi(x) \cdot Z_0^{\text{part.}}(x) = 0, \quad r = -2; -1; 0, \quad \Phi(x) \cdot Z_r^{\text{part.}}(x) = -Z_{r-3}^{\text{part.}}(x), \quad r \geq 1. \quad (27)$$

В одержаних рекурсіях (27) $\Phi(x)$ – матриця, а

$$Z_r^{\text{part.}}(x) = \text{column}(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x), g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x))$$

невідомі вектор-функція.

Нагадаємо, що в попередньому пункті ми не змогли побудувати третій формальний розв'язок однорідної системи (3). Тому будемо будувати тільки частинні розв'язки цієї системи.

Оскільки $\det \Phi(x) \equiv 0$, то існує нетривіальний розв'язок системи $\Phi(x) \cdot Z_{kr} = 0$, $r = \overline{-2; 0}$ вигляду:

$$Z_{kr}(x) = \text{colomn} \left(0, \frac{1}{\varphi'(x)} g_{2r}(x), -\varphi \varphi'(x) g_{3r}(x), 0, g_{2r}(x), g_{3r}(x) \right), \quad (28)$$

де $g_{kr}(x)$, $k = \overline{1; 3}$, $r = \overline{-2; 0}$ – до певного часу довільні, достатньо гладкі функції при $x \in [0; l]$.

Таким способом, отримавши розв'язок системи $\Phi(x) \cdot Z_{kr} = 0$, $r = \overline{-2; 0}$, перейдемо до розв'язків неоднорідних систем (28) $\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{k(r-3)}(x)$, $r \geq 1$. Спочатку розглянемо ці системи при $r = 1$. З урахуванням розв'язку (??) і слідую міркуванням попереднього пункту, одержимо диференціальні рівняння виду

$$-2a(x)g'_{2(-2)}(x) + \left[b(x) - \varphi'(x)(\varphi(x)\varphi'(x))' \right] g_{2(-2)}(x) = 0, \quad (29)$$

та

$$-2g'_{3(-2)}(x) + \left[\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} - \frac{b(x)}{a(x)} \right] g_{3(-2)}(x) = 0. \quad (30)$$

У рівнянні (29) введемо позначення

$$b_2(x) = b(x) - \varphi'^3(x) - \varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x).$$

Нагадаємо, що

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{x\tilde{a}(x)} dx \right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\varphi'(x) = \left(\int_0^x \sqrt{x\tilde{a}(x)} dx \right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{x\tilde{a}(x)}.$$

Відповідно в рівнянні (30) також введемо позначення

$$b_3(x) = b(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x).$$

Тоді рівняння (29) та (30) запишемо у вигляді

$$g'_{2(-2)}(x) - \frac{1}{x} \left[\frac{b_2(x)}{2\tilde{a}(x)} \right] g_{2(-2)}(x) = 0, \quad (31)$$

та

$$g'_{3(-2)}(x) - \frac{1}{x} \left[\frac{b_3(x)}{2\tilde{a}(x)} \right] g_{3(-2)}(x) = 0. \quad (32)$$

Розв'яжемо (31). Тоді

$$g_{2(-2)}(x) = g_{2(-2)}^0 \cdot \exp\left\{ \int \frac{b_2(x)}{x} \right\}. \quad (33)$$

З (32) одержимо

$$g_{3(-2)}(x) = g_{3(-2)}^0 \cdot \exp\left\{ \int \frac{b_3(x)}{x} \right\}, \quad (34)$$

$$\bar{Z}_{k1}^{part.}(x) = \text{column}(\bar{z}_{k1}, \bar{z}_{k2}, \bar{z}_{k3}, \bar{z}_{k4}, \bar{z}_{k5}, \bar{z}_{k6}), \quad (35)$$

де

$$\bar{z}_{k1} = \frac{g_{2(-2)}^0(x) \cdot x^{\rho_2}}{\varphi'(x)},$$

$$\bar{z}_{k2} = \frac{-g_{2(-2)}^0(x) \cdot x^{\rho_2} + g_{31}(x)}{\varphi'(x)},$$

$$\bar{z}_{k3} = \frac{-g_{2(-2)}^0(x) \cdot x^{\rho_2} + \frac{b(x)g_{3(-2)}^0(x) \cdot x^{\rho_3}}{a(x)} - a(x)g_{21}(x)}{\varphi'(x)},$$

$$\bar{z}_{k4} = \frac{-g_{3(-2)}^0(x) \cdot x^{\rho_3}}{a(x)},$$

$$\bar{z}_{k5} = g_{21}(x),$$

$$\bar{z}_{k6} = g_{31}(x).$$

де $g_{k1}, k = \overline{2; 3}$ – до певного часу довільні, достатньо гладкі функції $x \in [0; l]$.

Введемо нові позначення

$$\frac{b_2(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{b(0) - \varphi'^3(0) - \varphi(0)\varphi'(0)\varphi''(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{b(0) - \varphi'^3(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{1}{2}[\rho - 1] = \rho_2$$

і

$$\frac{b_3(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{b(0) + \varphi(0)\varphi'(0)\varphi''(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{b(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{1}{2}\rho = \rho_3$$

З метою забезпечення побудови рівномірної асимптотики розв'язку рівняння (3) на всьому відрізку відносно малого параметра необхідно, щоб виконувалась вимога $\rho \in N$. Оскільки $\frac{b(0)}{\tilde{a}(0)} = \rho$ має бути натуральним числом, то розглянемо такі випадки.

Випадок 1. Нехай $\rho = 2n$ - парне число, $n \in N$. Тоді, використовуючи вищезазначені позначення одержимо, що $\rho_2 = n - \frac{1}{2}$ не є натуральним числом, а $\rho_3 = n$ - натуральне число або $\rho_3 = 0$ при $\rho = 0$.

Гладкість розв'язків (33) та (34) рівнянь (31) та (32) на всьому відрізку, включаючи і точку звороту, істотно залежить від знаків виразів $\frac{b_j(0)}{2\tilde{a}(0)}$, $j = 1, 2$. Тому дослідимо підінтегральні функції у (31) та (32). Враховуючи розклад підінтегральних функцій в ряд Маклорена отримаємо рівності

$$\frac{b_j(x)}{x\tilde{a}(x)} = \frac{\rho}{x} + \tilde{R}_j^{part.}(x),$$

де $\tilde{R}_j^{part.}(x)$ — аналітична функція в околі точки звороту.

Якщо $\rho_2 = n - \frac{1}{2}$ — достатньо велике число, то для побудови асимптотики лінійно незалежного розв'язку системи (1) з визначеною тоністю відносно малого параметра $\varepsilon > 0$ можна використати розв'язки (37). Оскільки в цьому випадку $\rho_3 = \frac{1}{2}\rho$ є цілим невід'ємним числом, то використовуючи загальний розв'язки рівнянь виду (33) та частинні розв'язки рівнянь виду (34) ми побудуємо асимптотику лінійно незалежного розв'язку системи (1) з довільною точністю відносно малого параметра $\varepsilon > 0$ на всьому відрізку $[0, l]$, включаючи і точку звороту.

Випадок 2. Нехай $\rho = 2n - 1$ — непарне число $n \in N$. Тоді $\rho_2 = n - 1$ - ціле невід'ємне число, а $\rho_3 = n - \frac{1}{2}$ - не є натуральним числом. В цьому випадку для побудови асимптотики лінійно незалежного розв'язку системи (1) з визначеною тоністю відносно малого параметра $\varepsilon > 0$ будемо використовувати загальний розв'язки рівнянь виду (34) та частинні розв'язки рівнянь виду (33).

Дослідимо систему (25) при $r = 1$. Для існування достатньо гладкого розв'язку цієї системи на всьому відрізку, включаючи і точку звороту $x =$

0, припустимо, що $g_{(-1)}^0 = g_0^0 = 0$. Тоді система (25) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \bar{\omega}'_{10}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{11}(x) + \bar{\omega}_{20}(x), \\ -\bar{\omega}_{31}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{2(-1)}(x), \\ b(x)\bar{\omega}_{11}(x) + a(x)\bar{\omega}_{21}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{3(-1)}(x). \end{cases} \quad (36)$$

При $r = 2$ з (25) одержимо наступну систему

$$\begin{cases} \bar{\omega}'_{11}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{12}(x) + \bar{\omega}_{21}(x), \\ -\bar{\omega}_{32}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{20}(x), \\ b(x)\bar{\omega}_{12}(x) + a(x)\bar{\omega}_{22}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{30}(x). \end{cases} \quad (37)$$

Продовжуючи дослідження (25) при $r \geq 3$ одержимо систему

$$\begin{cases} \bar{\omega}_{3r}(x) = \varphi'(x) \cdot g_{2(r-2)}(x) + \bar{\omega}'_{2(r-3)}(x), \\ b(x)\bar{\omega}_{1r}(x) + a(x)\bar{\omega}_{2r}(x) = -\varphi'(x) \cdot g_{3(r-2)} - \bar{\omega}'_{3(r-3)}(x), \\ 0 = -\varphi'(x) \cdot g_{1(r-2)} + \bar{\omega}(x)_{2(r-3)} - \bar{\omega}'_{1(r-3)}. \end{cases} \quad (38)$$

Починаючи з $r \geq 3$, одержимо неоднорідні рівняння (25) відносно невідомих функцій $\omega_{kr}(x)$. Продовжуючи далі ітераційний процес, одержимо достатньо гладкі розв'язки на всьому відрізку $[0, 1]$ функцій $\omega_{kr}(x)$, $f_{kr}(x)$, $g_{kr}(x)$. Таким чином буде визначений третій формальний розв'язок розширеного рівняння (3) у вигляді ряду

$$\tilde{Y}_3(x, t, \varepsilon) = \quad (39)$$

$$\sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r [f_{kr}(x)\psi(t) + \mu g_{kr}(x)\psi'(t)] + \sum_{r=0}^{\infty} \bar{\omega}_{kr}(x).$$

Таким способом побудовано розв'язок системи (25) при $r = 0$.

Висновок 2. Розв'язок системи (25) при $r = 0$ має вигляд

$$\bar{\omega}_{10}(x) = \bar{\omega}_{10}^0 \cdot \exp\left\{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx\right\} + \exp\left\{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx\right\} \cdot \frac{h(x)}{a(x)} \exp\left\{\int \frac{b(x)}{a(x)} dx\right\}.$$

$$\bar{\omega}_{20}(x) = \bar{\omega}'_{10} \cdot \varphi'(x) \cdot \frac{g_{3(-2)}^0 x^{\rho_3}}{a(x)}.$$

$$\bar{\omega}_{30}(x) = \varphi'(x) \cdot g_{2(-2)}^0 x^{\rho_2}.$$

Продовжуючи далі розв'язувати системи ітераційних рівнянь з (26) знайдемо всі компоненти $\omega_{kr}(x)$.

Теорема 1. *Формально розв'язок однорідної системи (3) можна представити у вигляді рядів (25) :*

$$\begin{aligned}
 Y_{ik}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = & \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\alpha_{ikr}(x) U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) + \right. \\
 & \left. + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ikr}(x, \varepsilon) U_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) \right] + \\
 & + \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\psi(t) + \mu g_{kr}(x)\psi'(t) + \bar{\omega}_{kr}(x) \right]. \quad (40)
 \end{aligned}$$

Висновки

В роботі, досліджено особливості побудови асимптотики розв'язків, обумовлених додатнозначністю коефіцієнтів матриці системи (1), до якої зводиться рівняння типу Орра-Зомерфельда. Додатнозначність коефіцієнтів матриці (2) породжує низку труднощів, які необхідно враховувати при побудові асимптотики розв'язку. Зокрема, показано, що на відміну від випадків, коли коефіцієнти матриці були різних знаків, тобто $a > 0$, $b < 0$ або ж $a < 0$, $b > 0$ побудова асимптотики розв'язку при побудові третього розв'язку векторного рівняння (3) використовується частинний розв'язок неоднорідного.

Побудовано асимптотику розв'язку системи (1) у вигляді (40). Власне отримано вектор-функцію, компоненти якої визначаються через ітераційні розв'язки системи (12) та (27). Оскільки рівняння типу Орра-Зомерфельда отримано як математичну модель процесів в гідродинаміці, то однією з важливих задач є дослідження ламінарних течій, які в реальних умовах спостерігаються при обмежених значення числа Рейнольдса. Експериментально встановлено, що в міру зростання числа Рейнольдса ламінарний потік починає проявляти здатність збільшувати збурення передаючи їм енергію. Власне отримана вектор-функція (40) є прикладом формалізації ефектів, які виникають в околі точок звороту. Таким способом, комбінуючи значення параметрів для системи (1) можна досліджувати ефекти які матимуть місце для асимптотики (40). Побудувавши відповідні графіки вектор функції, можна спостерігати еволюцію вектор-функції, яка ілюструватиме ефекти поведінки у турбулентних станах системи в околі диференціальної точки звороту.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Бобочко В.М.** Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту / В.М. Бобочко, М.О. Перестюк // Київ: Наукова думка, 2002. – 310 с.
2. **Бобочко В.М.** Система диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту / В.М. Бобочко, І.О. Зеленська // Наукові записки. Серія: математичні науки.– 2007– Т.13, № 1 – С. 40-47.
3. **Eckert M.** Troublesome Birth of Hydrodynamic Stability Theory: Sommerfeld and the Turbulence Problem / M.Eckert The European Physical Journal H. – 2010. – №35– PP. 29–51. DOI:10.1140/epjh/e2010-00003-3
4. **Зеленська І.О.** Побудова розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту /І.О.Зеленська // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2023. – №3 – С. 116-121. DOI:10.20998/2222-0631.2023.01.17
5. **Sobchuk V.** Algorithm for solution of systems of singularly perturbed differential equations with adifferential turning point / V. Sobchuk, I. Zelenska, O. Laptiev // Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences. –2023.– Т. 71, №3.–С. 1–8. DOI: 10.24425/bpasts.2023.145682
6. **Собчук В.** Побудова асимптотики розв'язку системи СЗДР 4-го порядку з диференціальною точкою звороту методом істотно особливих функцій /В.В. Собчук, І.О. Зеленська // Вид-во УжНУ Говерла. – 2022.–Т. 41, № 2– С. 78-90. DOI:10.24144/2616-7700.2022.41(2)
7. **Coskun. N.** Scattering properties of Sturm-Liouville equations with sign-alternating weight and transmission condition at turning point / N. Coskun, M. Gorgulu // Open Mathematics. – 2023. DOI:10.1515/math-2022-0566

Sobchuk V. V., Zelenska I. O.

FEATURES OF THE CONSTRUCTION OF UNIFORM ASYMPTOTIC SOLUTION OF A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A TURNING POINT WITH POSITIVE COEFFICIENTS OF THE MATRIX

Summary

The work is devoted to the analysis of the coefficients of the singular operator of the Orr-Sommerfeld type in vector form including the turning point. The system of singularly perturbed differential equations with a small parameter at the highest derivative is investigated. We consider the case when the spectrum of the limit operator contains multiple and identically equal zero elements. Using the method of essentially singular functions, the uniform asymptotic solution of the system is constructed. For the case of a stable turning point, the asymptotics of the solutions of the system are constructed in the sector that contains the turning point. The asymptotics of the first two solutions for the homogeneous problem are constructed using the Airy functions and their derivatives. The third formal solution of a homogeneous system for this case presents certain difficulties. Therefore, taking into account the specified conditions, in order to construct the uniform asymptotics of the solution for the given system, we used the partial solution of the heterogeneous system as the third solution of the homogeneous system.

Key words: asymptotic solution, singularly perturbed system of differential equations, turning point, essentially singular functions, space of resonance-free solutions, uniform asymptotics, singular point, perturbation.

REFERENCES

1. Bobochko V.M., Perestyuk M.O.(2002). *Asymptotic integration of the Liouville equation with turning points*. 310 p.
2. Bobochko V.V., Zelenska I.O. (2007). A system of differential equations with a differential turning point. *Series: mathematical sciences.*,V.13, № 1, P. 40–47.
3. Eckert M. (2010) Troublesome Birth of Hydrodynamic Stability Theory: Sommerfeld and the Turbulence Problem. *The European Physical Journal H.*, №35, P. 29–51. DOI:10.1140/epjh/e2010-00003-3
4. Zelenska I.O. (2023) Construction of the solution of a system of singularly perturbed differential equations with a differential turning point. *Bulletin of the National Technical*

-
- University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology, №3, P. 116–121. DOI:10.20998/2222-0631.2023.01.17*
5. Sobchuk V., Zelenska I., Laptiev O.(2023) Algorithm for solution of systems of singularly perturbed differential equations with a differential turning point *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, V. 71, №3, P. 1–8. DOI: 10.24425/bpasts.2023.145682
 6. Sobchuk V.V., Zelenska I.O. (2022) Construction of the asymptotics of the solution of the 4th-order SZDR system with a differential turning point by the method of significantly singular functions. *Horvath University of Applied Sciences*, V. 41, № 2, P. 78–90. DOI:10.24144/2616-7700.2022.41(2)
 7. N. Coskun, M. Gorgulu (2023) Scattering properties of Sturm-Liouville equations with sign-alternating weight and transmission condition at turning point. *Open Mathematics*. DOI:10.1515/math-2022-0566

УДК 517.925

А. О. Стехун

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова

ПРО АСИМПТОТИКУ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕАВТНОМНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ АСИМПТОТИЧНО БЛИЗЬКИХ ДО ЛІНІЙНИХ

Встановлено необхідні і достатні умови існування всіх можливих типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків неавтономних двочленних звичайних диференціальних рівнянь другого та третього порядків асимптотично близьких до лінійних. Встановлено асимптотичні зображення кожного з можливих типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків, з'ясовано питання про їх кількість. Отримано також наслідки з одержаних теорем для випадків, коли рівняння є лінійним диференціальним рівнянням.

MSC: 34D05, 34E05.

Ключові слова: диференціальні рівняння другого порядку, диференціальні рівняння третього порядку, існування розв'язків, асимптотичні зображення розв'язків, асимптотично близькі до лінійних, повільно змінна нелінійність.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305267](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305267).

Вступ

У 80-х роках ХХ століття в зв'язку з бурхливим розвитком теорії правильно змінних функцій, яка була створена у 1930 році Й. Караматою [1], виникло бажання поширити результати, що були отримані в роботах J.H. Lane, R. Emden, R. Fowler, F.V. Atkinson, I.T. Кігурадзе, Т.А. Чантурія, Š. Belohoreč, С.V. Coffman, J.S.W. Wong, Л.В. Клебанова, О.В. Костіна, В.О. Кондратьєва, В.М. Євтухова, І.В. Асташової і багатьох інших авторів для рівнянь зі степеневими нелінійностями на диференціальні рівняння із правильно змінними нелінійностями.

Означення 1. Додатна та вимірна в однібічному околі Δ_{Y_0} точки Y_0 , де Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, функція φ називається правильно змінною при $y \rightarrow Y_0$, якщо існує таке число $\sigma \in \mathbb{R}$, що для довільного $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi(\lambda y)}{\varphi(y)} = \lambda^\sigma.$$

При цьому σ називають порядком функції φ (або показником). При $\sigma = 0$ функцію φ називають повільно змінною функцією при $y \rightarrow Y_0$.

Згідно з означенням правильно змінних функцій порядку σ , має місце зображення

$$\varphi(y) = |y|^\sigma L(y), \quad (1)$$

де $L : \Delta_{Y_0} \rightarrow]0, +\infty[$ – неперервна функція при $y \rightarrow Y_0$, така, що для будь-якого $\lambda > 0$ виконується умова

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1. \quad (2)$$

Прикладами повільно змінних функцій при $y \rightarrow Y_0 \in \{0, \pm\infty\}$ є функції виду

$$L(y) = \prod_{k=1}^m |\ln_k |y||^{\sigma_k}, \quad L(y) = \exp \left(|\ln |y||^{\gamma_1} \prod_{k=2}^m |\ln_k |y||^{\sigma_k} \right),$$

$$L(y) = \exp \left(\frac{\ln |y|}{|\ln_2 |y||^{\gamma_2}} \prod_{k=3}^m |\ln_k |y||^{\sigma_k} \right),$$

де $\sigma_k \in \mathbb{R}$ ($k = \overline{1, m}$), $0 < \gamma_1 < 1$, $\gamma_2 > 0$,

$$\ln_1 |y| = \ln |y|, \quad \ln_k |y| = \ln |\ln_{k-1} |y|| \quad (k = \overline{2, m}),$$

$$|\ln |y||^\mu \quad (\mu \neq 0), \quad |\ln |y||^\mu \ln^\gamma |\ln |y|| \quad (\mu^2 + \gamma^2 \neq 0),$$

$$\exp |\ln |y||^\mu \quad (0 < \mu < 1), \quad \exp \frac{\ln |y|}{\ln |\ln |y||},$$

також функції, що прямують до відмінної від нуля сталої при $y \rightarrow Y_0$ та інші.

Відомо також, що для будь-якої повільно змінної функції $L : \Delta_{Y_0} \rightarrow]0, +\infty[$ граничне співвідношення (2) виконується рівномірно за $\lambda > 0$ на будь-якому проміжку $[c, d] \subset]0, +\infty[$, та існує диференційовна повільно змінна при $y \rightarrow Y_0$ функція $L_1 : \Delta_{Y_0} \rightarrow]0, +\infty[$, що задовольняє умови

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{L(y)}{L_1(y)} = 1 \quad \text{і} \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{yL_1'(y)}{L_1(y)} = 0. \quad (3)$$

Функцію L_1 називають нормалізованою повільно змінною при $y \rightarrow Y_0$ функцією.

Основні результати про асимптотику розв'язків диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями були отримані в роботі В. М. Євтухова, А. М. Самойленка [2]. В цій роботі розглядалось диференціальне рівняння n -го порядку

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \varphi(y), \quad (4)$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi : \Delta_{Y_0} \rightarrow]0, +\infty[$ – неперервна і правильно змінна при $y \rightarrow Y_0$ функція порядку σ , Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} – деякий однобічний окіл Y_0 .

Для даного рівняння встановлювались умови існування та асимптотичної поведінки при $y \rightarrow Y_0$ так званих $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків.

Означення 2. Розв'язок y диференціального рівняння (4) будемо називати $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє наступні умови

$$y : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0,$$

$$y^{(n-1)}(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[\quad (t_0 \in]a, \omega]),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або } \pm\infty, \\ \text{або } 0 \end{cases} \quad \text{при кожному } k \in \{1, \dots, n-1\},$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n)}(t) y^{(n-2)}(t)} = \lambda_0.$$

Множина всіх $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків диференціального рівняння (4) розпадається на $n+2$ неперетинних підмножини, що відповідають наступним значенням параметра λ_0 :

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \right\} \quad (\text{неособливий випадок});$$

$$\lambda_0 = \pm\infty, \quad \lambda_0 = 1, \quad \lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i} \quad (i = \overline{1, n-1}) \quad (\text{особливі випадки}).$$

З використанням априорних асимптотичних властивостей $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків одержаних в роботі [3] були встановлені необхідні і достатні умови існування у диференціального рівняння (4) кожного з $n+2$ можливих типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків, а також асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ для кожного з таких розв'язків та їх похідних до $(n-1)$ -го порядку

включно, вирішено питання про кількість розв'язків з одержаними асимптотичними зображеннями.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Про асимптотику розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку асимптотично близьких до лінійних.

Незважаючи на те, що досить повно було вивчено рівняння (4), проте у всіх встановлених теоремах передбачалась, що $\sigma \neq 1$, тобто кожна з теорем роботи [2] не містила результатів, які б охоплювали той випадок, коли $\sigma = 1$.

У цьому випадку диференціальне рівняння (4) має вигляд

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) y L(y), \quad (5)$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $L : \Delta_{Y_0} \rightarrow]0, +\infty[$ – неперервна та повільно змінна при $y \rightarrow Y_0$ функція, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} – деякий однобічний окіл Y_0 .

При $L(y) \equiv 1$ рівняння (5) є лінійним диференціальним рівнянням. У разі довільної неперервної повільно змінної при $y \uparrow Y_0$ функції L має місце асимптотичне співвідношення $yL(y) = y^{1+o(1)}$ при $y \rightarrow Y_0$, і диференціальне рівняння (5) є асимптотично близьким до лінійного диференціальне рівняння. Зрозуміло, що такий тип рівнянь вимагав запровадження нових підходів і методів дослідження, які раніше не використовувались. Асимптотична поведінка розв'язків такого класу рівнянь вперше була досліджена в роботі В. М. Євтухова [4] для диференціальних рівнянь другого порядку.

$$y'' = \alpha_0 p(t) y L(y), \quad (6)$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $L : \Delta_{Y_0} \rightarrow]0, +\infty[$ – неперервна та повільно змінна при $y \rightarrow Y_0$ функція, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} – деякий однобічний окіл Y_0 .

Для цього рівняння введений клас $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків визначається наступним чином.

Розв'язок y диференціального рівняння (6) називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на деякому проміжку

$[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm \infty, \end{cases} \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

Щоб сформулювати отримані в роботі [4] для диференціального рівняння (6) результати, введемо допоміжні позначення.

Оберемо число $b \in \Delta_{Y_0}$ так, щоб виконувалась нерівність

$$|b| < 1 \text{ при } Y_0 = 0, \quad b > 1 \text{ (} b < -1 \text{) при } Y_0 = +\infty \text{ (} Y_0 = -\infty \text{),} \quad (7)$$

та покладемо

$$\mu_0 = \text{sign } b, \quad \mu_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Delta_{Y_0} \text{ — лівий окіл } Y_0, \\ -1, & \text{якщо } \Delta_{Y_0} \text{ — правий окіл } Y_0 \end{cases} \quad (8)$$

помічаємо, що

$$\mu_0 = \text{sign } y(t), \quad \mu_1 = \text{sign } y'(t) \quad \text{при } t \in [t_1, \omega[. \quad (9)$$

При цьому зауважимо, що для $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язку виконано

$$\mu_0 \mu_1 < 0, \quad \text{при } Y_0 = 0, \quad \mu_0 \mu_1 > 0 \quad \text{при } Y_0 = \pm\infty. \quad (10)$$

Далі, введемо функції

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega. & \text{якщо } \omega < +\infty, \end{cases} \quad (11)$$

$$\Phi_1(y) = \int_{B_1}^y \frac{ds}{sL(s)}, \quad \Phi_2(y) = \int_{B_2}^y \frac{ds}{sL^{\frac{1}{2}}(s)},$$

де

$$B_1 = \begin{cases} b, & \text{якщо } \int_b^{Y_0} \frac{ds}{sL(s)} = \pm\infty, \\ Y_0, & \text{якщо } \int_b^{Y_0} \frac{ds}{sL(s)} = \text{const}, \end{cases} \quad B_2 = \begin{cases} b, & \text{якщо } \int_b^{Y_0} \frac{ds}{sL^{\frac{1}{2}}(s)} = \pm\infty, \\ Y_0, & \text{якщо } \int_b^{Y_0} \frac{ds}{sL^{\frac{1}{2}}(s)} = \text{const}, \end{cases}$$

та числа

$$\mu_i^* = \begin{cases} 1, & \text{якщо } B_i = b, \\ -1, & \text{якщо } B_i = Y_0 \end{cases} \quad (i = 1, 2). \quad (12)$$

В силу вибору μ_0 , μ_1 та μ_i^* ($i = 1, 2$)

$$\text{sign } \Phi_i(y) = \mu_0 \mu_1 \mu_i^* \quad (i = 1, 2) \quad \text{при } y \in \Delta_{Y_0}(b) \setminus \{b\}.$$

Функції Φ_i ($i = 1, 2$) є строго монотонними на проміжку $\Delta_{Y_0}(b)$. Областю їх значень є проміжки

$$\Delta_{Z_i}(c_i) = \begin{cases} [c_i, Z_i], & \text{якщо } \mu_0 > 0, \\]Z_i, c_i], & \text{якщо } \mu_0 < 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

де

$$c_i = \Phi_i(b), \quad Z_i = \lim_{y \rightarrow Y_0} \Phi_i(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } B_i = Y_0, \\ +\infty, & \text{якщо } B_i = b \text{ і } \mu_0 \mu_1 > 0, \\ -\infty, & \text{якщо } B_i = b \text{ і } \mu_0 \mu_1 < 0 \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (14)$$

Отже, для них існують неперервно диференційовані та строго монотонні зворотні функції $\Phi_i^{-1} : \Delta_{Z_i}(c_i) \rightarrow \Delta_{Y_0}(b)$ $i = 1, 2$, для яких $\lim_{z \rightarrow Z_i} \Phi_i^{-1}(z) = Y_0$ $i = 1, 2$.

Нижче, крім введених позначень, будуть використовуватись деякі допоміжні функції. Покладемо I_k ($k = 1, 2, 3, 4$),

$$I_1(t) = \int_{A_1}^t p(\tau) d\tau, \quad I_2(t) = \int_{A_2}^t \pi_\omega(\tau) p(\tau) d\tau, \quad (15)$$

$$I_3(t) = \int_{A_3}^t p^{\frac{1}{2}}(\tau) d\tau, \quad I_4(t) = \int_{A_4}^t p(\tau) L\left(\Phi_2^{-1}\left(\mu_0 \mu_1 |\lambda_0|^{\frac{1}{2}} I_3(\tau)\right)\right) d\tau, \quad (16)$$

де кожна із меж інтегрування $A_i \in \{\omega; a\}$ ($i \in \{1, 2, 3\}$), $A_4 \in \{\omega; a_0\}$ ($a_0 \in [a, \omega]$) і обирається так, щоб відповідний інтеграл прямував при $t \uparrow \omega$ або до 0, або до $\pm\infty$ (аналогічно тому, як обиралися межі інтегрування B_i $i = 1, 2$ у функціях Φ_i $i = 1, 2$).

В роботі [4] для диференціального рівняння (6) були отримані наступні результати.

Теорема 1.1. Нехай функція $L(\Phi_1^{-1}(z))$ є правильно змінною при $z \rightarrow Z_1$ порядку γ і $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, причому у випадку $\lambda_0 = 0$ існує

$\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t)p(t)[I_1(t)]^{-1}$ (скінчена або рівна $\pm\infty$). Тоді для існування у диференціального рівняння (6) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків необхідно, а якщо

$$(1 + \lambda_0)(1 + \lambda_0 + \lambda_0\gamma) \neq 0,$$

то й достатньо, щоб виконувалися умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I_1(t)} = -1, \quad \alpha_0(\lambda_0 - 1) \lim_{t \uparrow \omega} I_2(t) = Z_1,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega^2(t)p(t)L(\Phi_1^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I_2(t))) = \frac{\alpha_0\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)^2},$$

$$\alpha_0\mu_0\mu_1(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0, \quad \mu_1^*\pi_\omega(t)I_2(t) > 0 \quad \text{при } t \in]a, \omega[.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\Phi_1(y(t)) = \alpha_0(\lambda_0 - 1)I_2(t)[1 + o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)p(t)L(\Phi_1^{-1}(\alpha_0(\lambda_0 - 1)I_2(t))) [1 + o(1)],$$

причому таких розв'язків при виконанні зазначених умов існує ціла однопараметрична сім'я у разі, коли $(\lambda_0 - 1)(1 + \lambda_0 + \gamma\lambda_0)I_2(t) < 0$ при $t \in]a, \omega[$, і двопараметрична сім'я у разі, коли $(\lambda_0 - 1)(1 + \lambda_0 + \gamma\lambda_0)I_2(t) > 0$ і $(\lambda_0^2 - 1)\pi_\omega(t) > 0$ при $t \in]a, \omega[$.

Теорема 1.2. Нехай функція $L(\Phi_2^{-1}(z))$ є правильно змінною при $z \rightarrow Z_2$ порядку γ . Тоді для існування у диференціального рівняння (6) $P_\omega(Y_0, 1)$ -розв'язків необхідно, а якщо функція $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ неперервно диференційована і така, що існує (скінчена або рівна $\pm\infty$) границя

$$\lim_{t \uparrow \omega} p'(t)p^{-\frac{3}{2}}(t)L^{-\frac{1}{2}}(\Phi_2^{-1}(\mu_0\mu_1I_3(t))),$$

то й достатньо, щоб

$$\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t) [p(t)L(\Phi_2^{-1}(\mu_0\mu_1I_3(t)))]^{\frac{1}{2}} = \infty, \quad \mu_0\mu_1 \lim_{t \uparrow \omega} I_3(t) = Z_2$$

і справджувались нерівності

$$\alpha_0 > 0, \quad \mu_2^*I_3(t) > 0 \quad \text{при } t \in]a, \omega[.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\begin{aligned}\Phi_2(y(t)) &= \mu_0\mu_1 I_3(t)[1 + o(1)], \\ \frac{y'(t)}{y(t)} &= \mu_0\mu_1 [p(t)L(\Phi_2^{-1}(\mu_0\mu_1 I_3(t)))]^{\frac{1}{2}} [1 + o(1)],\end{aligned}$$

причому таких розв'язків при виконанні зазначених умов існує ціла однопараметрична сім'я у разі, коли $\mu_0\mu_1\mu_2^* < 0$, і двопараметрична – коли $\mu_2^* > 0$ і $\mu_0\mu_1 > 0$.

Теорема 1.3. Нехай функція $L(\Phi_2^{-1}(z))$ є правильно змінною при $z \rightarrow Z_2$ порядку γ і $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Тоді для існування у диференціального рівняння (6) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків необхідно, а якщо

$$(1 + \lambda_0) \left[1 + \lambda_0 + \frac{\gamma}{2}(\lambda_0 - 1) \right] \neq 0,$$

то й достатньо, щоб

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)I_4'(t)}{I_4(t)} = -1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t)I_4(t) = -\frac{\alpha_0\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)^2}, \quad \mu_0\mu_1 \lim_{t \uparrow \omega} I_3(t) = Z_2$$

і справджувались нерівності

$$\alpha_0\lambda_0 > 0, \quad \mu_0\mu_1(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0, \quad \mu_2^*I_3(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\Phi_2(y(t)) = \mu_0\mu_1|\lambda_0|^{\frac{1}{2}}I_3(t)[1 + o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha_0(1 - \lambda_0)I_4(t)[1 + o(1)],$$

причому таких розв'язків при виконанні зазначених умов існує ціла однопараметрична сім'я у разі, коли $\mu_0\mu_1\mu_2^* [1 + \lambda_0 + \frac{\gamma}{2}(\lambda_0 - 1)] < 0$ і двопараметрична – коли $\mu_2^*(1 + \lambda_0) [1 + \lambda_0 + \frac{\gamma}{2}(\lambda_0 - 1)] > 0$ і $\mu_0\mu_1(1 + \lambda_0) > 0$.

2. Про асимптотику розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь третього порядку асимптотично близьких до лінійних.

Отримані в роботі [4] результати для диференціальних рівнянь другого порядку асимптотично близьких до лінійних створили передумови для поширення цих результатів на диференціальні рівняння третього порядку

$$y''' = \alpha_0 p(t)yL(y), \tag{17}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$) – неперервна функція, $L : \Delta_{Y_0} \rightarrow]0, +\infty[$ – неперервна повільно змінна функція при $y \rightarrow Y_0$, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} – деякий однобічний окіл Y_0 .

Такі рівняння досліджувались у роботах В. М. Євтухова, А. О. Стехун [6], А. О. Стехун [5; 7].

Для диференціального рівняння (17) означення $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язку набувають наступного вигляду.

Розв'язок y диференціального рівняння (17) називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на деякому проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm\infty \end{cases} \quad k = 1, 2; \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y''(t)]^2}{y'''(t)y'(t)} = \lambda_0. \quad (18)$$

В роботах [5–7] були встановлені необхідні і достатні умови існування всіх можливих типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків диференціального рівняння (17), а також встановлено асимптотичні зображення кожного з можливих типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків та їх похідних до другого порядку включно, з'ясовано питання про кількість таких розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями.

Необхідність детального дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь третього порядку асимптотично близьких до лінійних виникла при спробі поширити результати отримані в [4] на рівняння типу (5), щоб виявити всі проблеми, які при цьому можуть виникати. Це було пов'язано, зокрема, з тим, що рівняння третього порядку має нові класи $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків (при $\lambda_0 = \frac{1}{2}$) яких у рівнянь другого порядку не існує. І тому для таких розв'язків було збудовано метод їх дослідження.

Щоб сформулювати отримані результати введемо числа (7)–(10), (12), функції (11), (14), які були введені раніше, а також функції

$$I_5(t) = \int_{A_5}^t p(\tau) \pi_\omega^2(\tau) d\tau, \quad I_6(t) = \int_{A_6}^t p^{\frac{1}{3}}(\tau) d\tau,$$

де кожна з меж інтегрування $A_5, A_6 \in \{a; \omega\}$ і обирається таким чином, щоб відповідний інтеграл прямував при $t \uparrow \omega$ або до 0, або до $\pm\infty$. Крім

того, суттєву роль відіграють повільно змінні при $y \rightarrow Y_0$ функції

$$\Phi_1(y) = \int_{B_1}^y \frac{ds}{sL(s)}, \quad \Phi_2(y) = \int_{B_2}^y \frac{ds}{sL^{\frac{1}{3}}(s)},$$

де кожна з меж інтегрування $B_i \in \{Y_0; b\}$ ($i = 1, 2$) і обирається таким чином, щоб відповідний інтеграл прямував при $y \rightarrow Y_0$ або до 0, або до $\pm\infty$. Функції Φ_i ($i = 1, 2$) є строго монотонними і диференційовними на проміжку $\Delta_{Y_0}(b)$ з множиною значень (14)–(15). Для них існують неперервно диференційовні і строго монотонні обернені функції $\Phi_i^{-1} : \Delta_{Z_i}(c_i) \rightarrow \Delta_{Y_0}(b)$, $i = 1, 2$.

З використанням априорних властивостей $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків були одержані наступні результати.

Теорема 2.1. Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ і функція $L(\Phi_1^{-1}(z))$ є правильно змінною при $z \rightarrow Z_1$ порядку γ . Тоді для існування у диференціального рівняння (17) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків необхідно, щоб виконувались умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I_1(t)} = -2, \quad \alpha_0 \lambda_0 \lim_{t \uparrow \omega} I_5(t) = Z_1, \quad (19)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega^3(t)p(t)L\left(\Phi_1^{-1}\left(\frac{\alpha_0(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} I_5(t)\right)\right) = \frac{\alpha_0 \lambda_0 (2\lambda_0 - 1)}{(\lambda_0 - 1)^3}, \quad (20)$$

$$\alpha_0 \lambda_0 \mu_0 \mu_1 > 0, \quad \mu_1^* I_5(t) > 0 \quad \text{при } t \in [a, \omega[. \quad (21)$$

Більш того, для кожного такого розв'язку при $t \uparrow \omega$ мають місце асимптотичні зображення

$$\Phi_1(y(t)) = \frac{\alpha_0(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} I_5(t) [1 + o(1)], \quad (22)$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\alpha_0(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} \pi_\omega^2(t)p(t)L\left(\Phi_1^{-1}\left(\frac{\alpha_0(\lambda_0 - 1)^2}{\lambda_0} I_5(t)\right)\right) [1 + o(1)], \quad (23)$$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)} [1 + o(1)]. \quad (24)$$

Якщо ж поряд з умовами (19)–(21) виконується нерівність

$$(2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1)[(2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1)(\gamma + 1) + \lambda_0] \neq 0, \quad (25)$$

то у диференціального рівняння (17) існують $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язки, які допускають асимптотичні зображення (22)–(24), причому, при виконанні нерівності $\mu_1^*(2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1)[(2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1)(\gamma + 1) + \lambda_0] > 0$ існує трьохпараметрична сім'я розв'язків з такими зображеннями у випадку, коли $2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 > 0$ і $\lambda_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) < 0$ при $t \in [a, \omega[$, двопараметрична сім'я у випадку, коли $2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 < 0$, однопараметрична сім'я у випадку, коли $2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 > 0$ і $\lambda_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0$ при $t \in [a, \omega[$, а при виконанні нерівності $\mu_1^*(2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1)[(2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1)(\gamma + 1) + \lambda_0] < 0$, таких розв'язків існує двопараметрична сім'я у випадку, коли $2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 > 0$ і $\lambda_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) < 0$ при $t \in [a, \omega[$, і однопараметрична сім'я у випадку, коли $2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 < 0$.

Теорема 2.2. Нехай функція $L(\Phi_2^{-1}(z))$ є правильно змінною при $z \rightarrow Z_2$ порядку γ і $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0; \frac{1}{2}; 1\}$. Тоді для існування у рівняння (17) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків необхідно, щоб виконувались умови

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t) p^{\frac{1}{3}}(t) L^{\frac{1}{3}} \left(\Phi_2^{-1} \left(\frac{\alpha_0(2\lambda_0 - 1)^{\frac{2}{3}} I_6(t)}{\lambda_0^{\frac{1}{3}}} \right) \right) &= \\ &= \frac{\alpha_0[\lambda_0(2\lambda_0 - 1)]^{\frac{1}{3}}}{\lambda_0 - 1}, \quad \mu_0 \mu_1 \lim_{t \uparrow \omega} I_6(t) = Z_2 \end{aligned} \quad (26)$$

і справджувались нерівності

$$\alpha_0 \lambda_0 \mu_0 \mu_1 > 0, \quad \mu_2^* I_6(t) > 0 \quad \text{при } t \in [a, \omega[. \quad (27)$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні зображення

$$\Phi_2(y(t)) = \frac{\alpha_0(2\lambda_0 - 1)^{\frac{2}{3}}}{\lambda_0^{\frac{1}{3}}} I_6(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{y'(t)}{y(t)} &= \frac{2\lambda_0 - 1}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega, \\ \frac{y''(t)}{y'(t)} &= \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned} \quad (29)$$

Якщо ж поряд з умовами (26), (27) виконується нерівність

$$(2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1) \left[2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 + \frac{\gamma}{3}(2\lambda_0^2 - \lambda_0 - 1) \right] \neq 0, \quad (30)$$

то у диференціального рівняння (17) існують $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язки, які допускають асимптотичні зображення (28), (29), причому, при виконанні

нерівності

$$\mu_2^* \frac{2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 + \frac{\gamma}{3}(2\lambda_0^2 - \lambda_0 - 1)}{2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1} > 0$$

таких розв'язків існує трьохпараметрична сім'я у випадку, коли $2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 > 0$ і $\alpha_0(2\lambda_0 - 1) < 0$, двопараметрична сім'я у випадку, коли $2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 < 0$, однопараметрична сім'я у випадку, коли $2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 > 0$ і $\alpha_0(2\lambda_0 - 1) > 0$, а при виконанні нерівності

$$\mu_2^* \frac{2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 + \frac{\gamma}{3}(2\lambda_0^2 - \lambda_0 - 1)}{2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1} < 0$$

існує двопараметрична сім'я розв'язків з такими зображеннями у випадку, коли $2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 > 0$ і $\alpha_0(2\lambda_0 - 1) < 0$, і однопараметрична сім'я у випадку, коли $2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 < 0$.

Для даного рівняння встановлювались умови існування та асимптотичної поведінки при $y \rightarrow Y_0$ так званих $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків.

Теорема 2.3. Нехай функція $L(\Phi_2^{-1}(z))$ є правильно змінною при $z \rightarrow Z_2$ порядку γ . Тоді для існування у диференціального рівняння (17) $P_\omega(Y_0, 1)$ -розв'язків необхідно, а якщо функція $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ неперервно диференційовна і така, що існує скінченна або рівна $\pm\infty$ границя

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\left(p^{\frac{1}{3}}(t) L_1^{\frac{1}{3}}(\Phi_2^{-1}(\alpha_0 I_6(t))) \right)'}{p^{\frac{2}{3}}(t) L_1^{\frac{2}{3}}(\Phi_2^{-1}(\alpha_0 I_6(t)))}, \quad (31)$$

де $L_1 : \Delta_{Y_0} \rightarrow]0, +\infty[$ неперервно диференційована і повільно змінна при $y \rightarrow Y_0$ функція з властивостями (3), то і достатньо, щоб

$$\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t) p^{\frac{1}{3}}(t) L_1^{\frac{1}{3}}(\Phi_2^{-1}(\alpha_0 I_6(t))) = \infty, \quad \alpha_0 \lim_{t \uparrow \omega} I_6(t) = Z_2 \quad (32)$$

і справджувалися нерівності

$$\alpha_0 \mu_0 \mu_1 > 0, \quad \mu_2^* I_6(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, \omega[. \quad (33)$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\Phi_2(y(t)) = \alpha_0 I_6(t) [1 + o(1)], \quad (34)$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha_0 p^{\frac{1}{3}}(t) L_1^{\frac{1}{3}}(\Phi_2^{-1}(\alpha_0 I_6(t))) [1 + o(1)],$$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \alpha_0 p^{\frac{1}{3}}(t) L^{\frac{1}{3}}(\Phi_2^{-1}(\alpha_0 I_6(t))) [1 + o(1)], \quad (35)$$

причому, при виконанні умов (31), (32), (33) існує при $\alpha_0 = 1$ трьохпараметрична сім'я $P_\omega(Y_0, 1)$ -розв'язків з зображеннями (34), (35) у випадку, коли $\mu_2^* > 0$ і двопараметрична сім'я у випадку, коли $\mu_2^* < 0$, а при $\alpha_0 = -1$ однопараметрична сім'я таких розв'язків у випадку, коли $\mu_2^* > 0$.

Наступні три теореми, що стосуються випадків, коли $\lambda_0 = \pm\infty$, $\lambda_0 = 0$ встановлюються у припущенні, що повільно змінна при $y \rightarrow Y_0$ функція L задовольняє умову S .

Означення 2.1. Будемо говорити, що повільно змінна функція $L : \Delta_Y \rightarrow]0, +\infty[$, де Y дорівнює або нулю або $\pm\infty$ і Δ_Y -однобічний окіл Y задовольняє умову S , якщо

$$L(\mu e^{[1+o(1)] \ln |y|}) = L(y)[1 + o(1)] \quad \text{при } y \rightarrow Y \ (y \in \Delta_Y), \quad (36)$$

де $\mu = \text{sign } y$.

Теорема 2.4. Нехай функція L задовольняє умову S . Тоді для існування у диференціального рівняння (17) $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$ -розв'язків необхідно і достатньо виконання умов

$$\mu_0 \mu_1 \pi_\omega(t) > 0 \quad \text{при } t \in]a, \omega[, \quad \mu_0 \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)| = Y_0, \quad (37)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} p(t) \pi_\omega^3(t) L(\mu_0 \pi_\omega^2(t)) = 0, \quad \int_{a_1}^{\omega} p(\tau) \pi_\omega^2(\tau) L(\mu_0 \pi_\omega^2(\tau)) d\tau = +\infty, \quad (38)$$

де $a_1 \in [a, \omega[$ таке, що $\mu_0 \pi_\omega^2(t) \in \Delta_{Y_0}$ при $t \in [a_1, \omega[$. Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\ln |y(t)| = 2 \ln |\pi_\omega(t)| + \frac{\alpha_0}{2} \int_{a_1}^t p(\tau) \pi_\omega^2(\tau) L(\mu_0 \pi_\omega^2(\tau)) d\tau [1 + o(1)], \quad (39)$$

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{3-k}{\pi_\omega(t)} [1 + o(1)] \quad (k = 1, 2), \quad (40)$$

причому, при виконанні умов (37), (38) існує у випадку $\omega = +\infty$ трьохпараметрична сім'я $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$ -розв'язків з асимптотичними зображеннями (39) і (40), а у випадку $\omega < +\infty$ - однопараметрична сім'я розв'язків з такими асимптотичними зображеннями.

Теорема 2.5. Нехай функція L задовольняє умову S і виконуються умови (37), (38). Нехай, крім того, функція $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ неперервно диференційовна і існує (скінченна або рівна $\pm\infty$) границя $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)p'(t)}{p(t)}$. Тоді для кожного $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$ -розв'язку диференціального рівняння (17) мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\ln |y(t)| = 2 \ln |\pi_\omega(t)| + \frac{\alpha_0}{2} \int_{a_1}^t p(\tau) \pi_\omega^2(\tau) L(\mu_0 \pi_\omega^2(\tau)) d\tau [1 + o(1)], \quad (41)$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[2 + \frac{\alpha_0}{2} p(t) \pi_\omega^3(t) L(\mu_0 \pi_\omega^2(t)) [1 + o(1)] \right], \quad (42)$$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[1 + \frac{\alpha_0}{2} p(t) \pi_\omega^3(t) L(\mu_0 \pi_\omega^2(t)) [1 + o(1)] \right].$$

Теорема 2.6. Нехай функція L задовольняє умову S . Тоді для існування у диференціального рівняння (17) $P_\omega(Y_0, 0)$ -розв'язків, для яких існує (скінченна або рівна $\pm\infty$) $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y'''(t)}{y''(t)}$, необхідно і достатньо виконання умов

$$\begin{aligned} \mu_0 \mu_1 \pi_\omega(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[, \quad \mu_0 \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)| = Y_0, \\ \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I_1(t)} = -2, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} p(t) \pi_\omega^3(t) L(\mu_0 |\pi_\omega(t)|) = 0, \quad \int_{a_1}^{\omega} p(\tau) \pi_\omega^2(\tau) L(\mu_0 |\pi_\omega(\tau)|) d\tau = +\infty, \quad (44)$$

де $a_1 \in [a, \omega[$ таке, що $\mu_0 |\pi_\omega(t)| \in \Delta_{Y_0}$ при $t \in [a_1, \omega[$. Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\ln |y(t)| = \ln |\pi_\omega(t)| - \alpha_0 \int_{a_1}^t p(\tau) \pi_\omega^2(\tau) L(\mu_0 |\pi_\omega(\tau)|) d\tau [1 + o(1)], \quad (45)$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1 + o(1)}{\pi_\omega(t)}, \quad \frac{y''(t)}{y'(t)} = -\alpha_0 p(t) \pi_\omega^2(t) L(\mu_0 |\pi_\omega(t)|) [1 + o(1)], \quad (46)$$

причому, при виконанні умов (43), (44) існує двопараметрична сім'я $P_\omega(Y_0, 0)$ -розв'язків з такими асимптотичними зображеннями.

У випадку $\sigma = 0$, тобто для лінійного диференціального рівняння

$$y''' = \alpha_0 p(t)y, \quad (47)$$

з теорем були отримані наступні твердження, які свідчать про узгодженість з відомими результатами та, в деякій мірі, доповнюють їх.

Наслідок 2.1. Нехай існує відмінна від нуля скінченна границя

$$\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega^3(t)p(t) = c$$

і алгебраїчне рівняння

$$c(\lambda_0 - 1)^3 = \alpha_0 \lambda_0 (2\lambda_0 - 1)$$

має три відмінних дійсних кореня λ_{0i} ($i = 1, 2, 3$). Тоді, якщо при $i = 1, 2, 3$ виконуються нерівності

$$2\lambda_{0i}^2 + 2\lambda_{0i} - 1 \neq 0$$

і

$$\alpha_0 \lambda_{0i} \mu_0 \mu_1 > 0, \quad \frac{\alpha_0 \lambda_{0i} (2\lambda_{0i} - 1)}{\lambda_{0i} - 1} \ln |\pi_\omega(t)| > 0 \quad \text{при } t \in [a, \omega[,$$

то лінійне диференціальне рівняння (47) має фундаментальну сім'ю розв'язків $y_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$), які допускають асимптотичні зображення

$$\ln |y_i(t)| = \frac{2\lambda_{0i} - 1}{\lambda_{0i} - 1} \ln |\pi_\omega(t)| [1 + o(1)] \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

$$\frac{y_i'(t)}{y_i(t)} = \frac{2\lambda_{0i} - 1}{(\lambda_{0i} - 1)\pi_\omega(t)} [1 + o(1)] \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

$$\frac{y_i''(t)}{y_i'(t)} = \frac{\lambda_{0i}}{(\lambda_{0i} - 1)\pi_\omega(t)} [1 + o(1)] \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Наслідок 2.2 Для існування у лінійного диференціального рівняння (47) $P_\omega(Y_0, 1)$ -розв'язків необхідно, а якщо функція

$p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ — неперервно диференційовна і така, що існує (скінченна або рівна $\pm\infty$) границя $\lim_{t \uparrow \omega} p^{-\frac{4}{3}}(t)p'(t)$, то і достатньо, щоб

$$\alpha_0 \mu_0 \mu_1 > 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t)p^{\frac{1}{3}}(t) = \infty, \quad \alpha_0 \lim_{t \uparrow \omega} I_6(t) = Z_2.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні зображення

$$\ln |y(t)| = \alpha_0 I_6(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \alpha_0 p^{\frac{1}{3}}(t) [1 + o(1)] \quad (k = 1, 2) \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

причому при $\alpha_0 = 1$ існує трьохпараметрична сім'я таких розв'язків, а при $\alpha_0 = -1$ – однопараметрична сім'я.

Наслідок 2.3. Для існування у лінійного диференціального рівняння (47) $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$ -розв'язків необхідно і достатньо виконання умов

$$\mu_0 \mu_1 \pi_\omega(t) > 0 \quad \text{при } t \in]a, \omega[, \quad \mu_0 \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)| = Y_0,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} p(t) \pi_\omega^3(t) = 0, \quad \int_a^\omega p(\tau) \pi_\omega^2(\tau) d\tau = +\infty.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні зображення

$$\ln |y(t)| = 2 \ln |\pi_\omega(t)| + \frac{\alpha_0}{2} \int_a^t p(\tau) \pi_\omega^2(\tau) d\tau [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{3-k}{\pi_\omega(t)} [1 + o(1)] \quad (k = 1, 2) \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

причому при $\omega = +\infty$ існує трьохпараметрична сім'я таких розв'язків, а у випадку $\omega < +\infty$ – однопараметрична сім'я.

Наслідок 2.4. Для існування у лінійного диференціального рівняння (47) $P_\omega(Y_0, 0)$ -розв'язків, для яких існує (скінченна або рівна $\pm\infty$) границя $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)}$, необхідно і достатньо виконання умов

$$\mu_0 \mu_1 \pi_\omega(t) > 0 \quad \text{при } t \in]a, \omega[, \quad \mu_0 \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)| = Y_0,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) p(t)}{I_1(t)} = -2, \quad \lim_{t \uparrow \omega} p(t) \pi_\omega^3(t) = 0, \quad \int_a^\omega p(\tau) \pi_\omega^2(\tau) d\tau = +\infty.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні зображення

$$\ln |y(t)| = \ln |\pi_\omega(t)| - \alpha_0 \int_a^t p(\tau) \pi_\omega^2(\tau) d\tau [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1 + o(1)}{\pi_\omega(t)}, \quad \frac{y''(t)}{y'(t)} = -\alpha_0 p(t) \pi_\omega^2(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

причому існує двопараметрична сім'я таких розв'язків.

З використанням априорних асимптотичних властивостей $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків одержаних в роботі [3] були встановлені необхідні і достатні умови існування у диференціального рівняння (4) кожного з $n + 2$ можливих типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків, а також асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ для кожного з таких розв'язків та їх похідних до $(n - 1)$ -го порядку включно, вирішено питання про кількість розв'язків з одержаними асимптотичними зображеннями.

Висновки

Отримані в роботах В. М. Євтухова, А. О. Стехун результати для диференціальних рівнянь другого та третього порядків створюють основу для подальшого їх поширення на диференціальні рівняння більш високих порядків. Деякі результати про асимптотику $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків диференціального рівняння n -го порядку типу (5), були отримані В. М. Євтуховим та доповідались на однієї з міжнародних конференцій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Karamata J.** Sur un mode de croissance reguliere de fonctions // Math. (Cluj). — 1930. — Vol. 4. — P. 38–53.
2. **Євтухов В.М., Самойленко А.М.** Услови́я существова́ния исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 2011. — Т. 46, № 10. — С. 1346–1364.
3. **Євтухов В.М.** Асимптотичні зображення розв'язків неавтономних звичайних диференціальних рівнянь // Дисертація доктора фіз.-мат. наук: [спец.] 01.01.02 Диференціальні рівняння. Одеський нац. ун-т імені І.І. Мечнікова. Одеса, 1998. 295 с.
4. **V. M. Evtukhov** Asymptotics of solutions of nonautonomous second-order ordinary differential equations asymptotically close to linear equations. (Russian) Ukr. Mat. Zh. — 2012. — Vol. 64, №. 10. — P. 1346–1364; translation in Ukr. Math. J. — 2013. — Vol. 64, №. 10. — P. 1531–1552.
5. **Стехун А. О.** Асимптотична поведінка розв'язків одного класу звичайних диференціальних рівнянь третього порядку // Нелінійні коливання. — 2013. — Т. 16, № 2. — С. 246–260.
6. **Evtukhov V. M., Stekhun A. A.** Asymptotic behavior of the solutions of one class of third-order ordinary differential equations // QUALITDE – 2016, Tbilisi, Georgia, December 24–26. — 2016. — P. 77–80.
7. **Stekhun A. A.** Asymptotic Behaviour of Special Types of Solutions of Third Order Differential Equations, asymptotically close to Linear. Abstracts of the International

Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations // «QUALITDE – 2021», Tbilisi, Georgia, December. — 2021. — P. 208–211.

8. **Sharai N., Shynkarenko V.** Asymptotic representations for the solutions of third-order nonlinear differential equations // *Journal of Mathematical Sciences*, — Vol. 215, No. 3. — June, 2016. — P. 408–420.
9. **Sharai N., Shynkarenko V.** Asymptotic behavior of solutions for one class of third order nonlinear differential equations. Abstracts of the International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations // QUALITDE-2018, Tbilisi, Georgia, December 1–3. — 2018. — P. 165–169.

Stekhun A.

ON THE ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS OF NON-AUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS ASYMPTOTICALLY CLOSE TO LINEAR

Summary

The necessary and sufficient conditions are obtained for the existence of all possible types of $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -solutions of non-autonomous second and third-order ordinary differential equations that are asymptotically close to linear equations. The asymptotic representation of each possible type of $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -solutions has been determined, and the question of their quantity has been clarified. Consequences have also been derived from the obtained theorems for cases when the equation is a linear differential equation.

Key words: differential equations of the second order, differential equations of the third order, existence of solutions, asymptotic images of solutions, asymptotically close to linear ones, slowly varying nonlinearity.

REFERENCES

1. Karamata J. (1930). Sur un mode de croissance reguliere de fonctions. *Math. (Cluj)*, Vol. 4, P. 38–53.
2. Евтухов В.М., Самойленко А.М. (2011). Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений *Укр. мат. журн.* Т. 46, № 10, С. 1346–1364.
3. Євтухов В.М. (1998). Асимптотичні зображення розв'язків неавтономних звичайних диференціальних рівнянь *Дисертація доктора фіз.-мат. наук: [спец.] 01.01.02 Диференціальні рівняння. Одеський нац. ун-т імені І.І. Мечнікова. Одеса, 295 с.*
4. Evtukho. V. M. (2012). Asymptotics of solutions of nonautonomous second-order ordinary differential equations asymptotically close to linear equations. (*Russian*) *Ukr. Mat. Zh.* 64, № 10, 1346–1364; *translation in Ukr. Math. J.* 64, № 10, P. 1531–1552
5. Стехун А. О. (2013). Асимптотична поведінка розв'язків одного класу звичайних диференціальних рівнянь третього порядку *Нелінійні коливання.* Т. 16, № 2, С. 246–260.
6. Evtukhov V. M., Stekhun A. A. (2016). Asymptotic behavior of the solutions of one class of third-order ordinary differential equations *QUALITDE – 2016, Tbilisi, Georgia, December 24–26.* P. 77–80.
7. Stekhun A. A. (2021). Asymptotic Behaviour of Special Types of Solutions of Third Order Differential Equations, asymptotically close to Linear. Abstracts of the International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations «*QUALITDE – 2021*», *Tbilisi, Georgia, December.* P. 208–211.

8. Sharai N, Shynkarenko V. (2016). Asymptotic representations for the solutions of third-order nonlinear differential equations *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 215, № 3, P. 408–420.
9. Sharai N., Shynkarenko V. (2018). Asymptotic behavior of solutions for one class of third order nonlinear differential equations. Abstracts of the International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations *QUALITDE-2018, Tbilisi, Georgia, December 1–3*, P. 165–169.

УДК 519.213

Є. В. Турчин

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ОДНЕ НОВЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ РОЗПОДІЛУ КОШІ

У роботі розглядається новий розподіл із важкими хвостами — p -узагальнений розподіл Коші. Ця нова 5-параметрична сім'я розподілів є значно гнучкішою порівняно з класичним розподілом Коші, зокрема, до неї входять і асиметричні розподіли. Розглянуті різні числові характеристики нових розподілів, зокрема, моменти дробового порядку та “подвійно неповні” моменти. Також отримані (числовими методами) значення нормованих центральних моментів вищих порядків, що базуються на квантилях — асиметрії Bowley та ексцеса Moors. Придатність p -узагальненого розподілу Коші до моделювання реальних даних підтверджена підгонкою цього розподілу до ряду приростів логарифмів цін акцій. При цьому для p -узагальненого розподілу Коші отримано менше значення статистики АІС, ніж для звичайного розподілу Коші, асиметричного розподілу Коші, узагальненого логістичного розподілу та гіперболічного розподілу.

MSC: 62E10, 62E15.

Ключові слова: розподіл Коші, неповні моменти, асиметрія Bowley, ексцес Moors.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).296368](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).296368).

Вступ

Розподіл Коші часто відносять до “екзотичних” розподілів, які, по суті, не зустрічаються на практиці (хоча насправді це не зовсім так — див., наприклад, [7], гл. 9). Тому виправданими є дослідження, присвячені аналогам чи узагальненням класичного розподілу Коші. Сюди відносяться як різні варіанти асиметризації розподілу Коші, так і інші його модифікації. Серед робіт, присвячених цій тематиці, варто згадати, зокрема, монографію [2], статті [1], [3], [8], [10], [11], та [15]. Нові узагальнення розподілу Коші залишаються актуальними, враховуючи важливість розподілів із важкими хвостами для моделювання різноманітних реальних явищ (в особливості це стосується економічних даних).

У даній статті вводиться ще один аналог розподілу Коші — так званий p -узагальнений розподіл Коші. Метою роботи є дослідження властивостей цього розподілу.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Щільність та функція розподілу.

Означення 1. Щільність p -узагальненого розподілу Коші з параметрами $(1, 0, c, \gamma_1, \gamma_2)$, де $c \geq 0, \gamma_1 \geq 0, \gamma_2 \geq 0$, означається наступним чином:

$$p_{1,0,c,\gamma_1,\gamma_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{A(1+x^2)} \left(1 + \frac{c}{(1+x^2)^{\gamma_1}}\right), & x \leq 0; \\ \frac{1}{A(1+x^2)} \left(1 + \frac{c}{(1+x^2)^{\gamma_2}}\right), & x > 0, \end{cases} \quad (1)$$

де

$$A = \pi + c \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{\Gamma(1/2 + \gamma_1)}{\Gamma(1 + \gamma_1)} + \frac{\Gamma(1/2 + \gamma_2)}{\Gamma(1 + \gamma_2)} \right). \quad (2)$$

Щільність p -узагальненого розподілу Коші з параметрами $(a, b, c, \gamma_1, \gamma_2)$,

де

$a > 0$, означимо так:

$$p_{a,b,c,\gamma_1,\gamma_2}(x) = \frac{1}{a} p_{1,0,c,\gamma_1,\gamma_2}((x-b)/a).$$

Зауваження 1. Далі вживатимемо позначення $pgC(a, b, c, \gamma_1, \gamma_2)$ для p -узагальненого розподілу Коші з параметрами $(a, b, c, \gamma_1, \gamma_2)$.

Зауваження 2. Коректність означення впливає з формули

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^\gamma} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2 + \gamma)}{2 \Gamma(1 + \gamma)}$$

Графіки щільностей p -узагальненого розподілу Коші з параметрами $(1, 0, 10, 1, 5)$, $(1, 0, 5, 0.2, 0.8)$ та $(1, 0, 100, 2, 7)$ наведені відповідно на рис. 1, 2 та 3.

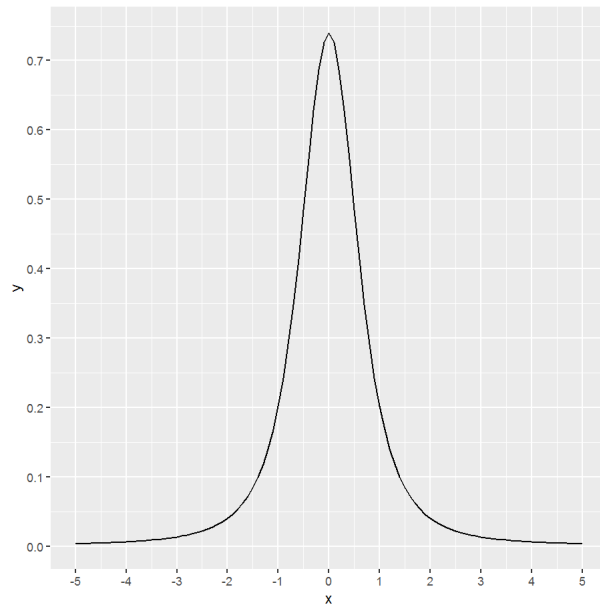


Рис. 1: Щільність $pgC(1, 0, 10, 1, 5)$.

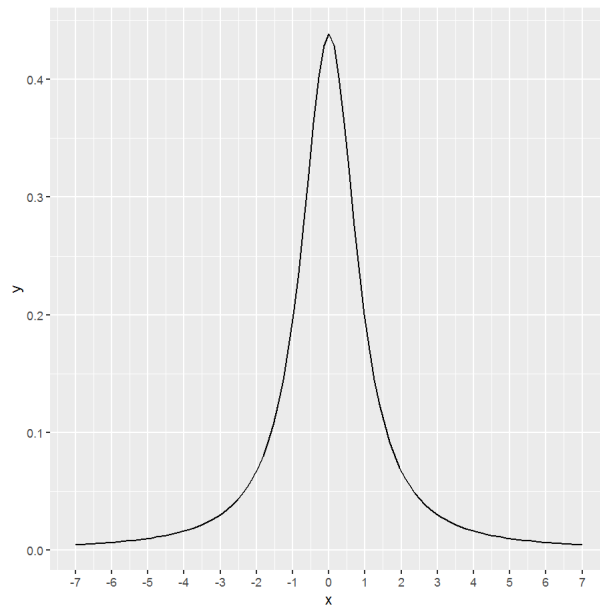
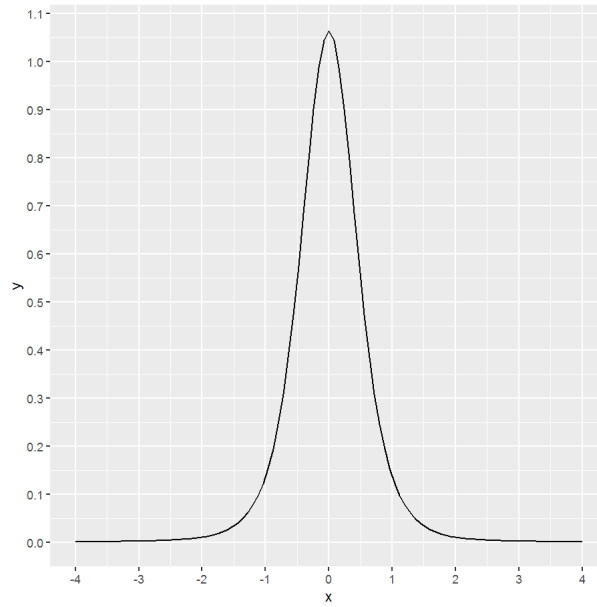


Рис. 2: Щільність $pgC(1, 0, 5, 0.2, 0.8)$.

Рис. 3: Щільність $pgC(1, 0, 100, 2, 7)$.

Теорема 1. Функція розподілу для p -узагальненого розподілу Коші з параметрами $(a, b, c, \gamma_1, \gamma_2)$

$$F_{a;b;c,\gamma_1,\gamma_2}(x) = \begin{cases} c_1 + \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-b}{a} \right) + \\ + \frac{c(x-b)}{Aa} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, 1 + \gamma_1; \frac{3}{2}; -\left(\frac{x-b}{a}\right)^2 \right), & x \leq b; \\ c_1 + \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-b}{a} \right) + \\ + \frac{c(x-b)}{Aa} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, 1 + \gamma_2; \frac{3}{2}; -\left(\frac{x-b}{a}\right)^2 \right), & x > b. \end{cases} \quad (3)$$

де A означено у (2),

$$c_1 = A^{-1} \pi/2 + cA^{-1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1/2 + \gamma_1)}{2\Gamma(1 + \gamma_1)},$$

${}_2F_1$ — гіпергеометрична функція.

Доведення. Достатньо перевірити (3) для $a = 1$ та $b = 0$, тобто пере-

конатися, що

$$F_{1;0;c,\gamma_1,\gamma_2}(x) = \begin{cases} c_1 + A^{-1} \operatorname{arctg} x + \\ \quad + cA^{-1} x {}_2F_1(1/2, 1 + \gamma_1; 3/2; -x^2), x \leq 0; \\ c_1 + A^{-1} \operatorname{arctg} x + \\ \quad + cA^{-1} x {}_2F_1(1/2, 1 + \gamma_2; 3/2; -x^2), x > 0. \end{cases} \quad (4)$$

Розглянемо спочатку випадок $x \leq 0$. Маємо:

$$F_{1;0;c,\gamma_1,\gamma_2}(x) = A^{-1} \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^x + cA^{-1} \int_{-\infty}^x \frac{dy}{(1+y^2)^{1+\gamma_1}}.$$

Але

$$\int_{-\infty}^x \frac{dy}{(1+y^2)^{1+\gamma_1}} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2 + \gamma_1)}{2 \Gamma(1 + \gamma_1)} + x {}_2F_1(1/2, 1 + \gamma_1; 3/2; -x^2)$$

(інтеграл знайдено за допомогою *Mathematica* 11.1) і формулу (4) для випадку $x \leq 0$ доведено.

Випадок $x > 0$ розглядається аналогічно. □

2. Моменти.

2.1. Моменти дробового порядку. Очевидно, для p -узагальненого розподілу Коші не існує навіть перший момент μ'_1 . Але існують і мають досить простий вигляд абсолютні моменти дробового порядку, тобто

$$M'_r = \int_{\mathbb{R}} |x|^r p_{a,b,c,\gamma_1,\gamma_2}(x) dx,$$

де $r \in (0; 1)$.

Теорема 2. Нехай $r \in (0; 1)$. Абсолютний момент порядку r p -узагальненого розподілу Коші з параметрами $(1, 0, c, \gamma_1, \gamma_2)$ дорівнює

$$M'_r = \frac{A^{-1}\pi}{\cos(\pi r/2)} + \frac{cA^{-1}}{2} \left(B\left(\frac{r+1}{2}, \frac{1}{2} + \gamma_1 - \frac{r}{2}\right) + B\left(\frac{r+1}{2}, \frac{1}{2} + \gamma_2 - \frac{r}{2}\right) \right), \quad (5)$$

де A означається рівністю (2).

Доведення. Маємо:

$$M'_r = 2A^{-1} \int_0^{\infty} \frac{x^r dx}{1+x^2} + cA^{-1} \left(\int_0^{\infty} \frac{x^r dx}{(1+x^2)^{1+\gamma_1}} + \int_0^{\infty} \frac{x^r dx}{(1+x^2)^{1+\gamma_2}} \right) \quad (6)$$

Але для $\gamma \geq 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^r}{(1+x^2)^{1+\gamma}} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{r+1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{r}{2} + \gamma\right), \quad (7)$$

що випливає з рівності $3.259(3^{11})$ у [9]. Зокрема,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^r dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} B\left(\frac{r+1}{2}; 1 - \frac{r+1}{2}\right) = \frac{\pi}{2 \sin(\pi(r+1)/2)} = \frac{\pi}{2 \cos(\pi r/2)} \quad (8)$$

(скористались рівністю $B(x, 1-x) = \pi/\sin \pi x$).

Підставляючи вирази з (7) і (8) у (6), отримуємо (5). \square

2.2. Узагальнені неповні моменти. Розглянемо також і “узагальнені” неповні моменти.

Означення 2. Подвійно неповним моментом порядку n розподілу F із щільністю $p(x)$ називатимемо число

$$m_n^{r,s} = \int_r^s x^n p(x) dx.$$

Теорема 3. Подвійно неповний момент $m_n^{r,s}$ p -узагальненого розподілу Коші з параметрами $(1, 0, c, \gamma_1, \gamma_2)$

1) для $0 < r < s$ дорівнює

$$m_n^{r,s} = \frac{1}{A(n+1)} \left[s^{n+1} \left({}_2F_1\left(1, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; -s^2\right) + c {}_2F_1\left(1 + \gamma_2, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; -s^2\right) \right) - \right. \\ \left. - r^{n+1} \left({}_2F_1\left(1, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; -r^2\right) + c {}_2F_1\left(1 + \gamma_2, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; -r^2\right) \right) \right]; \quad (9)$$

2) для $r < 0 < s$ –

$$m_n^{r,s} = \frac{1}{A(n+1)} \left[(-1)^n |r|^{n+1} \left({}_2F_1\left(1, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; -r^2\right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+c {}_2F_1\left(1+\gamma_1, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; -r^2\right) + \\
 &+s^{n+1}\left({}_2F_1\left(1, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; -s^2\right) + c {}_2F_1\left(1+\gamma_2, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; -s^2\right)\right); \quad (10)
 \end{aligned}$$

3) для $r < s < 0$ –

$$\begin{aligned}
 m_n^{r,s} = \frac{(-1)^n}{A(n+1)} &\left[|r|^{n+1}\left({}_2F_1\left(1, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; -r^2\right) + c {}_2F_1\left(1+\gamma_1, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; -r^2\right)\right) + \right. \\
 &\left. -|s|^{n+1}\left({}_2F_1\left(1, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; -s^2\right) + c {}_2F_1\left(1+\gamma_1, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; -s^2\right)\right)\right]. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Доведення. Обмежимося доведенням для випадку $0 < r < s$ (в інших випадках доведення аналогічне).

Позначимо через $p(x)$ щільність p -узагальненого розподілу Коші з параметрами $(1, 0, c, \gamma_1, \gamma_2)$. Спочатку знайдемо вираз для інтеграла

$$\int_0^t \frac{x^n dx}{(1+x^2)^{1+\gamma}}, \quad (12)$$

де $\gamma \geq 0, t > 0$. Користуючись рівністю 3.194(1) з [9], отримаємо:

$$\int_0^t \frac{x^n dx}{(1+x^2)^{1+\gamma}} = \frac{1}{2} \int_0^{t^2} \frac{y^{(n-1)/2} dy}{(1+y)^{1+\gamma}} = \frac{t^{n+1}}{n+1} {}_2F_1\left(1+\gamma, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; -t^2\right). \quad (13)$$

А тому

$$\begin{aligned}
 \int_0^t x^n p(x) dx &= \frac{1}{A} \int_0^t \frac{x^n dx}{1+x^2} + \frac{c}{A} \int_0^t \frac{x^n dx}{(1+x^2)^{1+\gamma_2}} = \\
 &= \frac{t^{n+1}}{A(n+1)} \left[{}_2F_1\left(1, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; -t^2\right) + c {}_2F_1\left(1+\gamma_2, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; -t^2\right) \right]. \quad (14)
 \end{aligned}$$

І тепер рівність (9) впливає з (14). \square

2.3. Робастні моменти 3-го та 4-го порядків. Нагадаємо поняття асиметрії Bowley та ексцеса Moors.

Нехай F — розподіл із неперервною строго зростаючою функцією розподілу $F(x)$,

$$Q(u) = F^{-1}(u), \quad u \in [0; 1],$$

— його квантильна функція.

Означення 3. ([6]). Число

$$\frac{Q(3/4) + Q(1/4) - 2Q(1/2)}{Q(3/4) - Q(1/4)}$$

називається асиметрією Bowley розподілу F .

Означення 4. ([13]). Число

$$\frac{(Q(7/8) - Q(5/8)) + (Q(3/8) - Q(1/8))}{Q(6/8) - Q(2/8)}$$

називається ексцесом Moors розподілу F .

У випадку p -узагальненого розподілу Коші для асиметрії Bowley та ексцеса Moors не існує аналітичного виразу. Але за допомогою числового обертання функції розподілу можна наближено знайти відповідні квантилі, а за ними — ці робастні моменти.

Наближені значення асиметрії Bowley та ексцеса Moors для p -узагальненого розподілу Коші з параметрами $(1, 0, c, \gamma_1, \gamma_2)$ для різних значень c, γ_1, γ_2 наведені у табл. 3. Квантилі знаходились за допомогою пакету

GoFKernel середовища R.

с	γ_1	γ_2	Асиметрія Bowley	Ексцес Moors
1	5	0,2	0,1264	2,0283
1	5	0,5	0,0731	2,0369
1	10	0,5	0,0606	2,0795
1	5	1	0,0316	2,0927
1	7	7	0	2,3332
1	1	10	-0,0123	2,1278
1	10	10	0	2,3125
2	5	0,2	0,1947	1,9143
2	5	5	0	2,4767
2	10	5	-0,0095	2,5943
2	0,2	10	-0,2144	2,0177
2	7	10	0,0106	2,6429
5	5	0,2	0,2409	1,7002
5	10	0,2	0,2630	1,7154
5	10	5	0,0445	2,4860
5	7	7	0	2,4966
5	10	7	0,0216	2,7507
5	10	10	0	3,0221
10	5	0,2	0,2544	1,6435
10	10	0,2	0,2753	1,6471
10	10	0,5	0,2162	1,5199
10	5	1	0,1354	1,4798
10	10	1	0,1694	1,4821
10	10	10	0	2,0604

Табл. 3: Значення асиметрії Bowley та ексцеса Moors

3. Підгонка до реальних даних.

Покажемо, що p -узагальнений розподіл Коші може використовуватися для моделювання реальних даних.

Розглянемо набір даних вартості акцій фірми PDD (див. [14]) з 15.07.2022 р.

до 08.11.2022 р. Прологарифмуємо цей ряд і знайдемо його прирости, отриманий часовий ряд позначимо PDD. Значущі автокореляції у ряді PDD відсутні.

Порівняємо за допомогою статистики АІС якість підгонки для p -узагальненого розподілу Коші та наступних конкуруючих сімей розподілів: розподілу Коші; асиметричного розподілу Коші (skew-Cauchy distribution), див. [2]; узагальненого логістичного розподілу I-го типу (type I generalized logistic distribution), див. [4]; а також гіперболічного розподілу, див. [5] та [12] (гл. 6). Нами використовується варіант статистики АІС, який означається формулою

$$AIC = -2(l - p),$$

де l — логарифмічна функція максимальної правдоподібності, p — кількість параметрів розподілу. Результати наведені у табл. 4. (При підгонці цих розподілів були використані наступні пакети середовища R: `fitdistrplus`, `sn`, `glogis`, `GeneralizedHyperbolic`.)

Розподіл	АІС
p -узагальнений Коші	-254,596
Коші	-241,144
Асиметричний Коші	-239,388
Узагальнений логістичний	-253,699
Гіперболічний	-252,133

Табл. 4: Результати підгонки.

Таким чином, p -узагальнений розподіл Коші по якості підгонки перевершує усіх своїх конкурентів.

Висновки

Нами введено новий імовірнісний розподіл — p -узагальнений розподіл Коші (який являє собою модифікацію класичного розподілу Коші) і розглянуто його властивості. Зокрема, знайдено моменти дробового порядку та певні узагальнені неповні моменти. Досліджено робастні стандартизовані моменти 3-го та 4-го порядку. Продемонстровано, що p -узагальнений

розподіл Коші може використовуватися для моделювання приростів логарифмів часових рядів цін акцій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Alzaatreh A.** An alternative to the Cauchy distribution / A. Alzaatreh // *MethodsX*. — 2019. — Vol. 6. — P. 938–952.
2. **Azzalini A.** The Skew-normal and Related Families / A. Azzalini. — N. Y.: Cambridge University Press, 2013. — 262 p.
3. **Bahrami W.** A two-parameter generalized skew-Cauchy distribution / W. Bahrami, H. Rangin, K. Rangin // *Journal of Statistical Research of Iran*. — 2010. — Vol. 7(1). — P. 61–72.
4. **Balakrishnan N.** Handbook of the Logistic Distribution / N. Balakrishnan. — N. Y.: Marcel Dekker, Inc., 1992. — 586 p.
5. **Barndorff-Nielsen O.** Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size / O. Barndorff-Nielsen // *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. — 1977. — Vol. 353, № 1674. — P. 401–419.
6. **Bowley A. L.** Elements of Statistics / A. L. Bowley. — N. Y.: Scribner's, 1920. — 454 p.
7. **Chattamvelli R.** Continuous distributions in engineering and the applied sciences. (Part I) / R. Chattamvelli, R. Shanmugam. — Cham: Springer International Publishing, 2021. — 152 p.
8. **Dorić D.** New generalizations of Cauchy distribution / D. Dorić // *Communications in Statistics. Theory and Methods*. — 2011. — Vol. 40(21). — P. 3764–3776.
9. **Gradshteyn I. S.** Table of Integrals, Series, and Products / I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik. — Amsterdam: Elsevier, 2007. — 1171 p.
10. **Huang W. J.** Generalized skew-Cauchy distribution / W. J. Huang, Y. H. Chen // *Statistics & Probability Letters*. — 2007. — Vol. 77. — P. 1137–1147.
11. **Jayakumar K.** On a new generalization of Cauchy distribution / K. Jayakumar, K. Fasna // *Asian Journal of Statistical Sciences*. — 2022. — Vol. 2(1). — P. 61–81.
12. **Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, Book 1** / editor: S.T Rachev. — Amsterdam: Elsevier, 2003. — 704 p.
13. **Moors J. J. A.** A quantile alternative for kurtosis / J. J. A. Moors // *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)*. — 1988. — Vol. 37(1). — P. 25–32.
14. **PDD.** PDD Holdings Inc. (PDD). — Regime of access: <https://finance.yahoo.com/quote/PDD>,
15. **Arnold B. C.** Univariate and Bivariate Models Related to the Generalized Epsilon-Skew-Cauchy Distribution / B. C. Arnold, H. W. Gómez, H. Varela, I. Vidal // *Symmetry*. — 2019. — Vol. 11(6). — P. 794.

Turchyn I.

A NEW GENERALIZATION OF CAUCHY DISTRIBUTION

Summary

A new heavy-tailed distribution is considered in this paper: the p -generalized Cauchy distribution. This new 5-parameter distribution family is substantially more flexible than the classical Cauchy distribution, it contains, in particular, asymmetric distributions. Various numerical characteristics of the new distribution are considered, among them are fractional order moments and “twice incomplete” moments. There were obtained also (using numerical methods) values of quantile-based standardized moments of higher orders: Bowley’s skewness and Moors’ kurtosis. Suitability of the p -generalized Cauchy distribution for modeling real data was confirmed by fitting this distribution to a series of log returns of stock prices. The p -generalized Cauchy distribution had the smaller value of the AIC statistic than the Cauchy distribution, the skew-Cauchy distribution, the generalized logistic distribution and the hyperbolic distribution.

Key words: Cauchy distribution, incomplete moments, Bowley’s skewness, Moors’ kurtosis.

REFERENCES

1. Alzaatreh, A. (2019). An alternative to the Cauchy distribution. *MethodsX*, Vol. 6, P. 938–952.
2. Azzalini, A. (2013). *The Skew-Normal and Related Families*. N. Y.: Cambridge University Press, 262 p.
3. Bahrami, W., Rangin, H. and Rangin, K. (2010). A two-parameter generalized skew-Cauchy distribution. *Journal of Statistical Research of Iran*, Vol. 7(1), P. 61–72.
4. Balakrishnan, N. (1992). *Handbook of the Logistic Distribution*. N. Y.: Marcel Dekker, Inc., 586 p.
5. Barndorff-Nielsen, O. (1977). Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 353, №1674, P. 401–419.
6. Bowley, A. L. (1920). *Elements of Statistics*. N. Y.: Scribner’s, 454 p.
7. Chattamvelli, R., Shanmugam, R. (2021) *Continuous Distributions in Engineering and the Applied Sciences, Part I*. Cham: Springer International Publishing, 152 p.

-
8. Dorić, D. (2011). New generalizations of Cauchy distribution. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, Vol. 40(21), P. 3764–3776.
 9. Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M. (2007). *Table of Integrals, Series, and Products*. Amsterdam: Elsevier, 1171 p.
 10. Huang, W. J., Chen, Y. H. (2007). Generalized skew-Cauchy distribution. *Statistics & Probability Letters*, Vol. 77, P. 1137–1147.
 11. Jayakumar, K., Fasna, K. (2022). On a new generalization of Cauchy distribution. *Asian Journal of Statistical Sciences*, Vol. 2(1), P. 61–81.
 12. Rachev, S. T. (ed.) (2003) *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, Book 1*. Amsterdam: Elsevier, 2003, 704 p.
 13. Moors, J. J. A. (1988). A quantile alternative for kurtosis. *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)*, Vol. 37(1), P. 25–32.
 14. PDD Holdings Inc. (PDD). <https://finance.yahoo.com/quote/PDD>
 15. Arnold, B. C., Gómez, H. W., Varela, H. and Vidal, I. (2019). Univariate and Bivariate Models Related to the Generalized Epsilon–Skew–Cauchy Distribution. *Symmetry*, Vol. 11(6), 794 p.

УДК 517.927

Н. В. Шарай, В. М. Шинкаренко

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

Одеський національний економічний університет

АСИМПТОТИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

У роботі, використовуючи априорні властивості класу $P_\omega(\lambda_0)$ -розв'язків, встановлюються умови існування одного класу розв'язків у двочленного неавтономного диференціального рівняння третього порядку з нелінійністю, близькою у деякому сенсі до лінійної, у критичному випадку, а саме коли $\lambda_0 = \pm\infty$. Отримано асимптотичні при $t \uparrow \omega$ ($\omega \leq +\infty$) зображення для таких розв'язків та їх похідних першого та другого порядку у випадку $\lambda_0 = \pm\infty$. Доведені для нелінійного рівняння леми та теореми перенесено на лінійні диференціальні рівняння третього порядку з асимптотично малими коефіцієнтами. Перенесені результати не суперечать, та, в деякій мірі, доповнюють відомі результати щодо асимптотичного поведіння розв'язків лінійних диференціальних рівнянь третього порядку.

MSC: 34D05, 34E05.

Ключові слова: рівняння третього порядку, асимптотичні зображення, помірно змінна нелінійність, існування розв'язків.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305268](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305268).

Вступ

Розглядається диференціальне рівняння

$$y''' = \alpha_0 p(t) y |\ln |y||^\sigma, \quad (1)$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty^*$

Це рівняння належить до класу рівнянь виду

$$y''' = \alpha_0 p(t) \varphi(y), \quad (2)$$

*Вважаємо, що $a > 1$ при $\omega = +\infty$ і $\omega - a < 1$ при $\omega < +\infty$.

де функція $\varphi(y)$ є правильно змінна порядку γ у випадках коли $y \rightarrow 0$, або коли $y \rightarrow \pm\infty$, а також неперервна в односторонньому околі однієї із зазначених особливих точок. виявлений вченими інтерес до вивчення асимптотичних властивостей розв'язків таких рівнянь зумовлений насамперед тим, що через властивості функцій, що правильно змінюються (див., наприклад, монографію Е. Сенета [1]) вони є у деякому сенсі асимптотично близькими для $\gamma \neq 1$ до узагальненого рівняння типу Емдена-Фаудера

$$y''' = \alpha_0 p(t) |y|^\gamma \operatorname{sign} y,$$

а для $\gamma = 1$ – до лінійного диференціального рівняння

$$y''' = \alpha_0 p(t) y, \quad (3)$$

огляд численних досліджень яких міститься в добре відомій монографії І. Т. Кігурадзе і Т. А. Чантурія [2].

Серед робіт присвячених вивченню асимптотичної поведінки розв'язків диференціального рівняння (2) особливо слід відзначити для випадку $n \geq 2$ роботу В.М.Євтухова та А.М. Самойленка [3]. Однак, наведені в цієї та інших статтях результати не охоплюють рівняння виду (1), яке є асимптотично близьким при $y \rightarrow 0$ і $y \rightarrow \pm\infty$ до лінійного диференціального рівняння (3).

Розв'язок y рівняння (1), заданий і відмінний від нуля на проміжку $[t_y, \omega[\subset [a, \omega[$, називається $P_\omega(\lambda_0)$ -розв'язком, якщо він задовольняє наступним умовам:

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm \infty \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y''(t))^2}{y'''(t)y'(t)} = \lambda_0 \quad (4)$$

В роботах [4–6] для рівняння (1) були встановлені умови існування $P_\omega(\lambda_0)$ -розв'язків у випадку, якщо $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, а також були одержані асимптотичні розвинення для таких розв'язків та їх похідних до другого порядку включно. При цьому встановлена кількість розв'язків із знайденими асимптотичними зображеннями.

Метою даної роботи є встановлення необхідних та достатніх умов існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(\lambda_0)$ -розв'язків в особливому випадку, коли $\lambda_0 = \pm\infty$, а також одержання асимптотичних при $t \uparrow \omega$ зображень для таких розв'язків та їхніх похідних до другого порядку включно.

Допоміжні твердження

Для встановлення основного результату знадобляться дві відомі допоміжні леми, одна із яких стосується апріорних асимптотичних властивостей $P_\omega(\pm\infty)$ - розв'язків, а друга — існування зникаючих в особливій точці розв'язків у системах квазілінійних диференціальних рівнянь.

Щоб сформулювати перший із них, введемо необхідну надалі функцію

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty. \end{cases}$$

З Леми 10.4 праці В.М.Євтухова [7] (Гл.3, §10, стр. 141–142) (див. також лему 2.1 з праці В.М.Євтухова та А.М. Самойленко [3]) випливає наступне твердження.

Лема 1. *Кожний $P_\omega(\pm\infty)$ розв'язок диференціального рівняння (1) задовольняє при $t \uparrow \omega$ асимптотичним співвідношенням*

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{(3-k)}}{(3-k)!} y''(t), \quad (k = 1, 2), \quad y'''(t) = o\left(\frac{y''(t)}{\pi_\omega(t)}\right). \quad (5)$$

Далі, розглянемо систему квазілінійних диференціальних рівнянь

$$v'_k = h_k(t) \left[f_k(t, v_1, \dots, v_n) + \sum_{i=1}^3 c_{ki} v_i \right] \quad (k = 1, 2, 3) \quad (6)$$

в якій $c_{ki} \in \mathbb{R}$ ($k, i = 1, 2, 3$), $h_k : [t_0, \omega[\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ - неперервні функції, $f_k : [t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^3$ ($k = 1, 2, 3$) - неперервні функції, які задовольняють умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} f_k(\tau, v_1, v_2, v_3) = 0 \quad \text{рівномірно по } (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^3 \quad (7)$$

де $\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^3 = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : |v_i| \leq \frac{1}{2} \ (i = 1, 2, 3)\}$.

В силу теореми 2.1 з роботи В.М. Євтухова та А.М. Самойленка [8] для системи диференціальних рівнянь виду (6) має місце наступне твердження.

Лема 2. *Нехай*

$$c_{kk} h_k(t) \neq 0 \quad \text{коли } t \in [t_0, \omega[, \quad \int_{t_0}^{\omega} h_k(t) dt = \pm\infty \quad (k = 1, 2, 3) \quad (8)$$

і постійні B_k^0 ($k = 1, 2, 3$), які визначаються (починаючи з $k = 3$) рекурентними співвідношеннями

$$B_k^0 = \frac{1}{|c_{kk}|} \left(\sum_{j=1}^{k-1} |c_{kj}| + \sum_{j=k+1}^3 B_j^0 |c_{kj}| \right) \quad (9)$$

задовольняє нерівностям $B_k^0 < 1$ при усіх $k \in \{1, 2, 3\}$. Тоді система диференціальних рівнянь (5) має принаймні один розв'язок $(v_k)_{k=1}^3 : [t_1, \omega[\rightarrow \mathbb{R}^3$, де $t_1 \in [t_0, \omega[$, яке прямує до нуля при $t \uparrow \omega$, причому таких розв'язків існує ціле m -параметричне сімейство, якщо серед функцій $c_{kk} h_k(t)$ ($k \in \{1, 2, 3\}$) є m функцій, які є від'ємними на проміжку $[t_0, \omega[$.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Введемо функцію I наступним чином

$$I(t) = \int_a^t p(\tau) \pi_\omega^2(\tau) |\ln |\pi_\omega(\tau)||^\sigma d\tau.$$

Теорема 1. Для існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(\pm\infty)$ розв'язку необхідно й достатньо виконання умов

$$\lim_{t \uparrow \omega} p(t) \pi_\omega^3(t) |\ln |\pi_\omega(t)||^\sigma = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} I(t) = \pm\infty \quad (10)$$

причому кожне таке рішення допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\frac{y^{(k-1)}(t)}{y''(t)} = \frac{[\pi_\omega(t)]^{3-k}}{(3-k)!} [1 + o(1)] \quad (k = 1, 2), \quad (11)$$

$$\ln |y''(t)| = \alpha_0 2^{\sigma-1} I(t) [1 + o(1)] \quad (12)$$

Більш того, при виконанні умов (10) у диференціального рівняння (1) у випадку $\omega = +\infty$ існує трьохпараметричне сімейство розв'язків, що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (11), (12), а у випадку $\omega < +\infty$ - однопараметричне сімейство розв'язків із такими зображеннями.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $y : [t_y, \omega[\rightarrow \mathbb{R}$ є довільним $P_\omega(\pm\infty)$ - розв'язком диференціального рівняння (1). Тоді, враховуючи означення $P_\omega(\lambda_0)$ - розв'язку існує $t_0 \in [t_y, \omega[$ таке, що $\ln |y(t)| \neq 0$ на проміжку $[t_0, \omega[$,

і згідно з лемою 2.1 мають місце асимптотичні співвідношення (5). Згідно першому з асимптотичних співвідношень (5) має місце асимптотичні представлення (11) і, зокрема, співвідношення виду

$$y(t) \sim \frac{\pi_\omega^2(t)}{2} y''(t), \quad y'(t) \sim \pi_\omega(t) y''(t) \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Наслідком вищевказаних асимптотичних зображень є наступне співвідношення

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{2}{\pi_\omega(t)} \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

і тому $\ln |y(t)| \sim 2 \ln |\pi_\omega(t)|$ при $t \uparrow \omega$.

Враховуючи ці асимптотичні співвідношення з (1) отримуємо

$$y'''(t) = \frac{\alpha_0}{2} p(t) \pi_\omega^2(t) |2 \ln |\pi_\omega(t)||^\sigma y''(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

тобто

$$\frac{y'''(t)}{y''(t)} = \alpha_0 2^{\sigma-1} p(t) \pi_\omega^2(t) |\ln |\pi_\omega(t)||^\sigma [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (13)$$

З цього співвідношення та останнього з формул (5) випливає справедливості першої з умов (10). Крім того, інтегруючи (13) на проміжку від t_0 до t , отримаємо

$$\ln |y''(t)| = c + \alpha_0 |2|^{\sigma-1} \int_{t_0}^t p(\tau) \pi_\omega^2(\tau) |\ln |\pi_\omega(\tau)||^\sigma [1 + o(1)] d\tau,$$

де c — деяка дійсна стала.

Оскільки тут згідно з означенням $P_\omega(\lambda_0)$ - розв'язку ліва частина прямує до $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, то виконується друга з умов (10) і тому при $t \uparrow \omega$ має місце асимптотичне зображення (12).

Достатність. Нехай виконуються умови (10). Покажемо, що в цьому випадку у диференціального рівняння (1) існує $P_\omega(\pm\infty)$ - розв'язки, що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (11), (12), та з'ясуємо питання щодо кількості розв'язків з такими зображеннями.

Застосовуючи до рівняння (1) перетворення

$$\begin{aligned}\frac{y(t)}{y''(t)} &= \frac{[\pi_\omega(t)]^2}{2} [1 + w_1(t)], \\ \frac{y'(t)}{y''(t)} &= \pi_\omega(t) [1 + w_2(t)],\end{aligned}\tag{14}$$

$$\ln |y''(t)| = \alpha_0 2^{|\sigma-1|} I(t) [1 + w_3(t)],$$

отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}w'_1 &= \frac{2(w_2 - w_1)}{\pi_\omega(t)} - (1 + w_1)^2 \alpha_0 2^{\sigma-1} p(t) \pi_\omega^2(t) |\ln |\pi_\omega(t)||^\sigma \times \\ &\quad \times \left| 1 + \frac{\ln \left| \frac{1+w_1}{2} \right|}{2 \ln |\pi_\omega(t)|} + \frac{\alpha_0 2^{\sigma-2} I(t) (1 + w_3)}{\ln |\pi_\omega(t)|} \right|^\sigma, \\ w'_2 &= -\frac{1}{\pi_\omega(t)} w_2 - (1 + w_2) (1 + w_1) \alpha_0 2^{\sigma-1} p(t) \pi_\omega^2(t) |\ln |\pi_\omega(t)||^\sigma \times \\ &\quad \times \left| 1 + \frac{\ln \left| \frac{1+w_1}{2} \right|}{2 \ln |\pi_\omega(t)|} + \frac{\alpha_0 2^{\sigma-2} I(t) (1 + w_3)}{\ln |\pi_\omega(t)|} \right|^\sigma, \\ w'_3 &= -\frac{I'(t)}{I(t)} (1 + w_3) + \frac{I'(t)}{I(t)} (1 + w_1) \left| 1 + \frac{\ln \left| \frac{1+w_1}{2} \right|}{\ln |\pi_\omega^2(t)|} + \frac{\alpha_0 2^{\sigma-1} I(t) (1 + w_3)}{\ln |\pi_\omega^2(t)|} \right|^\sigma\end{aligned}$$

Вважаючи, що функції $h(t)$, $H(t)$, $\delta_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) набувають вигляду

$$\begin{aligned}h(t) &= \frac{1}{\pi_\omega(t)}, \quad H(t) = \frac{I'(t)}{I(t)} \\ \delta_1(t) &= \alpha_0 2^{\sigma-1} p(t) \pi_\omega^3(t) |\ln |\pi_\omega(t)||^\sigma, \quad \delta_2(t, w_1) = \frac{\ln \left| \frac{1+w_1}{2} \right|}{2 \ln |\pi_\omega(t)|}, \\ \delta_3(t, w_3) &= \frac{\alpha_0 2^{\sigma-1} I(t) (1 + w_3)}{2 \ln |\pi_\omega(t)|},\end{aligned}$$

перепишемо цю систему у вигляді

$$\begin{cases} w'_1 = h(t) [\bar{f}_1(t, w_1, w_2, w_3) - 2w_1 + 2w_2], \\ w'_2 = h(t) [\bar{f}_2(t, w_1, w_2, w_3) - w_3], \\ w'_3 = H(t) [\bar{f}_3(t, w_1, w_2, w_3) + w_1 - w_3]. \end{cases}\tag{15}$$

де функції $\bar{f}_k(t, w_1, w_2, w_3)$, ($k = 1, 2, 3$) мають вигляд

$$\begin{aligned}\bar{f}_1(t, w_1, w_2, w_3) &= -\delta_1(t) (1 + w_1) (1 + w_2) |1 + \delta_2(t, w_1) + \delta_3(t, w_3)|^\sigma, \\ \bar{f}_2(t, w_1, w_2, w_3) &= -\delta_1(t) (1 + w_2) (1 + w_1) \delta_1(t) |1 + \delta_2(t, w_1) + \delta_3(t, w_3)|^\sigma, \\ \bar{f}_3(t, w_1, w_2, w_3) &= (1 + w_1) [-1 + |1 + \delta_2(t, w_1) + \delta_3(t, w_3)|^\sigma].\end{aligned}$$

Оскільки $\ln |\pi_\omega(t)| \rightarrow \pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, та виконуються умови (10) то в силу правила Лопітала

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{I(t)}{\ln |\pi_\omega(t)|} = \lim_{t \uparrow \omega} p(t) \pi_\omega^3(t) |\ln |\pi_\omega(t)||^\sigma = 0$$

то для функцій $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ мають місце граничні співвідношення

$$\lim_{t \uparrow \omega} \delta_1(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \delta_2(t, w_1) = 0 \quad \text{рівномірно по } w_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad (16)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \delta_3(t, w_3) = 0 \quad \text{рівномірно по } w_3 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \quad (17)$$

Тому в системі (15) функції $\bar{f}_k(t, w_1, w_2, w_3)$, ($k = 1, 2, 3$) такі, що виконуються

$$\lim_{t \uparrow \omega} \bar{f}_k(t, w_1, w_2, w_3) = 0, \quad (k = 1, 2, 3) \quad \text{рівномірно по } (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^3$$

де множина $\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^3$ визначається наступним чином

$$\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^3 = \left\{ (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 : |w_i| \leq \frac{1}{2}, i = 1, 2, 3 \right\}$$

Далі, враховуючи умови (16), (17) виберемо число $t_0 \in [a, \omega[$ таким, щоб виконувалася нерівність

$$|\delta_2(t, w_1)| + |\delta_3(t, w_3)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{при } t \in [t_0, \omega[\quad \text{і } w_1, w_3 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

та розглянемо систему (15) на множині $\Omega = [t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^3$. На цій множині система (15) є системою типу (6).

Приведемо її до виду, що допускає застосування леми 2.2. Для цього, обрав довільним чином число $0 < \varepsilon < 1$, систему рівнянь (15) за допомогою додаткового перетворення

$$\omega_k(t) = \varepsilon v_k(t) \quad (k = 1, 2), \quad \omega_3(t) = v_3(t) \quad (18)$$

приведемо до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v_1' = h(t) [f_1(t, v_1, v_2, v_3) - 2v_1 + 2v_2], \\ v_2' = h(t) [f_2(t, v_1, v_2, v_3) - v_2], \\ v_3' = H(t) [f_3(t, v_1, v_2, v_3) + \varepsilon v_1 - v_3], \end{cases} \quad (19)$$

де функції $f_k(t, v_1, v_2, v_3)$ ($k = 1, 2, 3$) набувають вигляду

$$f_k(t, v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{\varepsilon} \bar{f}_k(t, \varepsilon v_1, \varepsilon v_2, v_3) \quad (k = 1, 2),$$

$$f_3(t, v_1, v_2, v_3) = \bar{f}_3(t, \varepsilon v_1, \varepsilon v_2, v_3)$$

Тут, з огляду на граничні умови (16), (17)

$$\lim_{t \uparrow \omega} f_k(t, v_1, v_2, v_3) = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \text{ рівномірно за } (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^3$$

Покажемо, що для цієї системи типу (6) виконані всі умови леми 2.2. З огляду на вигляд функцій $\pi_\omega(t)$, $I(t)$ і другої з умов (10)

$$\int_{t_0}^t h(\tau) d\tau \sim \ln |\pi_\omega(t)| \rightarrow \pm\infty, \quad \int_{t_0}^t H(\tau) d\tau \sim \ln |I(t)| \rightarrow +\infty \text{ при } t \uparrow \omega$$

Окрім того, в системі рівнянь

$$c_{kk}h_k(t) = -\frac{3-k}{\pi_\omega(t)} \text{ при } k = 1, 2 \text{ та } c_{33}h_3(t) = -H(t),$$

при цьому виконується

$$\text{sign}[c_{kk}h_k(t)] = -\text{sign} \pi_\omega(t) \quad (k = 1, 2), \quad \text{sign}[c_{33}h_3(t)] = -1$$

Сталі B_k^0 ($k = 1, 2, 3$) з леми 2.2, визначені (починаючи з $k = 3$ рекурентними співвідношеннями (2.5), для системи (19) приймають наступні значення

$$B_3^0 = \varepsilon, B_k^0 = 0 \quad (k = 1, 2).$$

Оскільки $0 < \varepsilon < 1$, то $B_k^0 < 1$ для всіх $k = 1, 2, 3$

Отже для системи диференціальних рівнянь (19) виконані усі умови леми 2.2. Згідно з цією лемою система диференціальних рівнянь (19) має хоча б один розв'язок $(v_k)_{k=1}^3 : [t_1, \omega] \rightarrow \mathbf{R}^3$ ($t_1 \in [t_0, \omega]$), який прямує до нуля при $t \uparrow \omega$.

Крім того, оскільки $c_{33}h_3(t) < 0$ та $\text{sign}[c_{kk}h_k(t)] = -\text{sign}[\pi_\omega(t)]$ при $k = 1, 2$, то на підставі цієї ж леми, у системі рівнянь (19) у випадку $\omega = \pm\infty$ існує трьохпараметричне сімейство зникаючих на нескінченності розв'язків, а у випадку $\omega < +\infty$ у неї існує однопараметричне сімейство зникаючих у точці ω розв'язків.

Кожному з прямуючих до нуля розв'язків $(v_k)_{k=1}^3 : [t_1, \omega] \rightarrow \mathbf{R}^3$ системи диференціальних рівнянь (19) з огляду заміни (18) та (14) відповідає розв'язок $y : [t_1, \omega] \rightarrow \mathbf{R}$ диференціального рівняння (1), що допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичне зображення (11) - (12). Використовуючи ці зображення та умови (10) неважко також переконатися в тому, що кожний такий розв'язок є $P_\omega(\pm\infty)$ - розв'язком диференціального рівняння (1). Теорема доведена повністю.

При $\sigma = 0$, тобто для випадку лінійного диференціального рівняння (3) з теореми 3.1 випливає наступне твердження

Наслідок 1.

Для існування у лінійного диференціального рівняння (3) $P_\omega(\pm\infty)$ -розв'язку необхідно й достатньо, щоб виконувались умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} p(t)\pi_\omega^3(t) = 0, \quad \int_a^\omega p(t)\pi_\omega^2(t)dt = \pm\infty. \quad (20)$$

Для кожного такого розв'язку має місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\frac{y(t)}{y''(t)} = \frac{[\pi_\omega(t)]^2}{2} [1 + o(1)] \quad \frac{y'(t)}{y''(t)} = \pi_\omega(t) [1 + o(1)] \quad (21)$$

$$\ln |y''(t)| = \frac{\alpha_0}{2} \int_a^t p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)d\tau [1 + o(1)]. \quad (22)$$

Більш того, при виконанні умов (20) у диференціального рівняння (3) у випадку, коли $\omega = +\infty$ існує n - параметричне сімейство $P_\omega(\pm\infty)$ - розв'язків з зображеннями (21) - (22), а у випадку $\omega < \infty$ таких розв'язків існує однопараметричне сімейство.

Дана теорема у випадку $\omega = +\infty$ доповнює результати для лінійних диференціальних рівнянь з асимптотично малими коефіцієнтами, наведені в монографії І.Т. Кігурадзе та Т.А. Чантурія [2] (див. Гл. 1, §6, п. 6.5, стор. 184–186).

Висновки

У роботі для двочленного неавтономного диференціального рівняння третього порядку (1) встановлено асимптотичну поведінку при $t \uparrow \omega$

($\omega \leq +\infty$), $P_\omega(\lambda_0)$ –розв'язків в особливому випадку, а саме коли $\lambda_0 = \pm\infty$. Також отримано необхідні та достатні умови існування таких розв'язків та вирішено питання стосовно їх кількості. Доведена теорема доповнює отримані раніше результати стосовно асимптотики розв'язків рівняння (1).

Зауважимо, що встановлені зображення не суперечать асимптотичним співвідношенням, отриманим у роботах [9], [10] для асимптотично близького до (1) рівняння третього порядку.

Подальшим кроком дослідження асимптотичних властивостей $P_\omega(\pm\infty)$ –розв'язків рівняння (1) вбачаємо в отриманні асимптотики більш загального вигляду за умови додаткових обмежень на функцію $p(t)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Seneta E.** Regularly Varying Functions / E. Seneta. - Springer, Verlag Berlin Heidelberg. 1976. - 116 p.
2. **Kiguradze I.** Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations / I.T. Kiguradze, T. A. Chanturia. - Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993. - 331 p.
3. **Evtukhov V.M.** Asymptotic representations of solutions of nonautonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities. / Evtukhov, V.M., Samoilenko, A.M. // Diff Equat. - 2011. - No 47 - P. 627-649
4. **Sharai N.** Asymptotic representations for the solutions of third order nonlinear differential equations / N. Sharai, V. Shinkarenko // J. Math. Sci. (N.Y.). - 2016. - Vol. 215, No. 3. - P. 408-420.
5. **Шарай Н.В.** Асимптотичне зображення деяких класів розв'язків диференціального рівняння третього порядку. / Шарай Н.В., Шинкаренко В.М. // Дослідження в математиці і механіці. - 2022. - Т. 27, №1-2(39-40). - С. 96-110
6. **Sharai N.** Asymptotic behavior of solutions for one class of third order nonlinear differential equations. Abstracts of the International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations / N. Sharai, V. Shinkarenko // QUALITDE-2018, Tbilisi, Georgia, December 1-3. - 2018. - P. 165-169.
7. **Евтухов В.М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов. - Диссертация д-ра физ.-мат. наук: [спец.] 01.01.02 Дифференциальные уравнения. Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 1997. - 295 с.
8. **Evtukhov V. M.** Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point / V. M. Evtukhov, A. M. Samoilenko // Ukrainian Math. J. - 2010. - Vol. 62, No. 1. - P. 56-86.

9. **Evtukhov V.M.** Asymptotic behavior of the solutions of one class of third-order ordinary differential equations / V. M. Evtukhov, A. A. Stekhun // QUALITDE-2016, Tbilisi, Georgia, December 24–26. — 2016. — P. 77–80.
10. **Stekhun A.O.** Asymptotic behavior of the solutions of one class of third-order ordinary differential equations / A. O. Stekhun // *Nelin. Kolyv.* — 2013. — Vol. 16, №2. — P. 246–260; English translation: *J. Math. Sci.*, 198. — 2014 . — №3. — P. 336–350.

Sharai N. V., Shinkarenko V. M.

ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF SOLUTIONS CLOSE TO LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

Summary

In the work, using the a priori properties of the $P_\omega(\lambda_0)$ class of solutions, the conditions for the existence of one class of solutions in the binomial non-autonomous of a differential equation of the third order with a nonlinearity close in some sense to linear, in the critical case, namely when $\lambda_0 = \pm\infty$. Asymptotic at $t \uparrow \omega$ ($\omega \leq +\infty$) images for such solutions and their derivatives of the first and second order in the case $\lambda_0 = \pm\infty$. Proven for of the nonlinear equation, the lemma and the theorem are transferred to linear differential equations of the third order with asymptotically small coefficients. The transferred results do not contradict, and to some extent, complement known results regarding the asymptotic behavior of solutions of linear differential equations of the third order.

Key words: equations of the third order, asymptotic images, moderately variable nonlinearity, existence of solutions.

REFERENCES

1. Seneta E. (1976) *Regularly Varying Functions*. Springer, Verlag Berlin Heidelberg. 116 p.
2. Kiguradze I., Chanturia T. (1993). *Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 331 p.
3. Evtukhov V., Samoilenko A. (2011) Asymptotic representations of solutions of nonautonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities. *Diff Equat.* No 47, P. 627–649
4. Sharai N., Shinkarenko V. (2016). Asymptotic representations for the solutions of third order nonlinear differential equations. *J. Math. Sci. (N.Y.)*, Vol. 215, №3, P. 408–420.
5. Sharai N., Shinkarenko V. (2022) Asymptotychne zobrazhennia deiakykh klasiv rozv'iazkiv dyferentsialnoho rivniannia tretoho poriadku [Asymptotic representation of some classes of solutions of the third-order differential equation] *Res. in Mat. and Mech.* Vol. 27, №1–2(39–40), P. 96–110.
6. Sharai N., Shinkarenko V. (2018). Asymptotic behavior of solutions for one class of third order nonlinear differential equations. Abstracts of the International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations. *QUALITDE-2018, Tbilisi, Georgia*, December 1–3, P. 165–169.

7. Evtukhov V. M. (1998). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy [Asymptotic representations of solutions of non-autonomous ordinary differential equations.] (*D.Sc. Thesis*) *Differential equations*. Kyiv: institute of Mathematics of NASU.
8. Evtukhov V. M., Samoilenko A. M. (2010). Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point. *Ukrainian Math. J.* Vol. 62, №1, P. 56–86.
9. Evtukhov V. M., Stekhun A. A. (2016). Asymptotic behavior of the solutions of one class of third-order ordinary differential equations. *QUALITDE-2016, Tbilisi, Georgia, December 24–26*, P. 77–80.
10. Stekhun A. O. (2013). Asymptotic behavior of the solutions of one class of third-order ordinary differential equations. *Nelin. Kolyv.* Vol. 16, №2, P. 246–260; (2014). English translation: *J. Math. Sci.*, 198, №3, P. 336–350.

УДК 510.28+510.635(045)

Н. А. Якімова

Одеській національний університет ім. І. І. Мечнікова

ОПЕРАЦІЇ НАД БЛОЧНИМИ ПРЕДИКАТНИМИ МАТРИЦЯМИ

В даній статті розглянуто можливість виконання основних логічних операцій над матрицями, які розділено на прямокутні блоки в якійсь довільний спосіб. Отримані результати проілюстровані на прикладі предикатних логічних матриць, що задані над полем скінченних предикатів довільної арності. Також обґрунтовано можливість розповсюдити отримані результати на булеві матриці (вважається, що їх задано над полем скінченних предикатів нульової арності). В той же час з використанням апарату багатозначної логіки, відштовхуючись від булевих логічних матриць, отримані результати можна розповсюдити на дослідження логічних об'єктів, що не є булевими. Блочне розділення матриць дозволяє розбивати інформацію, подану у матричному вигляді, на частини, обробляти їх окремо, а потім поєднувати в єдине ціле, дотримуючись певних правил та обмежень, що описані в даній статті. Ці методи можуть знайти своє застосування в теорії графів, теорії алгоритмів, програмуванні та інших сферах теоретичної та практичної діяльності, що так чи інакше пов'язані з математичною логікою.

У класичній лінійній алгебрі широко використовується апарат матриць. Але класична лінійна алгебра має справу із безперервними об'єктами. Логічна алгебра, побудована за аналогією з класичною лінійною алгеброю, будує ті ж самі моделі за допомогою дискретних об'єктів, що мають логічну структуру і підкоряються відповідним законам. Це призводить до суттєвих відмінностей у функціонуванні побудованих моделей. Дана стаття присвячена матрицям, в якості елементів для яких взято елементарні логічні елементи, а саме скінченні предикати довільної арності. В роботі досліджені властивості таких матриць та особливості їх застосування за умови їх блочного подання. Також розглянуто основні операції над такими матрицями. Крім звичайних операцій, що мають місце в класичній лінійній алгебрі, логічні структури дозволяють виконувати ще декілька операцій. Особливу увагу приділено операції добутку блочних предикатних матриць з урахуванням їх особливостей, пов'язаних з логічною структурою таких об'єктів.

MSC: 03G05, 03G25, 03F52, 06E25, 15B34.

Ключові слова: булева матриця, скінченний предикат, предикатна матриця, блочне подання, елементарні логічні операції, арність предикатів, логічний скаляр, багатозначна логіка.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305269](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305269).

ВСТУП

Устояні уявлення про математичну логіку як про науку, що вивчає закони мислення із застосуванням апарата математики, головним чином,

для потреб самої математики, у сучасних умовах стає занадто вузьким [1]. Сьогодення ставить перед наукою все більшу кількість задач, пов'язаних із комп'ютеризацією. Саме потреби комп'ютерної обробки інформації потребують дослідження можливостей матричного вирахування для матриць логічного типу. Такі матриці мають дуже широке застосування. Ними можна подавати, наприклад, основні операції над графами [2]. Також логічні конструкції використовуються для побудови математичних моделей природної мови [3]. Тому актуальною є задача створення математичного апарату, який би дозволяв обробляти матриці, елементами яких є об'єкти довільної логічної природи за аналогією із звичайним алгебраїчним матричним апаратом.

1. ПОПЕРЕДНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Розрізняють логічні матриці двох типів: булеві та предикатні.

Означення 1. Матриця називається булевою, якщо її елементами є логічні скаляри із поля $K = \{0, 1\}$ [3].

Тобто елементами булевої матриці є нулі та одиниці. Наприклад, булевою буде матриця [2]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Означення 2. Матриця називається предикатною, якщо усі її елементи узяті із одного й того ж поля скінченних предикатів довільної арності [3].

Означення 3. Скінченним n -місним предикатом (предикатом арності n) над деяким алфавітом G називається будь-яка функція $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ від n аргументів x_1, x_2, \dots, x_n заданих на множині G , що приймає значення із двохелементної множини $K = \{0, 1\}$.

Булеві матриці можна розглядати як окремий випадок предикатних матриць. При цьому можна вважати, що арність предикатів, що складають скалярне поле, дорівнює нулю.

Часто інформація для обробки надається частинами, кожна з яких може оброблятися як окремо, так і як складова цілісної системи. Поєднання

цих частин задля сумісної обробки дозволяє зробити апарат блочних матриць.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Візьмемо довільну логічну матрицю $A[4]$ та поділимо її на частини горизонтальними та вертикальними прямими лініями. Отримані частини можна розглядати як логічні матриці меншої розмірності, які, в свою чергу, є елементами початкової матриці A .

Означення 4. Прямокутні частини, на які можна поділити довільну логічну матрицю A , які при цьому не перетинаються між собою, але сукупно утворюють всю вказану матрицю, називаються клітками або блоками матриці A .

Означення 5. В свою чергу, матриця A , яку розділено в описаний спосіб, називається блочною.

Існує декілька варіантів розбиття однієї й тієї ж самої матриці A на блоки [5]. Наприклад,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

тощо.

Для блочних логічних матриць мають місце ті ж самі властивості, що й для звичайних булевих та предикатних матриць. Операції над ними здійснюються за тими ж правилами, що виконуються для звичайних логічних матриць [4]. Припустимо, що деяку логічну матрицю A розділено на блоки в якійсь один з можливих способів:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}.$$

Щоб виконати операцію логічного добутку на скаляр α описаної матриці α , треба виконати кон'юнкцію логічного скаляру α з усіма елементами

матриці A , і як наслідок, з усіма елементами кожного з її блоків. Отже,

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha A_{11} & \dots & \alpha A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha A_{m1} & \dots & \alpha A_{mn} \end{pmatrix}.$$

Візьмемо за поле логічних скалярів множину одномісних скінченних предикатів, заданих над алфавітом $K = 0, 1$:

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Як було показано в [1], логічні операції над скінченними предикатами однакової арності виконуються порозрядно.

Оберемо, наприклад, за логічний скаляр $\alpha = P_2(x) = (1 \ 0)$. В якості матриці, заданої над цим скалярним полем, розглянемо блочне розбиття предикатної матриці

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} P_1 & P_2 & P_3 \\ \hline P_0 & P_2 & P_1 \\ \hline P_3 & P_1 & P_0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \\ \hline \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \alpha A &= \begin{pmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 \left(\begin{array}{c} P_1 \\ P_0 \\ P_3 \end{array} \right) & P_2 \left(\begin{array}{c} P_2 \\ P_2 \\ P_1 \end{array} \right) \\ P_2 \left(\begin{array}{c} P_3 \\ P_1 \end{array} \right) & P_2 \left(\begin{array}{c} P_0 \end{array} \right) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{cc} P_2 \wedge P_1 & P_2 \wedge P_2 \\ P_2 \wedge P_0 & P_2 \wedge P_2 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} P_2 \wedge P_3 \\ P_2 \wedge P_1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} P_2 \wedge P_3 & P_2 \wedge P_1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} P_2 \wedge P_0 \end{array} \right) \end{pmatrix} = \\ &= \left(\left(\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \right) \wedge \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \wedge \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \right) = \end{aligned}$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) & \\ \hline \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} P_0 & P_2 & P_2 & \\ \hline P_0 & P_2 & P_0 & \\ P_2 & P_0 & P_0 & \end{array} \right).$$

Візьмемо тепер логічну матрицю В, що має ту ж саму розмірність, що й А, та розділену на блоки в спосіб, аналогічний розділенню матриці А:

$$B = \left(\begin{array}{ccc} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{m1} & \dots & B_{mn} \end{array} \right).$$

Згідно з означенням диз'юнкції логічних матриць [4], елементи матриці $C_V = A \vee B$ будуть дорівнювати диз'юнкціям їх відповідних елементів. З цього випливає, що матриця С буде розділеною на блоки так само, як і матриці А і В, причому її блоки будуть відповідати результатам диз'юнкції відповідних блоків матриць А і В, тобто

$$C_V = \left(\begin{array}{ccc} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{m1} & \dots & C_{mn} \end{array} \right) = A \vee B = \left(\begin{array}{ccc} A_{11} \vee B_{11} & \dots & A_{1n} \vee B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} \vee B_{m1} & \dots & A_{mn} \vee B_{mn} \end{array} \right).$$

Наприклад, для наведеної вище матриці А та матриці

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} P_3 & P_2 & P_1 & \\ \hline P_2 & P_1 & P_1 & \\ P_0 & P_1 & P_3 & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right) & \\ \hline \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right) & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{array} \right).$$

маємо:

$$\begin{aligned} A \vee B &= \left(\begin{array}{cc} A_{11} \vee B_{11} & A_{12} \vee B_{12} \\ A_{21} \vee B_{21} & A_{22} \vee B_{22} \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} P_1 & P_2 \\ P_0 & P_2 \end{array} \right) \vee \left(\begin{array}{cc} P_3 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} P_3 \\ P_1 \end{array} \right) \vee \left(\begin{array}{c} P_1 \\ P_1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} P_3 & P_1 \end{array} \right) \vee \left(\begin{array}{cc} P_0 & P_1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} P_0 \\ P_3 \end{array} \right) \vee \left(\begin{array}{c} P_3 \end{array} \right) \end{array} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \vee \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \vee \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right) = \\
&= \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right) = \\
&= \left(\begin{array}{cc|c} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} P_3 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_3 & P_1 \\ P_3 & P_1 & P_3 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Згідно з означенням кон'юнкції логічних матриць [4], елементами матриці $C_{\wedge} = A \wedge B$ є результати кон'юнкцій відповідних елементів матриць A і B . З цього випливає, що розділення матриці C_{\wedge} є таким самим, що й для матриць A і B , причому її блоки дорівнюють кон'юнкціям відповідних блоків матриць A і B , тобто

$$C_{\wedge} = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{m1} & \dots & C_{mn} \end{pmatrix} = A \wedge B = \begin{pmatrix} A_{11} \wedge B_{11} & \dots & A_{1n} \wedge B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} \wedge B_{m1} & \dots & A_{mn} \wedge B_{mn} \end{pmatrix}$$

Для наведених вище матриць A і B їх кон'юнкцією буде

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= \begin{pmatrix} A_{11} \wedge B_{11} & A_{12} \wedge B_{12} \\ A_{21} \wedge B_{21} & A_{22} \wedge B_{22} \end{pmatrix} = \\
&= \left(\left(\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_0 & P_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_3 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} P_3 \\ P_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_1 \\ P_1 \end{pmatrix} \right) \vee \right. \\
&\quad \left. \left(\begin{pmatrix} P_3 & P_1 \\ P_3 & P_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ P_0 & P_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} P_0 \\ P_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_3 \\ P_3 \end{pmatrix} \right) \right) = \\
&= \left(\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \wedge \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \wedge \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right) \vee \right. \\
&\quad \left. \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \wedge \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \wedge \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \right) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right) = \\
 &= \left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \middle| \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right) = \left(\begin{array}{cc|c} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_1 & P_0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Згідно з означенням заперечення логічних матриць [1], елементами матриці \bar{A} є заперечення відповідних елементів матриці A , тобто \bar{a}_{ij} . Отже, заперечення блочної матриці \bar{A} буде розділено на блоки так само, як і початкова матриця A , а її елементами будуть заперечення відповідних блоків матриці A , тобто

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \dots & \bar{A}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{A}_{m1} & \dots & \bar{A}_{mn} \end{pmatrix}$$

Таким чином, для наведеної вище блочної предикатної матриці маємо:

$$\begin{aligned}
 \bar{A} &= \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} = \left(\left(\begin{array}{cc} P_1 & P_2 \\ P_0 & P_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} P_3 \\ P_1 \end{array} \right) \right) = \\
 &= \left(\left(\begin{array}{cc} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 \\ \bar{P}_0 & \bar{P}_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \bar{P}_3 \\ \bar{P}_1 \end{array} \right) \right) = \\
 &= \left(\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right) = \\
 &= \left(\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \right) =
 \end{aligned}$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \\ \hline \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} P_2 & P_1 & P_0 \\ P_3 & P_1 & P_2 \\ P_0 & P_2 & P_3 \end{array} \right)$$

У випадку добутку блочних логічних матриць аналогія з добутком звичайних логічних матриць не є вже такою очевидною. Розглянемо логічні матриці A і B :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,p} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \cdots & B_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,1} & B_{n,2} & \cdots & B_{n,p} \end{pmatrix}$$

тобто розділені на блоки в такий спосіб, щоб кількість стовпців блоку A_{ij} збігалася б з кількістю рядків блоку B_{jk} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, p}$). Іншими словами, всі горизонтальні розміри в матриці-лівому множнику збігалися з відповідними вертикальними розмірами в матриці-правому множнику [5]. Лише за умови дотримання цього правила розбиття

$$C_{jk} = A_{i1}B_{1k} \vee A_{in}B_{nk}$$

має сенс. Матриці, розділені на блоки в описаний спосіб, перемножуються аналогічно до звичайних логічних матриць.

Теорема. Блоки матриці, що є результатом добутку блочних логічних матриць A і B дорівнюють диз'юнкціям добутків блоків рядків матриці A на блоки відповідних стовпців матриці B .

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли матриці A і B мають по два блоки, тобто будемо доводити правило добутку блочних логічних матриць в наступному вигляді:

$$(A_1 \quad A_2) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = A_1B_1 \vee A_2B_2 \quad (1)$$

Нехай $a_{ij}^1, a_{ir}^2, b_{jt}^1, b_{rt}^2$ — елементи матриць, що відповідають блокам A_1, A_2, B_1, B_2 відповідно ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, r = \overline{1, s}, t = \overline{1, p}$). Виконуючи дії, вказані в лівій частині виразу (1), отримуємо елемент матриці $C=AB$, що стоїть в i -тому рядку та t -тому стовпці:

$$c_{it} = a_{i1}^1 b_{1t}^1 \vee \dots \vee a_{in}^1 b_{nt}^1 \vee a_{i1}^2 b_{1t}^2 \vee \dots \vee a_{is}^2 b_{st}^2$$

Обчислюючи елемент, що стоїть в i -тому рядку і t -тому стовпці матриці, записаної в правій частині виразу (1), ми отримуємо ту ж саму рівність, що й для c_{it} , що й доводить рівність (1). Тепер доведемо правило добутку блочних логічних матриць в загальному випадку:

$$(A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = A_1 B_1 \vee A_2 B_2 \vee \dots \vee A_n B_n \quad (2)$$

де елементи A_i та B_i є окремими блоками. При $n = 2$ ця формула є вже доведеною вище рівністю (1). Подальше доведення будемо проводити за допомогою методу математичної індукції. Припустимо, що для всіх $n = q - 1$ співвідношення (2) виконується. Доведемо його істинність для $n = q$. Для цього позначимо

$$X = (A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n), Y = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = A_1 B_1 \vee A_2 B_2 \vee \dots \vee A_n B_n.$$

Тоді, згідно з рівністю (1), маємо:

$$\begin{aligned} (A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} &= (A_1 \quad X) \begin{pmatrix} B_1 \\ Y \end{pmatrix} = \\ &= A_1 B_1 \vee XY = A_1 B_1 \vee A_2 B_2 \vee \dots \vee A_n B_n. \end{aligned}$$

В аналогічний спосіб отримуємо рівність

$$A(B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_n) = (AB_1 \quad AB_2 \quad \dots \quad AB_n) \quad (3)$$

та рівність

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_1 B \\ A_2 B \\ \vdots \\ A_n B \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Тепер із рівностей (2), (3) і (4) виводиться загальна формула

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} \dots C_{1p} \\ \dots \dots \dots \\ C_{m1} \dots C_{mp} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Для цього позначимо рядки блоків матриці A через A_1, \dots, A_m , а стовпці блоків матриці B через B_1, \dots, B_p . Згідно з рівністю (4), можна записати наступне:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_1 B \\ A_2 B \\ \vdots \\ A_m B \end{pmatrix}.$$

Якщо підставити в це співвідношення вираз для розбиття матриці B , отримаємо

$$AB = \begin{pmatrix} A_1(B_1 \dots B_p) \\ \dots \dots \dots \\ A_m(B_1 \dots B_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 \dots A_1 B_p \\ \dots \dots \dots \\ A_m B_1 \dots A_m B_p \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Але згідно з рівністю (2), отримуємо:

$$A_i B_k = (A_{i1} \dots A_{in}) \begin{pmatrix} B_{1k} \\ \vdots \\ B_{nk} \end{pmatrix} = A_{i1} B_{1k} \vee \dots \vee A_{in} B_{nk} = C_{ik}.$$

Якщо підставити цей результат до рівності (6), отримаємо співвідношення (5). Отже, тим самим доведено правило добутку блочних логічних матриць. Теорему доведено.

Отже, для можливості обчислення добутку двох блочних предикатних матриць A' і B' четвертого порядку їх розділення на блоки має бути, на-

приклад, наступним:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|cc} P_1 & P_2 & P_3 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 & P_1 \\ P_2 & P_2 & P_0 & P_3 \\ \hline P_1 & P_0 & P_3 & P_3 \end{array} \right), B' = \left(\begin{array}{ccc|c} P_0 & P_3 & P_2 & P_2 \\ P_2 & P_2 & P_1 & P_1 \\ P_3 & P_3 & P_0 & P_2 \\ \hline P_3 & P_0 & P_3 & P_3 \end{array} \right).$$

Для цих матриць їх добуток буде дорівнювати

$$\begin{aligned} A'B' &= \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} P_1 & P_2 \\ P_0 & P_3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} P_3 & P_1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} P_2 & P_2 \\ P_1 & P_0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} P_0 & P_3 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} P_3 & P_3 \\ P_3 & P_0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} P_3 & P_3 \end{array} \right) \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} P_0 & P_3 & P_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} P_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{ccc} P_3 & P_3 & P_0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} P_2 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \right) \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} P_1 & P_2 \\ P_0 & P_3 \\ P_2 & P_2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc} P_0 & P_3 & P_2 \end{array} \right) \vee \left(\begin{array}{cc} P_3 & P_1 \\ P_1 & P_1 \\ P_0 & P_3 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc} P_3 & P_3 & P_0 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} P_1 & P_0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc} P_0 & P_3 & P_2 \end{array} \right) \vee \left(\begin{array}{cc} P_3 & P_3 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc} P_3 & P_3 & P_0 \end{array} \right) \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} P_1 & P_2 \\ P_0 & P_3 \\ P_2 & P_2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} P_2 \\ P_1 \end{array} \right) \vee \left(\begin{array}{cc} P_3 & P_1 \\ P_1 & P_1 \\ P_0 & P_3 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} P_2 \\ P_3 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} P_1 & P_0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} P_2 \\ P_1 \end{array} \right) \vee \left(\begin{array}{cc} P_3 & P_3 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} P_2 \\ P_3 \end{array} \right) \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c} \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \right) \cdot \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \right) \vee \left(\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \right) \cdot \left(\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \right) \\ \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right) \right) \cdot \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \right) \vee \left(\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right) \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right) \vee \left(\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right) = \\
& \left(\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right) \vee \left(\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right) = \\
& \left(\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right) = \\
& \left(\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right) = \\
& = \left(\begin{array}{ccc|c} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} P_3 & P_3 & P_1 & P_3 \\ P_3 & P_3 & P_1 & P_1 \\ P_3 & P_2 & P_3 & P_3 \\ P_3 & P_3 & P_3 & P_3 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Для розглянутих вище предикатних матриць A і B третього порядку наведений варіант їх одночасного розділення на блоки є припустимим для обчислення добутку цих матриць. Але при збереженні розбиття для матриці A жодний інший варіант розбиття матриці B вже не є припустимим, тому що будь-яке інше розбиття матриці B порушує умову рівності відповідних горизонтальних та вертикальних розмірностей блоків цих матриць [5].

Висновки

При доведенні отриманих результатів арність предикатів скалярного поля, над яким можуть бути задані досліджувані логічні матриці, ніяким чином не було обмежено. Тобто ця арність може дорівнювати, зокрема, нулю. З цього випливає, що отримані результати є узагальненими і можуть бути застосовані як до предикатних, так і до булевих матриць. Більш за те, інколи виникає потреба застосування математичного апарату логічних матриць для довільних матриць, які не завжди є булевими. В цьому випадку за умови використання загального означення логічних операцій диз'юнкції та кон'юнкції для багатозначної логіки як $x \vee y = \max\{x, y\}$ та $x \wedge y = \min\{x, y\}$ [6], отримані результати зберігаються і для багатозначних логічних конструкцій. Це може стати в нагоді при дослідженні, наприклад, матричного апарату для задання операцій над графами [2].

Список літератури

1. **Якімова Н.А.** Предикатні логічні матриці / Н.А. Якімова // Вісник Одеського національного університету ім.І.І.Мечнікова. Дослідження в математиці і механіці. – 2019. – Том 24. – Випуск 2 (34) – С.67-74.
2. **Якімова Н.А.** Матричне подання операцій над графами / Н.А. Якімова, М.Є. Клішин // Вісник Одеського національного університету ім.І.І.Мечнікова. Дослідження в математиці і механіці. – 2022. – Том 27. – Випуск 1 – 2 (38 – 39). – С.121-141.
3. **Якимова Н.А.** Алгебраический синтез простых словосочетаний в предложении естественного языка / Н.А. Якимова // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. – 2000. – Вып. 111. – С. 22-27.
4. **Гвоздинская Н.А.** О логических матрицах / Н.А. Гвоздинская, З.В. Дударь, С.А. Пославский, Ю.П. Шабанов-Кушнарченко // Проблемы бионики. Вып.48, 1998. Стр. 12 – 22.
5. **Гантмахер Ф.** Теорія матриць. – Київ: Надруковано в Україні, 2010. – 560 с.
6. **Шапорев С.Д.** Математическая логика. Курс лекций и практических занятий / С.Д. Шапорев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.

Yakimova N.A.

OPERATIONS ON BLOCK PREDICATE MATRICES

Summary

This article discusses the possibility of performing basic logical operations on matrices that are divided into rectangular blocks in an arbitrary manner. The results obtained are illustrated using the example of predicate logical matrices defined over a field of finite predicates of arbitrary arity. The possibility of extending the results obtained to Boolean matrices is also justified (they are considered to be defined over a field of finite predicates of zero arity). At the same time, using the apparatus of multivalued logic, starting from Boolean logical matrices, the results obtained can also be extended to the study of logical objects that are not Boolean. Block partitioning of matrices allows you to divide information specified in matrix form into parts, process these parts separately, and then combine them into a single whole, adhering to certain rules and restrictions described in this article. These methods can find their application in graph theory, in the theory of algorithms, programming and in other areas of theoretical and practical activity that are in one way or another related to mathematical logic.

Key words: boolean matrix, finite predicate, predicate matrix, block partitioning, elementary logical operations, arity of predicates, logical scalar, multivalued logic.

REFERENCES

1. Yakimova N.A. (2019). Predykatni logichni matritzi [Predicative logical matrices]. *Visnyk Odes'kogo Natsional'nogo universitetu. Researches in Mathematics and Mechanics*. Vol. 24, Iss. 2(34), P.67–74.
2. Yakimova N.A., Klishin N.E. (2022). Matrychne podannya operatziy nad grafami [Matrix representation of operation on graphs]. *Visnyk Odes'kogo Natsional'nogo universitetu. Researches in Mathematics and Mechanics*. Vol.27, Iss. 1–2(38–39), P.121–141.
3. Yakimova N.A. (2000). Algebraicheskiy sintez prostykh slovosochetaniy v predlozhenie estestvennogo yazyka [Algebraic synthesis of simple phrases into natural language sentences]. *Avtomatizirovannyye systemy upravleniya s pribory avtomatiki*. Vol. 111, P. 22–27.
4. Gvozdinskaya N.A., Dudar.Z.V., Poplavskiy S.A., Shabanov-Kushnarenko Y.P. (1998). O logicheskikh matitzakh [On logical matrix]. *Problemy bioniki*. Vol.48, pp. 12–22.

-
5. Gantmaker F. *Teoriya matrytz [Matrix theory]*. Kyiv: Nadrukovano v Ukraini, 560p.
 6. Shaporev S.D. (2005). *Matematicheskaya logika [Mathematical logic]*. St-Peterburg: BHV-Peterburg, 416p.

UDC 539.3

A. A. Fesenko

Odesa I. I. Mechnikov National University

DIRECT SOLUTION OF THE DYNAMICAL ELASTICITY PROBLEM FOR A QUARTER SPACE

The wave field of an elastic quarter space is constructed when one face is rigidly fixed and a dynamic normal compressive load is concentrated at the point on another face. The problem was solved by the direct application of the integral Laplace and Fourier transforms to the motion equations and the boundary conditions. This operation leads to the one-dimensional vector inhomogeneous boundary value problem with respect to unknown displacement's transformants. The problem was solved using the matrix differential calculus. A fundamental matrix and a decreasing solution to the corresponding homogenous matrix equation were constructed with a basic residue theorem. A singular integral equation was obtained in the process by satisfying unrealized boundary condition. Weakly convergent part of the equation was summed up. The behavior of the unknown function had been analyzed based on its mechanical sense. The form of unknown function was expressed as a series on Laguerre polynomials. The original displacements' field was found after an application the inverse integral transforms.

MSC: 74B10, 74H05, 74H45.

Key words: elastic quarter space, integral transform, dynamic load, matrix differential calculus, singular integral equation.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305270](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305270).

INTRODUCTION

An object such as a quarter space can be considered as a model for approbation different approaches of solving the boundary problems of the elasticity theory in static or dynamic statements before considering problems for the infinite and finite plates.

One of the earliest works on the analyses of a three-dimensional wedge problem can be found in works of Uflyand Y.S. [9]. The formulation of the Paphovich-Neuber potential functions was developed for a general wedge by Uflyand Y.S. in [10].

Steady state harmonic vibrations and waves in the elastic bodies considered in the book of Grinchenko V.T. and Meleshko V.V. [3], which provides a broad review of the literature on oscillatory processes.

In the work [13] Zhang Z., Wang W. and Wong P. presented an explicit matrix algorithm for solving 3D wedge problems under general surface loads: arbitrarily distributed normal and shear loads. The authors also discussed the effect of wedge angle on internal stresses. A fast and convenient algorithm for the solution of the elastic quarter-space contact problem was presented, which uses discretization to form matrices to realize the overlapping solution process for the elastic quarter-space.

In the work [5] Hanson M. T. and Keer L. M. determined the elastic stress and displacement fields in a quarter-space under arbitrarily applied surface loadings. The problem was formulated in terms of two coupled two-dimensional integral equations. The integral equations contain a logarithmic singularity with an unknown coefficient, which varies along the edge of the quarter-space.

In the paper [2], Babeshko V.A., et. constructed an exact solution in the first quadrant of a plane boundary value problem for the dynamic Lamé elasticity equations, using the coordinate block element method, and expanded the solution in terms of solutions of the boundary value problems for the Helmholtz equation.

Alterman Z.S. and Rotenberg A. in [1] investigated the propagation of the elastic waves for the case of an elastic quarter plane using the finite difference scheme. A point-source emitting a compressional pulse was located along the diagonal inside the quarter plane. Free-surface conditions were assumed on the boundary lines, so that the problem was nonseparable. Complete theoretical seismograms for the horizontal and vertical components of displacement were obtained. The effect of different finite difference formulations for the boundary conditions and the effect of different mesh sizes were studied.

New method of solving the spatial elasticity problems was proposed by Popov G. Ya. in [6]. The method is based on introduction of two new functions which expressed through the derivatives of unknown displacement. The application of this approach leads to the system of two equations and separately solved equation. Using this method an exact solution for elasticity problem for quarter space was obtained in [7; 11] in the static statement by Vaysfeld N.D. and Popov G.Ya.

The dynamical problem for an elastic quarter space was considered in [12] using the method, proposed by Popov G.Ya. In this case the unknown vector of transformants of the displacement consists of two components, that is why

implementation of the matrix differential calculus operates with matrices of the 2x2 order.

The aim of this work is to solve the elasticity problem for the quarter space in the dynamic statement directly with the method of the integral transforms and evaluate difficulties and advantages that appear in both approaches. Note that in [12] the problem was solved under assumption that unknown functions are equal to zero, which made the problem basically equivalent to the Lamb problem, and there was no necessity to solve an integral equation.

MAIN RESULTS

1. Statement of the problem

An elastic quarter space $0 < x, z < \infty, -\infty < y < \infty$ with μ — Poisson ratio, G — shear modulus is under consideration. Normal dynamic compressive load is acting on a boundary $z = 0$, concentrated at the point with coordinates (a, b) while a boundary $x = 0$ is rigidly fixed. Displacements, $u_x(x, y, z, t) = u(x, y, z, t)$, $u_y(x, y, z, t) = v(x, y, z, t)$, $u_z(x, y, z, t) = w(x, y, z, t)$, which appear in the medium are in the interest of investigation. The statement leads to the following boundary conditions

$$\begin{aligned} \sigma_z|_{z=0} &= \delta(x-a)\delta(y-b)P(t), \quad \tau_{zy}|_{z=0} = 0, \quad \tau_{zx}|_{z=0} = 0, \\ u|_{x=0} &= 0, \quad v|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=0} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Here $\delta(x)$ is the Dirac delta function. Zero initial conditions are assumed. Unknown displacements satisfy the motion equations, written in a vector form

$$\Delta(u, x, w) + \frac{2}{\kappa - 1} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}, \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = \frac{\rho}{G} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \quad (2)$$

Here Δ — Laplace operator, $\kappa = 3 - 4\mu$, ρ — density of the elastic medium, $\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ — volume expansion. The following change of variables is introduced

$$\tilde{x} = x/a, \quad \tilde{y} = (y - b)/a, \quad \tilde{z} = z/a.$$

In this coordinate system axis \tilde{y} will be a line of symmetry and condition of parity for vertical displacement take place $w(\tilde{x}, -\tilde{y}, \tilde{z}, t) = w(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t)$. Normal load (1) in these coordinates take form $\sigma_z|_{z=0} = a^{-2}\delta(x-1)\delta(y)P(t)$. Further symbol “waves” are omitted, implying the change of variables.

2. Reduction the problem to a vector one-dimensional problem.

To reduce the given problem (1)-(2) to the one-dimensional one, the integral transforms are applied, sin-cos- Furrier – with respect to a variable x , Furrier – with respect to a variable y and Laplace – with respect to a variable t

$$\begin{bmatrix} u_{\alpha\beta p}(z) \\ v_{\alpha\beta p}(z) \\ w_{\alpha\beta p}(z) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \begin{bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha x \\ \sin \alpha x \\ \sin \alpha x \end{pmatrix} e^{i\beta y} e^{-p_* t} dx dy dt \quad (3)$$

during this operation initial conditions were satisfied. Motion equations (2) and boundary conditions (1) take form

$$\left\{ \begin{array}{l} u''_{\alpha\beta p}(z) - \left(\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \alpha^2 + \beta^2 + p^2 \right) w_{\alpha\beta p}(z) + \frac{2}{\kappa - 1} \alpha w'_{\alpha\beta p}(z) - \\ \quad - \frac{2}{\kappa - 1} i \alpha \beta v_{\alpha\beta p}(z) = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} u'_{\beta p}(0, z) \\ v''_{\alpha\beta p}(z) - \left(\alpha^2 + \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \beta^2 + p^2 \right) v_{\alpha\beta p}(z) - \frac{2}{\kappa - 1} i \beta w'_{\alpha\beta p}(z) + \\ \quad + \frac{2}{\kappa - 1} i \alpha \beta u_{\alpha\beta p}(z) = 0 \\ w''_{\alpha\beta p}(z) - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (\alpha^2 + \beta^2 + p^2) w_{\alpha\beta p}(z) - \frac{2}{\kappa + 1} i \beta v'_{\alpha\beta p}(z) - \\ \quad - \frac{2}{\kappa + 1} \alpha u'_{\alpha\beta p}(z) = 0 \\ 0 < z < \infty, \end{array} \right. \quad (4)$$

Here notation was used $p = p_*/c_2$, p_* – parameter Laplace transform, $c_2 = \sqrt{G/\rho}$ – propagation speed of transverse (shear, secondary or S-) waves.

$$\begin{aligned} \alpha w_{\alpha\beta p}(0) + u'_{\alpha\beta p}(0) &= 0, \quad -i\beta w_{\alpha\beta p}(0) + v'_{\alpha\beta p}(0) = 0, \\ -\frac{3-\kappa}{\kappa+1} [\alpha u_{\alpha\beta p}(0) + i\beta v_{\alpha\beta p}(0)] + w'_{\alpha\beta p}(0) &= \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{P_p}{G a} \sin \alpha \\ P_p &= \int_0^\infty P(t) e^{-p_* t} dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Boundary condition $u(0, y, z, t) = 0$ was not realized. Let's denote unknown function at right part of equations (4)

$$\chi_\beta(z) = u'_{\beta p}(0, z). \quad (6)$$

In order to rewrite the system (4) in a vector form, the unknown vector of transformants and the vector of right part are introduced

$$\mathbf{y}(z) = (u_{\alpha\beta p}(z) \quad v_{\alpha\beta p}(z) \quad w_{\alpha\beta p}(z))^T, \quad \mathbf{f}(z) = \left(\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \chi_\beta(z) \quad 0 \quad 0 \right)^T, \quad (7)$$

and also constant matrices

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\kappa-1}\alpha \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\kappa-1}i\beta \\ -\frac{1}{\kappa+1}\alpha & -\frac{1}{\kappa+1}i\beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\alpha^2 + \beta^2 + p^2\right) & -\frac{2}{\kappa-1}i\alpha\beta & 0 \\ \frac{2}{\kappa-1}i\alpha\beta & -\left(\alpha^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\beta^2 + p^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa-1}{\kappa+1}(\alpha^2 + \beta^2 + p^2) \end{pmatrix}$$

So, the system (4) is written using the differential operator of the 2d kind

$$L_2\mathbf{y}(z) = \mathbf{I}\mathbf{y}''(z) + 2\mathbf{Q}\mathbf{y}'(z) + \mathbf{P}\mathbf{y}(z) = \mathbf{f}(z), \quad 0 < z < \infty \quad (8)$$

So, the vector one-dimensional boundary problem was obtained in form (8), (5) with respect to unknown vector of transformants (7).

3. Solving the vector boundary problem.

Solution to the vector problem (8), (5) was constructed in a form [8]

$$\mathbf{y}(z) = \int_0^\infty \mathbf{\Phi}(z - \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi + \mathbf{Y}_-(z)\mathbf{C}, \quad (9)$$

where $\mathbf{\Phi}(z - \xi)$ – fundamental matrix, $\mathbf{C} = (C_1 \ C_2 \ C_3)^T$ – constant vector, should be found from the boundary conditions (5), $\mathbf{Y}_-(z)$ – general decreasing, when $z \rightarrow \infty$, solution to a matrix equation $L_2\mathbf{Y}(z) = 0$.

Characteristic matrix to the equation (8) has a form

$$\mathbf{M}(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\alpha^2 + \beta^2 + p^2\right) & -\frac{2}{\kappa-1}i\alpha\beta & \\ \frac{2}{\kappa-1}i\alpha\beta & s^2 - \left(\alpha^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\beta^2 + p^2\right) & \\ -\frac{2}{\kappa+1}\alpha s & -\frac{2}{\kappa+1}i\beta s & \\ & \frac{2}{\kappa-1}\alpha s & \\ & -\frac{2}{\kappa-1}i\beta s & \\ & s^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}(\alpha^2 + \beta^2 + p^2) & \end{pmatrix}.$$

The decreasing solution

$$\mathbf{Y}_-(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{sz}\mathbf{M}^{-1}(s)ds$$

was constructed on the basis of poles

$$s_1 = -\sqrt{N^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}p^2}, \quad s_2 = -\sqrt{N^2 + p^2}, \quad N^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

where s_1 is a pole of a first kind, s_2 is a pole of a second kind, of an inverse characteristic matrix

$$\mathbf{M}^{-1}(s) = \frac{\mathbf{M}^A(s)}{\det \mathbf{M}(s)}, \quad \mathbf{M}^A(s) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \left[s^2 - \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\alpha^2 + \beta^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}p^2 \right) \right] [s^2 - (N^2 + p^2)],$$

$$A_{12} = \frac{2}{\kappa+1}i\alpha\beta[s^2 - (N^2 + p^2)], \quad A_{13} = -\frac{2}{\kappa-1}\alpha s[s^2 - (N^2 + p^2)],$$

$$A_{21} = -\frac{2}{\kappa+1}i\alpha\beta[s^2 - (N^2 + p^2)],$$

$$A_{22} = \left[s^2 - \left(\alpha^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\beta^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}p^2 \right) \right] [s^2 - (N^2 + p^2)],$$

$$A_{23} = \frac{2}{\kappa-1}i\beta s[s^2 - (N^2 + p^2)], \quad A_{31} = \frac{2}{\kappa+1}\alpha s[s^2 - (N^2 + p^2)],$$

$$A_{32} = \frac{2}{\kappa+1}i\beta s[s^2 - (N^2 + p^2)],$$

$$A_{33} = \left[s^2 - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}p^2 \right) \right] [s^2 - (N^2 + p^2)],$$

$$\det \mathbf{M} = \left[s^2 - \left(\sqrt{N^2 + p^2} \right)^2 \right]^2 \left[s^2 - \left(\sqrt{N^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}p^2} \right)^2 \right]$$

and have a following form

$$\mathbf{Y}_-(z) = \mathbf{Y}_-^{(s_1)}(z) + \mathbf{Y}_-^{(s_2)}(z), \quad (10)$$

$$\mathbf{Y}_-(z) = \frac{1}{2p^2}e^{-\Delta_1 z} \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{\Delta_1} & \frac{i\alpha\beta}{\Delta_1} & \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\alpha \\ i\alpha\beta & \beta^2 & -\frac{\kappa+1}{\kappa-1}i\beta \\ -\alpha & -i\beta & -\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\Delta_1 \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{2p^2}e^{-\Delta_2 z} \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2 + p^2}{\Delta_2} & \frac{i\alpha\beta}{\Delta_2} & -\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\alpha \\ \frac{i\alpha\beta}{\Delta_2} & -\frac{\beta^2 + p^2}{\Delta_2} & \frac{\kappa+1}{\kappa-1}i\beta \\ \alpha & i\beta & \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\Delta_2} \end{pmatrix},$$

functions Δ_1, Δ_2 have a form

$$\Delta_1 = \sqrt{N^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}p^2}, \quad \Delta_2 = \sqrt{N^2 + p^2}. \quad (11)$$

To construct a fundamental matrix, the definition can be used. According to it, the solution to the equation $L_2\mathbf{y}(z) = \mathbf{f}(z)$, $0 < z < \infty$, related to (8), can be written in a form

$$\mathbf{y}(z) = \int_0^\infty \mathbf{f}(\xi)\Phi(z-\xi)d\xi,$$

$\Phi(z-\xi)$ — fundamental matrix. To solve the equation, continue the right part of it by zero for $z < 0$ and apply the integral Furrier transform

$$\mathbf{y}_s = \int_{-\infty}^\infty e^{isz}\mathbf{y}(z)dz$$

Taking into account, that from a relation $L_2e^{sz}\mathbf{I} = e^{sz}\mathbf{M}(z)$ follows $L_2e^{isz}\mathbf{I} = e^{isz}\mathbf{M}(is)$

$$L_2 \int_{-\infty}^\infty e^{isz}\mathbf{y}(z)dz = \int_{-\infty}^\infty e^{is\xi}\mathbf{f}(\xi)d\xi, \\ \int_{-\infty}^\infty e^{isz}\mathbf{M}(is)\mathbf{y}(z)dz = \mathbf{f}_s, \quad \mathbf{M}(is)\mathbf{y}_s = \mathbf{f}_s, \quad \mathbf{y}_s = \mathbf{M}^{-1}(is)\mathbf{f}_s.$$

After an application the inverse integral transform to the last relation

$$\mathbf{y}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathbf{M}^{-1}(is)\mathbf{f}_s e^{-isz} ds = \int_0^\infty \mathbf{f}(\xi) \left(\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathbf{M}^{-1}(is)e^{-is(z-\xi)} ds \right) d\xi$$

and comparing it with the definition, resulting formula was obtained

$$\Phi(z - \xi) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}^{-1}(is) e^{-is(z-\xi)} ds.$$

Characteristic matrix has a form

$$\mathbf{M}(is) = \begin{pmatrix} -s^2 - \left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \alpha^2 + \beta^2 + p^2 \right) & -\frac{2}{\kappa-1} i\alpha\beta \\ \frac{2}{\kappa-1} i\alpha\beta & -s^2 - \left(\alpha^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \beta^2 + p^2 \right) \\ \frac{2}{\kappa+1} i\alpha s & -\frac{2}{\kappa+1} i\beta s \\ & -\frac{2}{\kappa-1} i\alpha s \\ & -\frac{2}{\kappa-1} \beta s \\ -s^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} (\alpha^2 + \beta^2 + p^2) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}^{-1}(is) = \frac{\mathbf{M}^A(is)}{\det \mathbf{M}(is)}, \mathbf{M}^A(is) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = \left[s^2 + \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \alpha^2 + \beta^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} p^2 \right) \right] [s^2 + N^2 + p^2]$$

$$A_{12} = -\frac{2}{\kappa+1} i\alpha\beta [s^2 + N^2 + p^2], \quad A_{13} = -\frac{2}{\kappa-1} i\alpha s [s^2 + N^2 + p^2],$$

$$A_{21} = -\frac{2}{\kappa+1} i\alpha\beta [s^2 + N^2 + p^2],$$

$$A_{22} = \left[s^2 + \left(\alpha^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \beta^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} p^2 \right) \right] [s^2 + N^2 + p^2],$$

$$A_{23} = \frac{2}{\kappa-1} i\beta s [s^2 - (N^2 + p^2)], \quad A_{31} = \frac{2}{\kappa+1} i\alpha s [s^2 + N^2 + p^2],$$

$$A_{32} = -\frac{2}{\kappa+1} \beta s [s^2 + N^2 + p^2],$$

$$A_{33} = \left[s^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} p^2 \right) \right] [s^2 + N^2 + p^2],$$

$$\det \mathbf{M}(is) = \left[s - i\sqrt{N^2 + p^2} \right]^2 \left[s + i\sqrt{N^2 + p^2} \right]^2 \cdot \left[s - i\sqrt{N^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} p^2} \right] \left[s + i\sqrt{N^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} p^2} \right]$$

$$s_1 = -i\sqrt{N^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} p^2}, \quad s_2 = -i\sqrt{N^2 + p^2},$$

$$s_3 = i\sqrt{N^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}p^2}, \quad s_4 = i\sqrt{N^2 + p^2}$$

Using Jordan lemma, closing contours in the upper and lower half-planes, the main theorem on residues, taking into account the kinds of poles, resulting formula take a form

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}^{-1}(is)e^{-is(z-\xi)} ds = \begin{cases} i[\text{Res}(s_3) + \text{Res}(s_4)], & z - \xi < 0 \\ -i[\text{Res}(s_1) + \text{Res}(s_2)], & z - \xi > 0 \end{cases}$$

Fundamental matrix was constricted

$$\begin{aligned} \Phi(z-\xi) = & \frac{1}{2p^2} e^{-\Delta_2|z-\xi|} \begin{pmatrix} -\frac{\alpha^2 + p^2}{\Delta_2} & \frac{i\alpha\beta}{\Delta_2} & \text{sgn}(z-\xi)\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\alpha \\ \frac{i\alpha\beta}{\Delta_2} & \frac{\beta^2 + p^2}{\Delta_2} & -\text{sgn}(z-\xi)\frac{\kappa+1}{\kappa-1}i\beta \\ \text{sgn}(z-\xi)\alpha & -\text{sgn}(z-\xi)i\beta & -\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\Delta_2} \end{pmatrix} + \\ & + \frac{1}{2p^2} e^{-\Delta_1|z-\xi|} \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{\Delta_1} & -\frac{i\alpha\beta}{\Delta_1} & -\text{sgn}(z-\xi)\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\alpha \\ \frac{i\alpha\beta}{\Delta_1} & -\frac{\beta^2}{\Delta_1} & \text{sgn}(z-\xi)\frac{\kappa+1}{\kappa-1}i\beta \\ -\text{sgn}(z-\xi)\alpha & \text{sgn}(z-\xi)i\beta & \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\Delta_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

The solution (9) can be rewritten in a matrix form

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{\alpha\beta p}(z) \\ v_{\alpha\beta p}(z) \\ w_{\alpha\beta p}(z) \end{pmatrix} = & \frac{1}{2p^2} \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\chi\beta(\xi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\xi + \\ & + \frac{1}{2p^2} \begin{pmatrix} y_-^{11} & y_-^{12} & y_-^{13} \\ y_-^{21} & y_-^{22} & y_-^{23} \\ y_-^{31} & y_-^{32} & y_-^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

So, transformants of displacements can be written as

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta p}(z) = & \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{1}{2p^2} \int_0^{\infty} \phi_{11}\chi\beta(\xi)d\xi + \frac{1}{2p^2}(y_-^{11}C_1 + y_-^{12}C_2 + y_-^{13}C_3) \\ v_{\alpha\beta p}(z) = & \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{1}{2p^2} \int_0^{\infty} \phi_{21}\chi\beta(\xi)d\xi + \frac{1}{2p^2}(y_-^{21}C_1 + y_-^{22}C_2 + y_-^{23}C_3) \\ w_{\alpha\beta p}(z) = & \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{1}{2p^2} \int_0^{\infty} \phi_{31}\chi\beta(\xi)d\xi + \frac{1}{2p^2}(y_-^{31}C_1 + y_-^{32}C_2 + y_-^{33}C_3) \end{aligned} \quad (13)$$

where

$$\begin{aligned}\phi_{11} &= -\frac{\alpha^2 + p^2}{\Delta_2} e^{-\Delta_2|z-\xi|} + e^{-\Delta_1|z-\xi|} \frac{\alpha^2}{\Delta_1}, \\ \phi_{21} &= i\alpha\beta \left[\frac{1}{\Delta_2} e^{-\Delta_2|z-\xi|} - \frac{1}{\Delta_1} e^{-\Delta_1|z-\xi|} \right], \\ \phi_{31} &= \alpha \operatorname{sgn}(z - \xi) [e^{-\Delta_2|z-\xi|} - e^{-\Delta_1|z-\xi|}]\end{aligned}$$

Components y_-^{ij} of the decreasing solution are given in (10). To find unknown constants in the solution (13), a system of equations was obtained after satisfying the boundary conditions (5).

$$\begin{aligned}2^{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}\alpha \left[\frac{N^2 + \frac{1}{2}p^2}{\Delta_1} - \Delta_2 \right] C_1 + 2^{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}i\beta \left[\frac{N^2 + \frac{1}{2}p^2}{\Delta_1} - \Delta_2 \right] C_2 + p^2 C_3 &= \\ &= \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{2p^2}{Ga} \sin \alpha P_p + B_1 \\ p^2 C_1 - 2^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}\alpha \left[\Delta_1 - \frac{N^2 + \frac{1}{2}p^2}{\Delta_2} \right] C_3 &= B_2 \\ p^2 C_2 + 2^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}i\beta \left[\Delta_1 - \frac{N^2 + \frac{1}{2}p^2}{\Delta_2} \right] C_3 &= B_3\end{aligned}$$

Right part of equations has a form

$$\begin{aligned}B_1 &= \alpha \int_0^\infty \chi_\beta(\xi) \left[2\Delta_2 e^{-\Delta_2\xi} - \frac{2N^2 + p^2}{\Delta_1} e^{-\Delta_1\xi} \right] d\xi, \\ B_2 &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^\infty \chi_\beta(\xi) [(2\alpha^2 + p^2)e^{-\Delta_2\xi} - 2\alpha^2 e^{-\Delta_1\xi}] d\xi, \\ B_3 &= 2^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}i\alpha\beta \int_0^\infty \chi_\beta(\xi) [-e^{-\Delta_2\xi} + e^{-\Delta_1\xi}] d\xi.\end{aligned}$$

Determinant of the system is

$$\begin{aligned}\det &= \frac{p^2}{\Delta_1\Delta_2} [\Delta_1\Delta_2 - N^2]\Delta, \\ \Delta &= 4N^4 + 4N^2p^2 + p^4 - 4N^2\Delta_1\Delta_2.\end{aligned}\tag{14}$$

After solving the system constants were found

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{2p^2}{Ga} \alpha \sin \alpha P_p \frac{\Delta_1 [\Delta_1 \Delta_2 - (N^2 + \frac{1}{2}p^2)]}{[\Delta_1 \Delta_2 - N^2] \Delta} + C_1^B, \\
C_2 &= -\frac{2p^2}{Ga} i\beta \sin \alpha P_p \frac{\Delta_1 [\Delta_1 \Delta_2 - (N^2 + \frac{1}{2}p^2)]}{[\Delta_1 \Delta_2 - N^2] \Delta} + C_2^B, \\
C_3 &= \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{p^4}{Ga} \sin \alpha P_p \frac{\Delta_1 \Delta_2}{[\Delta_1 \Delta_2 - N^2] \Delta} + C_3^B, \\
C_1^B &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{1}{[\Delta_1 \Delta_2 - N^2] \Delta} \int_0^\infty \chi_\beta(\xi) [\alpha^2 (\Delta - 4p^2 \Delta_1 \Delta_2) e^{-\Delta_2 \xi} + \\
&\quad + (p^4 \Delta_1 \Delta_2 + 2\alpha^2 p^2 \Delta_1 \Delta_2) e^{-\Delta_1 \xi}] d\xi, \\
C_2^B &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{i\alpha\beta}{[\Delta_1 \Delta_2 - N^2] \Delta} \int_0^\infty \chi_\beta(\xi) [(4p^2 \Delta_1 \Delta_2 - \Delta) e^{-\Delta_2 \xi} + \\
&\quad + (4p^4 \Delta_1 \Delta_2 + 8N^2 \Delta_1 \Delta_2 - \Delta) e^{-\Delta_1 \xi}] d\xi, \\
C_3^B &= \frac{\alpha \Delta_2}{[\Delta_1 \Delta_2 - N^2] \Delta} \int_0^\infty \chi_\beta(\xi) [(4N^4 - 4N^2 \Delta_1 \Delta_2 - p^4) e^{-\Delta_2 \xi} + \\
&\quad + (4p^4 \Delta_1 \Delta_2 - \Delta) e^{-\Delta_1 \xi}] d\xi.
\end{aligned} \tag{15}$$

Transformants of the displacements can be written in a following form

$$\begin{aligned}
(u_{\alpha\beta p}(z) \quad v_{\alpha\beta p}(z) \quad w_{\alpha\beta p}(z))^T &= (u_{\alpha\beta p}^0(z) \quad v_{\alpha\beta p}^0(z) \quad w_{\alpha\beta p}^0(z))^T + \\
&\quad + (u_{\alpha\beta p}^1(z) \quad v_{\alpha\beta p}^1(z) \quad w_{\alpha\beta p}^1(z))^T
\end{aligned}$$

Where additions $u_{\alpha\beta p}^0(z), v_{\alpha\beta p}^0(z), w_{\alpha\beta p}^0(z)$ correspond to the solution, which include intensity of the acting load P_p , and additions with an upper index "1" include an integral with the unknown function $\chi_\beta(\xi)$ in (6). Transformants with an index "0" have a form

$$\begin{aligned}
u_{\alpha\beta p}^0(z) &= \alpha \frac{\sin \alpha P_p}{Ga} \frac{1}{\Delta} [2\Delta_1 \Delta_2 e^{-\Delta_2 z} - (2N^2 + p^2) e^{-\Delta_1 z}], \\
v_{\alpha\beta p}^0(z) &= i\beta \frac{\sin \alpha P_p}{Ga} \frac{1}{\Delta} [2\Delta_1 \Delta_2 e^{-\Delta_2 z} - (2N^2 + p^2) e^{-\Delta_1 z}] \\
w_{\alpha\beta p}^0(z) &= \frac{\sin \alpha}{Ga} P_p \frac{\Delta_1}{\Delta} [2N^2 e^{-\Delta_2 z} - (2N^2 + p^2) e^{-\Delta_1 z}].
\end{aligned} \tag{16}$$

It can be easily seen that transformants coincide with ones, obtained with the method of Popov G.Ya. in [12]. Difference is in sign, because a compressive load is here in the statement of the problem in contrast to a stretching load in that investigation. Using the relation (13), so as components of decreasing

solution (10) and constants (15), transformant of interest for displacement was constructed

$$\begin{aligned}
 w_{\alpha\beta p}(z) &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\alpha}{2p^2} \int_0^\infty [e^{-\Delta_2|z-\xi|} \operatorname{sgn}(z-\xi) - \\
 &\quad - e^{-\Delta_1|z-\xi|} \operatorname{sgn}(z-\xi)] \chi_\beta(\xi) d\xi + \\
 &+ \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\alpha}{2p^2 \Delta} \int_0^\infty F_1(N, z, \xi, p) \chi_\beta(\xi) d\xi + w_{\alpha\beta p}^0(z).
 \end{aligned} \tag{17}$$

To find the initial vertical displacement the inverse integral transform should be applied

$$w(x, y, z, t) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{2\pi i} \int_l \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty w_{\alpha\beta p}(z) e^{p^*t} e^{i\beta y} \sin \alpha x dp_* d\beta d\alpha,$$

$l = (\lambda - i\infty, \lambda + i\infty)$ Algorithm of conducting a component $w_0(x, y, z, t)$ was considered in [12], and related to the solution of the Lamb problem.

4. Reduction to the singular integral equation.

An integral equation was constructed, based on the fact, that the boundary condition $u(0, y, z, t) = 0$ in (1) has not been realized yet. Considering the solution $u_{\alpha\beta p}(z)$ in (13), rewrite it in the form

$$\begin{aligned}
 u_{\alpha\beta p}(z) &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{1}{2p^2} \int_0^\infty \left[\frac{\alpha^2}{\Delta_1} e^{-\Delta_1|z-\xi|} - \frac{\alpha^2}{\Delta_2} e^{-\Delta_2|z-\xi|} \right] \chi_\beta(\xi) d\xi - \\
 &- \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{1}{2p^2} \int_0^\infty \frac{p^2}{\Delta_2} e^{-\Delta_2|z-\xi|} \chi_\beta(\xi) d\xi + \frac{1}{2p^2} (y_-^{11} C_1 + y_-^{12} C_2 + y_-^{13} C_3)
 \end{aligned}$$

or after substitution values for constants (15) and elements of decreasing solution (10)

$$\begin{aligned}
 u_{\alpha\beta p}(z) &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{1}{2p^2} \int_0^\infty \left[\frac{\alpha^2}{\Delta_1} e^{-\Delta_1|z-\xi|} - \frac{\alpha^2}{\Delta_2} e^{-\Delta_2|z-\xi|} \right] \chi_\beta(\xi) d\xi + \\
 &+ \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{1}{2p^2} \int_0^\infty F^1(z, \xi) \chi_\beta(\xi) d\xi + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{1}{2p^2} \frac{\alpha^2}{\Delta} \int_0^\infty F^2(z, \xi) \chi_\beta(\xi) d\xi + u_{\alpha\beta p}^0(z),
 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
 F^1(z, \xi) &= -\frac{p^2}{\Delta_2} e^{-\Delta_2|z-\xi|} - \frac{p^2}{\Delta_2} e^{-\Delta_2 z} e^{-\Delta_2 \xi} + \\
 &+ N^2 \left(\frac{1}{\Delta_1} e^{-\Delta_1 z} - \frac{1}{\Delta_2} e^{-\Delta_2 z} \right) - \Delta_2 (e^{-\Delta_1 z} - e^{-\Delta_2 z}) e^{-\Delta_2 \xi}, \\
 F^2(z, \xi) &= \frac{1}{[\Delta_1 \Delta_2 - N^2]} (p^2 [\Delta_2 e^{-\Delta_1 z} - \Delta_1 e^{-\Delta_2 z}] \cdot \\
 &\cdot [4N^2 e^{-\Delta_1 \xi} + (4p^2 + 8N^2) e^{-\Delta_2 \xi}] + \\
 &+ \Delta_2 [e^{-\Delta_1 z} - e^{-\Delta_2 z}] [(4N^2 - 4N^2 \Delta_1 \Delta_2 - p^4) e^{-\Delta_1 \xi} + 4p^2 \Delta_1 \Delta_2 e^{-\Delta_2 \xi}])
 \end{aligned}$$

After an application the inverse cosine transform Furrier with respect to the variable α to the solution $u_{\alpha\beta p}(z)$ and changing the order of integration

$$u_{\beta p}^1(x, z) \sim \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{1}{2p^2} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \chi_\beta(\xi) \int_0^\infty \left[e^{-\Delta_1|z-\xi|} \frac{\alpha^2}{\Delta_1} - e^{-\Delta_2|z-\xi|} \frac{\alpha^2}{\Delta_2} \right] \cos \alpha x d\alpha d\xi$$

consider the inner integral with respect to the variable α , which can be calculated using the table integral № 3.961(2) in [3]

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}|z-\xi|}}{\alpha^2 + \beta^2} \cos \alpha x d\alpha = K_0(|\beta| \sqrt{x^2 + (z-\xi)^2}),$$

$K_0(z)$ – Macdonald function, taking into account that $\alpha^2 \cos \alpha x = -(\cos \alpha x)''_x$ and a form of the functions Δ_1, Δ_2 , defined in (11)

$$\begin{aligned}
 u_{\beta p}^1(x, z) &\sim \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{1}{\pi p^2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \int_0^\infty \chi_\beta(\xi) [K_0(\Upsilon_1 \sqrt{x^2 + (z-\xi)^2}) - \\
 &- K_0(\Upsilon_2 \sqrt{x^2 + (z-\xi)^2})] d\xi, \\
 \Upsilon_1 &= \sqrt{\beta^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} p^2}, \quad \Upsilon_2 = \sqrt{\beta^2 + p^2}
 \end{aligned} \tag{18}$$

Direct verification can approve the correctness of the relation

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_0(\sqrt{\beta^2 + p^2} \sqrt{x^2 + (z-\xi)^2}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} K_0(\sqrt{\beta^2 + p^2} \sqrt{x^2 + (z-\xi)^2}) - \\
 - (\beta^2 + p^2) K_0(\sqrt{\beta^2 + p^2} \sqrt{x^2 + (z-\xi)^2}) = 0
 \end{aligned}$$

After an application this relation to (18), it was rewritten in a form

$$\begin{aligned}
 u_{\beta p}^1(x, z) &\sim \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{1}{\pi p^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Upsilon_1^2 \right) \int_0^\infty \chi_\beta(\xi) K_0(\Upsilon_1 \sqrt{x^2 + (z-\xi)^2}) d\xi - \\
 &- \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{1}{\pi p^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Upsilon_2^2 \right) \int_0^\infty \chi_\beta(\xi) K_0(\Upsilon_2 \sqrt{x^2 + (z-\xi)^2}) d\xi.
 \end{aligned}$$

Here the value $x = 0$ can be fixed

$$u_{\beta p}^1(0, z) \sim \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{1}{\pi p^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Upsilon_1^2 \right) \int_0^\infty \chi_\beta(\xi) K_0(\Upsilon_1|z - \xi|) d\xi -$$

$$- \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{1}{\pi p^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Upsilon_2^2 \right) \int_0^\infty \chi_\beta(\xi) K_0(\Upsilon_2|z - \xi|) d\xi.$$

So, the integral equation for the unknown function $\chi_\beta(z) = u'_{\beta p}(0, z)$ has been obtained

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Upsilon_1^2 \right) \int_0^\infty \chi_\beta(\xi) K_0(\Upsilon_1|z - \xi|) d\xi -$$

$$- \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Upsilon_2^2 \right) \int_0^\infty \chi_\beta(\xi) K_0(\Upsilon_2|z - \xi|) d\xi +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \chi_\beta(\xi) \int_0^\infty \left(-\frac{p^2}{\Delta_2} e^{-\Delta_2|z-\xi|} + \right. \tag{19}$$

$$\left. + \alpha^2 F^1(z, \xi) + \frac{\alpha^2}{\Delta} F^2(z, \xi) + \frac{1}{\Delta} F^3(z, \xi) \right) d\alpha d\xi =$$

$$= \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{2p^2 P_p}{\pi G a} \int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha}{\Delta} [(2N^2 + p^2)e^{-\Delta_1 z} - 2\Delta_1 \Delta_2 e^{-\Delta_2 z}] d\alpha$$

Here Δ is defined in (14), $\Delta_i, i = 1, 2$ – in (11), $\Upsilon_i, i = 1, 2$ – in (18),

$$[\Delta_1 \Delta_2 - N^2] F^1(z, \xi) = -\frac{p^2}{\Delta_2} e^{-\Delta_2 z} e^{-\Delta_1 \xi} + \beta^2 \left[\frac{1}{\Delta_1} e^{-\Delta_1 z} - \frac{1}{\Delta_2} e^{-\Delta_2 z} \right] e^{-\Delta_2 \xi} -$$

$$- N^2 \left[\frac{1}{\Delta_1} e^{-\Delta_1 z} - \frac{1}{\Delta_2} e^{-\Delta_2 z} \right] e^{-\Delta_1 \xi} - \Delta_2 [e^{-\Delta_1 z} - e^{-\Delta_2 z}] e^{-\Delta_2 \xi},$$

$$[\Delta_1 \Delta_2 - N^2] F^2(z, \xi) = f^1(N) e^{-\Delta_2 z} e^{-\Delta_1 \xi} + f^2(N) e^{-\Delta_2 z} e^{-\Delta_2 \xi} +$$

$$+ f^3(N) e^{-\Delta_1 z} e^{-\Delta_1 \xi} + f^4(N) e^{-\Delta_1 z} e^{-\Delta_2 \xi},$$

$$f^1(N) = 4\Delta_1 p^4 + 4N^4 p^2 \Delta_1 - \Delta_2 (4N^2 - 4N^2 \Delta_1 \Delta_2 - p^4),$$

$$f^2(N) = -p^4 \Delta_1 \Delta_2 - 4N^2 (N^2 + \frac{1}{2} p^2 - \Delta_1 \Delta_2) - 4p^2 \Delta_1 \Delta_2,$$

$$f^3(N) = -4N^4 p^2 \Delta_2 + \Delta_2 (4N^2 - 4N^2 \Delta_1 \Delta_2 - p^4),$$

$$f^4(N) = 4N^2 p^2 \Delta_1 \Delta_2 + p^4 \Delta_1 \Delta_2 + 4N^2 (N^2 + \frac{1}{2} p^2 - \Delta_1 \Delta_2) - 4p^2 \Delta_1 \Delta_2,$$

$$\Delta_2 [\Delta_1 \Delta_2 - N^2] F^3(z, \xi) = p^2 e^{-\Delta_2 z} e^{-\Delta_2 \xi} [p^4 \Delta_1 \Delta_2 - 4\beta^2 (N^2 + \frac{1}{2} p^2 - \Delta_1 \Delta_2)^2].$$

Analyzing the unknown function in the integral equation (19), it can be seen that

$$\chi_\beta(z) = u'_{\beta p}(0, z) \sim \frac{\partial}{\partial x} u(0, y, z, t) = \left(G \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \right)^{-1} \sigma_x(0, y, z)$$

So, the behavior of the function $\chi_\beta(z) = u'_{\beta p}(0, z)$ is the same as a behavior of a normal stress $\sigma_x(0, y, z)$ while $z \rightarrow 0$. Normal stress tends to infinity according to a power law with an exponent equal to $-\gamma$ ($\gamma < 1$), which depends on a Poisson ratio μ of the medium.

The unknown function is represented as series

$$\chi_\beta(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(\beta) e^{-\xi} \xi^{-\gamma} L_n^{(-\gamma)}(2\xi)$$

where $L_n^{(-\gamma)}(2\xi)$ — Laguerre polynomials, $x_n(\beta)$ unknowns. This correspondence should be substituted into the equation (19) with the following application the method of orthogonal polynomials. After that, the unknown function $\chi_\beta(z)$ should be substituted into the expression for the vertical displacement (17).

CONCLUSION

The dynamic problem for the elastic quarter space was solved by the direct application of the integral transforms to the motion equations and the boundary conditions. This operation reduces the initial problem to the one-dimensional vector boundary problem, which was solved with the help of a matrix differential calculus. In this case all needed matrices, such as decreasing solution and fundamental matrix turned to be 3×3 , so as a system of equations for finding constants in the solution, which significantly complicates calculations, if compare with application of the method of Popov G.Ya., where all needed matrices were 2×2 order. In the process an integral singular equation was derived by satisfying a remaining boundary condition. Components of displacements which include the intensity of the acting load coincide with

ones, obtained earlier by the method of Popov G. Ya. The future investigation will be deduced to the analysis of the steady-state oscillations and displacements which appear in the medium under acting distributed load.

Фесенко Г. О.

БЕЗПОСЕРЕДНЄ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРУЖНОГО ЧВЕРТЬ ПРОСТОРУ

Резюме

Побудовано поле переміщень у пружному чверть простору, коли одна границя жорстко закріплена, а на іншій діє динамічна нормальна стискальна сила, зосереджена у точці. Задачу було розв'язано із застосуванням методу інтегральних перетворень Лапласа та Фур'є безпосередньо до рівнянь руху та граничних умов. Це призводить до одновимірної векторної неоднорідної крайової задачі відносно невідомих трансформант переміщень. Цю задачу розв'язано з допомогою матричного диференціального числення. Фундаментальна матриця та спадаючий розв'язок відповідного матричного рівняння були побудовані з допомогою основної теореми про лишки. Сингулярне інтегральне рівняння отримано у процесі реалізації граничної умови. Слабко збіжна частина рівняння була підсумована із виділенням сингулярного ядра. Поведінку невідомої у інтегральному рівнянні функції було проаналізовано на основі її механічного змісту. Невідому функцію подано у вигляді ряду по поліномам Лагерра. Оригінал вертикального переміщення було отримано після застосування обернених інтегральних перетворень.

Ключові слова: пружний чверть простір, інтегральні перетворення, динамічне навантаження матричне диференціальне числення, сингулярне інтегральне рівняння.

REFERENCES

1. **Alterman, Z.S., Rotenberg, A.** (1969). Seismic waves in a quarter plane. *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 59 (1), P. 347-368. doi: <https://doi.org/10.1785/BSSA0590010347>
2. **Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V. & Babeshko, O.M.** (2021). On a Method for Solving Boundary Value Problems of the Dynamical Theory of Elasticity in a Quarter Plane. *Mech. Solids*, Vol. 56, P. 1373-1378. <https://doi.org/10.3103/S0025654421070037>
3. **Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M.** (1963). *Tables of integrals, sums, series and products*. Moscow: Fizmatgiz, 1100 p.
4. **Grinchenko, V.T., Meleshko, V.V.** (1981). *Harmonicheskie kolebaniya i volny v uprugih telah / Harmonic vibrations and waves in elastic bodies* / Kiev: Naukova Dumka, 328 p.
5. **Hanson, M. T., Keer, L. M.** (1990). A simplified analysis for an elastic quarter-space. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 43(4), P. 561-587. <https://doi.org/10.1093/qjmam/43.4.561>

6. **Popov, G.Ya.** (2002). Reduction of equations of motion of an elastic medium to one independent and two coupled equations. *Dokl. Phys.*, Vol. 47, P. 397-400
<https://doi.org/10.1134/1.1484414>
7. **Popov, G.Ya.** (2003). An exact solution to the mixed boundary problem of the elasticity theory for a quarter-space. *Izvestiya RAN. Rigid bodies mechanics*, Vol. 6, PP. 31-39.
8. **Popov, G.Ya., Abdimanapov, S.A., Efimov, V.V.** (1999). *Funkcii i matritsi Greena odnomernih kraevih zadach / Green's functions and matrices of one-dimensional boundary value problems.* / Almaty: Rauan, 113 p.
9. **Uflyand, Y.S.** (1972). Some spatial problems of the elasticity theory for the wedge. *Continuum mechanics and related problems of analysis*. Moscow: Nauka, P. 549-553.
10. **Uflyand, Y.S.** (1965). Survey of articles on the applications of integral transforms in the theory of elasticity. *North Carolina State University at Raleigh, Applied Mathematics Research Group*, P. 342-383.
11. **Vaysfeld, N.D., Popov, G.Ya.** (2009). Mixed Boundary Value Problem of Elasticity for a Quarter Space. *Mech. Solids*, Vol. 44, P. 712-728.
<https://doi.org/10.3103/S0025654409050082>
12. **Fesenko, A.A., Bondarenko, K.S.** (2020). The dynamical problem on acting concentrated load on the elastic quarter space. *Researches in Mathematics and Mechanics*, Vol. 25, №2 (36), P. 7-26. [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2020.2\(36\).233727](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2020.2(36).233727)
13. **Zhang, Z., Wang, W., Wong, P.** (2013). An explicit solution for the elastic quarter-space problem in matrix formulation. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 50, P. 976-980. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2012.12.001

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ (скорочений варіант)

Журнал «Дослідження в математиці і механіці» має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень, огляди з актуальних проблем за тематикою видання, а також повідомлення про ювілеї, знаменні дати та події.

Статті публікуються українською або англійською мовою.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Електронну версію рукопису слід надсилати на e-mail журналу

rmm-journal@onu.edu.ua

або завантажувати через сайт журналу

www.rmm-journal.onu.edu.ua

Вона повинна складатися з

- 1) вихідного TeX-файла,
- 2) PDF-файла,
- 3) всіх допоміжних файлів (графіки, рисунки, ілюстрації тощо),
- 4) документа з анкетними даними авторів (прізвище, ім'я, по батькові, місце роботи, e-mail, адреса для листування та телефон).

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи L^AT_EX відповідно до вимог та з використанням шаблону, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті. Також вимоги можна отримати в редакційній колегії журналу.

Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 25 сторінок.

Структура статті:

- УДК;
- список авторів;
- місце роботи авторів;
- назва статті;
- резюме мовою оригіналу обсягом не менше 100 слів;
- Mathematical Subject Classification (2010);

- список ключових слів мовою оригіналу;
- основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України «Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України» від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується подана стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером у квадратних дужках;
- список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформлюється відповідно до Державного стандарту України ДСТУ 7.1:2006 «Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання» та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008);
- анотація іншою мовою повинна містити назву, список авторів, резюме обсягом не менше 100 слів та список ключових слів;
- додатково, якщо стаття написана українською мовою, після анотації англійською мовою додається список літератури у транслітерації, оформлений у відповідності до міжнародного стандарту *Harvard* (зразок та правила оформлення можна знайти в шаблоні статті на сайті).

Усі надіслані статті проходять анонімне рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу «Дослідження в математиці і механіці».

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, зокрема й у співавторстві.

Редакційна колегія журналу
«Дослідження в математиці і механіці»
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2
м. Одеса, 65082

Українською та англійською мовами

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: серія КВ, № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

Затверджено до друку вченою радою
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова
Протокол № 6 від 19 грудня 2023 р.

Відповідальний за випуск *К. С. Бондаренко*
Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*
Технічний редактор *М. М. Бушин*

Тираж 100 прим. Зам. № 330(68).

Адреса редколегії:
65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855

astro_print@ukr.net

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Дослідження в математиці і механіці. — 2023. — Т. 28, вип. 1–2 (41–42). —
С. 1–219.