ISSN 2519–206X

ДОСЛІДЖЕННЯ в МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Том 26. Випуск 1(37).

Volume 26. Issue 1(37).

2021

ISSN 2519–206X

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ДОСЛІДЖЕННЯ в МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

Науковий журнал

Виходить 2 рази на рік

Журнал заснований у січні 1997 р.

Том 26. Випуск 1(37). 2021

Одеса
«Астропринт»
2021

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації серія КВ № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

Журнал внесений до переліку наукових фахових видань наказами Міністерства освіти і науки України № 527 від 24.05.2018 р. та № 775 від 16.07.2018 р.

ISSN 2519–206X

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Scientific journal

Published twice a year

Journal founded in January, 1997

Volume 26. Issue 1(37). 2021

Odesa
«Astroprint»
2021

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

The certificate of mass media state registration under the number № 21400—11200ПР issued on June 17, 2015.

The journal was included in the list of scientific specialized publications by the orders of Ministry of education and science of Ukraine №527 issued on May 24, 2018 and № 775 issued on July 16, 2018.

ЗМІСТ

МАТЕМАТИКА

ХРОНІКА

CONTENTS

MATHEMATICS

CHRONICLE

Дослідження в математиці і механіці. — 2021. — Т. 26, вип. 1(37). — С. 7–19

УДК 517.13

М. Є. Дудкін, О. Ю. Дюженкова
Національний Технічний Університет України "Київський Політехнічний Інститут імені Ігоря Сікорського"

ПРО ТОЧКОВИЙ СПЕКТР, ЩО ВИНИКАЄ ПРИ СИНГУЛЯРНО НЕСИМЕТРИЧНО СКІНЧЕНОГО РАНГУ ЗБУРЕННЯХ КЛАСУ $\mathcal{H}_{-1}$ САМОСПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА

В роботі побудований сингулярно несиметрично скінченого рангу збурений оператор класу $\mathcal{H}_{-1}$ із заданими новими точками точкового спектром і відповідними заданими власними векторами. Точки спектру можуть бути довільними і накладатися на неперервний спектр незбуреного оператора. Власні вектори вибиаються із умовою, що їх лінійна оболонка не лежить у області визначення незбуреного оператора. Запропонований метод побудови є новим і для самоспряжених достатньо повно досліджених збурень. Для побудови використане узагальнення сингулярно рангу один несиметричні збурення класу $\mathcal{H}_{-1}$ самоспряженого оператора на випадок скінченого рангу. Розглядаються лише збурення класу $\mathcal{H}_{-1}$, то ж наведені два варіанта побудови збуреного оператора, тобто у прямій формі і у формі резольвенти, яка є загальною, досконалішою і має подальші перспективи у дослідженнях. Для повноти та зручності досліджень наведені означення сингулярно несиметрично скінченого рангу збуреного оператора класу $\mathcal{H}_{-1}$ із збуренням заданим повною а не діагональною матрицею. При цьому зображення збуреного оператора у прямій формі і у формі резольвенти є також новими.
MSC: 47A10, 47A55, 47A75.
Ключові слова: сингулярне збурення, ранг збурення, клас збурення, резольвента, спектр, власні числа, власні вектори.
DOI: 10.18524/2519-206X.2021.1(37).246534.

1. Вступ

Симетричні збурення самоспряжених операторів, які ведуть до самоспряженого збуреного оператора достатньо детально описані у монографіях [1; 2].

В роботах [3; 4] вперше розглянуті сингулярні несиметричні рангу один збурення самоспряженого оператора та описані відмінності точкового спектра, який виникає при такому збуренні.

В роботі [5] вперше розглянуті сингулярні несиметричні скінченого рангу збурення самоспряженого оператора.

Надійшла 30.06.2021

В [6; 7] для довільного самоспряженого оператора будується сингулярно збурений оператор із заданими новими точками точкового спектру і заданими власними значеннями. Проте оператор будується рекурентним чином, шляхом послідовних збурень.

У цій роботі пропонуються узагальнення результатів робіт [6; 7], та [3; 4] на випадок несиметричних класу $\mathcal{H}_{-1}$ збурень скінченого рангу. І метод побудови не рекурентний, що є новим і для самоспряженого випадку.

Тобто, розглядається у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ незбурений самоспряжений оператор A і несиметрично збурений замкнений оператор $\tilde{A}$, який збігається із A на деякій щільній множині в $\mathcal{H}$ (зокрема і $\tilde{A}^*$ також збігається із A на деякій щільній множині в $\mathcal{H}$).

Тепер нехай задані числа $\lambda_i \in \mathbb{C}$ і вектори $\varphi_i \in \mathcal{H}$ та $\psi_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$ із деякими неважкими умовами. Задача роботи полягає у побудові оператора $\tilde{A}$, який не тільки збігається з A на щільній множині, але при цьому $\tilde{A}\varphi_i = \lambda_i \varphi_i$ та $\tilde{A}\psi_i = \bar{\lambda}_i \psi_i$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$.

1. Попередні відомості.

Нехай у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ і нормою $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$, задано необмежений самоспряжений оператор A із областю визначення $\mathfrak{D}(A)$. Позначимо через $\rho(A)$ множину регулярних точок оператора A.

Розглянемо ланцюг просторів, побудований за оператором A:

$$\mathcal{H}_{-2} \supset \mathcal{H}_{-1} \supset \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_{+1} \supset \mathcal{H}_{+2}, \tag{1}$$

де $\mathcal{H}_{+k} = \mathfrak{D}(|A|^{k/2})$ – позитивний простір з нормою $\|\varphi\|_{+k} = \|(|A|+I)^{k/2}\varphi\|$, $\varphi \in \mathfrak{D}(|A|^{k/2})$, $\mathcal{H}_{-k}$ – поповнення $\mathcal{H}$ за нормою $\|f\|_{-k} = \|(|A|+I)^{-k/2}f\|$, $f \in \mathcal{H}$, $k = 1, 2$, I – одиничний оператор в $\mathcal{H}$. Очевидно $\mathcal{H}_{+2} = \mathfrak{D}(A)$. Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначимо дуальний скалярний добуток між просторами $\mathcal{H}_{+1}$ і $\mathcal{H}_{-1}$.

Розширення оператора A за неперервністю на все $\mathcal{H}_{-1}$ можна вважати обмеженим оператором, що діє з $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Таке розширення, тимчасово, позначимо через $\mathbf{A}$.

У ланцюгу (1) розглянемо обмежений лінійний оператор $V = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j} \langle \cdot, \omega_i \rangle \delta_j$, $n < \infty$, $\omega_j, \delta_j \in \mathcal{H}_{-1}$ із областю визначення $\mathfrak{D}(V) \subset \mathcal{H}_{+1}$ і областю значень $\mathfrak{R}(V) \subset \mathcal{H}_{-1}$, $\aleph = \{\alpha_{i,j}\}_{i,j}^{n}$ – матриця констант зв'язку, де $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Сума $\mathbf{A} + V$ є обмеженим оператором в $\mathcal{H}_{-1}$.

Розглянемо оператор $\tilde{A}$, заданий виразом:

$$\tilde{A} = A + V = A + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j} \langle \cdot, \omega_i \rangle \delta_j, \tag{2}$$

який розуміється як оператор $\mathbf{A} + \sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j} \langle \cdot, \omega_i \rangle \delta_j$, з простору $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$, звужений на $\mathcal{H}$. Такий оператор називають (за аналогією із самоспряженими випадками) сингулярно несиметрично збуреним класу $\mathcal{H}_{-1}$ відносно оператора A.

У разі, коли хоча б один з векторів δ_j, ω_i, $i, j = 1, 2, ..., n < \infty$ не належить $\mathcal{H}_{-1}$, але належить $\mathcal{H}_{-2}$, попередні міркування (а також і подальші) не змістовні.

Далі у роботі будемо традиційно використовувати позначку A замість $\mathbf{A}$, якщо це не буде вести до суперечності.

Означення 1 ([5])**.** Нехай A — необмежений самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Для наборів лінійно незалежних векторів $\{\omega_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{H}_{-1}$ і $\{\delta_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{H}_{-1}$, $n < \infty$, таких що $\Omega \cap \mathcal{H} = \{0\}$, $\Delta \cap \mathcal{H} = \{0\}$, де $\Omega := \mathrm{span}\{\omega_i\}_{i=1}^n$, $\Delta := \mathrm{span}\{\delta_j\}_{j=1}^n$, оператор $\tilde{A}$ називається сингулярно збуреним класу $\mathcal{H}_{-1}$ відносно A, якщо при деякому фіксованому $z \in \rho(A)$ його область визначення

$$\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \left\{ \vartheta = \phi - \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(z) \langle \phi, \omega_i \rangle (A - z)^{-1} \delta_j \mid \phi \in \mathfrak{D}(A) \right\}, \tag{3}$$

де $b_{i,j}(z)$ – елементи матриці $B_1(z) = \aleph G_1(z)^{-1}$, $G_1(z) = (I + \Phi_1(z)\aleph)$, за умови $\det\, G_1(z) \neq 0$, $\aleph = \{\alpha_{i,j}\}_{i,j=1}^n$, $\Phi_1(z) = \big((\delta_i, (A - \bar{z})^{-1}\omega_j)\big)_{i,j=1}^n$, I – одиничний оператор; та

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\tilde{A}) =& \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1} \dot{+} \mathrm{span}\{(A - z)^{-1}\delta_j\}_{j=1}^n, \\ & \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1} = \left\{ \phi \in \mathfrak{D}(A) \mid ((A - z)\phi, (A - \bar{z})^{-1}\omega_j) = 0,\ j = 1, 2, ..., n \right\}, \end{aligned} \tag{4}$$

за умови $\det G_1(z) = 0$; і дія на векторах з $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ задається правилом

$$(\tilde{A} - z)\vartheta = (A - z)\phi. \tag{5}$$

Такий оператор позначається $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{-1}^n(A)$.

Насправді, означення 1 є більш загальним, а ніж в [5], оскільки в [5] використовувалася діагональна матриця.

Теорема 1. *Дія сингулярно несиметрично рангу n збуреного самоспряженого оператора вигляду (2) на векторах з області визначення $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ (3) (та зокрема (4)) задовольняє (5).*

Доведення теореми мало відрізняється від наведеного у частинному (діагональному) випадку в [5] і без особливих зусиль переноситься на не діагональний випадок.

Також в [5] наведено опис $\tilde{A} \in \mathcal{P}^n_{-1}(A)$ у формі резольвенти.

Теорема 2. [5] *Нехай A – необмежений самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і $\tilde{A} \in \mathcal{P}^n_{-1}(A)$. Тоді резольвенти $R_z = (A - z)^{-1}$ і $\tilde{R}_z = (\tilde{A} - z)^{-1}$ пов'язані формулою типу М.Крейна, для $z, \xi \in \rho(A) \cap \rho(\tilde{A})$:*

$$\tilde{R}_z = R_z + \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(z)(\cdot, n_i(\bar{z}))m_j(z) \tag{6}$$

із векторно-значними функціями

$$n_j(z) = (A-\xi)(A-z)^{-1}n_j(\xi),\ m_j(z) = (A-\xi)(A-z)^{-1}m_j(\xi),\ j = 1, 2, ..., n, \tag{7}$$

де $n_j(z), m_j(z) \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, і матрично-значною функцією $B_1(z)^{-1} = \{b_{i,j}(z)\}^n_{i,j=1}$, такою що

$$B_1(z)^{-1} - B_1(\xi)^{-1} = (z - \xi)\Gamma(n_i(\xi), m_j(\bar{z})), \tag{8}$$

де $\Gamma(\ \cdot\ \cdot\ )$ – матриця Грама векторів $n_i(z) = R_z\omega_i$, $m_j(z) = R_z\delta_j$ і коефіцієнти $0 < |\alpha_i| < \infty$, $i, j = 1, 2, ..., n$.

Для подальшого розгляду також буде використовуватися і обернена задача.

Теорема 3. [5] *Нехай в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ заданий самоспряжений оператор A, тоді операторно-значна функція*

$$\tilde{R}_z := (A - z)^{-1} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(z)(\cdot, n_i(\bar{z}))m_j(z), \quad z \in \rho(A) \tag{9}$$

є резольвентою сингулярно збуреного класу $\mathcal{H}_{-1}$ оператора, якщо для $n_i(\bar{z})$, $m_i(z)$, $j = 1, 2, ..., n$ та $B_1(z) = \{b_{i,j}(z)\}_{i,j=1}^n$ виконуються співвідношення:

$$n_j(\bar{z}) = (A-\bar{\xi})(A-\bar{z})^{-1}n_j(\bar{\xi}),\ m_j(z) = (A-\xi)(A-z)^{-1}m_j(\xi),\ j = 1, 2, ..., n, \tag{10}$$

$$B_1(z)^{-1} - B_1(\xi)^{-1} = (z-\xi)\Gamma(m_i(\xi), n_j(\bar{z})), \tag{11}$$

і $\mathrm{span}\{n_i(z)\}_{i=1}^n, \mathrm{span}\{m_i(z)\}_{i=1}^n \subset \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$.

2. Нові точки точкового спектру.

Нехай задані деякі числа $\lambda_i \in \mathbb{C}$ і вектори $\varphi_i \in \mathcal{H}$ та $\psi_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$. Побудуємо оператор $\tilde{A}$, який збігається з A на щільній множині, і для якого обрані числа $\lambda_i \in \mathbb{C}$ є власними числами, а вектори $\varphi_i \in \mathcal{H}$ та $\psi_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$ – власними векторами.

Теорема 4. *Для заданого самоспряженого оператора A в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і набору чисел $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$ та векторів $\varphi_i, \psi_i \in \mathcal{H}_{+1}$, таких що* $\mathrm{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, $\mathrm{span}\{\psi_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, *існує єдиний сингулярно несиметрично рангу n класу $\mathcal{H}_{-1}$ оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{-1}^n(A)$, такий що $\tilde{A}\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$ і $\tilde{A}\psi_i = \bar{\lambda}_i\psi_i$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$.*

При цьому оператор $\tilde{A}$ подається у вигляді:

$$\tilde{A} = A - \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\cdot, \omega_i)\delta_j, \tag{12}$$

де вектори ω_i, δ_j, $i, j = 1, 2, ..., n$ визначаються виразами

$$\omega_i = (A - \bar{\lambda}_i)\psi_i, \quad \delta_j = (A - \lambda_j)\varphi_j, \quad i, j = 1, 2, ..., n, \tag{13}$$

а матриця констант зв'язку $\aleph = \{\alpha_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ є оберненою до матриці $G = \{(A-\lambda)\varphi_i, \psi_j\}_{i,j=1}^n$, за умови $\det G \neq 0$.

Доведення. Запишемо задачу на власні значення для оператора вигляду (12):

$$\tilde{A}\varphi_k = A\varphi_k - \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\varphi_k, \omega_i)\delta_j = \lambda_k\varphi_k, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

звідки, використовуючи (13), отримуємо

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\varphi_k, \omega_i)\delta_j = \delta_k, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Оскільки вектори φ_i, $i = 1, 2, ..., n$ є лінійно незалежними, то і δ_i, $i = 1, 2, ..., n$ – також є лінійно незалежними через лінійність A. Отже з останньої рівності отримуємо

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\varphi_k, \omega_i)\delta_j = 0, \quad \text{якщо } j \neq k,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\varphi_k, \omega_i)\delta_j = \delta_k, \quad \text{якщо } j = k.$$

Якщо, тимчасово, позначимо елементи матриці $G = \{g_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$, то з останніх рівностей потрібно показати

$$\sum_{i,j=1}^{n} (g_{i,j})^{-1}(\varphi_k, \omega_i)\delta_j = 1.$$

Взагалі $G^{-1} = \{\frac{\Delta_{i,j}}{\Delta}\}_{i,j=1}^{n}$, де $\Delta_{i,j}$ – відповідні алгебраїчні доповнення при обчисленні оберненої матриці G^{-1}, і $\Delta = \det G$. Дійсно для $j = k$:

$$\frac{\Delta_{k,1}}{\Delta} g_{k,1} + \frac{\Delta_{k,2}}{\Delta} g_{k,2} + ... + \frac{\Delta_{k,n}}{\Delta} g_{k,n} = \frac{\Delta}{\Delta} = 1.$$

А для $j \neq k$:

$$\frac{\Delta_{p,1}}{\Delta} g_{k,1} + \frac{\Delta_{p,2}}{\Delta} g_{k,2} + ... + \frac{\Delta_{p,n}}{\Delta} g_{k,n} = \frac{1}{\Delta} \left(\Delta_{p,1} g_{k,1} + \Delta_{p,2} g_{k,2} + ... + \Delta_{p,n} g_{k,n} \right) = 0.$$

Останній вираз дорівнює нулю, тому що це визначник матриці у якої на на місті рядка $(g_{p,i})$ поставлений ще раз рядок $(g_{k,i})$ і розкладом за цим рядком обчислений визначник, тобто визначник матриці у якої два однакові рядки.

Аналогічним чином розв'язується і задача для спряженого оператора:

$$\tilde{A}^{*}\varphi_k = A\varphi_k - \sum_{i,j=1}^{n} \bar{\alpha}_{j,i}(\psi_k, \delta_i)\omega_j = \bar{\lambda}_k \psi_k, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Єдиність випливає із форми побудови $\tilde{A}$. За заданими набором чисел $\lambda_i \in \mathbb{C}$, та векторів $\varphi_i, \psi_i \in \mathcal{H}_{+1}$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$ однозначно будуються вектори ω_i, і δ_i, $i = 1, 2, ..., n < \infty$ та матриця $G = \{((A - \lambda_i)\varphi_i, \psi_j)\}_{i,j=1}^{n}$, яка однозначно визначає $\aleph = \{\alpha_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$. Зрозуміло, що форма доданку є єдиною із точністю до унітарної еквівалентності.

Факт належності отриманого оператора $\tilde{A}$ до класу $\mathcal{H}_{-1}$ випливає з того, що з $\mathrm{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, $\mathrm{span}\{\psi_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, слідує $\mathrm{span}\{\omega_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}$, $\mathrm{span}\{\delta_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}$. Це є наслідком основної леми сингулярно збурених операторів з використанням методу зсуву, див. [10]. Отже терема повністю доведена.

В якості наслідку до теореми 4 сформулюємо випадок самоспряженого збурення, який є на сьогодні новим і не міститься у цитованих джерелах.

Наслідок. *Для заданого самоспряженого оператора A в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і набору чисел $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$ та взаємно ортогональних векторів $\varphi_i \in \mathcal{H}_{+1}$, таких що $\mathrm{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$ існує единий сингулярно симетрично збурений рангу n, класу $\mathcal{H}_{-1}$ оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{-1}^n(A)$, такий що $\tilde{A}\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$.*

При цьому оператор $\tilde{A}$ подається у вигляді

$$\tilde{A} = A - \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\cdot, \omega_i)\omega_j,$$

де вектори ω_i, $i, j = 1, 2, ..., n$ визначаються виразом $\omega_i = (A - \lambda_j)\varphi_i$, $i = 1, 2, ..., n$, а (симетрична) матриця констант зв'язку $\aleph = \{\alpha_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ є оберненою до матриці $G = \{(A - \lambda)\varphi_i, \varphi_j\}_{i,j=1}^n$.

Зокрема, для самоспряженого випадку матриця G завжди така, що $\det G \neq 0$.

Оскільки збурений оператор можна подати і у формі резольвенти – теорема 3, то також формулюється і теорема про спектр – аналогічно до теореми 4.

Теорема 5. *Для заданого самоспряженого оператора A в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і набору чисел $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$ та векторів $\varphi_i, \psi_i \in \mathcal{H}_{+1}$, таких що $\mathrm{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, $\mathrm{span}\{\psi_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, існує единий сингулярно несиметрично рангу n класу $\mathcal{H}_{-1}$ оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{-1}^n(A)$, такий що $\tilde{A}\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$ і $\tilde{A}\psi_i = \bar{\lambda}_i\psi_i$, $i = 1, 2, ..., n < \infty$.*

При цьому оператор $\tilde{A}$ подається у вигляді:

$$\tilde{R}_z = R_z + \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(\cdot, n_i(\bar{z}))m_j(z), \tag{14}$$

де вектори $n_i(\bar{z})$, $m_j(z)$, $i,j = 1,2,...,n$ *визначаються виразами*

$$n_i(\bar{z}) = (A-\bar{\lambda}_i)(A-\bar{z})^{-1}\psi_i, \quad m_j(z) = (A-\lambda_j)(A-z)^{-1}\varphi_j, \quad i,j = 1,2,...,n, \tag{15}$$

а матриця $B(z) = \{b_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ *є оберненою до матриці* $G(z) = \{(\varphi_i, n_i(\bar{z}))\}_{i,j=1}^n$, *за умови* $\det G(z) \neq 0$.

Доведення. Запишемо задачу на власні значення для оператора вигляду (14):

$$\tilde{R}_z\varphi_k = R_z\varphi_k - \sum_{i,j=1}^n b_{i,j}(\varphi_k, n_i(\bar{z}))m_j(z) = (\lambda_k - z)^{-1}\varphi_k, \quad k = 1,2,...,n,$$

звідки, використовуючи (15), для кожного $k = 1,2,...,n$, отримуємо

$$\sum_{i,j=1}^n b_{i,j}(\varphi_k, n_i(\bar{z}))m_j(z) = (\lambda_k - z)^{-1}(A-\lambda)(A-z)^{-1}\varphi_k = (\lambda_k - z)^{-1}m_k(z).$$

Оскільки вектори φ_i, $i = 1,2,...,n$ є лінійно незалежними, то і $n_i(z)$, $i = 1,2,...,n$ – також є лінійно незалежними через лінійність A. Отже з останньої рівності отримуємо

$$\sum_{i,j=1}^n b_{i,j}(\varphi_k, n_i(\bar{z}))\delta_j = 0, \quad \text{якщо } j \neq k,$$

$$\sum_{i,j=1}^n b_{i,j}(\varphi_k, n_i(\bar{z}))\delta_j = (\lambda_k - z)^{-1}\delta_k, \quad \text{якщо } j = k.$$

Покажемо, що

$$\sum_{i,j=1}^n b_{i,j}(\varphi_k, n_i(\bar{z}))m_j(z) = 1,$$

з $\{b_{i,j}\} = G^{-1} = \{\frac{\Delta_{i,j}}{\Delta}\}_{i,j=1}^n$, де $\Delta_{i,j}$ – відповідні алгебраїчні доповнення при обчисленні оберненої матриці G^{-1}, і $\Delta = \det G$. Дійсно, для $j = k$:

$$\frac{\Delta_{k,1}}{\Delta}b_{k,1} + \frac{\Delta_{k,2}}{\Delta}b_{k,2} + ... + \frac{\Delta_{k,n}}{\Delta}b_{k,n} = \frac{\Delta}{\Delta} = 1,$$

А, для $j \neq k$:

$$\frac{\Delta_{p,1}}{\Delta}b_{k,1} + \frac{\Delta_{p,2}}{\Delta}b_{k,2} + ... + \frac{\Delta_{p,n}}{\Delta}b_{k,n} = \frac{1}{\Delta}\left(\Delta_{p,1}b_{k,1} + \Delta_{p,2}b_{k,2} + ... + \Delta_{p,n}b_{k,n}\right) = 0,$$

Останній вираз дорівнює нулю, тому що це визначник матриці у якої на місті рядка $(b_{p,i})$ поставлений ще раз рядок $(b_{k,i})$ і розкладом за цим рядком обчислений визначник, тобто визначник матриці із двома однаковими рядками.

Аналогічним чином розв'язується і задача

$$\tilde{R}_z^*\psi_k = R_z^*\psi_k - \sum_{i,j=1}^{n} \bar{b}_{j,i}(\psi_k, m_i(z))n_j(\bar{z}) = (\bar{\lambda}_k - \bar{z})^{-1}\psi_k, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Далі використовуємо теорему 3. Дійсно, векторно-значні функції (15) задовольняють (10). До (15)

$$n_i(\bar{z}) = (A - \bar{\lambda}_i)(A - \bar{z})^{-1}\psi_i, \quad m_i(z) = (A - \lambda_j)(A - z)^{-1}\varphi_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{16}$$

запишемо і

$$n_i(\xi) = (A - \bar{\lambda}_i)(A - \xi)^{-1}\psi_i, \quad m_i(\xi) = (A - \lambda_i)(A - \xi)^{-1}\varphi_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{17}$$

З перших рівностей рядків (16) і (17) маємо:

$$(A - z)(A - \bar{\lambda}_i)^{-1}n_i(z) = \psi_i = (A - \xi)(A - \bar{\lambda}_i)^{-1}n_i(\xi).$$

Отже $n_i(z) = (A - \xi)(A - z)^{-1}n_i(\xi)$, $i = 1, 2, ..., n$.

Аналогічно, з других рівностей рядків (16) і (17) маємо:

$$(A - z)(A - \lambda_i)^{-1}m_i(z) = \varphi_i = (A - \xi)(A - \lambda_i)^{-1}m_i(\xi)$$

Отже $m_i(z) = (A - \xi)(A - z)^{-1}m_i(\xi)$, $i = 1, 2, ..., n$.

Матриця $B^{-1}(z)$ задовольняє (11). Дійсно

$$B^{-1}(z) - B^{-1}(\xi) = G(z) - G(\xi) =$$

$$\{(\varphi_i, n_j(\bar{z}))\}_{i,j=1}^n - \{(\varphi_i, n_j(\bar{\xi}))\}_{i,j=1}^n = \{(\varphi_i, [n_j(\bar{z}) - n_j(\bar{\xi})])\}_{i,j=1}^n =$$

$$\{(\varphi_i, [(A - \bar{\lambda}_i)(A - \bar{z})^{-1}\psi_j - (A - \bar{\lambda}_i)(A - \bar{\xi})^{-1}\psi_j])\}_{i,j=1}^n =$$

$$\{(\varphi_i, (A - \bar{\lambda}_i)[(A - \bar{z})^{-1} - (A - \bar{\xi})^{-1}]\psi_j)\}_{i,j=1}^n =$$

$$\{(\varphi_i, (A - \bar{\lambda}_i)(\bar{z} - \bar{\xi})(A - \bar{z})^{-1}(A - \bar{\xi})^{-1}\psi_j)\}_{i,j=1}^n =$$

$$(z - \xi)\{(A - \lambda_i)(A - \xi)^{-1}\varphi_i, (A - \bar{\lambda}_i)(A - \bar{z})^{-1}\psi_i\}_{i,j=1}^n =$$

$$(z-\xi)\Gamma(m_i(\xi), n_j(\bar{z}))_{i,j=1}^n.$$

Єдиність і факт належності отриманого оператора $\tilde{A}$ до класу $\mathcal{H}_{-1}$ тепер випливають із теореми 3, зокрема з того, що з $\mathrm{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, $\mathrm{span}\{\psi_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, отримується $\mathrm{span}\{\omega_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}$, $\mathrm{span}\{\delta_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}$. Це є наслідком основної леми сингулярно збурених операторів з використанням методу зсуву, див. [10]. Отже терема повністю доведена.

2. Висновки

Таким чином в роботі побудовані сингулярно несиметрично збурені оператори скінченого рангу класу $\mathcal{H}_{-1}$ із наперед заданими власними числами і власними векторами. Задача розв'язана у двох формах – прямій і форі резольвенти – не залежно від того, скільки і які власні числа були у незбуреного самоспряженого оператора, та які з них пропали при збуренні, а які ще нові з'явилися крім заданих.

У подальшому планується перенести ці результати на випадок не симетричного збурення класу $\mathcal{H}_{-2}$. Це вимагає допрацювати означення збуреного оператора на випадок не діагональної матриці, та враховувати при цьому параметри, які об'єктивно при цьому виникають. Окремий інтерес також залишається за збуренням нескінченного рангу навіть у самоспряженому випадку із наперед заданими власними числами власними векторами, побудованими у не рекурентний спосіб а за один крок.

Список літератури

1. **Альбеверио С.** Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хёэг-Крон, Х. Хольден. – Пер. с P47 англ. – Москва: Мир, 1991. – 568 с.
2. **Albeverio S.** Singular perturbations of differential operators; solvable Schrödinger type operators / S. Albeverio, P. Kurasov. – Cambridge, Univ. Press. – 2000. – 265 p.
3. **Dudkin M.E.** Dual pair of eigenvalues in rank one singular perturbations / M. E. Dudkin, T. I. Vdovenko // Matematychni Studii. – 2017. – Vol. 48, № 2. – P. 156–164.
4. **Dudkin M.E.** On extensions of linear functionals with applications to non-symmetrically singular perturbations / M. E. Dudkin, T. I. Vdovenko // Methods Funct. Anal. Topology. – 2018. – Vol. 24, № 3. – P. 193–206.
5. **Дудкін М.Є.** Сингулярні скінченого рангу несиметричні збурення самоспряженого оператора / М. Є. Дудкін, О. Ю. Дюженкова // Нелінійні коливання. – 2021. – Т.24, № 2. – С. 1–10.

6. **Дудкін М.Є.** Про точковий спектр самоспряжених операторів, що виникає при сингулярних збуреннях скінченого рангу / М. Є. Дудкін, Кошманенко В. Д. // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 9. – P. 1269–1276.

7. **Albeverio S.** On the point spectrum of $\mathcal{H}_{-2}$-syngular perturbations / S. Albeverio, N. Dudkin, A. Konstantinov, V. Koshmanenko // Math. Nachr. – 2007. – Vol. 280, № 1-2. – P. 20-27.

8. **Albeverio S.** Schrödinger operators with nonlocal point interactions / S. Albeverio, L. Nizhnik // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – Vol. 332. – P. 884–895.

9. **Albeverio S.** Inverse spectral problems for nonlocal Sturm-Liouville operators / S. Albeverio, R. Hryniv R, L. Nizhnik // Inverse Problems. – 2007. – Vol. 23. – P. 523–535.

10. **Koshmanenko V.** The Method of Rigged Spaces in Singular Perturbation Theory of Self-Adjoint Operators. Operator Theory: Advances and Applications, 253, / V. Koshmanenko, M. Dudkin. Birkhäuser, Springer International Publishing, Switzerland. – 2016. – xii+237 p.

Дудкин Н. Е., Дюженкова О. Ю.

О точечном спектре, возникающем при сингулярно не симметрично конечного ранга возмущениях класса $\mathcal{H}_{-1}$ самосопряженного оператора

Резюме

В работе построен сингулярно несимметрично конечного ранга возмущённый оператор класса $\mathcal{H}_{-1}$ с заданными новыми точками точечного спектром и соответствующими заданными собственными векторами. Точки спектра могут быть произвольными и накладываться на непрерывный спектр невозмущенного оператора. Собственные векторы вибиаються с условием, что их линейная оболочка не лежит в области определения невозмущенного оператора. Предложенный метод построения является новым и для самоспряжених достаточно полно исследованных возмущений. Для построения использовано обобщение сингулярно ранга один несимметричные возмущения класса $\mathcal{H}_{-1}$ самоспряженого оператора на случай конечного ранга. Рассматриваются только возмущения класса $\mathcal{H}_{-1}$, а посему приведены два варианта построения возмущенного оператора, то есть в прямой форме и в форме резольвенты, которая является общей, более совершенной и имеет дальнейшие перспектривы в исследованиях. Для полноты и удобства исследований приведены определения сингулярно несимметрично конечного ранга возмущенного оператора класса $\mathcal{H}_{-1}$ с возмущением заданным полной а не диагональной матрицей. При этом представвления возмущенного оператора в прямой форме и в форме резольвенты также являются новыми.
Ключевые слова: сингулярные возмущения, ранг возмущения, класс возмущения, резольвента, спектр, собственные числа, собственные векторы.

Dudkin M. E., Dyuzhenkova O. Y.

On a point spectrum arising by singularly non-symmetrically finite rank perturbations $\mathcal{H}_{-1}$-class of a self-adjoint operator

Summary

A perturbed singularly of asymmetrically finite rank operator of class $\mathcal{H}_{-1}$ with given new points of the point spectrum and corresponding given eigenvectors is constructed. The points of the spectrum can be arbitrary and overlap with the continuous spectrum of the unperturbed operator. The eigenvectors are selected under the condition that their linear spen does not lie in the domain of the unperturbed operator. The proposed method of construction is new and for self-adjoint perturbed operator that is sufficiently fully studied. To construct, we use a generalization the singular rank one nonsymmetric perturbation of the class $\mathcal{H}_{-1}$ of a self-adjoint operator in the case of a finite rank. Only perturbations of the class $\mathcal{H}_{-1}$ are considered. For completeness and convenience of research, the definitions of a singularly asymmetrically finite rank of a perturbed operator of class $\mathcal{H}_{-1}$ with perturbation given by a complete and not a diagonal matrix are given. The representations of a perturbed operator in direct form and in the form of resolvents are also new.
Key words: singular perturbations, tank of perturbation, class of perturbation, resolvent, spectrum, eigenvalue, eigenvectors.

References

1. Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H. (2005) *Solvable models in quantum mechanics. Second edition With an appendix by Pavel Exner*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, . xiv+488 pp.

2. Albeverio S., Kurasov P. (2000) *Singular perturbations of differential operators; solvable Schrödinger type operators* Cambridge, Univ. Press, , 265p.

3. Dudkin M.E., Vdovenko T.I. (2017) *Dual pair of eigenvalues in rank one singular perturbations* Matematychni Studii. Vol. 48, № 2, P. 156–164.

4. Dudkin M.E., Vdovenko T.I. (2018) *On extensions of linear functionals with applications to non-symmetrically singular perturbations* Methods Funct. Anal. Topology. Vol. 24, № 3, P. 193–206.

5. Dudkin M.E., Dyuzhenkova O.Y. (2021) *Сингулярні скінченого рангу несиметричні збурення самоспряженого оператора [Singular finite rank nonsimmetrically perturbatins of a self-adjoint operator].Nekiniini kolyvannia*, Vol, 24, № 2., P. 1-10.

6. Dudkin M. E., Koshmanenko V. D. (2003) *On the point spectrum of self-adjoint operators that appears under singular perturbations of finite rank* Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 55, № 9., P. 1532-–1541.

7. Albeverio S., Dudkin N., Konstantinov A., Koshmanenko V. (2007) *On the point spectrum of $\mathcal{H}_{-2}$-syngular perturbations* Math. Nachr. Vol. 280, № 1-2. – P. 20–27.

8. Albeverio S., Nizhnik L. (2007) *Schrödinger operators with nonlocal point interactions* // J. Math. Anal. Appl. Vol. 332, P. 884–895.

9. Albeverio S., Hryniv R., Nizhnik L. (2007) *Inverse spectral problems for nonlocal Sturm-Liouville operators* Inverse Problems. Vol. 23, P. 523–535.

10. Koshmanenko V., Dudkin M. (2016) *The Method of Rigged Spaces in Singular Perturbation Theory of Self-Adjoint Operators. Operator Theory: Advances and Applications, 253*, Birkhäuser, Springer International Publishing, Switzerland, xii+237 p.

Дослідження в математиці і механіці. — 2021. — Т. 26, вип. 1(37). — С. 20–37

УДК 517.583+511.174

Гладун С. Е.

КУБИЧЕСКИЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЭЙЛЕРА И ТЭТА-ФУНКЦИИ РАМАНУДЖАНА

В статье рассматривается элементарный метод, базирующийся на свойствах кубических тэта-функций, в связи с получением новых формул, в которых через эйлерово произведение выражаются степенные ряды с коэффициентами, равными значениям функции суммы нечетных степеней делителей (или с коэффициентами, равными значениям теоретико-числовой тау-функции) на арифметической прогрессии разности 3. В качестве следствий получены несколько числовых равенств в стиле Рамануджана, а также асимптотическая формула поведения степенного ряда вблизи конца интервала сходимости. Приведена общая формула для так называемого кубического степенного ряда через кубические тэта-функции Рамануджана, и проведен анализ случаев, когда в эту зависимость входит рационально лишь бесконечное эйлерово произведение. Для получения этой зависимости использована знаменитая теорема Рамануджана о рядах Эйзенштейна, а также применен вариант параметрического метода, в котором одну из главных ролей играет выражение параметра через кубическую тэта-функцию.
MSC: 11A25, 30B10, 33E05.
Ключевые слова: кубические степенные ряды, произведение Эйлера, тэта-функции Рамануджана, ряды Эйзенштейна.
DOI: 10.18524/2519-206X.2021.1(37).248015.

1. Введение

Хорошо известно, что идеи, возникающие на стыке различных математических направлений, являются весьма плодотворными. Важность классической теории тэта-функций для теории чисел была доказана еще во времена Эйлера и Якоби в их работах по разбиениям и представлениям натуральных чисел в виде сумм квадратов. В данной заметке автор попытался очередной раз привлечь внимание любителей математики к наследию индийского математика Рамануджана и к работам его последователей, и показал, что даже с помощью элементарных рассуждений можно развить их результаты, а также получить любопытные следствия из них. Основы теории эллиптических функций альтернативных базисов были заложены в работах Рамануджана [1, с. 89], многие важные теоремы которых, не опуб-

Получена 22.09.2021

ликованные ранее, были систематизированы и изданы исследователями и последователями его творчества в так называемых "Lost Notebooks" всего несколько лет назад, см., например, [2] . Особое внимание Рамануджан уделял связанным с тождествами для тэта-функций модулярным уравнениям, в которых он был и остается непревзойденным мастером. Его работы настолько глубоки и уникальны, что вызывают особый интерес и объединяют математиков всего мира. Гений Рамануджана заключался еще и в том, что он указал ту область математики, в которой сокрыты неисчерпаемые богатства теорем, и следование по этому пути неизбежно приводит нас к истине.

На данную работу автора вдохновила удивительная формула Рамануджана для функции числа разбиений на арифметической прогрессии с разностью 5. Формула упоминалась в [3, стр. 130, (6.7.1)]. Полное доказательство этой формулы Рамануджан опубликовать не успел из-за своей преждевременной смерти. Короткая схема приведена в [4, стр. 212-213].

Времена формул еще не прошли, хотя идет эра вычислительной техники. По мнению автора, формулы индийского трагичного математического гения никогда не утратят своей актуальности. Именно в эпоху суперкомпьютеров они демонстрируют, что математика все больше роднится с искусством. В формулах Рамануджана присутствуют глубина, внутренняя красота и неповторимость, являющиеся характеристиками каждого настоящего искусства такого, как живопись, скульптура, архитектура, музыка, поэзия или искусство программирования. Особенно поражает воображение то, что во времена таких математиков, как Эйлер, Гаусс или Рамануджан компьютеры вообще были не нужны, так как эти ученые просто могли заменить компьютер.

Методика получения новых формул, предлагаемых в данной статье, частично базируется на результатах монографий [1] и [2], а также дополняет идею работы [5]. Таким образом, автором предложен тэта-биномиальный метод, который может служить для получения широкого класса формул, содержащих кубические тэта-функции Рамануджана и функцию суммы нечетных степеней делителей на арифметической прогрессии с разностью 3. Кроме этого, в статье показано, как метод применяется для исследования свойств теоретико-числовой функции Рамануджана $\tau(n)$. Для вывода общих закономерностей применен вариант параметрического метода, свойственный теории тэта-функций.

Формулы для числа представлений натуральных чисел суммами бинарных квадратичных форм вида m^2+mn+n^2 получены в источниках [6], [7] и [8]. Множество интересных тождеств для обобщенной функции суммы делителей и рядов типа Ламберта, а также их приложений представлено в работе [9]. На сегодняшний день тэта-функции Рамануджана являются очень популярным объектом для изучения учеными разных стран. Наверное, это связано с таинственной судьбой самого Рамануджана, жизни и творчеству которого посвящено огромное число книг и статей, см., например, работы [10-13]. В данной работе освещается только теоретико-числовая сторона вопроса.

Основные результаты

Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$, $\sigma(n) := \sum_{d|n} d$ и $\sigma_k(n) := \sum_{d|n} d^k$- функции суммы делителей и суммы k-х степеней делителей натурального числа n. Тройка кубических тэта-функций представляется рядами [1, с. 93]:

$$a(q) := \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{m^2+mn+n^2}, \quad b(q) := \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \omega^{m-n} q^{m^2+mn+n^2},$$

$$c(q) := \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{(m+1/3)^2+(m+1/3)(n+1/3)+(n+1/3)^2},$$

где $\omega = e^{2\pi i/3}$. Всюду мы полагаем $q = e^{\pi i \tau}$, где $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ и $q^{\lambda} = e^{\lambda \pi i \tau}$.

Для дальнейшего нам понадобятся также ряды Эйзенштейна [1, с. 105]:

$$L(q) := 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^n},$$

$$M(q) := 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^n}{1-q^n},$$

$$N(q) := 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 q^n}{1-q^n}.$$

Перейдем к рассмотрению основных результатов работы. Итак, в круге $|q| < 1$ справедлива теоретико-числовая формула:

$$\frac{\sigma_3(2) + \sigma_3(5)q + \sigma_3(8)q^2 + \sigma_3(11)q^3 + \cdots}{\sigma(2) + \sigma(5)q + \sigma(8)q^2 + \sigma(11)q^3 + \cdots} = 3a^2(q). \tag{1}$$

Используя результат работы [5], формулу (1) можно переписать в виде:

$$\sigma_3(2)+\sigma_3(5)q+\sigma_3(8)q^2+\sigma_3(11)q^3+\cdots$$
$$=9a^2(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^6}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^2}. \quad (2)$$

Для доказательства нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Для кубической тэта-функции $a(q)$ справедливо тождество:*

$$a(q)+\omega a(\omega q)+\omega^2 a(\omega^2 q)=0.$$

Доказательство. Воспользовавшись определением тэта-функции $a(q)$, получим следующую цепочку равенств:

$$a(q)+\omega a(\omega q)+\omega^2 a(\omega^2 q)=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{m^2+mn+n^2}$$
$$+\omega\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\omega^{m^2+mn+n^2}q^{m^2+mn+n^2}+\omega^2\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\omega^{2(m^2+mn+n^2)}q^{m^2+mn+n^2}$$
$$=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{m^2+mn+n^2}\left\{1+\omega^{m^2+mn+n^2+1}+\omega^{2(m^2+mn+n^2+1)}\right\}.$$

Так как $m^2+mn+n^2+1\not\equiv 0 \pmod 3$, то теперь утверждение леммы очевидно. □

Теорема 1. *Справедлива формула* (1).

Доказательство. Согласно [1, с. 94, (2.9)] запишем

$$c(q^3)=\frac{a(q)-a(q^3)}{2}. \quad (3)$$

Доказательство этой важной формулы, лежащей в основе всего метода, можно найти в работе братьев Борвейнов [13]. Возведя левую и правую части равенства (3) в четвертую степень по формуле бинома Ньютона, получим:

$$c^4(q^3)=\frac{a^4(q)-4a^3(q)a(q^3)+6a^2(q)a^2(q^3)-4a(q)a^3(q^3)+a^4(q^3)}{16}. \quad (4)$$

Подставим в формулу (4) вместо q значения ωq и $\omega^2 q$:

$$\omega c^4(q^3) = \frac{a^4(\omega q) - 4a^3(\omega q)a(q^3) + 6a^2(\omega q)a^2(q^3) - 4a(\omega q)a^3(q^3) + a^4(q^3)}{16}, \tag{5}$$

$$\omega^2 c^4(q^3) = \frac{a^4(\omega^2 q) - 4a^3(\omega^2 q)a(q^3) + 6a^2(\omega^2 q)a^2(q^3) - 4a(\omega^2 q)a^3(q^3) + a^4(q^3)}{16}. \tag{6}$$

Умножив равенство (5) на ω, а равенство (6) - на ω^2, и, сложив полученные выражения с (4), получим:

$$\begin{gathered}\left\{a^4(q) + \omega a^4(\omega q) + \omega^2 a^4(\omega^2 q)\right\} - 4a(q^3)\left\{a^3(q) + \omega a^3(\omega q) + \omega^2 a^3(\omega^2 q)\right\} \\ +6a^2(q^3)\left\{a^2(q) + \omega a^2(\omega q) + \omega^2 a^2(\omega^2 q)\right\} = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Далее, согласно [2, с. 403], запишем:

$$a^4(q) = 1 + 24\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^n}{1 - q^n} + 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^3 q^{3n}}{1 - q^{3n}}. \tag{8}$$

Доказательство формулы (8), использующее модулярные уравнения третьей степени, можно найти в монографии [14, с. 460-462, Запись 3(i)]. Запишем еще два равенства, следующие из этой формулы:

$$\omega a^4(\omega q) = \omega + 24\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \omega^{n+1} q^n}{1 - \omega^n q^n} + 8\omega\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^3 q^{3n}}{1 - q^{3n}}, \tag{9}$$

$$\omega^2 a^4(\omega^2 q) = \omega^2 + 24\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \omega^{2n+2} q^n}{1 - \omega^{2n} q^n} + 8\omega^2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^3 q^{3n}}{1 - q^{3n}}. \tag{10}$$

Сложив равенства (8), (9) и (10), получим

$$a^4(q) + \omega a^4(\omega q) + \omega^2 a^4(\omega^2 q) = 3 \cdot 24 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(3n-2)^3 q^{6n-4}}{1 - q^{9n-6}}. \tag{11}$$

Возведя обе части равенства (3) в куб, будем иметь следующее:

$$c^3(q^3) = \frac{a^3(q) - 3a^2(q)a(q^3) + 3a(q)a^2(q^3) - a^3(q^3)}{8}. \tag{12}$$

Проведя для формулы (12) рассуждения, аналогичные тем, что были ранее, получим:

$$a^3(q) + \omega a^3(\omega q) + \omega^2 a^3(\omega^2 q) - 3a(q^3)\left\{a^2(q) + \omega a^2(\omega q) + \omega^2 a^2(\omega^2 q)\right\} = 0.$$

Поскольку, согласно [5, с. 567, (16)]

$$a^2(q) + \omega a^2(\omega q) + \omega^2 a^2(\omega^2 q) = 12c^2(q^3),$$

то можно записать

$$a^3(q) + \omega a^3(\omega q) + \omega^2 a^3(\omega^2 q) = 36a(q^3)c^2(q^3). \tag{13}$$

Для функции суммы кубов делителей запишем ряд Ламберта:

$$\sigma_3(1)q+\sigma_3(2)q^2+\sigma_3(3)q^3+\sigma_3(4)q^4+\cdots = \frac{1^3q}{1-q}+\frac{2^3q^2}{1-q^2}+\frac{3^3q^3}{1-q^3}+\frac{4^3q^4}{1-q^4}+\cdots \tag{14}$$

Равенство (14) влечет за собой (см. [5, с. 566]):

$$\sigma_3(2) + \sigma_3(5)q^3 + \sigma_3(8)q^6 + \sigma_3(11)q^9 + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(3n-2)^3 q^{6n-6}}{1-q^{9n-6}}. \tag{15}$$

Из формул (11) и (15) выводим

$$a^4(q) + \omega a^4(\omega q) + \omega^2 a^4(\omega^2 q) = 3\cdot 24\left\{\sigma_3(2) + \sigma_3(5)q^3 + \sigma_3(8)q^6 + \cdots\right\}q^2. \tag{16}$$

Используя равенства (13) и (16), формулу (7) можно переписать в виде:

$$3\cdot 24\left\{\sigma_3(2) + \sigma_3(5)q^3 + \sigma_3(8)q^6 + \cdots\right\}q^2 \\ - 4a(q^3)\cdot 36a(q^3)c^2(q^3) + 6a^2(q^3)\cdot 12c^2(q^3) = 0.$$

Используя [5, с. 568, (22)], получим

$$\sigma_3(2) + \sigma_3(5)q^3 + \sigma_3(8)q^6 + \cdots = 3a^2(q^3)\left\{\sigma(2) + \sigma(5)q^3 + \sigma(8)q^6 + \cdots\right\},$$

что эквивалентно (1), если заменить q^3 на q. Доказательство завершено.

□

Следствие 1. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ положим*

$$\sigma\left(\frac{3m-2}{3}\right) = 0, \quad \sigma\left(\frac{3m-1}{3}\right) = 0.$$

Кроме этого пусть

$$\sigma(0) = -\frac{1}{24}.$$

Тогда для неотрицательных целых n справедлива формула:

$$\sigma_3(3n+2) = 36\cdot\sum_{k=0}^{n}\left\{\sigma(k) - 3\sigma\left(\frac{k}{3}\right)\right\}\sigma(3n-3k+2). \tag{17}$$

Доказательство. Формула (17) следует из равенства (1) и [1, с. 100, (2.37)]. $\square$

Следствие 2. *Справедливы числовые равенства:*

$$\sigma_3(2)+\sigma_3(5)e^{-\pi}+\sigma_3(8)e^{-2\pi}+\cdots$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{48}\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)\left(1+\sqrt{2}\sqrt[4]{3}\right)^2\left(1-\sqrt{2}\sqrt[4]{3}+\sqrt{3}\right)\frac{\pi^2e^{2\pi/3}}{\Gamma^8(3/4)},$$

$$\sigma_3(2)-\sigma_3(5)e^{-\pi}+\sigma_3(8)e^{-2\pi}-\sigma_3(11)e^{-3\pi}+\cdots=\frac{\sqrt{3}}{6}\frac{\pi^2e^{2\pi/3}}{\Gamma^8(3/4)},$$

$$\sigma_3(2)+\sigma_3(5)e^{-2\pi}+\sigma_3(8)e^{-4\pi}+\sigma_3(11)e^{-6\pi}+\cdots=\frac{\sqrt{3}}{24}\frac{\pi^2e^{4\pi/3}}{\Gamma^8(3/4)}.$$

Доказательство. Для проверки первого соотношения полагаем в формуле (1) $q=e^{-\pi}$. Далее применяем первое равенство следствия 1 [5, с. 568], а также формулу

$$a\left(e^{-\pi}\right)=\varphi\left(e^{-\pi}\right)\varphi\left(e^{-3\pi}\right)+\varphi\left(-e^{-\pi}\right)\varphi\left(-e^{-3\pi}\right)-a\left(-e^{-\pi}\right),$$

которая получается из [1, с. 93, (2.7)]. Здесь, как всегда, тэта-функция Рамануджана $\varphi(q)$ определяется равенством:

$$\varphi(q):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}.$$

Для проверки второго числового равенства полагаем в формуле (1) $q=-e^{-\pi}$ и вычисляем значение $a^2\left(-e^{-\pi}\right)$, пользуясь леммой 5.4 [1, с. 110] и записью 4 [1, с. 327]:

$$a^2\left(-e^{-\pi}\right)=\frac{(\sqrt{3}-1)\pi}{2^{1/2}3^{1/4}\Gamma^4(3/4)}.$$

Далее применяем вторую формулу следствия 1 [5, с. 568].

Чтобы доказать третье числовое равенство, полагаем в формуле (1) $q=e^{-2\pi}$, а значение $a\left(e^{-2\pi}\right)$ получено в монографии [1, с. 332]. $\square$

Следствие 3. *При $q\to 1-$ верна следующая асимптотическая формула:*

$$\sigma_3(2)+\sigma_3(5)q+\sigma_3(8)q^2+\sigma_3(11)q^3+\cdots\sim\frac{4}{3}\pi^2\frac{a^2(q)}{(1-q)^2}\sim\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{1}{1-q}\right)^4.$$

Доказательство. Указанная асимптотика следует из формулы (1) и следствия 2 ([5, с. 568]), а также из того, что

$$a(q) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{1}{1-q} + O\left(\frac{e^{-2\pi/(1-q)}}{1-q}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{1}{1-q} + o(1) \qquad \text{при } \ q \to 1-.$$

Последняя асимптотическая формула следует из функционального уравнения для кубической тэта-функции (аналога формулы Пуассона для одномерной тэта-функции):

$$a(e^{-2\pi x}) = \frac{1}{\sqrt{3}x}a(e^{-2\pi/(3x)}), \qquad x > 0. \quad \square$$

Следствия 1, 2 и 3 теоремы демонстрируют значение формулы (1).

Перейдем к обобщению полученных результатов и рассмотрим сумму следующего вида:

$$\Delta_{2k-1}(q) := \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(3n-1)q^{n-1}.$$

Возникает вопрос: как выразить $\Delta_{2k-1}(q)$ через кубические тэта-функции Рамануджана? Предложенный элементарный метод, которым были получены базовая формула работы [5] для $\Delta_1(q)$ и формула (2) для $\Delta_3(q)$, позволяет найти столь простые закономерности не только в этих двух случаях. Далее будут выведены явные выражения для $\Delta_5(q)$, $\Delta_7(q)$, $\Delta_9(q)$, $\Delta_{11}(q)$ и $\Delta_{13}(q)$, но для этого понадобится привлечение фундаментальных теорем теории эллиптических функций альтернативных базисов, а также общей теоремы Рамануджана, касающейся рядов Эйзенштейна. Модулярные уравнения третьей степени лежат в основе формул для $\Delta_1(q)$ и $\Delta_3(q)$. Тэта-биномиальный метод вывода формул для $\Delta_{2k-1}(q)$ в целом несколько громоздкий, но простой по сути, так как основывается на классической формуле бинома Ньютона. В работе метода принимают участие фундаментальные результаты Рамануджана и его последователей. Запишем формулы для $\Delta_5(q)$, $\Delta_7(q)$, $\Delta_9(q)$, $\Delta_{11}(q)$ и $\Delta_{13}(q)$:

$$\sigma_5(2) + \sigma_5(5)q + \sigma_5(8)q^2 + \cdots$$
$$= 33a^4(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^6}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^2}$$

$$+ 2268qa(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{15}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^5}, \quad (18)$$

$$\sigma_7(2)+\sigma_7(5)q+\sigma_7(8)q^2+\cdots = 129a^6(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{6}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^2}$$
$$+73224qa^3(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{15}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^5}$$
$$+349920q^2\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{24}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^8}. \quad (19)$$

Используя [1, с. 93, (2.5)] и [1, с. 109, (5.4) и (5.5)], равенство (19) можно переписать следующим образом:

$$\sigma_7(2)+\sigma_7(5)q+\sigma_7(8)q^2+\sigma_7(11)q^3+\cdots = 129\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{16}$$
$$+80190q\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{4}\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{12}$$
$$+2421009q^2\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{24}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^8}. \quad (20)$$

$$\sigma_9(2)+\sigma_9(5)q+\sigma_9(8)q^2+\cdots = 513a^8(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{6}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^2}$$
$$+1927476qa^5(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{15}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^5}$$
$$+66449808q^2a^2(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{24}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^8}, \quad (21)$$

$$\sigma_{11}(2)+\sigma_{11}(5)q+\sigma_{11}(8)q^2+\cdots = 2049a^{10}(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{6}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^2}$$
$$+48701088qa^7(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{15}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^5}$$
$$+6301604304q^2a^4(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{24}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^8}$$
$$+35580565440q^3a(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{33}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{11}}, \quad (22)$$

$$\sigma_{13}(2)+\sigma_{13}(5)q+\sigma_{13}(8)q^2+\cdots = 8193\frac{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{34}}{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{6}}$$
$$+1220981688q\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{6}\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{22}$$
$$+576680210370q^2\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{18}\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{10}$$
$$+40034368860048q^3\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{30}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{2}}$$
$$+694882425536757q^4\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{42}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{14}}. \tag{23}$$

Заметим, что правые части формул для $\Delta_1(q)$, $\Delta_7(q)$ и $\Delta_{13}(q)$ записаны в терминах лишь эйлерова произведения. Очевидно, что подобная ситуация возникает при записи формул для $\Delta_{6n+1}(q)$.

Лемма 2. *Введем оператор $\mathfrak{R}$, действующий на функцию $g(q)$ следующим образом:*

$$\mathfrak{R}[g(q)] = g(q)+\omega g(\omega q)+\omega^2 g(\omega^2 q).$$

Тогда для кубической тэта-функции $a(q)$ справедливы тождества:

$$\mathfrak{R}[a^4(q)] = 3\cdot 24a^2(q^3)c^2(q^3),$$

$$\mathfrak{R}[a^5(q)] = 120a^3(q^3)c^2(q^3)+96c^5(q^3),$$

$$\mathfrak{R}[a^6(q)] = 180a^4(q^3)c^2(q^3)+576a(q^3)c^5(q^3),$$

$$\mathfrak{R}[a^7(q)] = 252a^5(q^3)c^2(q^3)+2016a^2(q^3)c^5(q^3),$$

$$\mathfrak{R}[a^8(q)] = 336a^6(q^3)c^2(q^3)+5376a^3(q^3)c^5(q^3)+768c^8(q^3),$$

$$\mathfrak{R}[a^9(q)] = 432a^7(q^3)c^2(q^3)+12096a^4(q^3)c^5(q^3)+6912a(q^3)c^8(q^3),$$

$$\mathfrak{R}[a^{10}(q)] = 540a^8(q^3)c^2(q^3)+24192a^5(q^3)c^5(q^3)+34560a^2(q^3)c^8(q^3),$$

$$\mathfrak{R}[a^{11}(q)] = 660a^9(q^3)c^2(q^3)+44352a^6(q^3)c^5(q^3)+126720a^3(q^3)c^8(q^3)+6144c^{11}(q^3),$$

$$\mathfrak{R}[a^{12}(q)] = 792a^{10}(q^3)c^2(q^3)+76032a^7(q^3)c^5(q^3)+380160a^4(q^3)c^8(q^3)+73728a(q^3)c^{11}(q^3).$$

Пусть теперь $n\in\mathbb{N}$. Тогда для кубической тэта-функции $a(q)$ справедлива общая формула:

$$\mathfrak{R}[a^n(q)] = 3\sum_{l=1}^{[\frac{n+1}{3}]}\binom{n}{3l-1}2^{3l-1}a^{n-3l+1}(q^3)c^{3l-1}(q^3).$$

Доказательство. Сначала покажем, как работает биномиальный тэта-рекур-сивный метод. Первое соотношение леммы вытекает из формул (7) и (13). Остальные получаются рекурсивно. Обе части равенства (3) возводятся в соответствующую степень, причем правая - по формуле бинома Ньютона. На полученное равенство действуют оператором $\mathfrak{R}$. При этом $\mathfrak{R}[a^n(q)]$ можно выразить через вычисленные последовательно $\mathfrak{R}[a(q)]$, $\mathfrak{R}[a^2(q)]$,..., $\mathfrak{R}[a^{n-2}(q)]$, $\mathfrak{R}[a^{n-1}(q)]$, используя линейность оператора. Рассуждая по индукции, мы можем доказать формулу для $\mathfrak{R}[a^n(q)]$. Имеем $\mathfrak{R}[a(q)] = 0$, $\mathfrak{R}[a^2(q)] = 12c^2(q^3)$, $\mathfrak{R}[a^3(q)] = 36a(q^3)c^2(q^3)$, $\mathfrak{R}[a^4(q)] = 72a^2(q^3)c^2(q^3)$, $\ldots$ &C.

При дальнейших вычислениях мы будем рассматривать q как альтернативную базу тэта-функции:

$$q = \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; 1; 1-x\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; 1; x\right)}\right),$$

где $0 < x < 1$.

Рассмотрим действие параметрического метода, позволяющего наиболее просто вывести общий результат. Введем параметр $k_1 := k_1(q) = c(q^3)/a(q^3)$, а также функцию $\lambda(q) := a(q)/a(\omega q)$. Справедливы следующие равенства

$$a^2(q) + \omega a^2(\omega q) + \omega^2 a^2(\omega^2 q) = 12c^2(q^3)$$

и

$$a^2(q) + \omega^2 a^2(\omega q) + \omega a^2(\omega^2 q) = 12a(q^3)c(q^3),$$

где второе получается из того, что $\left\{a(q) + \omega a(\omega q) + \omega^2 a(\omega^2 q)\right\}^4 = 0$. Поэтому будем иметь следующую систему нелинейных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda(q) + \omega + \dfrac{\omega^2}{\lambda(\omega q)} & = & 0 \\ \dfrac{\lambda^2(q) + \omega + \dfrac{\omega^2}{\lambda^2(\omega q)}}{\lambda^2(q) + \omega^2 + \dfrac{\omega}{\lambda^2(\omega q)}} & = & k_1. \end{array}\right.$$

Решая эту систему, получим параметрическое представление:

$$\lambda(q) = \frac{2k_1 + 1}{2k_1\omega + 1}.$$

Поэтому мы можем записать

$$a(\omega q)=\frac{2\omega k_1+1}{2k_1+1}a(q),$$

$$a(\omega^2 q)=\frac{2\omega^2 k_1+1}{2k_1+1}a(q).$$

Учитывая, что $a(q)/a(q^3)=2k_1+1$, и, используя формулу бинома Ньютона, получаем общее выражение для оператора $\Re[a^n(q)]$. Заметим, что искомый результат выведен фактически лишь средствами элементарной алгебры. □

В источниках [15, стр. 124-175] и [16, стр. 326, Запись 12] приведен аналитический метод модулярных форм, который может применяться для доказательства знаменитых теорем Рамануджана, касающихся рядов Эйзенштейна, хотя сам Рамануджан использовал элементарные методы.

Формулы (18)-(23) для $\sigma_5(3n-1)$, $\sigma_7(3n-1)$, $\sigma_9(3n-1)$, $\sigma_{11}(3n-1)$ и $\sigma_{13}(3n-1)$, полученные автором, по своему внешнему виду напоминают тождество Рамануджана для функции числа разбиений на арифметической прогрессии с разностью 7 [3, с. 130, (6.7.2)], хотя при их доказательстве используется совсем иной подход.

Теперь мы в состоянии доказать следующее утверждение, представляющее основной результат данной статьи.

Теорема 2. *Справедлива общая формула для $\Delta_{2k-1}(q^3)$:*

$$\begin{aligned}\Delta_{2k-1}(q^3)=\frac{1}{q^2}\sum_{3n+2m=k}\kappa_{m,n}\sum_{\alpha=0}^{m}\sum_{n_3=0}^{n}\sum_{n_2=0}^{n-n_3}\frac{(-1)^{n_2+n_3}\binom{m}{\alpha}n!}{(n-n_2-n_3)!n_2!n_3!}20^{n_2}\frac{9^{\alpha+n_2+2n_3}}{8^{n_2+n_3}}\times\\ \times\sum_{t=0}^{\alpha+n_2+2n_3}\sum_{s=0}^{\alpha+n_2+2n_3}(-1)^t\binom{\alpha+n_2+2n_3}{t}\binom{\alpha+n_2+2n_3}{s}3^s\times\\ \times\sum_{l=1}^{\left[\frac{2k-t-2s+1}{3}\right]}\binom{2k-t-2s}{3l-1}2^{3l-1}a^{2k-3l+1}(q^3)c^{3l-1}(q^3).\end{aligned}\tag{24}$$

Здесь $\kappa_{m,n}$ - числовые коэффициенты из теоремы Рамануджана о следующем представлении рядами Эйзенштейна:

$$\frac{1}{2}\zeta(-s)+\Phi_{0,s}(q)=\sum\kappa_{m,n}M^m(q)N^n(q),$$

где

$$\Phi_{0,s}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_s(n) q^n,$$

ζ *- дзета-функция Римана, а* m *и* n *пробегают целые неотрицательные числа так, что* $6n + 4m = s + 1$.

Доказательство. Из общей формулы Рамануджана [4, с. 141, равенство (26)], теорем 4.2 и 4.3 [1, с. 106], элегантных формул братьев Борвейнов (2.5) и (2.8) [1, с. 93] и рассуждений, используемых при доказательстве леммы 2, следует, что $\Delta_{2k-1}(q)$ выражается через кубические тэта-функции $a(q)$ и $c(q)$. Отсюда также следует алгоритм построения формул для $\Delta_{2k-1}(q)$ при любом натуральном k. Действие оператора $\mathfrak{R}$ можно распространять лишь на формулу из общей теоремы Рамануджана, предварительно выразив ряды Эйзенштейна $M(q)$ и $N(q)$ через $a(q)$ и $a(q^3)$, следуя альтернативной теории. Такова схема доказательства, теперь перейдем к конкретике.

Пусть $x = c^3(q)/a^3(q)$. Поэтому

$$x = \frac{9}{8} \frac{(a(q) - a(q^3))(a^2(q) + 3a^2(q^3))}{a^3(q)}$$

и

$$x^p = \frac{9^p}{8^p} \frac{(a(q) - a(q^3))^p (a^2(q) + 3a^2(q^3))^p}{a^{3p}(q)}.$$

Далее будем иметь

$$\mathfrak{R}\left[a^{2k}(q)x^p\right] = \frac{9^p}{8^p} \sum_{t=0}^{p} \sum_{s=0}^{p} (-1)^t \binom{p}{t} \binom{p}{s} 3^s a^{t+2s}(q^3) \mathfrak{R}\left[a^{2k-t-2s}(q)\right].$$

Поскольку

$$\Delta_{2k-1}(q^3) = \frac{1}{3q^2} \sum_{3n+2m=k} \kappa_{m,n} \mathfrak{R}\left[a^{2k}(q)(1+8x)^m (1-20x-8x^2)^n\right]$$

то, раскрыв скобки, используя формулу бинома Ньютона и факториально-муль-тиномиальную теорему, мы приходим к искомому результату (24). $\square$

Следствие. *Справедлива следующая формула:*

$$\frac{\sigma_9(2)+\sigma_9(5)q+\sigma_9(8)q^2+\sigma_9(11)q^3+\cdots}{\sigma_3(2)+\sigma_3(5)q+\sigma_3(8)q^2+\sigma_3(11)q^3+\cdots} = 57\frac{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{18}}{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^6}$$
$$+217242q\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^6\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^6$$
$$+13207293q^2\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{18}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^6}. \tag{25}$$

Доказательство. Утверждение (25) следует из равенств (2) и (21). □

Теперь покажем, как тэта-биномиальный метод может применяться для изучения свойств τ-функции Рамануджана. Теоретико-числовая функция $\tau(n)$ определяется следующим образом [3, с. 228]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n = q\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{24}.$$

Теорема 3. *Справедлива следующая формула:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(3n-1)q^{n-1} = \frac{2}{3}a(q)\frac{c^2(q)}{q^{2/3}}b^3(q)\{27a^3(q)c^3(q)-4b^6(q)\}. \tag{26}$$

Доказательство. Теорема 3.3 [1, с. 103] утверждает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n = \frac{1}{27}b^9(q)c^3(q). \tag{27}$$

С помощью формул (2.5) и (2.8) [1, с. 93] правая часть равенства (27) выразится через $a(q)$ и $a(q^3)$. На полученную громоздкую формулу действуем оператором $\mathfrak{R}$. Используя лемму 2, после упрощений, мы приходим к следующему тождеству:

$$\begin{aligned}3\sum_{n=1}^{\infty}\tau(3n-1)q^{3n-1} = {} & -8a^{10}(q^3)c^2(q^3)+78a^7(q^3)c^5(q^3)\\ & -78a^4(q^3)c^8(q^3)+8a(q^3)c^{11}(q^3).\end{aligned} \tag{28}$$

Путем несложных алгебраических преобразований и замены q^3 на q, равенство (28) переходит в требуемое утверждение (26). Теорема доказана. □

Следствие. *Для любого натурального n справедливо следующее сравнение:*

$$\tau(3n-1) \equiv 0 \pmod 6.$$

Доказательство. Утверждение следствия вытекает из формулы (26) и формулы (5.5) [1, с. 109]. □

Автор надеется, что в данной небольшой заметке удалось продемонстрировать красоту теории эллиптических функций альтернативных базисов, открытую Рамануджаном, а также обосновать роль этой теории для дальнейших исследований. Предложенный тэта-биномиальный метод, а также уточненный вариант параметрического метода являются элементарным дополнением к ней.

Формулы, подобные (20) и (23), возникают при изучении бесконечномерных алгебр Ли [17]. Это граничное направление в математике берет начало с работы И. Г. Макдональда [18], а теория q-рядов начинается с пентагональной теоремы Эйлера. Интересно, что даже Леонард Эйлер сумел доказать свою пентагональную теорему не сразу, а через достаточно большой промежуток времени после того, как угадал общую закономерность. Историческая связь теории от Эйлера до Макдональда приведена в [19].

Свойства цепной дроби Роджерса-Рамануджана и кубической цепной дроби представлены в [2]. Тематика обобщенной функции суммы делителей, связанная с непрерывными дробями, рассматривалась в работе [20].

Своеобразный и удивительный мир формул, который Рамануджан успел построить за свою короткую жизнь, фактически не имея достаточного количества литературы, образования и общения, не угасает вот уже на протяжении 100 лет и имеет большое значение для всей математики.

Список литературы

1. B. C. Berndt, *Ramanujan Notebooks, Part V*, Springer-Verlag, New York, 1998.
2. G. E. Andrews, B. C. Berndt, *Ramanujan's Lost Notebook, Part I*, Springer-Verlag, New York, 2005.
3. Г. Харди, *Двенадцать лекций о Рамануджане*, Институт компьютерных исследований, М., 2002.

4. G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar, B. M. Wilson, *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, Cambridge, 1927.
5. S. E. Gladun, *A Generating Function for* $\sigma(3n-1)$, *Mathematical Notes, Vol. 95, No. 4 (2014), 565-569.*
6. G. A. Lomadze, *Representation of numbers by sums of the quadratic forms* $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ *(Russian), Acta Arith. 54 (1989), 9-36.*
7. A. S. Merzlyakov, *The problem of G. A. Lomadze on the representation of numbers by the sum of binary quadratic forms of the kind* x^2+xy+y^2. *(Russian) Deposited in VINITI (Vsesoyuzn. Inst. Nauch. Tekh. Inform. Acad. Nauk SSSR), 26.04.89, No. 2753-B89.*
8. N. Kachakhidze, *On the representation of numbers by the direct sums of some binary quadratic forms, Georgian Mathematical Journal. Vol. 5, No. 1 (1998), 55-70.*
9. M. D. Schmidt, *Combinatorial sums and identities involving generalized sum-of-divisors functions with bounded divisors, INTEGERS 20 (2020).*
10. Zhi-Guo Liu, *The Borweins' cubic theta function identity and some cubic modular identities of Ramanujan, Ramanujan Journal (2000).*
11. Nayandeep Deka Barauh, *Modular equations for Ramanujan cubic continued fraction, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 268, 244-255 (2002).*
12. Jinhee Yi, *Theta-functions identities and the explicit formulas for theta-functions and their applications, J. Math. Anal. Appl., 292 (2004), 381-400.*
13. J. M. Borwein, P. B. Borwein, *A cubic counterpart of Jacobi's identity and the AGM, Trans. Amer. Math. Soc. 323 (1991), 691-701.*
14. B. C. Berndt, *Ramanujan Notebooks, Part III*, Springer-Verlag, New York, 1991.
15. Ж.-П. Серр, *Курс арифметики*, Мир, М., 1972.
16. B. C. Berndt, *Ramanujan Notebooks, Part II*, Springer-Verlag, New York, 1989.
17. В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, М., 1993.
18. I. G. Macdonald, *Affine root systems and Dedekind's* η*-function, Matematika, 1972, Volume 16, Issue 4, 3-49.*
19. V. G. Kac, *Infinite-Dimensional Algebras, Dedekind's* η*-function, Classical Möbius Function and the Very Strange Formula, Advances in Mathematics, 30, 85-136, 1978.*
20. M. D. Schmidt, *Continued fractions and q-series generating functions for the generalized sum-of-divisors functions, Journal of Number Theory (2017).*

Гладун С. Є.

Кубічні степеневі ряди, добуток Ейлера та тета-функції Рамануджана

Резюме

У статті розглядається елементарний метод, який базується на властивостях кубічних тета-функцій, у зв'язку з отриманням нових формул, в яких через добуток Ейлера виражаються степеневі ряди з коефіцієнтами, які дорівнюють значенням функції суми непарних степенів дільників (або з коефіцієнтами, які дорівнюють значенням теоретико-числової тау-функції) на арифметичній прогресії з різницею 3. У якості наслідків отримані декілька числових рівностей у стилі Рамануджана, а також асимптотична формула поведінки степеневого ряду поблизу кінця інтервалу збіжності. Приведена загальна формула для так званого кубічного степеневого ряду через кубічні тета-функції Рамануджана, і проведений аналіз випадків, коли в цю залежність входить раціонально лише нескінченний добуток Ейлера. Для отримання цієї залежності використана знаменита теорема Рамануджана про ряди Ейзенштейна, а також застосований варіант параметричного методу, у якому одну з головних ролей грає вираз параметру через кубічну тета-функцію.
Ключові слова: кубічні степеневі ряди, добуток Ейлера, тета-функції Рамануджана, ряди Ейзенштейна.

Gladun S. E.

Cubic power series, Euler product and Ramanujan's theta-functions

Summary

The article discusses an elementary method based on the properties of cubic theta-functions, in connection with the derivation of new formulas, in which power series with coefficients, equal to the values of the function of the sum of odd powers of the divisors (or with coefficients, equal to the values of the number-theoretic tau-function) on an arithmetic progression with a difference of 3, are expressed through the Euler product. As a consequence, several numerical equalities in the Ramanujan style, as well as the power series behaviour asymptotic formula near the end of the convergence interval are obtained. The general formula for the so-called cubic power series in terms of Ramanujan's cubic theta-functions and an analysis of the cases when this dependence contains rationally only an infinite Euler product are given. To obtain this dependence, the famous Ramanujan theorem on the Eisenstein series is used. In a variant of the parametric method, one of the main roles is played by the expression of the parameter in terms of the cubic theta function.
Key words: cubic power series, Euler product, Ramanujan's theta-functions, Eisenstein series.

References

1. B. C. Berndt, *Ramanujan Notebooks, Part V*, Springer-Verlag, New York, 1998.

2. G. E. Andrews, B. C. Berndt, *Ramanujan's Lost Notebook, Part I*, Springer-Verlag, New York, 2005.

3. Г. Харди, *Двенадцать лекций о Рамануджане*, Институт компьютерных исследований, М., 2002.

4. G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar, B. M. Wilson, *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, Cambridge, 1927.

5. S. E. Gladun, *A Generating Function for $\sigma(3n-1)$, Mathematical Notes, Vol. 95, No. 4 (2014), 565-569.*

6. G. A. Lomadze, *Representation of numbers by sums of the quadratic forms $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ (Russian), Acta Arith. 54 (1989), 9-36.*

7. A. S. Merzlyakov, *The problem of G. A. Lomadze on the representation of numbers by the sum of binary quadratic forms of the kind x^2+xy+y^2. (Russian) Deposited in VINITI (Vsesoyuzn. Inst. Nauch. Tekh. Inform. Acad. Nauk SSSR), 26.04.89, No. 2753-B89.*

8. N. Kachakhidze, *On the representation of numbers by the direct sums of some binary quadratic forms, Georgian Mathematical Journal. Vol. 5, No. 1 (1998), 55-70.*

9. M. D. Schmidt, *Combinatorial sums and identities involving generalized sum-of-divisors functions with bounded divisors, INTEGERS 20 (2020).*

10. Zhi-Guo Liu, *The Borweins' cubic theta function identity and some cubic modular identities of Ramanujan, Ramanujan Journal (2000).*

11. Nayandeep Deka Barauh, *Modular equations for Ramanujan cubic continued fraction, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 268, 244-255 (2002).*

12. Jinhee Yi, *Theta-functions identities and the explicit formulas for theta-functions and their applications, J. Math. Anal. Appl., 292 (2004), 381-400.*

13. J. M. Borwein, P. B. Borwein, *A cubic counterpart of Jacobi's identity and the AGM, Trans. Amer. Math. Soc. 323 (1991), 691-701.*

14. B. C. Berndt, *Ramanujan Notebooks, Part III*, Springer-Verlag, New York, 1991.

15. Ж.-П. Серр, *Курс арифметики*, Мир, М., 1972.

16. B. C. Berndt, *Ramanujan Notebooks, Part II*, Springer-Verlag, New York, 1989.

17. В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, М., 1993.

18. I. G. Macdonald, *Affine root systems and Dedekind's η-function, Matematika, 1972, Volume 16, Issue 4, 3-49.*

19. V. G. Kac, *Infinite-Dimensional Algebras, Dedekind's η-function, Classical Möbius Function and the Very Strange Formula, Advances in Mathematics, 30, 85-136, 1978.*

20. M. D. Schmidt, *Continued fractions and q-series generating functions for the generalized sum-of-divisors functions, Journal of Number Theory (2017).*

Дослідження в математиці і механіці. — 2021. — Т. 26, вип. 1(37). — С. 38–54

УДК 517.9

О. Д. Кічмаренко, Н. В. Касімова, Т. Ю. Жук
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗІ ШВИДКОКОЛИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Стаття містить результати досліджень, виконаних за підтримки Національного Фонду Досліджень України, проект Ф81/41743

Розглядається задача оптимального керування зі швидкоосцилюючими змінними, лінійна за керуванням. При цьому об'єктом керування виступає диференціальне включення з Ліпшицевою за фазовою змінною багатозначною правою частиною. Багатозначність породжує свої специфічні проблеми, такі як замкненість, опуклість сім'ї розв'язків, існування граничних розв'язків, виділення розв'язків із заданими властивостями тощо. Проте добре розвинений апарат математичного аналізу, що застосовуються до дослідження багатозначних функцій дає можливість застосування методу усереднення до описаної вище задачі оптимального керування. У роботі доведено збіжність оптимальних керувань і оптимальних траєкторій розв'язків точної задачі до оптимального керування і траєкторії усередненої задачі. При цьому також обгрунтовано, що оптимальне керування усередненої задачі є "майже оптимальним" для точної задачі, тобто з точністю до малого параметру ε реалізується мінімум критерію якості.
MSC: 34G25, 49J30, 49K35, 49K99, 93C99.
Ключові слова: задача оптимального керування, диференціальне включення, малий параметр, метод усереднення.
DOI: 10.18524/2519-206X.2021.1(37).248020.

1. Вступ

Інтенсивний розвиток науки і техніки регулярно стимулює до відшукання ефективних методів керування різноманітними природними, економічними, соціальними, технічними процесами. Математичними моделями таких ситуацій є задачі оптимального керування різними класами еволюційних систем. Значна увага приділяється математичним моделям процесів у вигляді диференціальних рівнянь з малим параметром. Для їх розв'язання широко застосовують асимптотичні методи, зокрема, метод усереднення, строге математичне обгрунтування якого було запропоновано М.М. Кри-

Надійшла 04.10.2021

ловим та М.М. Боголюбовим.

На можливість застосування методу усереднення до розв'язування задач оптимального керування на асимптотично великих часових інтервалах вперше звернув увагу М.М. Моісеєв [1; 2]. В роботах Плотнікова та його школи (див., наприклад, [3]) дане строге обгрунтування застосування методу усереднення до задач керування. У [4; 5], розглядається підхід, пов'язаний з побудовою диференціального включення за вихідною задачею, яке потім досліджувалося методом усереднення. У роботі [6] спочатку проводилося усереднення правих частин системи за часом, який явно входить в праву частину, при цьому функція керування $u(t)$ вважається параметром. У роботах [7; 8] обгрунтовується підхід роботи [6] до розв'язування задач оптимального керування за відсутності умови асимптотичної сталості для функції керування.

Варто також відмітити, що метод усереднення успішно застосовується до дослідження функціонально-диференціальних рівнянь ([9]), різницевих рівнянь ([10]).

Оскільки диференціальне включення є природним узагальненням диференціального рівняння, то наступним кроком в розвитку асимптотичних методів було обгрунтування методу усереднення для диференціальних включень. Так, аналог першої теореми М.М. Боголюбова було отримано у роботах [11]. Цей результат був згодом перенесений на включення з періодичною правою частиною [12], диференціальні включення зі швидкими і повільними змінними [13], диференціальні включення з імпульсами [14]. Основна ідея даного підходу полягає в тому, що неавтономному диференціальному включенню за допомогою методу усереднення ставиться у відповідність автономне диференціальне рівняння. Це дає можливість застосування ефективних чисельних методів для розв'язування усередненої задачі керування.

В даній роботі розглядається задача оптимального керування зі швидкоосцилюючими змінними, лінійна за керуванням. Об'єктом керування є система диференціальних включень з Ліпшицевою за фазовою змінною правою частиною. Робота структурована наступним чином. До згаданого об'єкту застосовується метод усереднення і обгрунтовується збіжність оптимальних керувань і оптимальних траєкторій розв'язків точної задачі до оптимального керування і траєкторії усередненої задачі. При цьому також обгрунтовано, що оптимальне керування усередненої задачі є "майже оптимальним" для точної задачі, тобто з точністю до малого параметру ε реалізується мінімум критерію якості.

2. Основні результати

1. Постановка задачі.

Розглянемо задачу оптимального керування зі швидкоколивними змінними, лінійну за керуванням

$$\dot{x} \in f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) + f_1(x)u(t), \; x(0, u(0)) = x_0 \tag{1}$$

із критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \int_0^T [A(t, x_\varepsilon(t)) + B(t, u(t))]\, dt + \Phi(x_\varepsilon(T)) \to inf \tag{2}$$

Також для задачі (1) розглянемо квадратичний за керуванням критерій

$$J_\varepsilon[u] = \int_0^T [A(t, x_\varepsilon(t)) + u^2(t)]\, dt + \Phi(x_\varepsilon(T)) \to inf \tag{3}$$

Тут $\varepsilon > 0$ - малий параметр, $T > 0$ - задана стала, x - фазовий вектор в $\mathbb{R}^d$, $u(t) - m$-вимірний вектор керування, який належить деякій функціональній множині.

За умови існування рівномірного за $x \in \mathbb{R}^d$ середнього

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} \int_0^s f(t, x)\, dt = f_0(x), \tag{4}$$

де $f_0(x)$ - однозначне відображення, задачі оптимального керування (1), (2) ((3))зі швидкоколивними коефіцієнтами ставиться у відповідність на $[0, T]$ більш проста задача оптимального керування

$$\dot{y} = f_0(y) + f_1(u)u(t), \; y(0, u(0)) = x_0 \tag{5}$$

із критеріями якості

$$J_0[u] = \int_0^T [A(t, y(t)) + B(t, u(t))]\, dt + \Psi(y(T)) \to inf \tag{6}$$

і

$$J_0[u] = \int_0^T [A(t, y(t)) + u^2(t)]\, dt + \Psi(y(T)) \to inf \tag{7}$$

2. Допоміжні поняття та твердження.

2.1. Метрика Хаусдорфа. Нехай A і B - непорожні, замкнені множини в метричному просторі $\mathbb{R}^n$. Розглянемо наступні величини, що характеризують близькість A і B:

$$\beta(A, B) = \sup_{a \in A} \rho(a, B), \beta(B, A) = \sup_{b \in B} \rho(b, A)$$

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\} = \max\{\sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A)\} =$$

$$= \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \rho(b, a)\}$$

Зокрема, маємо, що $\alpha(A, B) = \alpha(B, A)$.

Означення 1 ([15])**.** Величину $\alpha(A, B)$ називають відхиленням множин A і B за Хаусдорфом або хаусдорфовою відстанню між A і B.

2.2. Деякі властивості багатозначних функцій. Кожній точці p із множини $D \in \mathbb{R}^d$ поставимо у відповідність непорожню замкнену множину $F(p) \subset \mathbb{R}^n$. Тоді $F(p)$ - багатозначна функція. Її графік – множина таких точок $(p, q) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, що $p \in D, q \in F(p)$.

Надалі використовуватимемо наступні позначення:

$$F(M) = \bigcup_{p \in M} F(p), |F(M)| = \sup_{y \in F(M)} |y|.$$

Означення 2 ([15])**.** Багатозначна функція F називається обмеженою на множині M, якщо $|F(M)| < \infty$, тобто якщо всі значення функції F в точках множини M містяться у деякій кулі.

Означення 3 ([15])**.** Багатозначна функція $F(p)$ називається:

- α - неперервною (або неперервною) в точці p, якщо

$$\alpha(F(p'), F(p)) \to 0, p' \to p;$$

- β - неперервною (або напівнеперервною зверху відносно включення) в точці p, якщо

$$\beta(F(p'), F(p)) \to 0, p' \to p.$$

Функція $F(p)$ називається α - або β - неперервною на множині D, якщо вона α - або β - неперервна в кожній точці цієї множини.

Зауваження 1 ([15])**.** Оскільки $\beta(A,B) \leq \alpha(A,B)$,то із α - непервності функції випливає її β - неперервність.

2.3. Необхідні поняття теорії диференціальних включень. Розглянемо диференціальне включення

$$\dot{x} \in F(t,x) \tag{8}$$

Означення 4 ([15])**.** Розв'язком диференціального включення (8) називається абсолютно неперервна функція $x(t)$, визначена на інтервалі або відрізку і майже скрізь задовольняє включення (8).

Означення 5 ([15])**.** Будемо казати, що багатозначна функція $F(t,x)$ в області G задовольняє основні умови, якщо при всіх $(t,x) \in G$ множина $F(t,x)$ - непорожня, обмежена, замкнена, опукла і F - β - непервна по t, x.

Теорема 1 ([15])**.** *Нехай $F(t,x)$ задовольняє основні умови в області G. Тоді для довільної точки $(t_0,x_0) \in G$ існує розв'язок задачі*

$$\dot{x} \in F(t,x), x(t_0) = x_0. \tag{9}$$

Якщо область G містить циліндр $z(t)(t_0 \leq t \leq t_0 + a, |x - x_0| \leq b)$, то розв'язок існує принаймні на відрізку

$$t_0 \leq t \leq t_0 + d, d = \min\{a, \frac{b}{m}\}, m = \sup_z |F(t,x)|.$$

Означення 6 ([16])**.** Нехай задана послідовність множин $F_i \in \mathrm{comp}\mathbb{R}^n$ - сукупність непорожніх компактних підмножин в $\mathbb{R}^n$.

- Верхньою топологічною границею послідовності $\{F_i\}$ називається сукупність всіх часткових границь таких послідовностей $\{f_i\}$, що $f_i \in F_i$ для всіх i. Позначається $\overline{\lim_{i\to\infty}} F_i$.
- Нижньою топологічною границею послідовності $\{F_i\}$ називається сукупність всіх границь збіжних послідовностей $\{f_i\}$, що $f_i \in F_i$ для всіх i. Позначається $\underline{\lim_{i\to\infty}} F_i$.

- Якщо обидві границі існують і

$$\varliminf_{i\to\infty} F_i = \varlimsup_{i\to\infty} F_i = F,$$

то множина F називається границею послідовності $\{F_i\}$. В цьому випадку

$$\lim_{i\to\infty} \alpha(F_i, F) = 0.$$

Означення 7 ([16; 17])**.** Нехай $F : \mathbb{R}^1 \to \mathrm{comp}\,(\mathbb{R}^n)$ – деяке багатозначне відображення. Інтегралом від відображення $F(t)$ на відрізку часу $[t_0, t_1]$ називається множина

$$G = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt = \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt : f(t) \in F(t) \right\} \tag{10}$$

Теорема 2 (Теорема Красносельського-Крейна для диференціальних включень, [4; 14; 18])**.** *Нехай для диференціального включення*

$$\dot{x} \in F(t, x, \lambda), \tag{11}$$

де багатозначне відображення $F(t,x,\lambda)$, що приймає значення в conv$(\mathbb{R}^n)$ (підпростір із comp $(\mathbb{R}^n)$, що складаєтьъся із опуклих множин), визначене при $0 \le t \le T, x \in D, D$ - обмежена область в $\mathbb{R}^n, \lambda \in \Lambda$ - деяка множина значень параметра λ, що має $\lambda_0 \in \Lambda$ граничною точкою, виконуються наступні умові:

а) багатозначне відображення $F(t,x,\lambda)$ рівномірно обмежене, неперервне по t, рівномірно неперервне по x рівномірно відносно t і λ: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall t \in [0,T], x \in D, x' \in D$ і $\lambda \in \Lambda$ виконується

$$\alpha(F(t,x',\lambda) - F(t,x,\lambda)) < \varepsilon,$$

як тільки $|x' - x| < \delta$;

б) багатозначне відображення $F(t,x,\lambda)$ - інтегрально неперервне по λ в точці λ_0, тобто для $0 \le t_1 \le t_2 \le T$ і довільного $x \in D$ виконується умова

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \alpha\left(\int\limits_{t_1}^{t_2} F(s,x,\lambda)\,ds, \int\limits_{t_1}^{t_2} F(s,x,\lambda_0)\,ds \right) = 0, \tag{12}$$

де інтеграли розуміються включення в сенсі Означення 7;

в) розв'зки $x(t,\lambda_0)$ включення

$$\dot{x} \in F(t,x,\lambda_0), \tag{13}$$

що задовольняють умову $x(0,\lambda_0) = x_0 \in D^1 \subset D$, визначені при $0 \le t \le T$ і лежать разом з деяким ρ-околом в області D.

Тоді кожному $\eta > 0$ відповідає такий окіл $U(\lambda_0)$ точки λ_0, що при $\lambda \in U(\lambda_0)$ для довільного розв'язку $x(t,\lambda)$ включення (11), визначеного при $0 \le t \le T$ і такого, що задовольняє початкову умову $x(0,\lambda) = x_0$, існує такий розв'язок $x(t,\lambda_0)$ включення (13), що справедлива нерівність $\| x(t,\lambda) - x(t,\lambda_0) \| < \eta, 0 \le t \le T$.

2.4. Метод усереднення для диференціальних включень. Розглянемо диференціальне включення

$$\dot{x} \in \varepsilon X(t,x),\ x(0) = x_0, \tag{14}$$

де $x \in \mathbb{R}^n, X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n), \varepsilon > 0$ - малий параметр.

Включенню (14) поставимо у відповідність усереднене диференціальне включення

$$\dot{y} \in X_0(y), y(0) = x_0, \tag{15}$$

де

$$X_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T X(t,x)\, dt \tag{16}$$

Збіжність в (16) розуміється у сенсі метрики Хаусдорфа, а інтеграл від багатозначного відображення $X(t,x)$ розуміється в сенсі Означення 7.

2.5. Застосування методу усереднення до задачі оптимального керування (1), (2) ((3)).

Для параметрів задачі (1)–(2) ((3)) будемо вважати виконаними наступні умови:

Умова 1. Допустимими керуваннями є m – вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in L_p([0,T])$, $p > 1$, які приймають значення в замкненій, опуклій множині $V \subset \mathbb{R}^m$.

Для задачі (1) – (3) допустимими керуваннями будемо вважати m – вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in L_2([0,T])$, які приймають значення в замкненій опуклій множині $u \subset \mathbb{R}^m$.

Умова 2. Багатозначна функція $f(t,x)$ ($f : Q = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d\} \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^d)$) визначена і неперервна за сукупністю змінних в Q, а $d \times m$ - вимірна матриця $f_1(x)$ визначена при $x \in \mathbb{R}^d$ і виконані умови:

1) $f(t,x)$ в області Q задовольняє умову лінійного росту за x із константою M, тобто

$$|f(t,x)| \leq M(1+|x|) \qquad \forall (t,x) \in Q;$$

2) $f(t,x)$ і $f_1(x)$ в області визначення задовольняють умову Ліпшиця за x із константами λ_1 та λ, відповідно, тобто

$$\alpha(f(t,x), f(t,x')) \leq \lambda_1 |x - x'|,$$

$$\|f_1(x) - f_1(x')\| \leq \lambda |x - x'|.$$

Умова 3. Рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d$ існує границя

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} \int\limits_0^s f(t,x)\, dt = f_0(x), \tag{17}$$

де інтеграл розуміється в сенсі Означення 7, а збіжність - в сенсі Означення 6, функція $f_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ - однозначна.

Умова 4. Скалярні функції $A(t,x)$ і $B(t,u)$ визначені при $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $u \in V$ і неперервні за сукупністю змінних причому:

1) $A(t,x) \geq 0$, $B(t,u) \geq a|u|^p$ для деякої сталої $a > 0$ і для кожного $t \in [0,T]$ функція $B(t,u)$ - опукла за $u \in V$;

2) функція $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$ - неперервна за x та невід'ємна.

Зауваження 2. В силу умов на $f(t,x)$ і $f_1(x)$ та теореми 1 маємо, що $\forall \varepsilon > 0$ і для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок задачі Коші (1) існує на [0,T].

При цьому $x(t,u)$ - абсолютно неперервна функція. Із умов 2, 3 випливає, що f_0 також задовольняє умову Ліпшиця з константою λ_1. Тому для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок задачі Коші (5) $y(t,u)$ існує, єдиний на $[0,T]$ і є абсолютно неперервною функцією. Тому критерії (2), (3), (6), (7) мають сенс при всіх допустимих керуваннях.

Сформулюємо наступний результат щодо рівномірної збіжності розв'язків задачі Коші.

Теорема 3. *Нехай виконані умови 1-3. Тоді якщо послідовність* $u_\varepsilon \xrightarrow{w} u_0$ *в* $L_p([0,T])$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то розв'язок* $x_\varepsilon(t)$ *залачі Коші* (1) *з* $u(t) = u_\varepsilon(t)$ *збігається рівномірно на* $[0,T]$ *до* $y(t)$ *- розв'язку відповідної задачі Коші* (5) *із керуванням* $u(t) = u_0(t)$, *тобто*

$$x_\varepsilon(t) \rightrightarrows y(t), \varepsilon \to 0 \tag{18}$$

рівномірно по $t \in [0,T]$.

Доведення. Множина звичайних розв'язків диференціального включення із (1) співпадає з множиною узагальнених розв'язків [19], яка визначається як множина неперервних функцій $x_\varepsilon(t)$, що задовольняють включення

$$x_\varepsilon(t) \in x_0 + \int\limits_0^t f(\frac{s}{\varepsilon}, x_\varepsilon(s))\,ds + \int\limits_0^t f_1(x_\varepsilon(s)) u_\varepsilon(s)\,ds. \tag{19}$$

В силу умов 1 і 2 отримаємо, що

$$|x_\varepsilon(t)| \le |x_0| + \int\limits_0^t M(1 + |x_\varepsilon(s)|)\,ds + \int\limits_0^t (\|f_1(0)\| + \lambda|x_\varepsilon(s)|)|u_\varepsilon(s)|\,ds$$

або

$$|x_\varepsilon(t)| \le |x_0| + \int\limits_0^t (M + \|f_1(0)\||u_\varepsilon(s)|)\,ds + \int\limits_0^t (M + \lambda|u_\varepsilon(s)|)|x_\varepsilon(s)|\,ds. \tag{20}$$

Використавши нерівність Грануолла, будемо мати:

$$|x_\varepsilon(t)| \le (|x_0| + M + \|f_1(0)\| T^{1/q} \cdot \|u_\varepsilon\|_{L_p[0,T]}) e^{MT + \lambda T^{1/q} \|u_\varepsilon\|_{L_p[0,T]}} \tag{21}$$

Зі слабкої збіжності u_ε до u_0 випливає сильна обмеженість u_ε, тобто

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|u_\varepsilon\|_{L_p[0,T]} < \infty,$$

а тому із (20) отримуємо, що $\exists L > 0$:

$$|x_\varepsilon(t)| \le L \tag{22}$$

для всіх $\varepsilon > 0$ і $t \in [0,T]$. Таким чином, маємо рівномірну обмеженість сім'ї $x_\varepsilon(t)$.

Обґрунтуємо рівностепеневу неперервність сім'ї $x_\varepsilon(t)$ на $[0,T]$.

Для довільних $t_1 < t_2,\ t_1, t_2 \in [0,T]$, використовуючи (20) і (22), маємо:

$$|x_\varepsilon(t_2) - x_\varepsilon(t_1)| \leq \int\limits_{t_1}^{t_2} M(1+L)\,ds + \int\limits_{t_1}^{t_2} (\|f_1(0)\| + \lambda L)|u_\varepsilon(s)|\,ds \leq$$

$$\leq M(1+L)(t_2-t_1) + (t_2-t_1)^{1/q}(\|f_1(0)\| + \lambda L)\left(\int\limits_{t_1}^{t_2} |u_\varepsilon(s)|^p\,ds\right)^{1/p},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тоді в силу теореми Арцела існує підпослідовність $x_{\varepsilon_n}(t)$ послідовності $x_\varepsilon(t)$, яка рівномірно за $t \in [0,T]$ збігається до деякої функції $x_0(t)$ при $\varepsilon_n \to 0$. Із (19) маємо:

$$\begin{gathered} x_{\varepsilon_n}(t) \in x_0 + \int\limits_0^t f\left(\tfrac{s}{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n}(s)\right)\,ds + \int\limits_0^t f_1(x_{\varepsilon_n}(s))u_{\varepsilon_n}(s)\,ds \pm \\ \pm \int\limits_0^t f_1(x_0(s))u_{\varepsilon_n}(s)\,ds = x_0 + \int\limits_0^t f\left(\tfrac{s}{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n}(s)\right)\,ds + \int\limits_0^t f_1(x_{\varepsilon_n}(s))u_{\varepsilon_n}(s)\,ds + \\ + \int\limits_0^t (f_1(x_{\varepsilon_n}(s) - f_1(x_0(s))))u_{\varepsilon_n}(s)\,ds \end{gathered} \tag{23}$$

В силу умови 2 для функції $f(t,x)$ маємо виконання умови а) теореми 2. Зокрема з пункту 1) умови 2 випливає рівномірна обмеженість $f(t,x)$, а із пункту 2) умови 2 маємо рівномірну неперервність $f(t,x)$ по x.

Перевіримо інтегральну неперервність функції $f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x(s)\right) =: Y(s, x(s), \varepsilon_n)$. За умови виконання (17), поклавши $f_0 = Y(s,x,0)$, будемо мати:

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0^+} \int\limits_0^t Y(s, x(s), \varepsilon_n)\,ds = \lim_{\varepsilon_n \to 0^+} \int\limits_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x(s)\right)\,ds = \lim_{\varepsilon_n \to 0^+} \int\limits_0^{\frac{t}{\varepsilon_n}} f(\theta, x)\,d\theta =$$

$$= t \lim_{\varepsilon_n \to 0^+} \frac{1}{t/\varepsilon_n} \int\limits_0^{\frac{t}{\varepsilon_n}} f(\theta, x)\,d\theta = t f_0(x) = \int\limits_0^t f_0(x)\,ds = \int\limits_0^t Y(s,x,0)\,ds,$$

де границя від многозначних відображень розуміється в сенсі Означення 6.

Таким чином, маємо виконання умови б) теореми 2.

В силу умови 5 маємо виконання умови в) теореми 2.

Аналогічно до доведення теореми 2, проведеного, зокрема в [4; 18], можна показати, що

$$\alpha\left(\int_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n}(s)\right)\,ds, \int_0^t f_0(x_0(s))\,ds\right) \longrightarrow 0, \varepsilon_n \to 0 \qquad (24)$$

Далі в силу слабкої збіжності маємо:

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0}\int_0^t f_1(x_0(s))u_{\varepsilon_n}(s)\,ds = \int_0^t f_1(x_0(s))u_0(s)\,ds \qquad (25)$$

Використавши пункт 2) із умови 2 для останнього інтегралу в (23), отримаємо оцінку

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t (f_1(x_{\varepsilon_n}(s)) - f_1(x_0(s)))u_{\varepsilon_n}(s)\,ds\right| \le \\ \le \lambda\left(\int_0^t |x_{\varepsilon_n}(s) - x_0(s)|^q\,ds\right)^{1/q} \|u_{\varepsilon_n}\|_{L_p[0,T]} \longrightarrow 0, \varepsilon_n \to 0,\end{aligned} \qquad (26)$$

в силу рівномірної обмеженості $\|u_{\varepsilon_n}\|_{L_p[0,T]}$. Перейдемо до границі в (23) при $\varepsilon_n \to 0$:

$$x_0(t) \in x_0 + \int_0^t f_0(x_0(s))\,ds + \int_0^t f_1(x_0(s))u_0(s)\,ds,$$

тобто $x_0(t)$ - розв'язок задачі Коші (5), а тому в силу єдиності розв'язку $x_0(t) \equiv y(t)$.

Отже, $x_{\varepsilon_n}(t) \rightrightarrows y(t)$ при $\varepsilon_n \to 0$. Тому довільна збіжна послідовність функцій із сім'ї збігається до одної і тієї ж границі. Тим самим маємо твердження теореми. $\square$

В силу Зауваження 2 маємо, що для функціоналу (2) існує мінімізуюча послідовність $\{(x_\varepsilon^{(n)}(t), u_\varepsilon^{(n)}(t))\}_{n\ge1}$. При цьому $x_\varepsilon^{(n)}(t) \rightrightarrows x_\varepsilon^*(t)$ на $[0,T]$ та $u_\varepsilon^{(n)} \to u_\varepsilon^*$ слабко в $L_p([0,T])$. В силу леми Мазура і властивостей множини

V маємо, що $u_\varepsilon^*(t) \in V \ \forall t \in [0, T]$. Тому згідно прямого методу варіаційного числення задача (1), (2) має розв'язок.

Далі, проводячи аналогічні міркування до [8, Theorem 2.8], одержимо наступний результат.

Теорема 4. *Нехай виконані умови 1-4. Тоді задачі* (1)*,* (2) *і* (5)*,* (6) *мають розв'язки* $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ *і* $(y^*(t), u^*(t))$ *відповідно. При цьому*

1) $J_\varepsilon^* \to J_0^*$, $\varepsilon \to 0$;

2) для будь-якого $\eta > 0$ *існує* ε_0*, таке, що для* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *маємо*

$$|J_\varepsilon^* - L_\varepsilon[u^*]| < \eta; \tag{27}$$

3) існує послідовність $\varepsilon_n \to 0$*,* $n \to \infty$*, така, що*

$$x_{\varepsilon_n}^*(t) \rightrightarrows y(t) \tag{28}$$

рівномірно на $[0, T]$ *і*

$$u_{\varepsilon_n}^* \to u^* \tag{29}$$

слабко в $L_p([0, T])$.

Якщо при цьому усереднена задача має (5)*,* (6) *має єдиний розв'язок, то збідності* (27) *і* (28) *мають місце для всіх* $\varepsilon \to 0$.

Зауваження 3. Аналогічний результат до теореми 4 можна одержати для задачі (1), (3). Більше того, для функціоналу (3) твердження (29) можна посилити, замінивши слабку збіжність сильною.

3. Висновки

У роботі розглядається задача оптимального керування зі швидкоколивними змінними диференціальним включенням, лінійним за керуванням. Для багатозначної правої частини розглядається умова не більш, ніж лінійного росту та Липшицевість за фазовою змінною. Багатозначність, як відомо, вносить свої труднощі при розгляді такого роду задач. Проте добре розвинений апарат математичного аналізу, що застосовуються до дослідження багатозначних функцій, дає можливість застосування методу усереднення до описаної вище задачі оптимального керування. Таким чином, у роботі обгрунтовано результати щодо рівномірної збіжності розв'язків задачі Коші вихідної задачі до розв'язку задачі Коші усередненої задачі та обгрунтовано збіжність оптимальних керувань і оптимальних траєкторій розв'язків точної задачі до оптимального керування і траєкторії усередненої задачі. При цьому також обгрунтовано, що оптимальне керування усередненої задачі є "майже оптимальним" для точної задачі, тобто з точністю до малого параметру ε реалізується мінімум критерію якості (Теореми 3, 4).

Список літератури

1. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. / Н. Н. Моисеев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
2. **Моисеев Н. Н.** Элементы теории оптимальных систем. / Н. Н. Моисеев. – М.:Наука, 1975. – 528 с.
3. **Плотников В. А.** Метод усреднения в задачах управления. / В. А. Плотников. – Киев-Одесса:Лыбидь, 1992. – 188 с.
4. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. – Одесса:Астропринт, 1999. – 356 с.
5. **Gaitsgory V** Averaging and near viability of singularly perturbed control systems / V. Gaitsgory //Journal of Convex Analysis. – 2006. – V. 2, No 13. – P. 329-352.
6. **Носенко Т. В** Метод усереднення в деяких задачах оптимального керування. / Т. А. Носенко, О. М. Станжицький . // Нелінійні коливання. – 2008. – Т. 11, No 4. – С. 512 – 519.
7. **Кічмаренко О. Д.** Застосування методу усереднення до задач оптимального керування для звичайних диференціальних рівнянь на півосі. / О. Д. Кічмаренко // Український математичний журнал. – 2018. – Т. 70, №5. – С. 642 – 654.
8. **Kichmarenko O. D.** Application of the averaging method to optimal control problem of system with fast parameters / O. D. Kichmarenko // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2017. – Vol.115, No 1. – P. 93 – 114.
9. **Hale J.** Theory of functional-differential equations / J. Hale. – New-York:SpringerVerlag, 1977 – 365 p.
10. **Перестюк М. О.** Застосування асимптотичних методів регулярно і сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь / О. М. Перестюк, І. І. Клевчук // Нелінійні коливання. – 2013. – Т. 16, №1. – С. 94 – 104.
11. **Плотников В. А.** Метод усреднения для дифференциальных включений и его приложение к задачам оптимального управления / В. А. Плотников // Дифференциальные уравнения. – 1979. – №8. – С. 1427 – 1433.
12. **Плотников В. А.** Усреднение дифференциальных включений / В. А. Плотников // Укр. мат. журнал. – 1979. – Т.31, №5. – С. 573 – 576.

13. **Филатов О. П.** Усреднение систем дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными / О. П. филатов, М. М. Хапаев // Мат. заметки. – 1990. – Т47, Вып.5. – С. 127 – 134.

14. **Перестюк Н. А.** Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / Н. А. Перестюк, В. А. Плотников, А. М. Самойленко, Н.В. Скрипник. – Киев:Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 428 с.

15. **Филлипов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филлипов. – Москва:Наука, 1985. – 222 с.

16. **Благодатских В. И.** Дифференциальные включения и оптимальное управление / В. И. Благодатских, А. Ф. Филлипов // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы, Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института, Тр. МИАН СССР. – 1985. – Т. 169. – С. 194-252.

17. **Aumann R. J.** Integrals of set-valued functions / R. J. Aumann // J. Math. Anal. Appl. 1965. – Vol.12, No 1. – P. 1–12.

18. **Плотников В. А.** Усреднение дифференциальных включений с многозначными импульсами / В. А. Плотников, Л. И. Плотникова // Укр. мат. журнал. – 1995. – Т.47. №11. – С. 1526-1532.

19. **Dawidiwski M.** On some generalization of Bogolubov averaging theorem / M. Dawidiwski // Funct. et. Approx. (PRL). – 1979. – No7. – P. 55 –70.

Кичмаренко О. Д., Касимова Н. В., Жук Т. Ю.

Приближенное решение задачи оптимального управления дифференциальным включением с быстроосцилирующими коэффициентами

Резюме

Рассматривается задача оптимального управления из быстроосцилируемыми переменными, линейная по управлению. При этом объектом управления служит дифференциальное включение из Липшицевой по фазовой переменной многозначной правой частью. Многозначность порождает свои специфические проблемы, такие как замкнутость, опуклость семейства решений, существование граничных решений, выделения решений из заданными свойствами и т.п. Но хорошо развитый апарат математического анализа, который, который применяется к исследованию многозначных функций дает возможность применения метода усреднения к описаной выше задаче оптимального управления. В работе доказана сходимость оптимальных управлений и оптимальных траекторий решений точной задачи к оптимальному управлению и траеетории усредненной задачи. При этом также обосновано, что оптимальное управление усредненной задачи есть "почти оптимальным" для точной задачи, то есть с точностью к малому параметру ε реализуется минимум критерия качества.

Ключевые слова: задача оптимального управления, дифференциальное включение, малый параметр, метод усреднения.

Kichmarenko O. D., Kasimova N. V., Zhuk T. Yu.

Approximate solution of the optimal control problem for differential inclusion with fast oscillating coefficients

Summary

We consider the optimal control problem with fast oscillating variables, which is linear by control. At that we consider the differential inclusion with Lipschitz by phase variable multi-valued right hand side as an object of control. Muli-valued aspect generetes its specific difficulties such as closedness, convexity of family of solutions, existence of boundary solutions, highlighting of solutions with given properties etc. However, well developed apparatus of mathematical analysis which can be applied to investigation of multi-valued functions allows us to apply the averaging method to upper mentioned optimal control problem. In the paper we prove the convergence of optimal controls and optimal trajectories of solutions of initial exact problem to optimal control and trajectory of averaged problem. We also justify that optimal control of averaged problem is "almost optimal" for initial exact problem, i.e. within a small parameter ε the minimum of quality criterium can be realized.

Key words: optimal control problem, differential inclusion, small parameter, averaging method.

References

1. Moiseev, N. N. (1981). *Asimptoticheskie metodi nelinejnoj mehaniki [Asymptotic methods of nonlinear mechanics].* Moskow: Nauka, 400 p.

2. Moiseev, N. N. (1975). *Elementi teorii optimalnih system [Elements of optimal systems theory].* – Moskow: Nauka, 528 p.
3. Plotnikov, V. A. (1992). *Metod usredneniya v zadachah upravleniya [Averaging method in control problems].* – Kiev-Odessa:Lybid, 188 p.
4. Plotnikov, V. A., Plotnikov, A. V., Vityuk, A. N. (1999). *Differencialnie uravneniya s mnogoznachnoj pravoj chastyu. Asimptoticheskie metodi [Differential equations with multi-valued right-hand side. Asymptotic methods].* Odessa:Astroprint, 356 p.
5. Gaitsgory V (2006) *Averaging and near viability of singularly perturbed control systems. Journal of Convex Analysis*, Vol. 2, No 13., P. 329-352.
6. Nosenko, T. V., Stanzhitskiy, O. M. (2008). *Metod userednennya v deyakih zadachah optimalnogo keruvannya [Averaging method in some optimal control problems]. Nelinijni kolivannya*, Vol. 11, No 4. – P. 512 – 519.
7. Kichmarenko, O. D. (2018). *Zastosuvannya metodu userednennya do zadach opimalnogo keruvannya dlya zvichainih differencialnih rivnyan na pivosi [Application of the averaging method to optimal control problems for ordinary differential equations on sem-axis]. Ukrainskij matematichnij zhurnal*, Vol. 70, No 5. – P. 642 – 654.
8. Kichmarenko O. D. (2017). *Application of the averaging method to optimal control problem of system with fast parameters International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol.115, No 1. – P. 93 – 114.
9. Hale, J. (1977) *Theory of functional-differential equations.* New-York:SpringerVerlag, 365 p.
10. Perestyuk, M. O., Klevchuk, I. I. (2013). *Zastosuvannya asymptotichnih metodiv do regulyarno i syngulyarno zburenih differencialno-riznicevih rivnyan [Application of asymptotic methods to regular and singular perturbed differential-difference equations]. // Nelinijni kolyvannya*, Vol.16, No1. – P. 94 – 104.
11. Plotnikov, V. A. (1979). *Metod usredneniya dlya differencialnih vkluchenij i ego prilogenie k zadacham optimalnogo upravleniya [Averaging method for differential inclusions and its application to optimal control problems]. Differencialnie uravneniya*, No 8. – P. 1427 – 1433.
12. Plotnikov, V. A. (1979). *Usrednenie differencialnih vklyuchenij [Averaging of differential inclusions]. Ukr. mat. zhurnal*, Vol.31, No5. – P. 573 – 576.
13. Filatov, O. P., Hapaev, M. M. (1990). *Usrednenie system differencialnih vklucheniy s bistrimi i medlennimi peremennimi [Averaging of systems of differential inclusions with fast and slow variables]. Mat. zametki*, Vol. 47, Issue 5. – P. 127 – 134.
14. Perestyuk, N. A., Plotnikov, V. A., Samoilenko, A. M., Skrypnik, N. V. (2007). *Impulsnie differencialnie uravneniya s mnogoznachnoj i razrivnoj pravoj chastyu [Impulse differential equations with multi-valued and discontinuous right-hand side].* Kyiv:In-t matematiki NAN Ukraini, 428 p.
15. Fillipov, A. F. (1985). *Differencialnie uravneniya s razrivnoj pravoj chastyu [Differential equations with discontinuous right hand side].* Moscow:Nauka, 222 p.

16. Blagodatskih, V. I., Fillipov, A. F. (1985). *Differencialnie vklyucheniya i optimalnoe upravlenie [Differential inclusions and optimal control]. Topologiya, obiknovennie differencialnie uravneniya, dinamicheskie systemi, Sbornik obzornih statej. 2. K 50-letiyu instituta, Tr. MIAN SSSR.* Vol. 169. – P. 194-252.
17. Aumann, R. J. (1965). *Integrals of set-valued functions J. Math. Anal. Appl.*, Vol.12, No 1. – P. 1–12.
18. Plotnikov, V. A., Plotnikova, L. I. (1995). *Usrednenie differencialnih vkluchenij s mnogoznachnimi impulsami [Averaging of differential inclusions with multi-valued impulses]. Ukr. mat. zhurnal*, Vol.47. No11. – P. 1526-1532.
19. Dawidiwski M. (1979). *On some generalization of Bogolubov averaging theorem Funct. et. Approx. (PRL).*, No7. – P. 55 –70.

Дослідження в математиці і механіці. — 2021. — Т. 26, вип. 1(37). — С. 55–62

УДК 517.5

О. Г. Ровенська
Донбаська державна машинобудівна академія

НАБЛИЖЕННЯ ПОВТОРНИМИ СУМАМИ ФЕЙЄРА КЛАСІВ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Роботу присвячено питанням наближення у рівномірній метриці періодичних функцій високої гладкості тригонометричними поліномами, що породжуються лінійними методами підсумовування рядів Фур'є. У роботі систематизовано відомі факти щодо наближення класів інтегралів Пуассона середніми арифметичними сум Фур'є та подано нові результати, отримані для їх частинних випадків. Вивчено апроксмаивні властивості тригонометричних поліномів, які утворюються повторним застосуванням методу підсумовування Валле Пуссена на класах аналітичних періодичних функцій дійсної змінної. Знайдено асимптотичні формули для верхніх граней відхилень повторних сум Фейєра на класах інтегралів Пуассона. Отримані формули є асимптотично точними без додаткових умов.
MSC: 42A10.
Ключові слова: асимптотична рівність, лінійний метод, сума Фейєра, інтеграл Пуассона.
DOI: 10.18524/2519-206X.2021.1(37).248032.

1. Вступ

Нехай $L_{2\pi}$ — простір сумовних 2π-періодичних функцій, $f \in L_{2\pi}$,

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

— ряд Фур'є функції f, $a_0(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$, $k \in \mathbb{N}$ — коефіцієнти Фур'є функції $f \in L_{2\pi}$. Найбільш простим прикладом лінійного процесу апроксимації неперервних періодичних функцій дійсної змінної може служити наближення цих функцій елементами послідовностей часткових сум ряду Фур'є $S_n(f;x)$. Проте, послідовності $S_n(f;x)$ не є рівномірно збіжними на всьому класі $C_{2\pi}$ неперервних періодичних функцій. У зв'язку із цим, важливе місце серед наближуючих поліномів для періодичних функцій посідають оператори, які утворюються певними перетвореннями часткових сум ряду Фур'є цих функцій та дозволяють побудувати послідовності три-

Надійшла 11.06.2021

гонометричних поліномів, які рівномірно збігалися б для кожної функції $C_{2\pi}$.

Для $p \in \mathbb{N}$ суми Валле Пуссена функції $f \in L_{2\pi}$ задаються співвідношенням

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x)$$

і мають апроксимативні властивості, істотно залежні від параметра p. У випадку $p = n$ ці многочлени є сумами Фейєра функції $f \in L_{2\pi}$

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x).$$

Послідовність поліномів $\sigma_n(f;x)$ рівномірно збігається до своєї функції для будь-якої $f \in C_{2\pi}$.

Нехай $C^q_{\beta,\infty}$ — класи неперервних, 2π–періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P^q_\beta(t) dt$$

з відомим ядром Пуассона

$$P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad q \in (0;1),$$

де функція $\varphi(t)$, задовільняє умову $\operatorname{ess\,sup}|\varphi(t)| \leq 1$. Класи $C^q_{\beta,\infty}$ називаються класами інтегралів Пуассона. Функції $f \in C^q_{\beta,\infty}$ є звуженням на дійсну вісь функцій $F(z) = F(x+iy)$, аналітичних у смузі

$$|y| \leq \ln \frac{1}{q}.$$

Питання наближення класів інтегралів Пуассона лінійними методами інтенсивно вивчалися протягом останніх десятиліть. В роботі [1] встановлено асимптотичну рівність для верхніх граней відхилень сум Фур'є по класах $C^q_{\beta,\infty}$

$$\mathcal{E}_n\left(C^q_{\beta,\infty}; S_n\right) = \sup_{f \in C^q_{\beta,\infty}} \|f(x) - S_n(f;x)\|_C =$$

$$= \frac{8q^n}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-q^2\sin^2 t}} + O(1)\frac{q^n}{n}.$$

Залишковий член цієї рівності уточнено в роботі [9]. Подібні задачі для сум Валле Пуссена та Фейєра розв'язано в роботах [3; 7; 8; 10; 12]. В роботах [4; 5; 11] розглянуто питання наближення класів $C^q_{\beta,\infty}$ повторними сумами Валле Пуссена, які для p_1, $p_2, ..., p_r \in \mathbb{N}$ задаються співвідношеннями

$$V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k_1=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1}\cdots\frac{1}{p_r}\sum_{k_r=k_{r-1}-p_r+1}^{k_{r-1}} S_{k_r}(f;x).$$

При певному виборі параметрів p_1, $p_2, ..., p_r$ ці поліноми збігаються з сумами $S_n(f;x)$, $V_{n,p}(f;x)$ і $\sigma_n(f;x)$. За умови $r=2$ і $p_1+p_2=n$ маємо

$$V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{n-p_1}\sum_{m=k-n+p_1+1}^{k} S_m(f;x).$$

У цьому випадку індекс m величини $S_m(f;x)$ змінюється від 0 до $n-1$, тому такі суми природно назвати повторними сумами Фейєра і позначати $\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ [6].

Вивчення аппроксимативних властивостей поліномів $\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ є природнім продовженням згаданих досліджень. Мета роботи полягає в одержанні асимптотичної рівності для величини

$$\mathcal{E}\left(C^q_{1,\infty};\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}\right) = \sup_{f\in C^q_{1,\infty}} ||f(x)-\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)||_C.$$

2. Основні результати

Має місце таке твердження.

Теорема. *Для $q\in(0;1)$, $n\to\infty$ виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \frac{q^4+4q^2}{\pi p_1p_2(1-q^2)^2} + O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}. \tag{1}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо p_1, p_2, q.

Доведення. Для величини

$$\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x) = f(x) - V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x), \quad r\in\mathbb{N}$$

в роботі [2] доведено рівність

$$\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^q_\beta(x+t)\left(\sigma^{(r)}_1\cos\frac{\beta\pi}{2}-\sigma^{(r)}_2\sin\frac{\beta\pi}{2}\right)dt, \qquad (2)$$

де

$$\sigma^{(r)}_1=\frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C^\nu_{r+1}q^{n-\Sigma^\alpha_p+r+\nu}\cos(n-\Sigma^\alpha_p+r-\nu)t,$$

$$\sigma^{(r)}_2=\frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C^\nu_{r+1}q^{n-\Sigma^\alpha_p+r+\nu}\sin(n-\Sigma^\alpha_p+r-\nu)t,$$

$Z^2_q(x)=1-2q\cos x+q^2$, $|\alpha|$ — кількість елементів множини α, $\Sigma^\alpha_p=\sum\limits_{j\in\alpha}p_j$.

Оскільки

$$\int\frac{dt}{(1-2q\cos t+q^2)^3}=O(1)(1-q)^{-5},$$

то, на підставі (2), для $\beta=1$, $r=2$, $p_1+p_2=n$ маємо

$$\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)=\frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f^q_\beta(x+t)}{(1-2q\cos t+q^2)^3}((q^3-3q)\sin t+\sin 2t)dt+O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}.$$

На основі отриманих інтегральних зображень можна перейти до вивчення норм відхилень по класу аналітичних функцій дійсної змінної. В силу інвариантності класу $C^q_{\beta,\infty}$ відносно зсуву за аргументом маємо

$$\mathcal{E}\left(C^q_{1,\infty};\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}\right)=\sup_{f\in C^q_{1,\infty}}\left|\frac{q}{\pi p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f^q_\beta(x+t)}{(1-2q\cos t+q^2)^3}((q^3-3q)\sin t+\sin 2t)dt+\right.$$

$$\left.+O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}\right|\le$$

$$\le\frac{q}{\pi p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|(q^3-3q)\sin t+\sin 2t|}{(1-2q\cos t+q^2)^3}dt+O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}.$$

Позначимо через $f^q_\beta(t)$ функцію, яка на періоді співпадає з функцією

$$\text{sign}\ ((q^3-3q)\sin t+\sin 2t),\quad q\in(0;1),$$

а через $f_0(x)$ — функцію, яка є згорткою функції $f_\beta^q(t)$ з відповідним ядром $P_\beta^q(t)$. Враховуючи, що

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\beta^q(t)dt = 0, \quad \operatorname{essup}|f_\beta^q(t)| \le 1,$$

маємо, що знайдена функція $f_0(x) \in C_{\beta,\infty}^q$ забезпечує виконання рівності

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q; \sigma_{n,\overline{p}}^{(2)}) = \frac{q}{\pi p_1 p_2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{|(q^3 - 3q)\sin t + \sin 2t|}{(1 - 2q\cos t + q^2)^3} dt + O(1)\frac{q^{p_1} + q^{p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}. \quad (5)$$

Обчислимо визначений інтеграл у рівності (5). Маємо

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q; \sigma_{n,\overline{p}}^{(2)}) = \frac{2q^2(3q - q^3)}{\pi p_1 p_2}[J_2(0) + J_2(\pi) - 2J_2(\arccos\frac{3q - q^3}{2}) +$$

$$+ \frac{4q^2}{\pi p_1 p_2}[2J_1(\arccos\frac{3q - q^3}{2}) - J_1(0) + J_1(\pi)],$$

де

$$J_1(t) = \int \frac{\cos t \sin t dt}{(1 - 2q\cos t + q^2)^3} \quad J_2(t) = \int \frac{\sin t dt}{(1 - 2q\cos t + q^2)^3}.$$

Оскільки

$$J_1(t) = \frac{1}{4q^2}(1 - 2q\cos t + q^2)^{-1} - \frac{1+q^2}{8q^2}(1 - 2q\cos t + q^2)^{-2} + C,$$

$$J_2(t) = -\frac{1}{4q}(1 - 2q\cos t + q^2)^{-2} + C,$$

то, виконуючи перетворення, отримуємо

$$\mathcal{E}(C_{1,\infty}^q; \sigma_{n,p}^{(2,0)}) = \frac{q^4 + 4q^2}{\pi p_1 p_2 (1 - q^2)^2} + O(1)\frac{q^{p_1} + q^{p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}.$$

Теорему доведено.

3. Висновки

Формула (1) є асимптотично точною без будь-яких додаткових умов. Отриманий результат може бути цікавим з точки зору обчислювальної математики та моделювання.

Список літератури

1. **Никольский С. М.** Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – Т. 10, № 3. – С. 207–256.
2. **Новиков О. А.** Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена / О. А. Новиков, О. Г. Ровенская // Вестник Одеского национального университета. Матем. и мех. – 2015. – Т. 19, вып. 3(23). – С. 14–26.
3. **Ровенская О. Г.** О приближении средними Фейера классов аналитических периодических функций / О. Г. Ровенская, О. А. Новиков // Чебышевский сборник. – 2020. Т. 21, № 4. – С. 218–226.
4. **Ровенская О. Г.** Приближение аналитических функций повторными суммами Валле Пуссена / О. Г. Ровенская // Компьютерные исследования и моделирование. – 2019. – Т. 11, № 3. – С. 367-377.
5. **Ровенская О. Г.** Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена / О. Г. Ровенская, О. А. Новиков // Нелинейные колебания. – 2010. – Т. 13, № 1. – С. 96–99.
6. **Ровенская О. Г.** Наближення класів інтегралів Пуассона повторними сумами Фейера / О. Г. Ровенская // Буковинський математичний журнал. – 2020. Т. 8, № 2.
7. **Рукасов В. И.** Приближение аналитических периодических функций суммами Валле Пуссена / В. И. Рукасов, С. О. Чайченко // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 12. – С. 1653–1668.
8. **Сердюк А. С.** Приближение интегралов Пуассона суммами Валле Пуссена / А. С. Сердюк // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 1. – С. 97–107.
9. **Стечкин С. Б.** Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций / С. Б. Стечкин // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1980. – Т. 145. – С. 126–151.
10. **Novikov O. O.** Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer sums / O. O. Novikov, O. G. Rovenska, Yu. A. Kozachenko // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2018. – Vol. 87. – P. 4–12.
11. **Novikov O.** Approximation of classes of Poisson integrals by repeated Fejer sums / O. Novikov, O. Rovenska // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 38, № 3. – P. 502-–509.
12. **Novikov O. O.** Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums / O. O. Novikov, O. G. Rovenska // Matematychni Studii. – 2017. – V. 47, № 2. – P. 196–201.

Ровенская О. Г.

Приближение повторными суммами Фейера классов аналитических функций

Резюме

Работа посвящена исследованию вопросов приближения в равномерной метрике периодических функций высокой гладкости тригонометрическими полиномами, которые порождаются линейными методами суммирования рядов Фурье. В работе систематизированы известные результаты, касающиеся приближения классов интегралов Пуассона средними арифметическими сумм Фурье, и представлены новые факты, полученные для их частных случаев. Изучены аппроксимативные свойства тригонометрических полиномов, которые образуются повторным применением метода суммирования Валле Пуссена на классах аналитических периодических функций действительной переменной. Найдены асимптотические формулы для верхних граней уклонений повторных сумм Фейера на классах интегралов Пуассона. Полученные формулы являются асимптотически точными без дополнительных условий.

Ключевые слова: асимптотическое равенство, линейный метод, сумма Фейера, интеграл Пуассона.

Rovenska O. G.

Approximation of classes of analytic functions by repeated Fejer sums

Summary

The paper is devoted to the approximation by arithmetic means of Fourier sums of classes of periodic functions of high smoothness. The paper presents known results related to the approximation of classes of Poisson integrals by arithmetic means of Fourier sums and new facts obtained for particular cases. In the paper is studied the approximative properties of repeated Fejer sums on the classes of periodic analytic functions of real variable. Under certain conditions, we obtained asymptotic formulas for upper bounds of deviations of repeated Fejer sums on classes of Poisson integrals. The obtained formulas are asymptotically exact without any additional conditions.

Key words: asymptotic equality, linear method, Fejer sum, Poisson integral.

References

1. Nikolsky, S. M. (1946) O priblizhenii funkcij trigonometricheskimi polinomami v srednem [Approximation of functions by trigonometric polynomials in the mean]. *Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, Vol. 10, no. 3, P. 207–256.

2. Novikov O. A., Rovenskaya O. G. (2014) Priblizhenie klassov integralov Puassona r-povtornumi summami Valle Pussena [Approximation of classes of Poisson integrals by r-repeated de la Vallee Poussin sums]. *Vestn. Odessk. Nac. Un. Mat. Meh.*, Vol. 19, No. 3(23), P. 14–26.

3. Rovenska, O. G., Novikov, O. O. (2020) O priblizhenii srednimi Fejera klassov periodicheskih analiticheskih funkcij [On the approximation by Fejer means of classes of periodic analytical functions]. *Chebyshevskij sbornik*, Vol. 21, no 4, P. 218–226.
4. Rovenska, O. G. (2019) Priblizhenie analiticheskih funkcij povtornymi summami Valle Pussena [Approximation of analytic functions by repeated de la Vallee Poussin sums]. *Komp'juternye issledovanija i modelirovanie* [Computer Research and Modeling], Vol. 11, no 3, P. 367–377.
5. Rovenska, O. G., Novikov, O. O. (2010) Approximation of Poisson integrals by repeated de la Vallee Poussin sums. *Nonlinear Oscillations*, Vol. 13, P. 108–111.
6. Rovenska, O. (2020) Nabluzhennya klassiv integraliv Puassona povtornumu sumamu Fejera [Approximation of classes of Poisson integrals by repeated Fejer sums]. *Bukovinian Mathematical Journal*, Vol. 8, no 2.
7. Rukasov, V. I., Chaichenko, S. O. (2002) Approximation of the classes of analytical functions by de la Vallee-Poussin sums. *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 54, P. 2006–2024.
8. Serdyuk, A. S. (2004) Approximation of Poisson integrals by de la Vallee Poussin sums. *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 56, P. 122–134.
9. Stechkin, S. B. (1980) Ocenka ostatka rjada Fur'e dlja differenciruemyh funkcij [Estimation of the remainder of Fourier series for the differentiable functions]. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova*, Vol. 145, P. 126–151.
10. Novikov, O. O., Rovenska, O. G., Kozachenko, Yu. A. (2018) Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer sums. *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 87, P. 4–12.
11. Novikov, O., Rovenska, O. (2017) Approximation of classes of Poisson integrals by repeated Fejer sums. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, Vol. 38, no 3, P. 502-–509.
12. Novikov, O. O., Rovenska, O. G. (2017) Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums. *Matematychni Studii*, Vol. 47, no 2, P. 196–201.

Researches in Mathematics and Mechanics. — 2021. — V. 26, Is. 1(37). — P. 63–95

UDC 539.3

Z. Yu. Zhuravlova
Odessa I.I. Mechnikov National University

THE CASE OF ANALYTICAL INVERSION OF LAPLACE TRANSFORM

The new analytical method of inversion of Laplace transforms is proposed in the article for the functions that contain exponents that linearly depend on Laplace transform parameter. This method is based on the transform's expansion into the Taylor series and term-by-term application of Laplace transform inversion. The theorems which confirm the validity and correctness of such approach are proved. This method deals with the generalized functions, so some useful consequences relating with inverse generalized functions are derived. The method is verified by the comparison with the formulas previously known from literature. The new formulas for Laplace transform's originals are given.
MSC: 44A10, 41A58, 44A35, 46F30.
Key words: Laplace transform, analytical inversion, Taylor series, generalized functions, convolution.
DOI: 10.18524/2519-206X.2021.1(37).233091.

1. Introduction

The integral transforms are widely used in many engineering and mathematical problems. The methods for inversion of Laplace transform are divided into two main groups: analytical and numerical ones. The numerical inversion of Laplace transform causes some doubts for its validity since, as it is well known [1], the Laplace transform inversion problem is not correct one. So, it is important to have new approaches for analytical inversion of Laplace transform despite many developed methods in this area.

The original function can be recovered by the Bromwich contour integral $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st}ds$ if f is continuous at t [2]. Since the function e^{st} is oscillatory on the contour $(\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$ the approximations of this integral need to know an abscissa of convergence γ. The relations that allow direct calculation of the original function from its transform dispensing contour integration were derived by the change of variables in [3]. The obtained integrals are usually calculated numerically.

Received 01.06.2021

The original function's behavior at the points $t = 0$ and $t \to \infty$ can be found by the initial-value and terminal-value theorems from the transform's function behavior at the points $s \to \infty$ and $s = 0$ respectively if it is known that original functions exist [4], [2]. The asymptotic expansions near some point α_0 can be used $F(s) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (s - \alpha_0)^{\lambda_\nu}$ if the series is absolutely convergent [5]. In this case the asymptotic behavior of the original function at the point $t \to \infty$ can be derived by the series $f(t) = e^{\alpha_0 t} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\Gamma(-\lambda_\nu)} t^{-\lambda_\nu - 1}$.

For some functions the Laplace transform inversion problem can be reduced to the problem of solving the Volterra integral equation of the first (when $x(s) = f(s)/k(s)$) or second (when $x(s) = f(s)/(1 + k(s))$) kind [12]. These equations are usually solved numerically. The inversion of the Laplace transform in UMD-spaces for resolvent families associated to an integral Volterra equation of convolution type was analyzed in [6].

The method for the mutual inversion of the Fourier-Laplace transforms was proposed by L.I. Slepyan in [7], [8]. In some cases it allows to derive the original function without usual inversion of Fourier and Laplace transforms. In more complex cases it allows to simplify the Laplace transform, which should be inverted.

The function that is presented by $F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ and satisfy some conditions can be inverted with the help of residues by the second expansion theorem [9], [4]. But the analytical finding of all poles of the transform function in many cases is impossible. If $q(s)$ has distinct zeros $\alpha_k, k = \overline{1, n}$, then Heaviside's expansion formula can be used $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{p(\alpha_k)}{q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$ [10]. The inverse formula $L^{-1}[F(1/s)] = \delta(t) \int\limits_0^\infty f(u)du - \frac{1}{\sqrt{t}} \int\limits_0^\infty \sqrt{u} f(u) J_1(2\sqrt{u}t) du$ was proven under some conditions in [11].

The first expansion theorem deals with the functions that can be expanded into series $F(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}}$. The original function $f(t)$ can be derived in this case as $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ [12], [5]. Many methods were presented in [5]. In particular, the approach dealing with the functions that can be expanded into series $F(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{\lambda_n}}$ or $F(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n(s)$ under some conditions was proposed by G. Doetsch in [5]. But there were no examples of dealing with generalized functions.

As it is seen, the problem of analytical inversion of Laplace transform is relevant and extremely important. The method, proposed in the article, can be used for some dynamic problems of elasticity, for example it can be applied for the non-stationary statement of the elastic semi-strip as development of the methodic proposed in [13].

2. Theoretical results

The present article is dedicated to the analytical inversion of Laplace transform of the following form

$$F\left(c_0+\sum_{i=1}^{N} c_i e^{-sA_i}\right) \tag{1}$$

Here $A_i > 0, i = \overline{1,N}$, $c_i, i = \overline{1,N}, c_0 \neq 0$ are real constants or functions, which do not depend on parameter of Laplace transform s, $N \geq 1$ is natural number, F is a known function.

2.1. Case 1

The inversion of (1) depend on the correspondences between $A_i, i = \overline{1,N}$. First consider the case when $A_i = n_i A_q, i = \overline{1,N}$, $n_i, i = \overline{1,N}$ are natural numbers, for some fixed number $1 \leq q \leq N$. Then the transform (1) can be rewritten in the following form

$$F\left(c_0+\sum_{i=1}^{N} c_i e^{-sn_iA_q}\right) \tag{2}$$

Denote the function of the complex variable s e^{-sA_q} as z. Since $\Re s > 0$, then $|e^{-sA_q}| = |z| < 1$. The expression (2) can be rewritten as

$$f(z) = F\left(c_0+\sum_{k=1}^{N} c_k z^{n_k}\right) \tag{3}$$

It is supposed that the function (3) satisfies Cauchy-Riemann conditions in some domain $|z| < \vartheta < 1$.

For example, if $F\left(c_0+\sum\limits_{k=1}^{N} c_k z^{n_k}\right) = \frac{1}{c_0+\sum\limits_{k=1}^{N} c_k z^{n_k}}$, than this function has $\max\limits_{1\leq k\leq N} n_k = \eta$ singular points $z_i = \alpha_i, i = \overline{1,\eta}$. So, the points $s_i =$

$-\frac{1}{A_q}\ln\alpha_i, i=\overline{1,\eta}$ are singular points for the function (2). Since γ in the formula of the inverse Laplace transform $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(s)e^{st}dt$ is the abscissa in the semi-plane of the Laplace integral's absolute convergence [5], so $\Re s > \nu > 0$, where $\nu = \max\left\{\max\limits_{1\le i\le\nu}\Re\left\{-\frac{1}{A_q}\ln\alpha_i\right\},0\right\}$. Thus, when $\Re s > \nu > 0$ it is fulfilled that $|e^{-sA_q}| = |z| < \vartheta < 1$, where $\vartheta = e^{-\nu A_q}$. So, the function (3) in the domain $|z| < \vartheta < 1$ does not have any singular points. By the the proved in [14] lemma this function satisfies Cauchy-Riemann conditions in the domain $|z| < \vartheta < 1$. Some other examples of the function (3) are given in Appendix A.

Theorem 1. *If the function (3) satisfies Cauchy-Riemann conditions in some domain $|z| < \vartheta < 1$, then $L^{-1}\left[F\left(c_0+\sum\limits_{i=1}^{N} c_i e^{-sn_iA_q}\right)\right] = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\delta(t-kA_q)$, where the function $f(z)$ has the form (3).*

Proof. **I Proof of the correctness of the function's (3) expansion into Taylor series**

By the theorem's statement the function (3) satisfies Cauchy-Riemann conditions and, therefore, it is holomorphic and regular [15] for all $|z| < \vartheta < 1$.

According to the theorems [15] the regular function (3) in the circle K : $|z| < \vartheta$ can be presented by Taylor series

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k \tag{4}$$

Power series inside the circle of convergence can be term-by-term integrated and differentiated any number of times, moreover the radius of convergence of the derived series is equal to the radius of convergence of the original series [16].

II Application of the inverse Laplace transform to the series (4)

Thus, the series (4) has the radius of convergence $R = \vartheta$, within which this series can be term-by-term integrated. That is the following is true:

$$L^{-1}\left[F\left(c_0+\sum_{i=1}^{N} c_i e^{-sn_iA_q}\right)\right] = L^{-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\delta(t-kA_q)$$

Let's prove that the derived series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \delta(t - kA_q) \tag{5}$$

converges in the sense that all series

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \delta(t - kA_q), \varphi(t) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \varphi(kA_q) \tag{6}$$

absolutely converge for all functions $\varphi(t) \in S_\nu \cup K^0$, where $S_\nu \subset S$, S is the main space containing all infinitely differentiable functions which when $|t| \to \infty$ tends to zero with all their derivatives of any order faster than any power $1/|t|$ [17], S_ν contains such infinitely differentiable functions that when $t \to +\infty$ tends to zero with all their derivatives of any order faster than $e^{-\nu t}$, K^0 is the main space containing all continuous functions that are zero outside some bounded domain [17]. Obviously, if the absolute convergence of series (6) is proved for all functions from the spaces S_ν and K^0, then it will also take place for the functions from the main spaces $K^m, m > 0, K$, since $K \subset K^m \subseteq K^0$ [17].

Let's prove the convergence of the following series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left| f^{(k)}(0) \right|}{k!} \left| \varphi(kA_q) \right| \tag{7}$$

III Proof of the series' (7) convergence for $\varphi(t) \in S_\nu$

According to [18] if the limit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K < \infty$ exists then the convergence of the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ with positive terms implies the convergence of the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ with positive terms.

Let's make a comparison with the series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left| f^{(k)}(0) \right|}{k!} z_0^k, \tag{8}$$

which is the series with positive terms. By Abel's theorem [16], the convergence of the series (4) in the circle $K : |z| < \vartheta$ implies the convergence of the series (8) when $0 < z_0 < \vartheta$. Let's set $z_0 = e^{-\nu A_q} - \varepsilon_0$ for some small fixed $\varepsilon_0 > 0$. Since $\vartheta = e^{-\nu A_q}$ and $\varepsilon_0 > 0$ is small, then $0 < z_0 < \vartheta$.

Let's prove that

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!}\left|\varphi(kA_q)\right|}{\frac{\left|f^{(k)}(0)\right|}{k!}z_0^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left|\varphi(kA_q)\right|}{z_0^k}<\infty \tag{9}$$

for the functions $\varphi(t)\in S_\nu$.

Let's rewrite the limit (9) in the following form $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|\varphi(kA_q)|}{\left(e^{-\nu A_q}-\varepsilon_0\right)^k}$ or, the same, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|\varphi(kA_q)|}{e^{-k\nu A_q}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{e^{-\nu A_q}}\right)^k}$.

Accordingly to [19] $(1+x)^n\geq 1+nx, x>-1, n>1$. Note that this inequality also holds when $n=0$ and $n=1$. Thus,

$$0\leq\frac{\left|\varphi(kA_q)\right|}{e^{-k\nu A_q}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{e^{-\nu A_q}}\right)^k}\leq\frac{\left|\varphi(kA_q)\right|}{e^{-k\nu A_q}\left(1-k\frac{\varepsilon_0}{e^{-\nu A_q}}\right)} \tag{10}$$

since from $z_0=e^{-\nu A_q}-\varepsilon_0>0$ it follows that $\frac{\varepsilon_0}{e^{-\nu A_q}}<1$ and $-\frac{\varepsilon_0}{e^{-\nu A_q}}>-1$.

Due to the fact that $\varphi(t)\in S_\nu$, $\varphi(kA_q)$ decreases on $+\infty$ faster than $e^{-\nu kA_q}$. So, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|\varphi(kA_q)|}{e^{-k\nu A_q}}=0$. And $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1-k\frac{\varepsilon_0}{e^{-\nu A_q}}\right)=\infty$. Then by the theorem of the limit of the quotient [20] it is derived that

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left|\varphi(kA_q)\right|}{e^{-k\nu A_q}\left(1-k\frac{\varepsilon_0}{e^{-\nu A_q}}\right)}=0 \tag{11}$$

Thus from (10) with regard to (11) by the property of comparison of limits [20] it is derived that $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|\varphi(kA_q)|}{e^{-k\nu A_q}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{e^{-\nu A_q}}\right)^k}=0<\infty$. That is (9) holds. Then by the theorem the series (7) converges for all functions $\varphi(t)\in S_\nu$.

IV Proof of the series' (7) convergence for $\varphi(t)\in K^0$

Note that for the functions $\varphi(t)\in K^0$, since they are equal to zero outside some bounded domain, there exists a number N such that $|\varphi(kA_q)|=0$ for $k>N$. In this case, the convergence of the series (7) can be proved by another theorem, according to which if, at least starting from some place (say, for $n>N$), the inequality $a_n\leq b_n$ holds, then the convergence of the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ with positive terms implies the convergence of the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ with positive terms [18]. Then for $k>N$ the following correspondence takes place $0=\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}|\varphi(kA_q)|\leq\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}z_0^k$. Hence the series (7) is convergent for all functions $\varphi(t)\in K^0$. Thus, it is proved that the series (6) converges absolutely for all functions $\varphi(t) \in S_\nu \cup K^0$, and the series (5) converges in the sense indicated earlier.

The proved convergence of the series (5) implies the correctness of the term-by-term application of the series (5) to any function from the spaces $K^m, m \geq 0, K, S_\nu$.

V Proof that the resulting series (5) is the original for the Laplace transform (2)

Now let's prove that the resulting series (5) is the original for the Laplace transform (2). For this, the Laplace transform is applied to the series (5)

$$L\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\delta(t-kA_q)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}e^{-skA_q}$$

Let's prove that the series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}e^{-skA_q} \tag{12}$$

converges to the known transform (2).

The series (12), taking into account the change of variables $z = e^{-sA_q}$, can be written as (4), that is, it is an expansion of the function $f(z)$ (3) in Taylor series. According to the theorems [15] and the proved regularity of the function $f(z)$, it is derived that the series (12) converges to the function $f(z)$ (3) with the radius of convergence $R = \vartheta$, which corresponds to the entire range of the variable $|z| < \vartheta$.

The statement of the theorem is proved.

2.2. Case 2

Let's consider the most general case when $A_i = \sum\limits_{j=1}^{m} n_{ij}A_{q_j}, i = \overline{1,N}$, $n_{ij}, i = \overline{1,N}, j = \overline{1,m}, m > 1$ are natural numbers, for some fixed numbers $1 \leq q_j \leq N$, moreover $A_{q_j} \neq A_{q_k}, j \neq k, j, k = \overline{1,m}$. Then the transform (1) can be rewritten as

$$F\left(c_0 + \sum_{i=1}^{N} c_i e^{-s\sum\limits_{j=1}^{m} n_{ij}A_{q_j}}\right) \tag{13}$$

Denote the functions of the complex variable s as $z_j = e^{-sA_{q_j}}, j = \overline{1,m}$. Since $\Re s > 0$, then $|e^{-sA_{q_j}}| = |z_j| < 1$. The expression (13) can be rewritten as

$$f(z_1,\ldots,z_m)=F\left(c_0+\sum_{k=1}^{N}c_k\prod_{j=1}^{m}z_j^{n_{kj}}\right) \tag{14}$$

It is supposed that the function (14) satisfies Cauchy-Riemann conditions in some domain $|z_j|<\vartheta_j<1, j=\overline{1,m}$.

For example, if $F\left(c_0+\sum\limits_{k=1}^{N}c_k\prod\limits_{j=1}^{m}z_j^{n_{kj}}\right)=\frac{1}{c_0+\sum\limits_{k=1}^{N}c_k\prod\limits_{j=1}^{m}z_j^{n_{kj}}}$, than this function has $\max\limits_{1\le k\le N}n_{k1}=\eta$ singular points $z_{i1}=\alpha_i(z_2,\ldots,z_m), i=\overline{1,\eta}$. So, the points $s_i=\nu_i, i=\overline{1,\eta}$ that can be found from the equation $s_i=-\frac{1}{A_{q_1}}\ln\alpha_i\left(e^{-s_iA_{q_2}},\ldots,e^{-s_iA_{q_m}}\right), i=\overline{1,\eta}$ are singular points for the function (13). Since γ in the formula of the inverse Laplace transform $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}f(s)e^{st}ds$ is the abscissa in the semi-plane of the Laplace integral's absolute convergence [5], so $\Re s>\nu>0$, where $\nu=\max\{\max\limits_{1\le i\le\eta}\nu_i,0\}$. Thus, when $\Re s>\nu>0$ it is fulfilled that $|e^{-sA_{q_j}}|=|z_j|<\vartheta_j<1, j=\overline{1,m}$, where $\vartheta_j=e^{-\nu A_{q_j}}, j=\overline{1,m}$. So, the function (14) in the domain $|z_j|<\vartheta_j<1, j=\overline{1,m}$ does not have any singular points.

Theorem 2. *If the function (3) satisfies Cauchy-Riemann conditions in some domain* $|z_j|<\vartheta_j<1, j=\overline{1,m}$, *then* $L^{-1}\left[F\left(c_0+\sum\limits_{i=1}^{N}c_ie^{-s\sum\limits_{j=1}^{m}n_{ij}A_{q_j}}\right)\right]=\sum\limits_{k_1,\ldots,k_m=0}^{\infty}\frac{1}{k_1!\ldots k_m!}\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_m}f(0,\ldots,0)}{\partial z_1^{k_1}\ldots\partial z_m^{k_m}}\delta(t-k_1A_{q_1}-\ldots-k_mA_{q_m})$, *where* $f(z_1,\ldots,z_m)$ *has the form (14).*

Proof. **I Proof of the correctness of the function's (14) expansion into Taylor series**

First let's prove that the function (14) is holomorphic. By the Hartogs-Osgood theorem [21] a complex-valued function $f(x_1,...,x_m)$ is holomorphic on an open set $U\subset\mathbb{C}^m$ (here $\mathbb{C}$ is the complex space) if, for each point $a=(a_1,...,a_m)\in U$ and each number $j(1\le j\le m)$, the function $f(a_1,...,a_{j-1},x_j,a_{j+1},...,a_m)$ of one complex variable x_j defined on the open set $\{x_j\in\mathbb{C}|(a_1,...,a_{j-1},x_j,a_{j+1},...,a_m)\in U\}\subset\mathbb{C}^m$, is holomorphic on the indicated open sets of the space $\mathbb{C}$.

Let's consider m functions $f(a_1,...,a_{j-1},z_j,a_{j+1},...,a_m), j=\overline{1,m}$, where $a_j\in\mathbb{C}, j=\overline{1,m}$ are arbitrary points for which it holds that $|a_j|<\vartheta_j<1, j=$

$\overline{1,m}$, and prove that they all satisfy Cauchy-Riemann conditions.

$$f(a_1, ..., a_{j-1}, z_j, a_{j+1}, ..., a_m) = F\left(d_0 + \sum_{k=1}^{N} d_k z_j^{n_{k_j}}\right), j = \overline{1,m}$$

where $d_0 = c_0, d_k = c_k \prod\limits_{j=1, i\neq j}^{m} a_i^{n_{ki}}, k = \overline{1,N}$.

Note that this function coincides with the function $f(z_j) = F\left(c_0 + \sum\limits_{k=1}^{N} c_k z_j^{n_k}\right)$ (3) which by the theorem's condition satisfies Cauchy-Riemann conditions in the domain $|z_j| < \vartheta_j < 1, j = \overline{1,m}$. So, according to [22] all functions $f(a_1, ..., a_{j-1}, z_j, a_{j+1}, ..., a_m), j = \overline{1,m}$ are holomorphic when $|z_j| < \vartheta_j < 1, j = \overline{1,m}$ for any points $a_j \in \mathbb{C}, j = \overline{1,m}$ such that $|a_j| < \vartheta_j < 1, j = \overline{1,m}$. Hence, by the Hartogs-Osgood theorem, the function (14) is holomorphic on the open set $P = \left\{(z_1, ..., z_m) \in C^m \middle| |z_j| < \vartheta_j, j = \overline{1,m}\right\}$.

According to the theorem [21] the holomorphic in an open polycylinder $P = \left\{(z_1, ..., z_m) \in \mathbb{C}^m \middle| |z_j| < \vartheta_j, j = \overline{1,m}\right\}$ function (14) is uniquely expanded into the absolutely convergent Taylor series

$$\sum_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} \frac{1}{k_1!...k_m!} \frac{\partial^{k_1+...+k_m} f(0, ..., 0)}{\partial z_1^{k_1} ... \partial z_m^{k_m}} \prod_{j=1}^{m} z_j^{k_j} \tag{15}$$

II Application of the inverse Laplace transform to the series (15)

Accordingly, the following is true:

$$L^{-1}\left[F\left(c_0 + \sum_{i=1}^{N} c_i e^{-s\sum\limits_{j=1}^{m} n_{ij} A_{q_j}}\right)\right] =$$
$$= L^{-1}\left[\sum_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} \frac{1}{k_1!...k_m!} \frac{\partial^{k_1+...+k_m} f(0,...,0)}{\partial z_1^{k_1} ... \partial z_m^{k_m}} \prod_{j=1}^{m} z_j^{k_j}\right] =$$
$$= \sum_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} \frac{1}{k_1!...k_m!} \frac{\partial^{k_1+...+k_m} f(0,...,0)}{\partial z_1^{k_1} ... \partial z_m^{k_m}} \delta(t - k_1 A_{q_1} - ... - k_m A_{q_m})$$

Let's prove that the derived series

$$\sum_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} \frac{1}{k_1!...k_m!} \frac{\partial^{k_1+...+k_m} f(0, ..., 0)}{\partial z_1^{k_1} ... \partial z_m^{k_m}} \delta(t - k_1 A_{q_1} - ... - k_m A_{q_m}) \tag{16}$$

converges in the sense that all series

$$\left(\sum_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} \frac{1}{k_1!...k_m!} \frac{\partial^{k_1+...+k_m} f(0,...,0)}{\partial z_1^{k_1}...\partial z_m^{k_m}} \delta(t - k_1 A_{q_1} - ... - k_m A_{q_m}), \varphi(t) \right) = \\ = \sum_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} \frac{1}{k_1!...k_m!} \frac{\partial^{k_1+...+k_m} f(0,...,0)}{\partial z_1^{k_1}...\partial z_m^{k_m}} \varphi(k_1 A_{q_1} + ... + k_m A_{q_m}) \tag{17}$$

absolutely converge for all functions $\varphi(t) \in S_\nu \cup K^0$, where S_ν and K^0 are the spaces described in the theorem 1.

Let's prove the convergence of the following series

$$\sum_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} \frac{1}{k_1!...k_m!} \left| \frac{\partial^{k_1+...+k_m} f(0,...,0)}{\partial z_1^{k_1}...\partial z_m^{k_m}} \right| |\varphi(k_1 A_{q_1} + ... + k_m A_{q_m})| \tag{18}$$

III Proof of the series' (18) convergence for $\varphi(t) \in S_\nu$

III.1 Proof of the limit case theorem for multiple series' convergence

According to [18] and the theorem [23] if for two multiple series $\sum\limits_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} u_{k_1,..,k_m}$ and $\sum\limits_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} v_{k_1,..,k_m}$ with positive terms there are such $k_{01},..,k_{0m}$ that when $k_i > k_{0i}, i = \overline{1,m}$ the inequalities $u_{k_1,..,k_m} \le v_{k_1,..,k_m}$ hold, then the convergence of the multiple series $\sum\limits_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} v_{k_1,..,k_m}$ implies the convergence of the multiple series $\sum\limits_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} u_{k_1,..,k_m}$. Also the limit case of this theorem can be formulated. If the multiple limit $\lim\limits_{k_1,...,k_m \to \infty} \frac{u_{k_1,..,k_m}}{v_{k_1,..,k_m}} = K < \infty$, then the convergence of the multiple series $\sum\limits_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} v_{k_1,..,k_m}$ implies the convergence of the multiple series $\sum\limits_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} u_{k_1,..,k_m}$. Indeed, if $\lim\limits_{k_1,...,k_m \to \infty} \frac{u_{k_1,..,k_m}}{v_{k_1,..,k_m}} = K < \infty$ then by the definition of the multiple limit [20] the following holds: for each $\varepsilon > 0$, no matter how small it may be, there exists a number N such that for all $k_i > N, i = \overline{1,m}$: $|\frac{u_{k_1,..,k_m}}{v_{k_1,..,k_m}} - K| < \varepsilon$ or $\frac{u_{k_1,..,k_m}}{v_{k_1,..,k_m}} < K + \varepsilon$. That is the following estimation holds $u_{k_1,..,k_m} < (K+\varepsilon) v_{k_1,..,k_m}$. By the theorem of the multiplication of the multiple series by the digit [23], the series $\sum\limits_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} (K+\varepsilon) v_{k_1,..,k_m}$ converges. Then by the theorem indicated earlier the series $\sum\limits_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} u_{k_1,..,k_m}$ converges.

III.2 Comparison with the convergent series

Let's make a comparison with the series

$$\sum_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} \frac{1}{k_1!...k_m!} \left| \frac{\partial^{k_1+...+k_m} f(0,...,0)}{\partial z_1^{k_1}...\partial z_m^{k_m}} \right| \prod_{j=1}^{m} z_{0j}^{k_j}, \tag{19}$$

which is the series with positive terms. The absolute convergence of the series (15) in the polycylinder $P = \left\{(z_1,...,z_m) \in \mathbb{C}^m \middle| |z_j| < \vartheta_j, j = \overline{1,m}\right\}$ implies the absolute convergence of the series (19) when $0 < z_{0j} < \vartheta_j, j = \overline{1,m}$. Let's set $z_{0j} = e^{-\nu A_{q_j}} - \varepsilon_j, j = \overline{1,m}$ for some small fixed $\varepsilon_j > 0, j = \overline{1,m}$. Since $\vartheta_j = e^{-\nu A_{q_j}}, j = \overline{1,m}$ and $\varepsilon_j > 0, j = \overline{1,m}$ are small, then $0 < z_{0j} < \vartheta_j, j = \overline{1,m}$.

Let's prove that

$$\begin{gathered}\lim_{k_1,...,k_m\to\infty} \frac{\frac{1}{k_1!...k_m!}\left|\frac{\partial^{k_1+...+k_m} f(0,...,0)}{\partial z_1^{k_1}...\partial z_m^{k_m}}\right| \left|\varphi(k_1A_{q_1}+...+k_mA_{q_m})\right|}{\frac{1}{k_1!...k_m!}\left|\frac{\partial^{k_1+...+k_m} f(0,...,0)}{\partial z_1^{k_1}...\partial z_m^{k_m}}\right| \prod\limits_{j=1}^{m} z_{0j}^{k_j}} = \\ = \lim_{k_1,...,k_m\to\infty} \frac{\left|\varphi(k_1A_{q_1}+...+k_mA_{q_m})\right|}{\prod\limits_{j=1}^{m} z_{0j}^{k_j}} < \infty\end{gathered} \tag{20}$$

for the functions $\varphi(t) \in S_\nu$.

Let's rewrite the limit (20) in the following form $\lim\limits_{k_1,...,k_m\to\infty} \frac{\left|\varphi(k_1A_{q_1}+...+k_mA_{q_m})\right|}{\prod\limits_{j=1}^{m}\left(e^{-\nu A_{q_j}}-\varepsilon_j\right)^{k_j}}$ or, the same, $\lim\limits_{k_1,...,k_m\to\infty} \frac{\left|\varphi(k_1A_{q_1}+...+k_mA_{q_m})\right|}{\prod\limits_{j=1}^{m} e^{-k_j\nu A_{q_j}} \prod\limits_{j=1}^{m}\left(1-\frac{\varepsilon_j}{e^{-\nu A_{q_j}}}\right)^{k_j}}$.

Accordingly to [19] $(1 + x)^n \geq 1 + nx, x > -1, n > 1$. Note that this inequality also holds when $n = 0$ and $n = 1$. Thus,

$$0 \leq \frac{|\varphi(k_1A_{q_1} + ... + k_mA_{q_m})|}{\prod\limits_{j=1}^{m} e^{-k_j\nu A_{q_j}} \prod\limits_{j=1}^{m}\left(1 - \frac{\varepsilon_j}{e^{-\nu A_{q_j}}}\right)^{k_j}} \leq \frac{|\varphi(k_1A_{q_1} + ... + k_mA_{q_m})|}{\prod\limits_{j=1}^{m} e^{-k_j\nu A_{q_j}} \prod\limits_{j=1}^{m}\left(1 - k_j\frac{\varepsilon_j}{e^{-\nu A_{q_j}}}\right)} \tag{21}$$

since from $z_{0j} = e^{-\nu A_{q_j}} - \varepsilon_j > 0, j = \overline{1,m}$ it follows that $\frac{\varepsilon_j}{e^{-\nu A_{q_j}}} < 1, j = \overline{1,m}$ and $-\frac{\varepsilon_j}{e^{-\nu A_{q_j}}} > -1, j = \overline{1,m}$.

Due to the fact that $\varphi(t) \in S_\nu$, $\varphi(k_1A_{q_1} + ... + k_mA_{q_m})$ decreases on $+\infty$ faster than $e^{-\nu(k_1A_{q_1}+...+k_mA_{q_m})}$. So, $\lim\limits_{k_1,...,k_m\to\infty} \frac{\left|\varphi(k_1A_{q_1}+...+k_mA_{q_m})\right|}{\prod\limits_{j=1}^{m} e^{-k_j\nu A_{q_j}}} = 0$. And

by the theorem of limit of the product [20] $\lim\limits_{k_1,\dots,k_m\to\infty}\prod\limits_{j=1}^{m}\left(1-k_j\frac{\varepsilon_j}{e^{-\nu A_{q_j}}}\right)=\infty$.
Then by the theorem of the limit of the quotient [20] it is derived that

$$\lim_{k_1,\dots,k_m\to\infty}\frac{|\varphi(k_1A_{q_1}+\dots+k_mA_{q_m})|}{\prod\limits_{j=1}^{m}e^{-k_j\nu A_{q_j}}\prod\limits_{j=1}^{m}\left(1-k_j\frac{\varepsilon_j}{e^{-\nu A_{q_j}}}\right)}=0 \tag{22}$$

III.3 Proof of the comparison theorem for multiple limits

Let's prove for the multiple limits the following comparison theorem. If for the sequences $x_{k_1,\dots,k_m}, y_{k_1,\dots,k_m}, z_{k_1,\dots,k_m}$ the inequalities $x_{k_1,\dots,k_m}\le y_{k_1,\dots,k_m}\le z_{k_1,\dots,k_m}$ always hold, and the sequences $x_{k_1,\dots,k_m}, z_{k_1,\dots,k_m}$ tend to the common multiple limit $\lim\limits_{k_1,\dots,k_m\to\infty}x_{k_1,\dots,k_m}=\lim\limits_{k_1,\dots,k_m\to\infty}z_{k_1,\dots,k_m}=a$, then the sequence $y_{k_1,\dots,k_m}$ also has the same multiple limit $\lim\limits_{k_1,\dots,k_m\to\infty}y_{k_1,\dots,k_m}=a$. Let's fix some arbitrary $\varepsilon>0$. For it there is some number N_1 that when $k_i>N_1, i=\overline{1,m}$ the following holds $a-\varepsilon<x_{k_1,\dots,k_m}<a+\varepsilon$. Also there is some number N_2 that when $k_i>N_1, i=\overline{1,m}$ the following holds $a-\varepsilon<z_{k_1,\dots,k_m}<a+\varepsilon$. Choosing $N>\max\{N_1,N_2\}$ for $k_i>N, i=\overline{1,m}$ both previous double inequalities hold and then $a-\varepsilon<x_{k_1,\dots,k_m}\le y_{k_1,\dots,k_m}\le z_{k_1,\dots,k_m}<a+\varepsilon$. Thus,

$$a-\varepsilon<y_{k_1,\dots,k_m}<a+\varepsilon \quad\text{or}\quad |y_{k_1,\dots,k_m}-a|<\varepsilon$$

when $k_i>N$, $i=\overline{1,m}$. That is

$$\lim_{k_1,\dots,k_m\to\infty}y_{k_1,\dots,k_m}=a$$

is proved.

Thus from (21) with regard to (22) by the proven property of comparison of multiple limits it is derived that

$$\lim_{k_1,\dots,k_m\to\infty}\frac{|\varphi(k_1A_{q_1}+\dots+k_mA_{q_m})|}{\prod\limits_{j=1}^{m}e^{-k_j\nu A_{q_j}}\prod\limits_{j=1}^{m}\left(1-\frac{\varepsilon_j}{e^{-\nu A_{q_j}}}\right)^{k_j}}=0<\infty.$$

That is (20) holds. Then by the theorem the series (18) converges for all functions $\varphi(t)\in S_\nu$.

IV Proof of the series' (18) convergence for $\varphi(t)\in K^0$

Note that for the functions $\varphi(t)\in K^0$, since they are equal to zero outside some bounded domain, there exist numbers $k_{01},\dots,k_{0m}$ such that

$$|\varphi(k_1A_{q_1}+\dots+k_mA_{q_m})|=0$$

for $k_i > k_{0i}$, $i = \overline{1,m}$. In this case the convergence of the series (18) can be proved by the indicated earlier theorem of the comparison of the multiple series with positive terms. Then for $k_i > k_{0i}, i = \overline{1,m}$:

$$0 = \frac{1}{k_1!...k_m!}\left|\frac{\partial^{k_1+...+k_m} f(0,...,0)}{\partial z_1^{k_1}...\partial z_m^{k_m}}\right| |\varphi(k_1 A_{q_1} + ... + k_m A_{q_m})| \leq$$

$$\leq \frac{1}{k_1!...k_m!}\left|\frac{\partial^{k_1+...+k_m} f(0,...,0)}{\partial z_1^{k_1}...\partial z_m^{k_m}}\right| \prod_{i=1}^{m} z_{0i}^{k_i}$$

is derived. Therefore, the series (18) is convergent for all functions $\varphi(t) \in K^0$. Thus, it is proved that the series (17) converges absolutely for all functions $\varphi(t) \in S_\nu \cup K^0$, and the series (16) converges in the sense indicated earlier.

The proved convergence of the series (16) implies the correctness of the term-by-term application of the series (16) to any function from the spaces $K^m, m \geq 0, K, S_\nu$.

V Proof that the resulting series (16) is the original for the Laplace transform (13)

Now let's prove that the resulting series (16) is the original for the Laplace transform (13). For this, the Laplace transform is applied to the series (16)

$$L\left[\sum_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} \frac{1}{k_1!...k_m!}\frac{\partial^{k_1+...+k_m} f(0,...,0)}{\partial z_1^{k_1}...\partial z_m^{k_m}}\delta(t - k_1 A_{q_1} - ... - k_m A_{q_m})\right] =$$

$$= \sum_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} \frac{1}{k_1!...k_m!}\frac{\partial^{k_1+...+k_m} f(0,...,0)}{\partial z_1^{k_1}...\partial z_m^{k_m}} e^{-s\sum\limits_{j=1}^{m} k_j A_{q_j}}$$

Let's prove that the derived series

$$\sum_{k_1,...,k_m=0}^{\infty} \frac{1}{k_1!...k_m!}\frac{\partial^{k_1+...+k_m} f(0,...,0)}{\partial z_1^{k_1}...\partial z_m^{k_m}} e^{-s\sum\limits_{j=1}^{m} k_j A_{q_j}} \tag{23}$$

converges to the known transform (13).

The series (23), taking into account the change of variables $z_j = e^{-sA_{q_j}}, j = \overline{1,m}$, can be written as (15), that is, it is an expansion of the function $f(z_1,...,z_m)$ (14) in Taylor series. According to the theorems [21] and the proved holomorphy of the function $f(z_1,...,z_m)$, it is derived that the series (23) converges to the function $f(z_1,...,z_m)$ (14) with the radiuses of convergence $r_j = \vartheta_j, j = \overline{1,m}$, which corresponds to the entire range of the variables $|z_j| < \vartheta_j, j = \overline{1,m}$.

The statement of the theorem is proved.

2.3. Relation with the convolution

Let's consider the function of the structure (1)

$$\frac{1}{c_0 + \sum\limits_{i=1}^{N} c_i e^{-sA_i}} \tag{24}$$

and the most general form of the transform, the partial case of which is the function (24)

$$x^L(s) = \frac{f^L(s)}{c_0 + K^L(s)} \tag{25}$$

Here $f(t) = \delta(t), K(t) = \sum\limits_{i=1}^{N} c_i \delta(t - A_i)$ for the function (24). As it was shown in [14], the equation (25) can be written using convolution [17]

$$\left[c_0\delta(t) + \sum_{i=1}^{N} c_i\delta(t - A_i)\right] * x(t) = \delta(t) \tag{26}$$

That is, finding the original $x(t)$ is reduced to the solving of the convolution equation (26). So, the derived results from the theorems regarding the function (24) can be verified using the convolution. Also the following consequences can be formulated

Consequence 1 $\left[c_0\delta(t) + \sum\limits_{i=1}^{N} c_i\delta(t - n_i A_m)\right]^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\delta(t - kA_m),$ *where* $f(z) = \frac{1}{c_0 + \sum\limits_{k=1}^{N} c_k z^{n_k}}$.

Consequence 2

$$\left[c_0\delta(t) + \sum_{i=1}^{N} c_i\delta(t - k_1A_{q_1} - \ldots - k_mA_{q_m})\right]^{-1}$$
$$= \sum_{k_1,\ldots,k_m=0}^{\infty} \frac{1}{k_1!...k_m!} \frac{\partial^{k_1+...+k_m} f(0,...,0)}{\partial z_1^{k_1}...\partial z_m^{k_m}} \delta(t - k_1A_{q_1} - ... - k_mA_{q_m}),$$

where $f(z_1, \ldots, z_m) = \frac{1}{c_0 + \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \prod\limits_{j=1}^{m} z_j^{n_{kj}}}$.

The verification of the theorems for some examples of the function (24) using given consequences is done in Appendix B.

3. Conclusions

In the article the new method for the analytical inversion of the Laplace transform is proposed for some cases. The theorems are proved. The results derived by the new method are compared with the formulas known in literature. The new formulas of analytical inversion of Laplace transform are presented. This method can be used for the mechanical problems dealing with Laplace transform.

A. Some other examples of functions of the structure (2)

A.1. Logarithmic case

The transform (2) can be written in the following form

$$\ln\left|c_0 + \sum_{i=1}^{N} c_i e^{-sn_iA_q}\right| \tag{A.1}$$

The function (3) in this case can be written as

$$f(z) = \ln\left|c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k z^{n_k}\right| \tag{A.2}$$

This function has $\max\limits_{1\le k\le N} n_k = \eta$ singular points $z_i = \alpha_i, i = \overline{1,\eta}$. So, the points $s_i = -\frac{1}{A_q}\ln\alpha_i, i = \overline{1,\eta}$ are singular points for the function (A.1). Since γ in the formula of the inverse Laplace transform $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(s)e^{st}dt$ is the abscissa in the semi-plane of the Laplace integral's absolute convergence [5], so $\Re s > \nu > 0$, where $\nu = \max\left\{\max\limits_{1\le i\le\nu}\Re\left\{-\frac{1}{A_q}\ln\alpha_i\right\}, 0\right\}$. Thus, when $\Re s > \nu > 0$ it is fulfilled that $|e^{-sA_q}| = |z| < \vartheta < 1$, where $\vartheta = e^{-\nu A_q}$. So, the function (A.2) in the domain $|z| < \vartheta < 1$ does not have any singular points.

Lemma 1 The function (A.2) satisfies Cauchy-Riemann conditions in the domain $|z| < \vartheta < 1$ where it has no singular points.

Proof. Cauchy-Riemann conditions for the function $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ have the following form [15]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{A.3}$$

The function (A.2) can be rewritten in the following form

$$f(z) = \ln\left|c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k z^{n_k}\right| = \begin{cases} \ln\left(c_0 + \sum\limits_{k=1}^{N} c_k (x+iy)^{n_k}\right), c_0 + \sum\limits_{k=1}^{N} c_k (x+iy)^{n_k} > 0, \\ \ln\left(-c_0 - \sum\limits_{k=1}^{N} c_k (x+iy)^{n_k}\right), c_0 + \sum\limits_{k=1}^{N} c_k (x+iy)^{n_k} < 0 \end{cases} \quad \text{(A.4)}$$

Calculate partial derivatives of the first function in (A.4):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} c_k n_k (x+iy)^{n_k - 1}}{c_0 + \sum\limits_{k=1}^{N} c_k (x+iy)^{n_k}}; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} c_k n_k i (x+iy)^{n_k - 1}}{c_0 + \sum\limits_{k=1}^{N} c_k (x+iy)^{n_k}} \quad (A.5)$$

Note that partial derivatives of the second function in (A.4) have the same form (A.5).

Let's rewrite the denominator

$$\frac{1}{c_0 + \sum\limits_{k=1}^{N} c_k z^{n_k}} = \frac{1}{c_0 + \sum\limits_{k=1}^{N} c_k (x+iy)^{n_k}} = \frac{1}{c_0 + \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \sum\limits_{l=0}^{n_k} C_{n_k}^{l} x^{n_k - l} (iy)^l} =$$

$$= \frac{1}{c_0 + \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \sum\limits_{l=0}^{[n_k/2]} C_{n_k}^{2l} x^{n_k - 2l} (-1)^l y^{2l} + i \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \sum\limits_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k}^{2l+1} x^{n_k - 2l - 1} (-1)^l y^{2l+1}} =$$

$$= \frac{1}{Re + iIm} = \frac{Re - iIm}{Re^2 + Im^2}$$

Here

$$\begin{aligned} Re(x,y) &= c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{l=0}^{[n_k/2]} C_{n_k}^{2l} x^{n_k - 2l} (-1)^l y^{2l}, \\ Im(x,y) &= \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k}^{2l+1} x^{n_k - 2l - 1} (-1)^l y^{2l+1}, \end{aligned} \quad \text{(A.6)}$$

where $[n_k/2]$ and $[(n_k - 1)/2]$ are integer parts of division.

Analogically to the denominator, the nominator can be rewritten as

$$\sum_{k=1}^{N} c_k n_k (x+iy)^{n_k - 1} = \sum_{k=1}^{N} c_k n_k \sum_{l=0}^{n_k - 1} C_{n_k - 1}^{l} x^{n_k - l - 1} (iy)^l =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} c_k n_k \sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k - 1}^{2l} x^{n_k - 2l - 1} (-1)^l y^{2l}$$

$$\begin{aligned}&+ i\sum_{k=1}^{N} c_k n_k \sum_{l=0}^{[(n_k-2)/2]} C_{n_k-1}^{2l+1} x^{n_k-2l-2}(-1)^l y^{2l+1}\\&= re + i\, im,\end{aligned}$$

where

$$re(x,y) = \sum_{k=1}^{N} c_k n_k \sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k-1}^{2l} x^{n_k-2l-1}(-1)^l y^{2l},$$

$$im(x,y) = \sum_{k=1}^{N} c_k n_k \sum_{l=0}^{[(n_k-2)/2]} C_{n_k-1}^{2l+1} x^{n_k-2l-2}(-1)^l y^{2l+1}$$

Then the partial derivatives (A.5) can be rewritten in the following form

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{(re + i im)(Re - i\, Im)}{Re^2 + Im^2} = \\&= \frac{re\, Re + im\, Im}{Re^2 + Im^2} + i\frac{im\, Re - re\, Im}{Re^2 + Im^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\\\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{(i\, re - im)(Re - i\, Im)}{Re^2 + Im^2} = \\&= \frac{-im\, Re + re\, Im}{Re^2 + Im^2} + i\frac{re\, Re + im\, Im}{Re^2 + Im^2} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}$$

Here

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{reRe + imIm}{Re^2 + Im^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{imRe - reIm}{Re^2 + Im^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-imRe + reIm}{Re^2 + Im^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{reRe + imIm}{Re^2 + Im^2},$$

so it is seen that Cauchy-Riemann conditions (A.3) are fulfilled for both functions in (A.4). Consequently, it is derived that the function (A.2) satisfies Cauchy-Riemann conditions (A.3) for all $|z| < \vartheta < 1$.

A.2. Trigonometric case

The transform (2) can be written in the following form

$$\sin\left(c_0 + \sum_{i=1}^{N} c_i e^{-sn_iA_q}\right) \qquad (A.7)$$

or

$$\cos\left(c_0 + \sum_{i=1}^{N} c_i e^{-sn_iA_q}\right) \qquad (A.8)$$

The function (3) in this case can be written as

$$f(z) = \sin\left(c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k z^{n_k}\right) \tag{A.9}$$

or

$$f(z) = \cos\left(c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k z^{n_k}\right) \tag{A.10}$$

It is obvious that the functions (A.9) and (A.10) have no singular points.

Lemma 2 The function (A.9) satisfies Cauchy-Riemann conditions throughout the definition.

Proof. First let's present the function (3) in the form $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$:

$$\begin{aligned} f(z) = F\left(c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k z^{n_k}\right) &= F\left(c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k (x+iy)^{n_k}\right) = \\ = F\left(c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{l=0}^{n_k} C_{n_k}^{l} x^{n_k-l}(iy)^l\right) &= \\ = F\Bigg(c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{l=0}^{[n_k/2]} C_{n_k}^{2l} x^{n_k-2l}(-1)^l y^{2l} & \\ + i\sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k}^{2l+1} x^{n_k-2l-1}(-1)^l y^{2l+1}\Bigg) &= \\ = F\left(Re + iIm\right) & \end{aligned} \tag{A.11}$$

Here $Re(x,y)$, $Im(x,y)$ are defined by (A.6). Calculate Re'_x, Im'_y, Re'_y, Im'_x.

$$Re'_x = \frac{\partial Re}{\partial x} = \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k}^{2l}(n_k - 2l)x^{n_k-2l-1}(-1)^l y^{2l};$$

$$Re'_y = \frac{\partial Re}{\partial y} = \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{l=0}^{[n_k/2]} C_{n_k}^{2l} x^{n_k-2l}(-1)^l (2l) y^{2l-1};$$

$$Im'_x = \frac{\partial Im}{\partial x} = \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k}^{2l+1}(n_k - 2l - 1)x^{n_k-2l-2}(-1)^l y^{2l+1};$$

$$Im'_y = \frac{\partial Im}{\partial y} = \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k}^{2l+1} x^{n_k-2l-1}(-1)^l (2l+1) y^{2l}.$$

Calculate the following differences:

$$Re'_x - Im'_y = \sum_{k=1}^{N} c_k \Biggl(\sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k}^{2l}(n_k-2l)x^{n_k-2l-1}(-1)^l y^{2l} -$$
$$- \sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k}^{2l+1} x^{n_k-2l-1}(-1)^l (2l+1) y^{2l} \Biggr) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} c_k \Biggl(\sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} x^{n_k-2l-1}(-1)^l y^{2l} \Biggl(\frac{n_k!}{(2l)!(n_k-2l)!}(n_k-2l) -$$
$$- \frac{n_k!}{(2l+1)!(n_k-2l-1)!}(2l+1) \Biggr) \Biggr) = 0;$$

$$Re'_y + Im'_x = \sum_{k=1}^{N} c_k \Biggl(\sum_{l=0}^{[n_k/2]} C_{n_k}^{2l} x^{n_k-2l}(-1)^l (2l) y^{2l-1} +$$
$$+ \sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k}^{2l+1}(n_k-2l-1)x^{n_k-2l-2}(-1)^l y^{2l+1} \Biggr) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} c_k \Biggl(\sum_{l=0}^{[n_k/2]} \frac{n_k!}{(2l)!(n_k-2l)!}(2l)x^{n_k-2l}(-1)^l y^{2l-1} -$$
$$- \sum_{l=0}^{[n_k/2]} \frac{n_k!}{(2l-1)!(n_k-2l+1)!}(n_k-2l+1)x^{n_k-2l}(-1)^l y^{2l-1} \Biggr) = 0.$$

So, it is derived that

$$Re'_x = Im'_y, Re'_y = -Im'_x \qquad (A.12)$$

takes place.

Using (A.11), the properties of trigonometric functions and Euler formulae the function (A.9) can be rewritten as $f(z) = \sin(Re + iIm) = \sin Re \cos(iIm) + \cos Re \sin(iIm) = \sin Re \cosh Im + i \cos Re \sinh Im = u(x,y) + iv(x,y)$, where $u(x,y) = \sin Re \cosh Im, v(x,y) = \cos Re \sinh Im$.

Calculate the partial derivatives $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos Re Re'_x \cosh Im + \sin Re \sinh Im Im'_x;$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\sin Re Re'_y \sinh Im + \cos Re \cosh Im Im'_y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos Re Re'_y \cosh Im + \sin Re \sinh Im Im'_y;$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin Re Re'_x \sinh Im + \cos Re \cosh Im Im'_x.$$

Using (A.12), it is derived that Cauchy-Riemann conditions (A.3) are fulfilled for the function (A.9) for all z.

Lemma 3 The function (A.10) satisfies Cauchy-Riemann conditions throughout the definition.

Proof. Using (A.11), the properties of trigonometric functions and Euler formulae the function (A.10) can be rewritten as $f(z) = \cos(Re + iIm) = \cos Re \cos(iIm) - \sin Re \sin(iIm) = \cos Re \cosh Im - i \sin Re \sinh Im = u(x,y) + iv(x,y)$, where $u(x,y) = \cos Re \cosh Im$, $v(x,y) = -\sin Re \sinh Im$.

Calculate the partial derivatives $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin Re Re'_x \cosh Im + \cos Re \sinh Im Im'_x;$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\cos Re Re'_y \sinh Im - \sin Re \cosh Im Im'_y;$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\sin Re Re'_y \cosh Im + \cos Re \sinh Im Im'_y;$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\cos Re Re'_x \sinh Im - \sin Re \cosh Im Im'_x.$$

Using (A.12), it is derived that Cauchy-Riemann conditions (A.3) are fulfilled for the function (A.10) for all z.

A.3. Hyperbolic case

The transform (2) can be written in the following form

$$\sinh\left(c_0 + \sum_{i=1}^{N} c_i e^{-sn_i A_q}\right) \tag{A.13}$$

or

$$\cosh\left(c_0 + \sum_{i=1}^{N} c_i e^{-sn_i A_q}\right) \tag{A.14}$$

The function (3) in this case can be written as

$$f(z) = \sinh\left(c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k z^{n_k}\right) \tag{A.15}$$

or

$$f(z) = \cosh\left(c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k z^{n_k}\right) \qquad (A.16)$$

It is obvious that the functions (A.15) and (A.16) have no singular points.

Lemma 4 The function (A.15) satisfies Cauchy-Riemann conditions throughout the definition.

Proof. Using (A.11), the properties of hyperbolic functions and Euler formulae the function (A.15) can be rewritten as $f(z) = \sinh(Re + iIm) = \sinh Re \cosh(iIm) + \cosh Re \sinh(iIm) = \sinh Re \cos Im + i\cosh Re \sin Im = u(x,y) + iv(x,y)$, where $u(x,y) = \sinh Re \cos Im$, $v(x,y) = \cosh Re \sin Im$.

Calculate the partial derivatives $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cosh Re Re'_x \cos Im - \sinh Re \sin Im Im'_x;$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sinh Re Re'_y \sin Im + \cosh Re \cos Im Im'_y;$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cosh Re Re'_y \cos Im - \sinh Re \sin Im Im'_y;$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sinh Re Re'_x \sin Im + \cosh Re \cos Im Im'_x.$$

Using (A.12), it is derived that Cauchy-Riemann conditions (A.3) are fulfilled for the function (A.15) for all z. □

Lemma 5 The function (A.16) satisfies Cauchy-Riemann conditions throughout the definition.

Proof. Using (A.11), the properties of hyperbolic functions and Euler formulae the function (A.10) can be rewritten as $f(z) = \cosh(Re + iIm) = \cosh Re \cosh(iIm) - \sinh Re \sinh(iIm) = \cosh Re \cos Im + i\sinh Re \sin Im = u(x,y) + iv(x,y)$, where $u(x,y) = \cosh Re \cos Im$, $v(x,y) = \sinh Re \sin Im$.

Calculate the partial derivatives $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sinh Re Re'_x \cos Im - \cosh Re \sin Im Im'_x;$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \cosh Re Re'_y \sin Im + \sinh Re \cos Im Im'_y;$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sinh Re Re'_y \cos Im - \cosh Re \sin Im Im'_y;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cosh Re Re'_x \sin Im + \sinh Re \cos Im Im'_x.$$

Using (A.12), it is derived that Cauchy-Riemann conditions (A.3) are fulfilled for the function (A.16) for all z.

A.4. Exponential case

The transform (2) can be written in the following form

$$\exp\left(c_0 + \sum_{i=1}^{N} c_i e^{-sn_i A_q}\right) \tag{A.17}$$

The function (3) in this case can be written as

$$f(z) = \exp\left(c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k z^{n_k}\right) \tag{A.18}$$

It is obvious that the function (A.18) has no singular points.

Lemma 6 The function (A.18) satisfies Cauchy-Riemann conditions throughout the definition.

Proof. Using (A.11) and Euler formulae the function (A.18) can be rewritten as $f(z) = e^{Re}(\cos Im + i \sin Im) = e^{Re}\cos Im + ie^{Re}\sin Im = u(x,y) + iv(x,y)$, where $u(x,y) = e^{Re}\cos Im, v(x,y) = e^{Re}\sin Im$.

Calculate the partial derivatives $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{Re} Re'_x \cos Im - e^{Re} \sin Im Im'_x;$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^{Re} Re'_y \sin Im + e^{Re} \cos Im Im'_y;$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{Re} Re'_y \cos Im - e^{Re} \sin Im Im'_y;$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{Re} Re'_x \sin Im + e^{Re} \cos Im Im'_x.$$

Using (A.12), it is derived that Cauchy-Riemann conditions (A.3) are fulfilled for the function (A.18) for all z.

B. Examples and verification

B.1. Verification with the previously known results

The verification of the proposed method is done on the known transforms. Consider the functions $\frac{1}{1-e^{-sA}}$ and $\frac{1}{1+e^{-sA}}$ when $A > 0$. From [24] it is known that

$$L^{-1}\left[\frac{1}{1-e^{-sA}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nA), \qquad (B.1)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{1+e^{-sA}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta(t-nA) \qquad (B.2)$$

Let's show that the results derived from theorem 1 are consistent with the known results (B.1)-(B.2).

According to theorem 1

$$L^{-1}\left[\frac{1}{1-e^{-sA}}\right] = \left[z = e^{-sA}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{1-z}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kA), \qquad (B.3)$$

which is congruent to (B.1).

$$L^{-1}\left[\frac{1}{1+e^{-sA}}\right] = \left[z = e^{-sA}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{1+z}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \delta(t-kA), \quad (B.4)$$

which is congruent to (B.2).

So, the known results (B.1)-(B.2) are equal to the results derived from theorem 1 (B.3)-(B.4).

Let's consider some examples of application of the proved theorems.

B.2. Some examples based on the theorem 1

Example 1 Consider the following functions $\frac{1}{(1-de^{-sA})^\alpha}$ and $\frac{1}{(1+de^{-sA})^\alpha}$ when $A, d > 0$ are some digits, α is a natural digit.

The Taylor series can be easily constructed for the functions $f(z) = \frac{1}{(1-dz)^\alpha}$ and $g(z) = \frac{1}{(1+dz)^\alpha}$:

$$f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^k \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{k!} z^k$$
$$g(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k d^k \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{k!} z^k$$

According to theorem 1

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(1-de^{-sA})^{\alpha}}\right]=\left[z=e^{-sA}\right]=L^{-1}\left[f(z)\right]=$$
$$=\delta(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^k\alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1)}{k!}\delta(t-kA)$$
$$L^{-1}\left[\frac{1}{(1+de^{-sA})^{\alpha}}\right]=\left[z=e^{-sA}\right]=L^{-1}\left[g(z)\right]=$$
$$=\delta(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k d^k\alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1)}{k!}\delta(t-kA).$$

Finally the following formulas are derived

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(1-de^{-sA})^{\alpha}}\right]=\delta(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^k\alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1)}{k!}\delta(t-kA) \quad (B.5)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(1+de^{-sA})^{\alpha}}\right]=\delta(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k d^k\alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1)}{k!}\delta(t-kA) \quad (B.6)$$

Let's verify the derived formulas (B.5)-(B.6) with the use of convolution. It can be done for any fixed α and any $d>0$. Let's prove this for $\alpha=2$.

According to (B.5), (B.6)

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(1-de^{-sA})^{2}}\right]=\delta(t)+\sum_{k=1}^{\infty}d^k(k+1)\delta(t-kA), \quad (B.7)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(1+de^{-sA})^{2}}\right]=\delta(t)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k d^k(k+1)\delta(t-kA) \quad (B.8)$$

Consider the following convolution

$$\left(\left[\delta(t)-2d\delta(t-A)+d^2\delta(t-2A)\right]*\left[\delta(t)+\sum_{k=1}^{\infty}d^k(k+1)\delta(t-kA)\right],\varphi(t)\right)=$$
$$=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\left[\delta(\xi)-2d\delta(\xi-A)+d^2\delta(\xi-2A)\right]\times$$
$$\times\left[\delta(x-\xi)+\sum_{k=1}^{\infty}d^k(k+1)\delta(x-\xi-kA)\right]\varphi(x)dxd\xi=$$
$$=\varphi(0)-2d\varphi(A)+d^2\varphi(2A)+\sum_{k=1}^{\infty}d^k(k+1)\varphi(kA)-$$

$$-2\sum_{k=2}^{\infty} d^k k\varphi(kA)+\sum_{k=3}^{\infty} d^k (k-1)\varphi(kA)=\varphi(0)=(\delta(t),\varphi(t))$$

So, it is proved that

$$\left[\delta(t)-2d\delta(t-A)+d^2\delta(t-2A)\right]*\left[\delta(t)+\sum_{k=1}^{\infty} d^k (k+1)\delta(t-kA)\right]=\delta(t).$$

The equality

$$\left[\delta(t)+\sum_{k=1}^{\infty} d^k (k+1)\delta(t-kA)\right]*\left[\delta(t)-2d\delta(t-A)+d^2\delta(t-2A)\right]=\delta(t)$$

is proved similarly. So, the correctness of the formula (B.7) is shown.

Consider the following convolution

$$\left(\left[\delta(t)+2d\delta(t-A)+d^2\delta(t-2A)\right]*\left[\delta(t)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k d^k (k+1)\delta(t-kA)\right],\varphi(t)\right)=$$

$$=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\left[\delta(\xi)+2d\delta(\xi-A)+d^2\delta(\xi-2A)\right]\times$$

$$\times\left[\delta(x-\xi)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k d^k (k+1)\delta(x-\xi-kA)\right]\varphi(x)dxd\xi=$$

$$=\varphi(0)+2d\varphi(A)+d^2\varphi(2A)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k d^k (k+1)\varphi(kA)-$$

$$-2\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k d^k k\varphi(kA)+\sum_{k=3}^{\infty}(-1)^k d^k (k-1)\varphi(kA)=\varphi(0)=(\delta(t),\varphi(t))\,.$$

So, it is proved that

$$\left[\delta(t)+2d\delta(t-A)+d^2\delta(t-2A)\right]*\left[\delta(t)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k d^k (k+1)\delta(t-kA)\right]=\delta(t).$$

The equality

$$\left[\delta(t)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k d^k (k+1)\delta(t-kA)\right]*\left[\delta(t)+2d\delta(t-A)+d^2\delta(t-2A)\right]=\delta(t)$$

is proved similarly. So, the correctness of the formula (B.8) is shown.

Example 2 Consider the following functions $\ln\left|1-de^{-sA}\right|$ and $\ln\left(1+de^{-sA}\right)$ when $A,d>0$ are some digits.

The Taylor series can be easily constructed for the functions $f(z) = \ln|1-dz|$ and $g(z) = \ln(1+dz)$:

$$f(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^k}{k} z^k$$
$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} d^k}{k} z^k$$

According to theorem 1

$$L^{-1}\left[\ln\left|1-de^{-sA}\right|\right] = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^k}{k}\delta(t-kA)$$
$$L^{-1}\left[\ln\left(1+de^{-sA}\right)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}d^k}{k}\delta(t-kA)$$

B.3. Some examples based on the theorem 2

Example 1 Consider the function $\frac{1}{1-pe^{-sA}-qe^{-sB}}$, where $A, B, p, q > 0, A \neq B$. After the change of the variables $z_1 = e^{-sA}, z_2 = e^{-sB}$ the initial function can be rewritten as $f(z_1, z_2) = \frac{1}{1-pz_1-qz_2}$. The Taylor series can be easily constructed for this function: $f(z_1, z_2) = \frac{1}{1-pz_1-qz_2} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_{i+j}^i p^i q^j z_1^i z_2^j$, where $C_{i+j}^i = \frac{(i+j)!}{i!j!}$ are binomial coefficients.

According to theorem 2

$$L^{-1}\left[\frac{1}{1-pe^{-sA}-qe^{-sB}}\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_{i+j}^i p^i q^j \delta(t-iA-jB) \qquad (B.9)$$

Consider the following convolution

$$\left([\delta(t)-p\delta(t-A)-q\delta(t-B)] * \left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_{i+j}^i p^i q^j \delta(t-iA-jB)\right], \varphi(t)\right) =$$
$$= \iint_{R^2} [\delta(\xi)-p\delta(\xi-A)-q\delta(\xi-B)] \times$$
$$\times \left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_{i+j}^i p^i q^j \delta(x-\xi-iA-jB)\right] \varphi(x) dx d\xi =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i+j)!}{i!j!} p^i q^j \varphi(iA+jB) - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i+j-1)!}{(i-1)!j!} p^i q^j \varphi(iA+jB) -$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(i+j-1)!}{i!(j-1)!}p^i q^j \varphi(iA+jB) = \varphi(0) = (\delta(t), \varphi(t))$$

So, it is proved that

$$[\delta(t) - p\delta(t-A) - q\delta(t-B)] * \left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_{i+j}^i p^i q^j \delta(t-iA-jB)\right] = \delta(t).$$

The equality

$$\left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_{i+j}^i p^i q^j \delta(t-iA-jB)\right] * [\delta(t) - p\delta(t-A) - q\delta(t-B)] = \delta(t)$$

is proved similarly. So, the correctness of the formula (B.9) is shown.

Let's prove that when $A = B > 0$ the inverse formula (B.9) is congruent to the inverse formula (B.5) for the case 1.

When $A = B > 0$ $\frac{1}{1-pe^{-sA}-qe^{-sB}} = \frac{1}{1-(p+q)e^{-sA}}$. According to (B.5) when $d = p+q, \alpha = 1$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{1-(p+q)e^{-sA}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}(p+q)^k \delta(t-kA) \qquad (B.10)$$

Let's show that the expression (B.9) coincides with (B.10) in the case when $A = B$. We have

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_{i+j}^i p^i q^j \delta(t-(i+j)A) = [k = i+j] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kA)\sum_{j=0}^{k} C_k^j p^{k-j} q^j = \sum_{k=0}^{\infty}(p+q)^k \delta(t-kA),$$

which coincides with (B.10).

Example 2 Consider the function $\frac{1}{1+pe^{-sA}+qe^{-sB}}$, where $A, B, p, q > 0, A \neq B$. After the change of the variables $z_1 = e^{-sA}, z_2 = e^{-sB}$ the initial function can be rewritten as $f(z_1, z_2) = \frac{1}{1+pz_1+qz_2}$. The Taylor series can be easily constructed for this function: $f(z_1, z_2) = \frac{1}{1+pz_1+qz_2} = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}(-1)^{i+j} p^i q^j C_{i+j}^i z_1^i z_2^j$.

According to theorem 2

$$L^{-1}\left[\frac{1}{1+pe^{-sA}+qe^{-sB}}\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{i+j} p^i q^j C_{i+j}^i \delta(t-iA-jB) \quad (B.11)$$

Consider the following convolution

$$\left([\delta(t)+p\delta(t-A)+q\delta(t-B)]*\left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{i+j}p^iq^jC_{i+j}^i\delta(t-iA-jB)\right],\varphi(t)\right)=$$

$$=\iint\limits_{R^2}[\delta(\xi)+p\delta(\xi-A)+q\delta(\xi-B)]\times$$

$$\times\left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{i+j}C_{i+j}^ip^iq^j\delta(x-\xi-iA-jB)\right]\varphi(x)dxd\xi=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{i+j}p^iq^j\frac{(i+j)!}{i!j!}\varphi(iA+jB)-$$

$$-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{i+j}\frac{(i+j-1)!}{(i-1)!j!}p^iq^j\varphi(iA+jB)-$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{i+j}\frac{(i+j-1)!}{i!(j-1)!}p^iq^j\varphi(iA+jB)=\varphi(0)=(\delta(t),\varphi(t))$$

So, it is proved that

$$[\delta(t)+p\delta(t-A)+q\delta(t-B)]*\left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{i+j}C_{i+j}^ip^iq^j\delta(t-iA-jB)\right]=\delta(t).$$

The equality

$$\left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{i+j}C_{i+j}^ip^iq^j\delta(t-iA-jB)\right]*[\delta(t)+p\delta(t-A)+q\delta(t-B)]=\delta(t)$$

is proved similarly. So, the correctness of the formula (B.11) is shown.

Let's prove that when $A=B>0$ the inverse formula (B.11) is congruent to the inverse formula (B.6) for the case 1.

When $A=B>0$ $\frac{1}{1+pe^{-sA}+qe^{-sB}}=\frac{1}{1+(p+q)e^{-sA}}$. According to (B.6) when $d=p+q,\alpha=1$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{1+(p+q)e^{-sA}}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(p+q)^k\delta(t-kA) \qquad (B.12)$$

Let's show that the expression (B.11) coincides with (B.12) in the case when

$A = B$. $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}(-1)^{i+j}C_{i+j}^{i}p^{i}q^{j}\delta(t-(i+j)A) = [k=i+j] = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\delta(t-kA)\sum\limits_{j=0}^{k}C_{k}^{j}p^{k-j}q^{j} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(p+q)^{k}\delta(t-kA)$, which coincides with (B.12).

Analogically to the examples 1-2 the inverse formulas for the following functions can be written:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{1-pe^{-sA}+qe^{-sB}}\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}C_{i+j}^{i}p^{i}q^{j}\delta(t-iA-jB)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{1+pe^{-sA}-qe^{-sB}}\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{i}C_{i+j}^{i}p^{i}q^{j}\delta(t-iA-jB)$$

Example 3 Consider the more general functions $\frac{1}{(1-pe^{-sA}-qe^{-sB})^{\alpha}}$ and $\frac{1}{(1+pe^{-sA}+qe^{-sB})^{\alpha}}$ when $A, B, p, q > 0, A \neq B$, α is a natural digit. After the change of the variables $z_1 = e^{-sA}, z_2 = e^{-sB}$ the initial functions can be rewritten as $f(z_1, z_2) = \frac{1}{(1-pz_1-qz_2)^{\alpha}}, g(z_1, z_2) = \frac{1}{(1+pz_1+qz_2)^{\alpha}}$. The Taylor series can be easily constructed for these functions:

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(1-pz_1-qz_2)^{\alpha}} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p^{i}q^{j}\frac{\psi_{i+j}(\alpha)}{i!j!}z_1^{i}z_2^{j},$$

$$g(z_1, z_2) = \frac{1}{(1+pz_1+qz_2)^{\alpha}} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{i+j}p^{i}q^{j}\frac{\psi_{i+j}(\alpha)}{i!j!}z_1^{i}z_2^{j}.$$

Here $\psi_n(\alpha) = \alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1) = (\alpha)_n$ when $n > 0$ and $\psi_0(\alpha) = 1$.

According to theorem 2

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(1-pe^{-sA}-qe^{-sB})^{\alpha}}\right] = \left[z = e^{-sA}\right] = L^{-1}\left[f(z_1, z_2)\right] = $$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p^{i}q^{j}\frac{\psi_{i+j}(\alpha)}{i!j!}\delta(t-iA-jB),$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(1+pe^{-sA}+qe^{-sB})^{\alpha}}\right] = \left[z = e^{-sA}\right] = L^{-1}\left[g(z_1, z_2)\right] = $$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{i+j}p^{i}q^{j}\frac{\psi_{i+j}(\alpha)}{i!j!}\delta(t-iA-jB).$$

Finally the following formulas are derived

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(1-pe^{-sA}-qe^{-sB})^{\alpha}}\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p^{i}q^{j}\frac{\psi_{i+j}(\alpha)}{i!j!}\delta(t-iA-jB) \quad (B.13)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(1+pe^{-sA}+qe^{-sB})^{\alpha}}\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{i+j}p^{i}q^{j}\frac{\psi_{i+j}(\alpha)}{i!j!}\delta(t-iA-jB) \qquad (B.14)$$

Analogically to (B.13)–(B.14) the inverse formulas for the following functions can be written:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(1-pe^{-sA}+qe^{-sB})^{\alpha}}\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}p^{i}q^{j}\frac{\psi_{i+j}(\alpha)}{i!j!}\delta(t-iA-jB)$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(1+pe^{-sA}-qe^{-sB})^{\alpha}}\right]=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{i}p^{i}q^{j}\frac{\psi_{i+j}(\alpha)}{i!j!}\delta(t-iA-jB)$$

References

1. **Krylov V. I.** A Handbook of Methods of Approximate Fourier Transformation and Inversion of the Laplace Transform / V. I. Krylov, N. S. Skoblya. – Moscow: Mir, 1977. – 224 p.
2. **Tuan A.** Convergence rate of Post-Widder approximate inversion of the Laplace transform / V. K. Tuan, D. T. Duc // Vietnam J. Math. – 2000. – Vol. 28(1). – P. 93–96.
3. **Berberan-Santos M. N.** Analytical inversion of the Laplace transform without contour integration: application to luminescence decay laws and other relaxation functions / M. N. Berberan-Santos // Journal of Mathematical Chemistry. – 2005. – Vol. 38(2). – P. 165–173.
4. **Schiff J. L.** The Laplace transform. Theory and Applications / J. L. Schiff. – New York: Springer-Verlag, 1999. – 245 p.
5. **Doetsch G.** Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation / G. Doetsch. – New York: Springer-Verlag, 1974. – 326 p.
6. **Cioranescu I.** On the inversion of the Laplace transform for resolvent families in UMD spaces / I. Cioranescu, C. Lizama // Arch. Math. – 2003. – Vol. 81. – P. 182–192.
7. **Slepyan L. I.** Non-stationary elastic waves (in Russian) / L. I. Slepyan. – Leningrad: Sudostroenie, 1972. – 376 p.
8. **Slepyan L. I.** Integral transforms in non-stationary problems of mechanics (in Russian) / L. I. Slepyan, Yu. S. Yakovlev. – Leningrad: Sudostroenie, 1980. – 344 p.
9. **Widder D. V.** Advanced Calculus, 2nd ed. / D. V. Widder. – Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1947.
10. **Spiegel M.** Schaum's Outline of Laplace Transforms / M. Spiegel. – New York: McGraw-Hill, 1965.
11. **Voinov V. G.** Some special inversion formulas for the Laplace transform and their application to the problem of unbiased estimation of the parameters of probability destributions / V. G. Voinov // Journal of Soviet Mathematics – 1990. – Vol. 52. – P. 2872–2878.

12. **Guz A. N.** Theory of nonstationary aerohidroelasticity of shells (in Russian) / A. N. Guz, V. D. Kubenko. – Kyiv: Naukova dumka, 1982. – 400 p.

13. **Reut V.** Non-stationary mixed problem of elasticity for a semi-strip / V. Reut, N. Vaysfeld, Z. Zhuravlova // Coupled Systems Mechanics – 2020. – Vol. 9(1). – P. 77–89.

14. **Zhuravlova Z.** New approach of analytical inversion of Laplace transform for some cases / Z. Zhuravlova // Researches in Mathematics and Mechanics – 2019. – Vol. 24(34). – P. 122–135.

15. **Sidorov Yu. V.** Lectures on functions of complex variable theory (in Russian) / Yu. V. Sidorov, M. V. Fedoryuk, M. I. Shabunin. – Moscow: Nauka, 1989. – 477 p.

16. **Sveshnikov A. G.** Theory of complex variable functions (in Russian) / A. G. Sveshnikov, A. N. Tikhonov. – Moscow: Fizmatlit, 2005. – 336 p.

17. **Kecs W.** Introduction in theory of generalized functions with applications in technique (in Russian) / W. Kecs, P. P. Teodorescu. – Moscow: Mir, 1978. – 520 p.

18. **Fikhtengolz G. M.** A Course of Differential and Integral Calculus (in Russian) / G. M. Fikhtengolz. V.II. – Moscow: Fizmatlit, 2001. – 864 p.

19. **Demidovich B. P.** Collection of tasks and excercises in mathematical analysis (in Russian) / B. P. Demidovich. – Moscow: Nauka, 1972. – 544 p.

20. **Fikhtengolz G. M.** A Course of Differential and Integral Calculus (in Russian) / G. M. Fikhtengolz. V.I. – Moscow: Fizmatlit, 2001. – 680 p.

21. **Herve M.** Several complex variables. Local theory / M. Herve. – Bombay: Oxford university press, 1963. – 168 p.

22. **Vladimirov V. S.** Methods of theory of function of many complex variables (in Russian) / V. S. Vladimirov. – Moscow: Nauka, 1964. – 414 p.

23. **Vorobyov N. N.** Theory of series (in Russian) / N. N. Vorobyov. – Moscow: Nauka, 1979. – 408 p.

24. **Abramowitz M.** Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables (in Russian) / M. Abramowitz, I. Stegun. – Moscow: Nauka, 1979. – 834 p.

Журавльова З. Ю.

Випадок аналітичного обернення перетворення Лапласа

Резюме

У даній статті запропоновано новий метод аналітичного обернення перетворення Лапласу для трансформант, що містять експоненти, які лінійно залежать від параметра перетворення Лапласу. Даний метод заснований на розвиненні трансформанти у ряд Тейлора и почленному застосуванні оберненого перетворення Лапласу. Доведено теореми, що підтверджують достовірність та коректність такого підходу. Цей метод використовує узагальнені функції, тому отримано деякі корисні наслідки, що пов'язані з

узагальненими функціями. Метод перевірений шляхом порівняння з відомими з літератури формулами. Отримані нові формули для оригіналів від трансформант Лапласу.
Ключові слова: перетворення Лапласу, аналітичне обернення, ряди Тейлора, узагальнені функції, згортка.

Журавлёва З. Ю.

Случай аналитического обращения преобразования Лапласа

Резюме

В данной статье предложен новый метод аналитического обращения преобразования Лапласа для трансформант, которые содержат экспоненты, линейно зависящие от параметра преобразования Лапласа. Данный метод основан на разложении трансформанты в ряд Тейлора и почленном применении обратного преобразования Лапласа. Доказаны теоремы, подтверждающие достоверность и корректность такого подхода. Этот метод использует обобщённые функции, поэтому получены некоторые полезные следствия, связанные с обратными обобщёнными функциями. Метод проверен путём сравнения с известными из литературы формулами. Получены новые формулы для оригиналов от трансформант Лапласа.
Ключевые слова: преобразование Лапласа, аналитическое обращение, ряды Тейлора, обобщённые функции, свёртка.

References

1. Krylov, V. I. and Skoblya, N. S. (1977). *A Handbook of Methods of Approximate Fourier Transformation and Inversion of the Laplace Transform.* Moscow: Mir, 224 p.
2. Tuan, V. K. and Duc, D. T. (2000). Convergence rate of Post-Widder approximate inversion of the Laplace transform. *Vietnam J. Math.*, Vol. 28(1), P. 93–96.
3. Berberan-Santos, M. N. (2005). Analytical inversion of the Laplace transform without contour integration: application to luminescence decay laws and other relaxation functions. *Journal of Mathematical Chemistry*, Vol. 38(2), P. 165–173.
4. Schiff, J. L. (1999). *The Laplace transform. Theory and Applications.* New York: Springer-Verlag, 245 p.
5. Doetsch, G. (1974). *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation.* New York: Springer-Verlag, 326 p.
6. Cioranescu, I. and Lizama, C. (2003) On the inversion of the Laplace transform for resolvent families in UMD spaces. *Arch. Math.*, Vol. 81. P. 182–192.
7. Slepyan, L. I. (1972). *Nestacionarnie uprugie volni [Non-stationary elastic waves].* Leningrad: Sudostroenie, 376 p.
8. Slepyan, L. I., Yakovlev, Yu. S. (1980). *Integralnie preobrazovania v nestacionarnih zadachah mehaniki [Integral transforms in non-stationary problems of mechanics].* Leningrad: Sudostroenie, 344 p.

9. Widder, D. V. (1947). *Advanced Calculus, 2nd ed.*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

10. Spiegel, M. (1965). *Schaum's Outline of Laplace Transforms.* New York: McGraw-Hill.

11. Voinov, V. G. (1990) Some special inversion formulas for the Laplace transform and their application to the problem of unbiased estimation of the parameters of probability destributions. *Journal of Soviet Mathematics*, Vol. 52. P. 2872–2878.

12. Guz, A. N. and Kubenko, V. D. (1982). *Teoriya nestazionarnoy aerogidrouprugosti obolochek [Theory of nonstationary aerohidroelasticity of shells], Vol. 5.* Kyiv: Naukova dumka, 400 p.

13. Reut, V., Vaysfeld, N., Zhuravlova, Z. (2020) Non-stationary mixed problem of elasticity for a semi-strip. *Coupled Systems Mechanics*, Vol. 9(1). P. 77–89.

14. Zhuravlova, Z. (2019) New approach of analytical inversion of Laplace transform for some cases. *Researches in Mathematics and Mechanics*, Vol. 24(34). P. 122–135.

15. Sidorov, Yu. V., Fedoryuk, M. V. and Shabunin, M. I. (1989). *Lekzii po teorii funkziy kompleksnogo peremennogo [Lectures on functions of complex variable theory].* Moscow: Nauka, 477 p.

16. Sveshnikov, A. G. and Tikhonov, A. N. (2005). *Teoriya funkziy kompleksnoy peremennoy [Theory of complex variable functions].* Moscow: Fizmatlit, 336 p.

17. Kecs, W. and Teodorescu, P. P. (1978). *Vvedenie v teoriyu obobshchennih funkzii s prilogeniyami v tekhnike [Introduction in theory of generalized functions with applications in technique].* Moscow: Mir, 520 p.

18. Fikhtengolz, G. M. (2001). *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [A Course of Differential and Integral Calculus], Vol. II.* Moscow: Fizmatlit, 864 p.

19. Demidovich, B. P. (1972). *Sbornik zadach i uprazhneniy po matematicheskomy analizy [Collection of tasks and excercises in mathematical analysis].* Moscow: Nauka, 544 p.

20. Fikhtengolz, G. M. (2001). *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [A Course of Differential and Integral Calculus], Vol. I.* Moscow: Fizmatlit, 680 p.

21. Herve, M. (1963). *Several complex variables. Local theory.* Bombay: Oxford university press, 168 p.

22. Vladimirov, V. S. (1964). *Metodi teorii funkziy mnogih kompleksnih peremennih [Methods of theory of function of many complex variables].* Moscow: Nauka, 414 p.

23. Vorobyov, N. N. (1979). *Teoriya ryadov [Theory of series].* Moscow: Nauka, 408 p.

24. Abramowitz, M. and Stegun, I. (1979). *Spravochnik po spezialnim funkziyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablizami [Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables].* Moscow: Nauka, 834 p.

Дослідження в математиці і механіці. — 2021. — Т. 26, вип. 1(37). — С. 96–100

ХРОНІКА

СВІТЛА ПАМ'ЯТЬ ПРО АНАТОЛІЯ МИХАЙЛОВИЧА САМОЙЛЕНКА

4 грудня 2020 року на 83 році життя перестало битися серце академіка НАН України Анатолія Михайловича Самойленка — видатного математика, лідера Київської наукової школи диференціальних рівнянь, директора інституту математики НАН України, головного редактора журналу «Нелінійні коливання».

Анатолій Михайлович народився 2 січня 1938 р. в с. Потіївка на Житомирщині, середню школу закінчив у м. Малині. У 1960 р. після закінчення з відзнакою механіко-математичного факультету Київського державного

За матеріалами наукового журналу «Нелінійні коливання» (2020, т. 23, № 4)

Надійшла 06.01.2021

університету імені Т. Г. Шевченка вступив до аспірантури інституту математики АН УРСР. У 1963 р. під керівництвом академіка Ю. О. Митропольського захистив кандидатську дисертацію на тему «Застосування асимптотичних методів для дослідження нелінійних диференціальних рівнянь із нерегулярною правою частиною», а вже через п'ять років — докторську дисертацію на тему «Деякі питання теорії періодичних і квазіперіодичних систем», ставши наймолодшим в Україні доктором наук.

У 1974 р. А. М. Самойленко очолив кафедру інтегральних та диференціальних рівнянь Київського державного університету імені Т. Г. Шевченка. У 1978 р. його обрали членом-кореспондентом АН УРСР. У 1987 р. Анатолій Михайлович повернувся до інституту математики АН УРСР, який очолив наступного року й залишався його незмінним директором до останніх днів свого життя. У 1995 р. А. М. Самойленка обрали академіком НАН України. З 2006 р. дотепер він обіймав посаду академіка-секретаря Відділення математики НАН України. Протягом 1998–2011 рр. Анатолій Михайлович завідував кафедрою диференціальних рівнянь фізико-математичного факультету Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут».

Наукові результати Анатолія Михайловича Самойленка з актуальних проблем якісної та аналітичної теорії диференціальних рівнянь, нелінійної механіки і теорії нелінійних коливань, математичної фізики, теорії функцій здобули світове визнання серед математичної спільноти.

Загальне число його наукових публікацій перевищило 600 і включає в себе близько 40 монографій. У 1965–1966 рр. А. М. Самойленко запропонував оригінальний метод для знаходження періодичних розв'язків звичайних диференціальних систем, який у подальшому почали називати «чисельно-аналітичним методом Самойленка». Згодом разом із М. Й. Ронто, В. І. Трофимчуком та їхніми учнями цей метод узагальнено для широкого класу крайових задач. Продовжуючи дослідження М. М. Крилова, М. М. Боголюбова, А. М. Колмогорова, В. І. Арнольда, Ю. Мозера, Ю. О. Митропольського, Анатолій Михайлович запропонував модернізацію асимптотичного методу послідовних замін змінних, який у 1969 р. назвали «методом прискореної збіжності». Разом із Ю. О. Митропольським і одноосібно за допомогою цього методу він отримав низку нових важливих результатів із теорії багаточастотних коливань, а також узагальнив асимптотичний метод усереднення, що знайшло продовження, зокрема, у спільних роботах із Р. І. Петришиним і багатьма іншими учнями. Поняття функції Гріна задачі про інваріантний тор лінійного розширення динамічної системи на торі, введене А. М. Самойленком у 1969 р., виявилося надзвичайно плідним і дало новий імпульс розвитку найрізноманітніших аспектів теорії збурень і стійкості тороїдальних многовидів. У математичній літературі це поняття відоме як «функція Гріна — Самойленка». У спільних роботах із В. Л. Куликом розроблено теорію знакозмінних функцій Ляпунова для дослідження обмежених на всій осі розв'язків лінійних неавтономних диференціальних систем і лінійних розширень динамічних систем на торі. Результати з цієї теорії узагальнено разом із Ю. В. Теплінським для випадку зліченних систем, разом із О. М. Станжицьким — для стохастичних диференціальних рівнянь. Важливим внеском Анатолія Михайловича до теорії особливостей відображень є доведена в 1968 р. теорема про еквівалентність скінченно диференційовної функції кількох змінних її поліному Тейлора. На основі теорії узагальнених обернених операторів А. М. Самойленко й О. А. Бойчук розвинули теорію нетерових крайових задач для диференціальних рівнянь, рівнянь із запізненням, рівнянь із імпульсною дією й сингулярно збурених систем. У подальшому цю теорію було застосовано для відшукання обмежених на всій дійсній осі розв'язків систем диференціальних і різницевих рівнянь за умови дихотомії на півосях для відповідної однорідної системи.

Найбільш затребуваним внеском Анатолія Михайловича до математичної науки є побудована ним разом із учнями, починаючи з 1961 р., теорія імпульсних систем диференціальних рівнянь. Видана в 1987 р. у співавторстві з М. О. Перестюком монографія «Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием» стала першою у світовій літературі монографією, в якій систематично викладено основні результати цієї теорії. Доповнену спільно з С. і. Трофимчуком новими результатами монографію перевидано в 1995 р. англійською мовою під назвою «Impulsive differential equations». Ця книга — найбільш цитована праця вченого.

Учні Анатолія Михайловича захистили 36 докторських і 89 кандидатських дисертацій. Представники створеної ним наукової школи розвивають науку в Україні, Болгарії, Казахстані, Молдові, Німеччині, Польщі, Словаччині, Таджикистані, Туреччині, Угорщині, Чехії, Чилі й багатьох інших країнах. На основі лекційних курсів А. М. Самойленка і його учнів у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут імені ігоря Сікорського» та інших закладах вищої освіти створено серію підручників і збірників задач із теорії диференціальних рівнянь, які мали багато перевидань.

А. М. Самойленко був головним редактором журналів «Український математичний журнал» (переклад англійською «Ukrainian Mathematical Journal» у видавництві Springer), «Нелінійні коливання» й «Український математичний вісник» (переклад англійською обох журналів «Journal of Mathematical Sciences» у видавництві Springer), «Математичний вісник Наукового товариства імені Шевченка», «Збірник праць інституту математики НАН України»; був членом редколегій журналів «Доповіді Національної академії наук України», «Вісник Національної академії наук України», «У світі математики», «Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics», «Miskolc Mathematical Notes», «Georgian Mathematical Journal», «International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations».

А. М. Самойленко був президентом Всеукраїнської благодійної організації «Фонд сприяння розвитку математичної науки» та керівником благодійного фонду сприяння розвитку талановитих дітей та юнацтва міста Малина, був членом Київського, Українського та Американського математичних товариств.

А. М. Самойленка відзначено низкою високих нагород і звань. Він нагороджений орденами Дружби народів (1984), «За заслуги» III ступеня (2003), «князя Ярослава Мудрого» V, VI і III ступенів (2008, 2013, 2018), Почесною Грамотою Президії Верховної Ради України (1987); був лауреатом Державних премій України в галузі науки і техніки (1985, 1996), Державної премії України в галузі освіти (2012), Республіканської премії ім. М. Островського (1968), премій Академії наук України ім. М. М. Крилова (1981), М. М. Боголюбова (1998), М. М. Лаврентьєва (2000), М. В. Остроградського (2004), Ю. О. Митропольського (2010) і М. Г. Крейна (2020); удостоєний звань «Заслужений діяч науки і техніки України» (1998) та «Соросівський професор» (1996).

Світла пам'ять про Анатолія Михайловича Самойленка назавжди залишиться в історії світової математичної науки як видатного ученого, педагога і організатора науки, як прекрасну й чуйну людину.

DOI: 10.18524/2519-206X.2021.1(37).248036 *Перестюк М. О.*

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ
(скорочений варіант)

Журнал «Дослідження в математиці і механіці» має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень, огляди з актуальних проблем за тематикою видання, а також повідомлення про ювілеї, знаменні дати та події.

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Електронну версію рукопису слід надсилати на e-mail журналу

rmm-journal@onu.edu.ua

або завантажувати через сайт журналу

www.rmm-journal.onu.edu.ua

Вона повинна складатися з

1) вихідного TEX-файла,
2) PDF-файла,
3) всіх допоміжних файлів (графіки, рисунки, ілюстрації тощо),
4) документа з анкетними даними авторів (прізвище, ім'я, по батькові, місце роботи, e-mail, адреса для листування та телефон).

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LATEX відповідно до вимог та з використанням шаблону, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті. Також вимоги можна отримати в редакційній колегії журналу.

Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 25 сторінок.

Структура статті:

— УДК;
— список авторів;
— місце роботи авторів;
— назва статті;
— резюме мовою оригіналу обсягом не менше 100 слів;
— Mathematical Subject Classification (2010);

— список ключових слів мовою оригіналу;

— основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України «Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України» від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується подана стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером у квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформлюється відповідно до Державного стандарту України ДСТУ 7.1:2006 «Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання» та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008);

— анотації двома іншими мовами, які повинні містити назву, список авторів, резюме обсягом не менше 100 слів та список ключових слів;

— додатково, якщо стаття написана українською або російською мовами, після анотацій подається список літератури у транслітерації, оформлений у відповідності до міжнародного стандарту *Harvard* (зразок та правила оформлення можна знайти в шаблоні статті на сайті).

Усі надіслані статті проходять анонімне рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу «Дослідження в математиці і механіці».

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, зокрема й у співавторстві.

Редакційна колегія журналу
«Дослідження в математиці і механіці»
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2
м. Одеса, 65082

Українською, російською та англійською мовами

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: серія КВ, № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

Затверджено до друку вченою радою
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова
Протокол № 12 від 31 травня 2021 р.

Відповідальний за випуск *Р. В. Шанін*
Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*
Технічний редактор *М. М. Бушин*

Тираж 100 прим. Зам. № 330(68).

Адреса редколегії:
65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
astro_print@ukr.net
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Дослідження в математиці і механіці. — 2021. — Т. 26, вип. 1(37). —
С. 1–103.