RM&M RM&M RM&M RM&M RM&M

ISSN 2519–206X

ДОСЛІДЖЕННЯ в МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Том 25. Випуск 1(35).

Volume 25. Issue 1(35).

2020

ISSN 2519–206X

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ДОСЛІДЖЕННЯ в МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

Науковий журнал

Виходить 2 рази на рік

Журнал заснований у січні 1997 р.

Том 25. Випуск 1(35). 2020

Одеса
«Астропринт»
2020

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації серія КВ № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

Журнал внесений до переліку наукових фахових видань наказами Міністерства освіти і науки України № 527 від 24.05.2018 р. та № 775 від 16.07.2018 р.

ISSN 2519–206X

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Scientific journal

Published twice a year

Journal founded in January, 1997

Volume 25. Issue 1(35). 2020

Odesa
«Astroprint»
2020

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

The certificate of mass media state registration under the number № 21400—11200ПР issued on June 17, 2015.

The journal was included in the list of scientific specialized publications by the orders of Ministry of education and science of Ukraine №527 issued on May 24, 2018 and № 775 issued on July 16, 2018.

ЗМІСТ

CONTENTS

Researches in Mathematics and Mechanics. — 2020. — V. 25, Is. 1(35). — P. 7–15

UDC 517.9

A. I. Dudko, V. N. Pivovarchik

South Ukrainian National Pedagogical University named after K. D. Ushynsky

SPECTRAL PROBLEM OF FULLERENE VIBRATIONS

Small vibrations of a graph of fullerene (truncated icosahedron) is considered each edge of which is a so-called Stieltjes string (a massless thread bearing finite number of point masses) symmetric with respect to its midpoint. The spectral problem is obtained by imposing the continuity and balance of forces conditions at the vertices. It is shown that when all the edges of the graph are the same then due to the symmetry of the problem there are multiple eigenvalues. The maximal multiplicity of an eigenvalue of such problem is 32, exactly the value which is maximal for cyclically connected graphs, i.e. $\mu + 1$ where μ is the cyclomatic number of the graph.

MSC: 39A70, 39A60, 70J30.

Key words: Stieltjes string, graph, multiplicity, eigenvalue, cyclomatic number, recurrence relations, boundary conditions.

DOI: XXXX.

1. Introduction

Since the time of Plato and Archimedes, it is known that there are only 5 regular polyhedra that are called Platonic solids. There are also Archimedian or so-called semiregular polyhedra.

In our work we will consider a truncated icosahedron. From the point of view of mathematics, this is an old object, which was rediscovered relatively recently. Interest to this object arose unexpectedly again in connection with the discovery by chemists of the third state of aggregation of carbon. It turned out that this state of carbon corresponds to a molecule that consists of 60 atoms, which are located at the vertices of a truncated icosahedron. A fullerene (buckyball) is any molecule composed entirely of carbon, in the form of a hollow sphere, ellipsoid, tube, and many other shapes. In our case, we will consider buckminsterfullerene C_{60}. It was prepared in 1989 by Richard Smalley and was named after Richard Buckminster Fuller, an architect who created a geodesic dome similar to a truncated icosahedron. Buckminsterfullerene is the smallest fullerene molecule containing pentagonal and hexagonal faces in which no two pentagons share an edge. The structure of C_{60} is a truncated icosahedron

Received 04.01.2020

(one of the semiregular or Archimedean solids), which resembles an association football ball of the type made of twenty hexagons and twelve pentagons, with a carbon atom at the vertices of each polygon and a bond along each polygon edge [8] (see Fig.1, [9]).

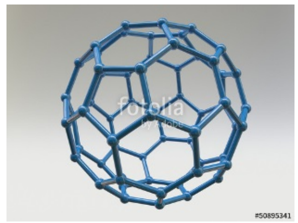

Fig. 1.

In this paper we consider small transverse vibrations of truncated icosahedron the edges of which are so-called Stieltjes strings, i.e. elastic threads of zero density bearing point masses. Transverse vibrations of graphs of such strings were considered in many publications [2], [3], [4].

Spectral problems describing longitudinal vibrations of a graph of springs bearing masses are reduced to the same equations [6].

2. Main Results

1. Fullerine graph. We choose arbitrary orientation of the edges of the graph. Let us consider a Stieltjes string bearing $n \geq 3$ point masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ $(m_k > 0)$, let $l_0, l_1, \ldots, l_n$ $(l_k > 0)$ be the intervals into which the masses divide the total length l of the string $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} l_k = l\right)$. We enumerate the point masses m_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ and subintervals l_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ on an edge successively in the direction of the edge. In the sequel we consider Stieltjes strings symmetric with respect to their midpoints. This means that:

1) if n is even then: $m_k = m_{n-k+1}, \quad k = 1, \ldots, n$; $l_k = l_{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n$;

2) if n is odd then: $m_k = m_{n-k+1}, \quad k = 1, \ldots, [n]$; $l_k = l_{n-k}, \quad k = 0, \ldots, [n]$, where $[a]$ denotes the integer part of a.

We consider a fullerene graph G each edge of which is the same symmetric Stieltjes string bearing n point masses. The graph is stretched and can vibrate such that each mass moves in the direction orthogonal to the equilibrium position of the edge.

Denote by $v_i \;\; (i = 1, 2, \dots, 60)$ the vertices of G, by $e_j \; (j = 1, 2, \dots, 90)$ the edges of G.

For each i denote by $d(v_i) = 3$ the degree of the vertex v_i, by $d^+(v_i)$ the indegree, i.e. the number of edges incoming into v_i, by $d^-(v_i)$ the outdegree, i.e. the number of edges outgoing from v_i. It is clear that $0 \leq d^{\pm}(v_i) \leq 3$ and $d^+(v_i) + d^-(v_i) = d(v_i) = 3$.

Let W_i^+ be the set of numbers of edges incoming into v_i and W_i^- be the set of numbers of edges outgoing from $v_i \;\; (i = 1, 2, \dots, 60)$.

It should be noticed that the graph of the fullerine belongs to the class of cyclically connected graphs

Definition 1 (see [1], Definition 2)**.** *Two vertices v and w of a connected graph G are said to be cyclically connected if a finite set of cycles $C_1, C_2, ..., C_k$ $(C_j \subset G,\ j = 1, 2, ...k)$ exists such that $v \in C_1$, $w \in C_k$ and each neighboring pair of cycles possesses at least one common vertex.*

Definition 2 (see [1], Definition 3)**.** *A graph is said to be cyclically connected if each pair of vertices in it is cyclically connected*

We assume absence of point masses at the vertices. Vibrations of masses on the edges are described by equations (see [5], p. 141 or [11], eq. (0.7.4))

$$\frac{V_k^{(j)}(t) - V_{k-1}^{(j)}(t)}{l_{k-1}} + \frac{V_k^{(j)}(t) - V_{k+1}^{(j)}(t)}{l_k} = m_k \frac{d^2}{dt^2} V_k^{(j)}(t), \tag{1}$$

where $k = 1, 2, \dots, n; \;\; j = 1, 2, \dots, g; g$ is the number of edges; $V_k^{(j)}(t)$ is the transverse displacement of the mass m_k lying on the edge e_j; t is the time.

At an interior vertex v_i we impose the continuity conditions

$$\begin{aligned} V_0^{(j_1^-)}(t) &= V_0^{(j_2^-)}(t) = \dots = V_0^{(j^-_{d^-(v_i)})}(t) \\ &= V_{n+1}^{(j_1^+)}(t) = V_{n+1}^{(j_2^+)}(t) = \dots = V_{n+1}^{(j^+_{d^+(v_i)})}(t), \end{aligned} \tag{2}$$

where $\{j_1^-, \dots, j^-_{d^-(v_i)}\} \in W_i^-; \;\; \{j_1^+, \dots, j^+_{d^+(v_i)}\} \in W_i^+$ and the balance of forces condition

$$\sum_{m=1}^{d^+(v_i)} \frac{V_{n+1}^{(j_m^+)}(t) - V_n^{(j_m^+)}(t)}{l_n} - \sum_{m=1}^{d^-(v_i)} \frac{V_1^{(j_m^-)}(t) - V_0^{(j_m^-)}(t)}{l_0} = 0. \tag{3}$$

As usually in the linear approach we separate variables by ansatz (see, e.g. eq. (0.7.4), (0.7.5) in [11]) $V_k^{(j)}(t) = U_k^{(j)}(z)e^{i\lambda t}$, $z = \lambda^2$. Substituting it into (1) – (3) we obtain the following spectral problem:

$$\frac{U_k^{(j)}(z) - U_{k-1}^{(j)}(z)}{l_{k-1}} + \frac{U_k^{(j)}(z) - U_{k+1}^{(j)}(z)}{l_k} = -m_k z U_k^{(j)}(z), \tag{4}$$

$$\begin{aligned} U_0^{(j_1^-)}(z) = U_0^{(j_2^-)}(z) = \cdots = U_0^{(j^-_{d^-(v_i)})}(z) \\ = U_{n+1}^{(j_1^+)}(z) = U_{n+1}^{(j_2^+)}(z) = \cdots = U_{n+1}^{(j^+_{d^+(v_i)})}(z), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\sum_{m=1}^{d^+(v_i)} \frac{U_{n+1}^{(j_m^+)}(z) - U_n^{(j_m^+)}(z)}{l_n} - \sum_{m=1}^{d^-(v_i)} \frac{U_1^{(j_m^-)}(z) - U_0^{(j_m^-)}(z)}{l_0} = 0 \tag{6}$$

where $k = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, 60$; $j_m^- \in W_i^-$, $m = j_1^-, \ldots, j^-_{d^-(v_i)}$; $j_m^+ \in W_i^+$, $m = j_1^+, \ldots, j^+_{d^+(v_i)}$ and $U_k^{(j)}$ is the amplitude of vibrations of the mass m_k located on the edge e_j, z is the spectral parameter. Here equations (5) are the continuity conditions and (6) describe the balance of forces.

2. Graph of Stieltjes strings vibrations.

Following [5] we look for a solution in the form $U_k^{(j)}(z) = R_{2k-2}(z,c)U_1^{(j)}$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$, where $R_{2k-2}(z,c)$ is a polynomials of degree $k-1$. In the sequel, we use $R_k(c)$ instead of $R_k(z,c)$ to shorten the notation.

The polynomials $R_k(c)$ satisfy the following recurrence relations:

$$R_{2k}(c) = l_k R_{2k-1}(c) + R_{2k-2}(c), \tag{7}$$

$$R_{2k-1}(c) = R_{2k-3}(c) - m_k z R_{2k-2}(c)$$

with the initial conditions

$$R_{-1}(c) \equiv \frac{1-c}{l_0}, \quad R_0(c) \equiv 1.$$

For a symmetric string

$$R_{2n-1}(0) = \frac{1}{l_0} R_{2n}(1) \tag{8}$$

and due to the Lagrange identity

$$R_{2n-1}(0)R_{2n}(1) - R_{2n-1}(1)R_{2n}(0) = \frac{1}{l_0}$$

(see, e.g. [7], Lemma 3.5) we obtain

$$\frac{1}{l_0}\left(R_{2n}(1)\right)^2 - \frac{1}{l_0} = R_{2n}(0)R_{2n-1}(1). \tag{9}$$

Now we use the procedure described in [10]. It is convenient to introduce the following solution of (4):

$$U_k^{(j)}(z) = \frac{B^{(j)} - A^{(j)}R_{2n}(1)}{R_{2n}(0)}R_{2k-2}(0) + A^{(j)}R_{2k-2}(1), \tag{10}$$

where $A^{(j)}, B^{(j)}$ are constants independent of k and z. These solutions exist for all z which are not zeros of $R_{2n}(0)$. In view of (1), (2), equation (7) for $k=0$ implies $R_{-2}(0)=0, \quad R_{-2}(1)=1$.

Substituting these into (10) we have

$$U_0^{(j)}(z) = \frac{B^{(j)} - A^{(j)}R_{2n}(1)}{R_{2n}(0)}R_{-2}(0) + A^{(j)}R_{-2}(1) = A^{(j)}. \tag{11}$$

In the same way, for $k=n+1$

$$U_{n+1}^{(j)}(z) = \frac{B^{(j)} - A^{(j)}R_{2n}(1)}{R_{2n}(0)}R_{2n}(0) + A^{(j)}R_{2n}(1) = B^{(j)}. \tag{12}$$

Continuity conditions (5) look now as

$$A^{(j_1^-)} = A^{(j_2^-)} = \cdots = A^{(j^-_{d^-(v_i)})} = B^{(j_1^+)} = B^{(j_2^+)} = \cdots = B^{(j^+_{d^+(v_i)})} := \Phi(v_i). \tag{13}$$

Balance of forces equation (6) with account of (10), (13) attains the form

$$\sum_{m=1}^{d^+(v_i)}\left(l_n B^{(j_m^+)}R_{2n-1}(0) - A^{(j_m^+)}\right) - \sum_{m=1}^{d^-(v_i)}\left(B^{(j_m^-)} - A^{(j_m^-)}R_{2n}(1)\right) = 0. \tag{14}$$

$$\sum_{m=1}^{d^+(v_i)}\left(l_n B^{(j_m^+)}R_{2n-1}(0) - A^{(j_m^+)}\right) - \sum_{m=1}^{d^-(v_i)}\left(B^{(j_m^-)} - A^{(j_m^-)}R_{2n}(1)\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{d^+(v_i)} l_n B^{(j_m^+)}R_{2n-1}(0) + \sum_{m=1}^{d^-(v_i)} A^{(j_m^-)}R_{2n}(1) - \left(\sum_{m=1}^{d^+(v_i)} A^{(j_m^+)} + \sum_{m=1}^{d^-(v_i)} B^{(j_m^-)}\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{d^+(v_i)} B^{(j_m^+)}R_{2n}(1) + \sum_{m=1}^{d^-(v_i)} A^{(j_m^-)}R_{2n}(1) - \sum_{v_j\sim v_i}\Phi(v_j)$$

$$= R_{2n}(1)\left(\sum_{m=1}^{d^+(v_i)}\Phi(v_i)+\sum_{m=1}^{d^-(v_i)}\Phi(v_i)\right)-\sum_{v_j\sim v_i}\Phi(v_j)$$
$$= R_{2n}(1)d(v_i)\Phi(v_i)-\sum_{v_j\sim v_i}\Phi(v_j).$$

or

$$R_{2n}(1)d(v_i)\Phi(v_i)-\sum_{v_j\sim v_i}\Phi(v_j)=0.$$

Here the sum is taken over all the vertices v_j adjacent with v_i.

Finally, we obtain using the notation $\zeta = 3R_{2n}(1)$, $F = \{\Phi(v_1), \ldots, \Phi(v_{60})\}^T$, and denoting by A the adjacency matrix of our graph:

$$\zeta F - AF = 0. \tag{15}$$

Let z_0 be not a zero of $R_{2n}(0)$, then it is an eigenvalue of problem (4)–(6) if and only if $\zeta_0 := 3R_{2n}(1)$ is an eigenvalue of matrix equation (15). This means that the spectrum of problem (4)–(6) consists of zeros of $R_{2n}(0)$ and of zeros of the polynomials $3R_{2n}(1)-\zeta_s$, where ζ_s $(s = 1, 2, \ldots, 60)$ are the eigenvalues of (15).

Theorem 1. *The characteristic polynomial of problem (4)–(6) is*

$$\phi(z) = (R_{2n}(z, 0))^{30} P_{60}(3R_{2n}(z, 1))$$

where P_{60} is the characteristic polynomial of matrix A.

Proof. We have already shown above that if z_0 is an eigenvalue of problem (4)–(6) and $R_{2n}(z_0, 0) \neq 0$ then ζ_0 is a zero of $P_{60}(\zeta)$. This gives $60n$ (with account of multiplicities) eigenvalues of problem (4)–(6). The total number of eigenvalues is $90n$ since 90 is the number of edges in the fullerene. Therefore, there are $30n$ (with account of multiplicities) eigenvalues more. They are the zeros of $R_{2n}^{30}(z, 0)$ because for each eigenvalue there exist 30 linearly independent eigenvectors which are composed by the vectors $R_2(z, 0), R_4(z, 0), ..., R_{2n-2}(z, 0)$ on the edges of the hexagonal faces of the graph. Theorem is proved.

Using (15) we obtain the characteristic equation for Buckminsterfullerene graph by program MAPLE

$P_{60}(\zeta) = 2985984+54743040\zeta+186416640\zeta^2-1566501120\zeta^3-7440712560\zeta^4+$

$$+26034025632\zeta^5 + 108565938200\zeta^6 - 310065067080\zeta^7 - 831616531095\zeta^8 +$$

$$+2527365617120\zeta^9 + 3576552321006\zeta^{10} - 13627897407360\zeta^{11} - 8131429397135\zeta^{12} +$$

$$+49433493646080\zeta^{13} + 4679380503120\zeta^{14} - 126428882536240\zeta^{15} +$$

$$+29617003666920\zeta^{16} + 238553091055200\zeta^{17} - 112654402736360\zeta^{18} -$$

$$-344185906596720\zeta^{19} + 228227031040884\zeta^{20} + 390055074762240\zeta^{21} -$$

$$-324375523213200\zeta^{22} - 354145195147200\zeta^{23} + 351861389316780\zeta^{24} +$$

$$+261359090670624\zeta^{25} - 303315997028160\zeta^{26} - 158412719276240\zeta^{27} +$$

$$+212712221820840\zeta^{28} + 79417625268960\zeta^{29} - 123163094844616\zeta^{30} -$$

$$-33076275953760\zeta^{31} + 59443188508110\zeta^{32} + 11466942645600\zeta^{33} -$$

$$-24056403184260\zeta^{34} - 3308173115904\zeta^{35} + 8189116955350\zeta^{36} +$$

$$+792175427520\zeta^{37} - 2346799508400\zeta^{38} - 156652575440\zeta^{39} +$$

$$+565407465144\zeta^{40} + 25376437920\zeta^{41} - 114118295000\zeta^{42} -$$

$$-3327625680\zeta^{43} + 19180834020\zeta^{44} + 347208896\zeta^{45} - 2661033600\zeta^{46} -$$

$$-28113600\zeta^{47} + 300906380\zeta^{48} + 1700640\zeta^{49} - 27244512\zeta^{50} -$$

$$-72240\zeta^{51} + 1925160\zeta^{52} + 1920\zeta^{53} - 102160\zeta^{54} - 24\zeta^{55} +$$

$$+3825\zeta^{56} - 90\zeta^{58} + \zeta^{60},$$

and, consequently, (this is given by MAPLE)

$$P_{60}(\zeta) = (\zeta - 3)(\zeta^2 + 3\zeta + 1)^3(\zeta^4 - 3\zeta^3 - 2\zeta^2 + 7\zeta + 1)^3 *$$

$$*(\zeta + 2)^4(\zeta^2 + \zeta - 4)^4(\zeta^2 - \zeta - 3)^5(\zeta^2 + \zeta - 1)^5(\zeta - 1)^9.$$

Thus we obtain the following set of zeros of P_{60}: $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 \approx -2.618$, $\zeta_4 = \zeta_5 = \zeta_6 = \zeta_7 \approx -2.562$, $\zeta_8 = \zeta_9 = \zeta_{10} = \zeta_{11} = -2$, $\zeta_{12} = \zeta_{13} = \zeta_{14} = \zeta_{15} = \zeta_{16} \approx -1.6818$, $\zeta_{17} = \zeta_{18} = \zeta_{19} \approx -1.438$, $\zeta_{20} = \zeta_{21} = \zeta_{22} = \zeta_{23} = \zeta_{24} \approx -1.303$, $\zeta_{25} = \zeta_{26} = \zeta_{27} \approx -0.382$, $\zeta_{28} = \zeta_{29} = \zeta_{30} \approx -0.139$, $\zeta_{31} = \zeta_{32} = \zeta_{33} = \zeta_{34} = \zeta_{35} \approx 0.618$, $\zeta_{36} = \zeta_{37} = \zeta_{38} = \zeta_{39} = \zeta_{40} = \zeta_{41} = \zeta_{42} = \zeta_{43} = \zeta_{44} = 1$, $\zeta_{45} = \zeta_{46} = \zeta_{47} = \zeta_{48} \approx 1.562$, $\zeta_{49} = \zeta_{50} = \zeta_{51} \approx 1.820$, $\zeta_{52} = \zeta_{53} = \zeta_{54} = \zeta_{55} = \zeta_{56} \approx 2.303$, $\zeta_{57} = \zeta_{58} = \zeta_{59} \approx 2.757$, $\zeta_{60} = 3$.

3. Conclusion

The graph C_{60} is cyclically connected (see Definition 2). The maximum multiplicity of an eigenvalue of the problem on such graph is $\mu + 1$ where μ is the cyclomatic number of the graph [1], Theorem 3.2. Since $\mu = q - p + 1$, where p is the number of vertices and q is the number of edges, in our case $\mu + 1 = 32$. We see that in our problem the maximum possible multiplicity is 32 when the eigenvalue is a (simple) zero of $R_{2n}(z, 0)$ and a double zero of $R_{2n}(z, 1) - 1$.

Дудко А. І., Пивоварчик В. М.
Спектральна задача, пов'язана з коливаннями фулеріну

Резюме

Розглянуті малі поперечні коливання графу фулеріну (усіченого ікосаедру), кожне ребро якого — стільтьєсівська струна (безмасова нитка, що несе на собі скінчену кількість зосереджених мас), симетрична відносно своєї середини. Спектральна задача отримана накладанням умов неперервності та балансу сил у вершинах. Показано, що якщо всі ребра однакові, то завдяки симетрії задачі виникають кратні власні значення. Максимальна кратність такого власного значення становить 32, що є максимальним можливим для циклічно зв'язного графу, тобто $\mu + 1$, де μ — це цикломатичне число графу.
Ключові слова: Стільтьєсівська струна, граф, кратність, власне значення, цикломатичне число, рекурентні співвідношення, крайові умови.

Дудко А. И., Пивоварчик В. Н.
Спектральная задача, связанная с колебаниями фулерина

Резюме

Рассмотрены малые поперечные колебания графа фулерина (усеченного икосаэдра), каждое ребро которого — стильтьесовская струна (безмассовая нить, несущая на себе конечное количество сосредоточенных масс), симметричная относительно своей середины. Спектральная задача получена наложением условий непрерывности и баланса сил в вершинах. Показано, что если все ребра одинаковые, то благодаря симметрии задачи возникают кратные собственные значения. Максимальная кратность такого собственного значения 32, что является максимальным возможным для циклически связного графа, т.е. $\mu + 1$, где μ — это цикломатическое число графа.
Ключевые слова: Стильтьесовская струна, граф, кратность, собственное значение, цикломатическое число, рекуррентные соотношения, краевые условия.

References

1. Boyko O., Martynyuk O., Pivovarchik V. (2019) *On maximal multiplicity of eigenvalues of finite-dimensional spectral problem on a graph*. Methods of Functional Analysis and Topology, Vol. 25, no. 2, p. 104–117.
2. Genin J., and Maybee J. S. (1974). Mechanical vibrations trees. *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 45, p. 746–763.
3. Gladwell G. (2004).*Inverse problems in vibration* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 457 p.
4. Gladwell G., A. Morassi. (2011). Matrix inverse eigenvalue problems.[Dynamical Inverse Problems: Theory and Applications]. *CISM Courses and Lectures*, Vol. 529, p. 1–29.
5. Gantmakher F.R., Krein M.G.(2002) *Oscillating matrices and kernels and vibrations of mechanical systems.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 310 p.
6. Marchenko V.A. (2005) *Introduction to the theory of inverse problems of spectral analysis (in Russian).* Kharkov: Acta, 141 p.
7. Pivovarchik V., Rozhenko N., Tretter C. (2013) Dirichlet—Neumann inverse spectral problem for a star graph of Stieltjes strings. *Linear Algebra and Applications*, Vol. 439, P. 2263–2292.
8. Qiao R., Roberts A., Mount A., Klaine S., Kleine P. C. (2007) Translocation of C60 and Its Derivatives Across a Lipid Bilayer. *Nano Letters*, Vol. 7, no. 3, p. 614–619.
9. https://blog.biolinscientific.com/hs-fs/hubfs/fullereneC60.jpeg?width=900 name=fullereneC60.jpeg.
10. Pivovarchik V., Taystruk O. (2014) Spectral problem for a graph of symmetric Stieltjes strings. *Methods of Functional Analysis and Topology*, Vol. 20, no. 2, p. 164–174.
11. Atkinson F.V. Discrete and continuous boundary problems. Academic Press, NY, London (1964). Russian translation. Аткинсон Ф.В. *Дискретные и непрерывные граничные задачи*, Москва, “Мир”, (1968), 749 с.

UDC 536.24

O. F. Kryvyi, O. Yu. Morozov

THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR A PIECEWISE HOMOGENEOUS TRANSVERSELY ISOTROPIC ELASTIC SPACE

The problem of constructing fundamental solutions to the thermoelasticity problem for a piecewise-homogeneous transversely isotropic space is reduced to the matrix Riemann problem in the space of generalized slow growth functions. As a result of the solution of which, were obtained expressions in explicit form for the components of the vector of the fundamental solution of the heat conduction problem, as well as simple representations for the components of the stress tensor and the displacement vector in plane of connection of transversely isotropic elastic half-spaces containing concentrated stationary heat sources. The temperature distribution is investigated depending on the thermophysical characteristics of the half-space materials.
MSC: 74B05, 74H05, 74J20.
Key words: fundamental solutions, matrix Riemann problem,transversely isotropic inhomogeneous space, generalized functions.
DOI: XXXX.

1. Introduction

The study of stress concentration in the vicinity of interfacial and internal defects such as cracks or inclusions in thermoelastic fields is of great practical importance. Many works have been devoted to this problem for various environments. In particular, in [1-2], the problems of stationary thermoelasticity for bodies with a heat-penetrating disc inclusion, between whose surfaces there is an imperfect thermal contact, as well as problems with a thin heat-active disc inclusion are considered.

The problem is reduced to hypersingular integral equations of the first and second kind, for which exact solutions are obtained.In [3-9] non-axisymmetric problems of elasticity and thermoelasticity for piecewise-homogeneous transversely isotropic spaces containing interfacial stress concentrators, such as cracks or rigid inclusions, using the method of singular integral relations (SIR) [10] reduced to systems of two-dimensional singular integral equations (SIR)

Received 15.04.2020

and proposed a method for their solution. A similar approach was applied in [11-15] to solving problems of interfacial and internal defects in piecewise homogeneous anisotropic media.

In the mathematical formulation and solution of such problems about defects, it is necessary to set the boundary conditions on the defect itself, such as stress on the crack edges or displacement at the inclusion.Since in thy physical formulation of the problems from determining the stress and displacement fields in the vicinity of the stress concentrators, known the stresses or displacements at the boundary of the region,at some interior points or at infinity (for unbounded bodies), then the determination of the boundary conditions on the defect is a separate problem.

Within the framework of the linear theory of thermoelasticity, to solve this problem, it is necessary to know the distribution of the temperature, stress and displacement fields in the corresponding piecewise homogeneous bodies without defects in the presence of volumetric forces and concentrated heat sources.

In particular, for piecewise homogeneous isotropic and transversally isotropic spaces, such solutions are given, respectively, in [16] and [17].Green's functions for piecewise homogeneous transversally isotropic spaces in the presence of a concentrated heat source and in the absence of thermal diffusion were constructed in [18], and in the presence of thermal diffusion — in [19]. In [20, 21], Green's functions for a layered thermal environment were constructed.

An effective method for solving this problem is the method of fundamental solutions in the space $\Im'(\mathbb{R}^3)$ of generalized functions of slow growth. In particular, in [14], the problem of constructing fundamental solutions for piecewise homogeneous two-dimensional anisotropic media is reduced to the matrix Riemann problem with respect to some variables in the space $\Im'(\mathbb{R}^3)$ and suggested an approach to its solution. In this work, this approach is generalized to construct in an explicit analytical form fundamental solutions to the problem of heat conduction and thermoelasticity for a piecewise-homogeneous transversely isotropic space, which made it possible to study the temperature distribution and obtain how the temperature affects the distribution of stresses and displacements in the plane of joining materials.

2. Main Results

1. Statement of the problem. Let stationary heat sources, concentrated in some regions of dimension n (n = 0,1,2,3), act in an inhomogeneous space composed of two different transversely isotopic half-spaces, completely linked in the plane $z = 0$.

The thermoelastic state of space is described by the vector

$$\mathbf{v} = \{v_k(x,y,z)\}_{k=\overline{1,9}} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}, u, v, w\} \tag{1}$$

Based on the equilibrium equations and the generalized Hooke's law, and also taking into account the Duhamel-Neumann relation with respect to the components of the vector $\mathbf{v}$, in the space of generalized functions of slow growth $\Im'(\mathbb{R}^3)$ we write the following boundary value problem

$$\mathbf{D}[z, \partial_1, \partial_2, \partial_3]\mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{v},\, \mathbf{F} \in \Im'(\mathbb{R}^3), \tag{2}$$

$$v_k(x,y,+0) = v_k(x,y,-0),\ k = \overline{1,9},\ k \neq 1,2,6 \tag{3}$$

$$v_k(x,y,x)|_{(x,y,z)\to\infty} = 0,\ (k = \overline{1,9}), \tag{4}$$

Here we use the notation

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} \mathbf{D}_0 & \mathbf{O}_{3\times3} \\ -\mathbf{S} & \mathbf{D}_0^T \end{Vmatrix}, \mathbf{F}^T = \|0,0,0,\beta_1,\beta_2,\beta_3,0,0,0\|, \mathbf{S} = \begin{Vmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{O}_{3\times3} \\ \mathbf{O}_{3\times3} & \mathbf{S}_2 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{D}_0 = \begin{Vmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{Vmatrix}, \mathbf{S}_1 = \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{11} & s_{13} \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} \end{Vmatrix}, \mathbf{S}_2 = \begin{Vmatrix} s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & s_{66} \end{Vmatrix},$$

$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$, $s_{kj} = \theta(z)s_{kj}^{+} + \theta(-z)s_{kj}^{-}$, $s_{kj}^{pm}-$ the coefficients of the generalized Hooke's law, respectively, for the upper $z > 0$ and lower $z < 0$ half-spaces; $\mathbf{O}_{3\times3}-$ zero matrix of dimension 3×3, $\beta_k = \theta(z)\beta_k^{+} + \theta(-z)\beta_k^{-}$, $\beta_k^{\pm}-$ thermal expansion coefficients , $T-$ temperature concentrated heat source.

2. Construction of the fundamental solution of the heat conduction problem.

We introduce the following notation $\mathbf{w} = \{w_k\}_{k=\overline{1,4}}$, where functions $w_k(x,y,z) \in \Im'(\mathbb{R}^3)$ there are components of the system of fundamental solutions, that is, solutions that satisfy the following system of boundary value problems

$$\mathbf{D}[z,\partial_1,\partial_2,\partial_3]\mathbf{w} = \mathbf{f}^0, \quad \mathbf{w}_j,\, \mathbf{f}^0 \in \Im'(\mathbb{R}^3), \tag{5}$$

$$w_4(x,y,+0) = w_4(x,y,-0), \lambda_3^+\partial_3 w_4(x,y,+0) = \lambda_3^-\partial_3 w_4(x,y,-0) \tag{6}$$

where

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 & \partial_1 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 & \partial_2 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} & \partial_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f}^0 = \{-\delta_{k4}\delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\}_{k=\overline{1,4}},$$

δ_{kj}-Kronecker symbol,$\lambda_i = \lambda_i^+\theta\,(x_3) + \lambda_i^-\theta\,(-x_3)\,,\ i = \overline{1,3},\ \lambda_i^\pm$−thermal conductivity coefficients for the upper $z > 0$ and lower $z < 0$ half-spaces, respectively.

Vector components $\mathbf{w}$ represented as$w_k = \theta(z)w_k + \theta(-z)w_k = w_k^+ + w_k^-$, де $w_k^\pm \in \Im'(\mathbb{R}^3_\pm)$, $\mathbb{R}^3_\pm = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_\pm$ and apply to the matrix equation (5) the operator of the three-dimensional Fourier transform F_3 from $\Im'(\mathbb{R}^3)$. Then, considering the conditions (6) and results of works [10–13,26,27], relatively $\mathrm{W}_k^\pm(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \mathrm{F}_3[w_k^\pm] \in \Im'(\mathbb{R}^3)$ we obtain the following matrix equation

$$\mathbf{B}^+\mathbf{W}^+ = \mathbf{B}^-\mathbf{W}^- + \mathbf{F}^0, \mathbf{W}_j^\pm,\, \mathbf{F}_j^0 \in \Im'(\mathbb{R}^3), j = \overline{1,4}. \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{W}^\pm = \{\mathrm{W}_k^\pm\}_{k=1}^4, \quad \mathbf{B}^\pm = \mathbf{D}[\pm 0, -i\alpha_1, -\,i\alpha_2, -i\alpha_3], \\ &\ \mathbf{F}_j^0 = \{\delta_{k4}e^{i\alpha_1 x_0 + i\alpha_2 y_0 + i\alpha_3 z_0}\}_{k=1}^4, \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}[\pm 0, -i\alpha_1, -\,i\alpha_2, -i\alpha_3] = \begin{pmatrix} \lambda_{1,\pm}^{-1} & 0 & 0 & (-i\alpha_1) \\ 0 & \lambda_{1,\pm}^{-1} & 0 & (-i\alpha_2) \\ 0 & 0 & \lambda_{3,\pm}^{-1} & (-i\alpha_3) \\ (-i\alpha_1) & (-i\alpha_2) & (-i\alpha_3) & 0 \end{pmatrix}.$$

Function $w_{kj}^\pm \in \Im'(\mathbb{R}^3_\pm)$ admit an analytical representation [22,26,27] on the variable α_3, therefore, matrix equation (1.7) is a boundary condition for the matrix Riemann problem in the variable α_3.

Given the properties of generalized functions and applying the methodology of [10-14,26,27], the boundary conditions (1.7) can be written as

$$\mathbf{B}^{\pm}\mathbf{W}^{\pm} = \mathbf{F}^{\pm}, \mathbf{W}^{\pm}, \mathbf{F}^{\pm} \in \Im'(\mathbb{R}^3), \tag{8}$$

where

$$\mathbf{F}_j^{\pm} = \{f_k^{\pm}\}_{k=\overline{1,4}}, \qquad f_k^{\pm} = \theta(\pm z_0)e_0^{\pm}\delta_{k4} \mp \frac{1}{2}\chi_k,$$
$$\chi = \{\chi_k\}_{k=\overline{1,4}} \in \Im'(\mathbb{R}^2), \qquad \chi_k = 0,\ k = 1,2.$$

$\chi_k(\alpha_1, \alpha_2)-$ unknown functions from $\Im'(\mathbb{R}^2)$ for determine of which, we use conditions (7) in Fourier transforms.

Directly from equations (1.8) we obtain $\mathbf{W}^{\pm} = \mathbf{B}_{\pm}^{-1}\mathbf{F}^{\pm}$, where $\mathbf{B}_{\pm}^{-1} = \left\{b_k^{*,\pm}\right\}_{k=\overline{1,4}}$. After applying the inverse Fourier transform, the components of the vectors $\mathbf{w}^{\pm} = \{w_k^{\pm}\}_{k=\overline{1,4}} = \mathrm{F}_3^{-1}[\mathbf{W}^{\pm}]$ will be presented as:

$$w_1^+ = \frac{(x-x_0)}{2r}\{\theta(z_0)(\frac{m_{11}^+(r_0^2+(\xi_n^+|z-z_0|)^2)^{-1/2}}{(\xi_n^+|z-z_0|+\sqrt{r_0^2+(\xi_n^+|z-z_0|)^2})} - \frac{m_{12}^+(r_0^2+(\xi_0^+(z+z_0))^2)^{-1/2}}{(\xi_0^+|z+z_0|+\sqrt{r_0^2+(\xi_0^+(z+z_0))^2})})+$$
$$+\theta(-z_0)\frac{m_{13}^+(r_0^2+(\xi_0^- z_0-\xi_0^+ z)^2)^{-1/2}}{(|\xi_0^- z_0-\xi_0^+ z|+\sqrt{r_0^2+(\xi_0^- z_0-\xi_0^+ z)^2})}\},$$

$$w_1^- = \frac{(x-x_0)}{2r}\{\theta(-z_0)(\frac{m_{11}^-(r_0^2+(\xi_n^-|z-z_0|)^2)^{-1/2}}{(\xi_n^-|z-z_0|+\sqrt{r_0^2+(\xi_n^-|z-z_0|)^2})} - \frac{m_{12}^-(r_0^2+(\xi_0^-(z+z_0))^2)^{-1/2}}{(\xi_0^-|z+z_0|+\sqrt{r_0^2+(\xi_0^-(z+z_0))^2})})-$$
$$-\theta(z_0)\frac{m_{13}^-(r_0^2+(\xi_0^- z-\xi_0^+ z_0)^2)^{-1/2}}{(|\xi_0^- z-\xi_0^+ z_0|+\sqrt{r_0^2+(\xi_0^- z-\xi_0^+ z_0)^2})}\},$$

$$w_2^+ = \frac{(y-y_0)}{2r}\{\theta(z_0)(\frac{m_{11}^+(r_0^2+(\xi_n^+|z-z_0|)^2)^{-1/2}}{(\xi_n^+|z-z_0|+\sqrt{r_0^2+(\xi_n^+|z-z_0|)^2})} - \frac{m_{12}^+(r_0^2+(\xi_0^+(z+z_0))^2)^{-1/2}}{(\xi_0^+|z+z_0|+\sqrt{r_0^2+(\xi_0^+(z+z_0))^2})})+$$
$$+\theta(-z_0)\frac{m_{13}^+(r_0^2+(\xi_0^- z_0-\xi_0^+ z)^2)^{-1/2}}{(|\xi_0^- z_0-\xi_0^+ z|+\sqrt{r_0^2+(\xi_0^- z_0-\xi_0^+ z)^2})}\},$$

$$w_2^- = \frac{(y-y_0)}{2r}\{\theta(-z_0)(\frac{m_{11}^-(r_0^2+(\xi_n^-|z-z_0|)^2)^{-1/2}}{(\xi_n^-|z-z_0|+\sqrt{r_0^2+(\xi_n^-|z-z_0|)^2})} - \frac{m_{12}^-(r_0^2+(\xi_0^-(z+z_0))^2)^{-1/2}}{(\xi_0^-|z+z_0|+\sqrt{r_0^2+(\xi_0^-(z+z_0))^2})})-$$
$$-\theta(z_0)\frac{m_{13}^-(r_0^2+(\xi_0^- z-\xi_0^+ z_0)^2)^{-1/2}}{(|\xi_0^- z-\xi_0^+ z_0|+\sqrt{r_0^2+(\xi_0^- z-\xi_0^+ z_0)^2})}\},$$

$$w_3^+ = \{\theta(z_0)(m_{21}^+\frac{\mathrm{sign}(z-z_0)\xi_0^+|z-z_0|}{(r_0^2+(\xi_0^+|z-z_0|)^2)^{3/2}} - \frac{m_{22}^+\xi_0^+(z+z_0)}{(r_0^2+(\xi_0^+(z+z_0))^2)^{3/2}})-$$
$$-\theta(-z_0)\frac{m_{23}^+|\xi_0^+ z-\xi_0^- z_0|}{(r_0^2+(\xi_0^+ z-\xi_0^- z_0)^2)^{3/2}}\},$$

$$w_3^- = \{\theta(-z_0)(m_{21}^- \frac{\mathrm{sign}(z-z_0)\xi_0^- |z-z_0|}{(r_0^2+(\xi_0^- |z-z_0|)^2)^{3/2}} - \frac{m_{22}^+ \xi_0^+ (z+z_0)}{(r_0^2+(\xi_0^- (z+z_0))^2)^{3/2}})+$$
$$+\theta(-z_0)\frac{m_{23}^- |\xi_0^+ z_0-\xi_0^- rz|}{(r_0^2+(\xi_0^+ z_0-\xi_0^- rz)^2)^{3/2}}\},$$

$$w_4^+ = \{\theta(z_0)(\frac{m_{31}^+}{\sqrt{r_0^2+(\xi_0^+ |z-z_0|)^2}} - \frac{m_{32}^+}{\sqrt{r_0^2+(\xi_0^+ (z+z_0))^2}})+$$
$$+\theta(-z_0)\frac{m_{33}^+}{\sqrt{r_0^2+(\xi_0^+ z-\xi_0^- z_0)^2}}\},$$

$$w_4^- = \{\theta(-z_0)(\frac{m_{31}^-}{\sqrt{r_0^2+(\xi_0^- |z-z_0|)^2}} + \frac{m_{32}^-}{\sqrt{r_0^2+(\xi_0^- (z+z_0))^2}})-$$
$$-\theta(z_0)\frac{m_{33}^-}{\sqrt{r_0^2+(\xi_0^- z-\xi_0^+ z_0)^2}}\},$$

where

$$m_{11}^\pm = \frac{\lambda_1^\pm}{\xi_0^\pm}, \quad m_{12}^\pm = \lambda_1^\pm(\lambda_3^\pm m_1^\pm \pm \frac{m_2^\pm}{\xi_0^\pm}), \quad m_{13}^\pm = \lambda_1^\pm(\lambda_3^\pm m_1^\mp \pm \frac{m_2^\mp}{\xi_0^\pm}),$$

$$m_{21}^\pm = 1, \quad m_{22}^\pm = \frac{\lambda_1^\pm \lambda_3^+}{\xi_0^\pm} m_1^\pm \pm \lambda_3^\pm m_2^\pm, \quad m_{23}^\pm = \frac{\lambda_1^\pm \lambda_3^+}{\xi_0^\pm} m_1^\mp \pm \lambda_3^\pm m_2^\mp$$

$$m_{31}^\pm = \frac{1}{\lambda_3^\pm \xi_0^\pm}, \quad m_{32}^\pm = \lambda_3^\pm m_1^\pm \pm \frac{m_2^\pm}{\xi_0^\pm}, \quad m_{33}^\pm = \lambda_3^\pm m_1^\mp + \frac{m_2^\mp}{\xi_0^\pm}$$

Sought temperature T we get like this $T = w_4 * Q$.

3. Construction of a fundamental solution to the problem of thermoelasticity. We apply to the matrix equation (2) the operator of the three-dimensional Fourier transform F_3 із $\Im'(\mathbb{R}^3)$, given the following representation for vector components $\mathbf{v}$: $v_k = \theta(z)v_k + \theta(-z)v_k = v_k^+ + v_k^-$, were $v_k^\pm \in \Im'(\mathbb{R}^3_\pm)$, $\mathbb{R}^3_\pm = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_\pm$. Then, considering the conditions (3) and the results of [10-14,26,27], with respect to $\mathrm{V}_k^\pm(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \mathrm{F}_3[v_k^\pm] \in \Im'(\mathbb{R}^3)$ and also that the functions $\mathrm{V}_k^\pm \in \Im'(\mathbb{R}^3_\pm)$ admit an analytical representation [22,26,27] in the variable α_3 we obtain the following matrix equation

$$\mathbf{M}_\pm \mathbf{V}^\pm = \mathbf{F}^\pm, \mathbf{W}^\pm, \mathbf{F}^\pm \in \Im'(\mathbb{R}^3), \tag{9}$$

where

$$\mathbf{M}_\pm = \mathbf{D}[\pm 0, -i\alpha_1, -i\alpha_2, -i\alpha_3], \quad \mathbf{F}_j^\pm = \{f_k^\pm\}_{k=\overline{1,4}},$$
$$f_k^\pm = \mp\frac{1}{2}\chi_k, \quad k = \overline{1,9}, \quad k \neq 3,4,5,$$
$$f_k^\pm = \beta_{k-2}^\pm T^\pm \mp \frac{1}{2}\chi_k, \quad k = 3,4,5,$$
$$\chi = \{\chi_k\}_{k=\overline{1,4}} \in \Im'(\mathbb{R}^2), \quad \chi_k = 0, \quad k = 4,5,9$$

$\chi_k(\alpha_1, \alpha_2)-$ unknown functions from $\Im'(\mathbb{R}^2)$ for determine which, we need to use conditions (3) after the Fourier-transformed.

We represent the sought functions as

$$\mathrm{V}_{7j}^{\pm} = -(-i\alpha_2)\Psi_{1j}^{\pm} - (-i\alpha_1)\Psi_{2j}^{\pm}, \mathrm{V}_{8j}^{\pm} = (-i\alpha_1)\Psi_{1j}^{\pm} - (-i\alpha_2)\Psi_{2j}^{\pm}, \tag{10}$$

$$\mathrm{V}_{5j}^{\pm} = -(-i\alpha_2)\Upsilon_{1j}^{\pm} - (-i\alpha_1)\Upsilon_{2j}^{\pm}, \mathrm{V}_{4j}^{\pm} = (-i\alpha_1)\Upsilon_{1j}^{\pm} - (-i\alpha_2)\Upsilon_{2j}^{\pm}, \tag{11}$$

where $\Psi_k^{\pm}, \Upsilon_k^{\pm}$ $(k = 1, 2)$ new unknown functions, then matrix equation (9) can be separated into two independent equations

$$\mathbf{L}_{\pm}\mathbf{V}^{(1),\pm} = \mathbf{F}_1^{\pm}, \mathbf{G}_{\pm}\mathbf{V}^{(2),\pm} = \mathbf{F}_2^{\pm}. \tag{12}$$

where we use the notation

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^{(1),\pm} &= \{\mathrm{V}_k^{(1),\pm}\}_{k=1,2} = \{\Upsilon_{1j}^{\pm}, \Psi_{1j}^{\pm}\},\\
\mathbf{V}^{(2),\pm} &= \{\mathrm{V}_k^{(2),\pm}\}_{k=1,4} = \{\mathrm{W}_{3j}^{\pm}, \mathrm{T}_{2j}^{\pm}, \Psi_{2j}^{\pm}, \mathrm{W}_{9j}^{\pm}\},\\
\mathbf{F}_{j1}^{\pm} &= \left\{(-i\alpha_2)f_{1j}^{\pm} - (-i\alpha_1)f_{2j}^{\pm}, (-i\alpha_2)f_{7j}^{\pm} - (-i\alpha_1)f_{8j}^{\pm}\right\}, r^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2,\\
\mathbf{F}_{j2}^{\pm} &= \left\{f_{3j}^{\pm}, (-i\alpha_1)f_{1j}^{\pm} + (-i\alpha_2)f_{2j}^{\pm}, (-i\alpha_2)f_{8j}^{\pm} + (-i\alpha_1)f_{7j}^{\pm}, f_{6j}^{\pm}\right\},\\
\mathbf{G}_{\pm} &= \{g_{kj}^{\pm}\}_{k,j=\overline{1,4}}, g_{11}^{\pm} = g_{44}^{\pm} = (-i\alpha_3), g_{12}^{\pm} = r^2, g_{22}^{\pm} = g_{33}^{\pm} = (-i\alpha_3)r^2,\\
g_{kj}^{\pm} &= g_{jk}^{\pm} = 0, \quad k = 1, 2, \quad j = 3, 4,\\
g_{21}^{\pm} &= -\frac{c_{13}^{\pm}}{c_{33}^{\pm}}g_{12}^{\pm}, \quad g_{23}^{\pm} = -\frac{\bar{c}_{13}^{\pm} + c_{13}^{\pm\,2}}{c_{33}^{\pm}}r^4, \quad g_{32}^{\pm} = -\frac{1}{c_{44}^{\pm}}g_{12}^{\pm},\\
g_{34}^{\pm} &= -g_{12}^{\pm}, \quad g_{41}^{\pm} = -\frac{1}{c_{33}^{\pm}}, \quad g_{43}^{\pm} = \frac{c_{13}^{\pm}}{c_{33}^{\pm}}g_{12}^{\pm}, \quad \mathbf{L}_{\pm} = \{l_{kj}^{\pm}\}_{k,j=1,2},\\
l_{11}^{\pm} &= (-i\alpha_3)r^{-2}, \quad l_{22}^{\pm} = (-i\alpha_3)r^2, \quad l_{21}^{\pm} = -r^2/c_{44}^{\pm}, \quad l_{21}^{\pm} = -c_{66}r^4,
\end{aligned}$$

Directly from equations (12) we obtain $\mathbf{V}^{(1),\pm} = \mathbf{L}_{\pm}^{-1}\mathbf{F}_{j1}^{\pm}$, $\mathbf{V}^{(2),\pm} = \mathbf{G}_{\pm}^{-1}\mathbf{F}_{j2}^{\pm}$, were $\mathbf{L}_{\pm}^{-1} = \left\{l_{kj}^{*,\pm}\right\}_{k,j=1,2}$, $\mathbf{G}_{\pm}^{-1} = \left\{g_{kj}^{*,\pm}\right\}_{i,j=\overline{1,4}}$. Further, using representations

(11), (12) after applying the inverse Fourier transform, we obtain:

$$\sigma_3 = -\sum_{n=1}^{3}\left(\frac{R^0_{1,n}}{\sqrt{r_0^2+(\xi_n\,|z-z_0|)^2}} - \frac{\omega_{1,n}}{\sqrt{r_0^2+(\overset{\frown}{\xi}_n z+\overset{\smile}{\xi}_0 z_0)^2}}\right)$$

$$+\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{3}\frac{\alpha_{1,n,m}}{\sqrt{r_0^2+(\overset{\frown}{\xi}_n z+\overset{\smile}{\xi}_m z_0)^2}},$$

$$\sigma_4 = (y-y_0)\Bigg\{\sum_{n=1}^{3}\frac{R^0_{2,n}(r_0^2+(\xi_n\,|z-z_0|)^2)^{-1/2}}{\left(\xi_n\,|z-z_0|+\sqrt{r_0^2+(\xi_n\,|z-z_0|)^2}\right)}$$

$$-\sum_{n=1}^{3}\frac{\omega_{2,n}(r_0^2+(\overset{\frown}{\xi}_n z+\overset{\smile}{\xi}_0 z_0)^2)^{-1/2}}{\left(\overset{\frown}{\xi}_n\,|z|+\overset{\smile}{\xi}_0\,|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\overset{\frown}{\xi}_n z+\overset{\smile}{\xi}_0 z_0)^2}\right)}$$

$$-\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{3}\frac{\alpha_{2,n,m}(r_0^2+(\overset{\frown}{\xi}_n z+\overset{\smile}{\xi}_m z_0)^2)^{-1/2}}{(\overset{\frown}{\xi}_n\,|z|+\overset{\smile}{\xi}_m\,|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\overset{\frown}{\xi}_n z+\overset{\smile}{\xi}_m z_0)^2})}\Bigg\},$$

$$\sigma_5 = (x-x_0)\Bigg\{\sum_{n=1}^{3}\frac{R^0_{2,n}(r_0^2+(\xi_n\,|z-z_0|)^2)^{-1/2}}{(\xi_n\,|z-z_0|+\sqrt{r_0^2+(\xi_n\,|z-z_0|)^2})}$$

$$-\sum_{n=1}^{3}\frac{\omega_{2,n}(r_0^2+(\overset{\frown}{\xi}_n z+\overset{\smile}{\xi}_0 z_0)^2)^{-1/2}}{(\overset{\frown}{\xi}_n\,|z|+\overset{\smile}{\xi}_0\,|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\overset{\frown}{\xi}_n z+\overset{\smile}{\xi}_0 z_0)^2})}$$

$$-\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{3}\frac{\alpha_{2,n,m}(r_0^2+(\overset{\frown}{\xi}_n z+\overset{\smile}{\xi}_m z_0)^2)^{-1/2}}{(\overset{\frown}{\xi}_n\,|z|+\overset{\smile}{\xi}_m\,|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\overset{\frown}{\xi}_n z+\overset{\smile}{\xi}_m z_0)^2})}\Bigg\},$$

$$u_1 = (x-x_0)\Bigg\{\sum_{n=1}^{3}\frac{R^0_{3,n}}{\left(\xi_n\,|z-z_0|+\sqrt{r_0^2+(\xi_n\,|z-z_0|)^2}\right)}$$

$$-\sum_{n=1}^{3}\frac{\omega_{3,n}}{\left(\overset{\frown}{\xi}_n\,|z|+\overset{\smile}{\xi}_0\,|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\overset{\frown}{\xi}_n z+\overset{\smile}{\xi}_0 z_0)^2}\right)}$$

$$-\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{3}\frac{\alpha_{3,n,m}}{\left(\overset{\frown}{\xi}_n\,|z|+\overset{\smile}{\xi}_m\,|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\overset{\frown}{\xi}_n z+\overset{\smile}{\xi}_m z_0)^2}\right)}\Bigg\},$$

$$u_2 = (y-y_0)\Bigg\{\sum_{n=1}^{3}\frac{R^0_{3,n}}{(\xi_n\,|z-z_0|+\sqrt{r_0^2+(\xi_n\,|z-z_0|)^2})}$$

$$
-\sum_{n=1}^{3}\frac{\omega_{3,n}}{(\overset{\frown}{\xi}_n|z|+\overset{\smile}{\xi}_0|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\overset{\frown}{\xi}_n z+\overset{\smile}{\xi}_0 z_0)^2})}
$$

$$
\left.-\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{3}\frac{\alpha_{3,n,m}}{(\overset{\frown}{\xi}_n|z|+\overset{\smile}{\xi}_m|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\overset{\frown}{\xi}_n z+\overset{\smile}{\xi}_m z_0)^2})}\right\},
$$

$$
u_3=-\sum_{n=1}^{3}R^0_{4,n}\left(\ln\frac{c}{2}+\ln\left(|z-z_0|\,\xi_n^+ +\sqrt{r_0^2+(\xi_n|z-z_0|)^2}\right)\right)
$$

$$
+\sum_{n=1}^{3}\omega_{4,n}\left(\ln\frac{c}{2}+\ln\left((\overset{\frown}{\xi}_n|z|+\overset{\smile}{\xi}_0|z_0|)+\sqrt{r_0^2+(\overset{\frown}{\xi}_n z+\overset{\smile}{\xi}_0 z_0)^2}\right)\right)
$$

$$
+\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{3}\alpha_{4,n,m}\left(\ln\frac{c}{2}+\ln((\overset{\frown}{\xi}_n|z|+\overset{\smile}{\xi}_m|z_0|)+\sqrt{r_0^2+(\overset{\frown}{\xi}_n z+\overset{\smile}{\xi}_m z_0)^2})\right),
$$

were

$$
q_j^{\pm}(\alpha_3,r)=g^{*,\pm}_{j2}(\alpha_3,r)\gamma_1^{\pm}r^2+g^{*,\pm}_{j4}(\alpha_3,r)\gamma_2^{\pm},\, j=\overline{1,4}
$$

$$
R^{0,+}_{1,n}=\frac{q_1^+(-i\xi_n^+,1)\tau^{++}(-i\xi_n^+,1)}{\xi_n^+h_n^+},\bar{R}^{0,+}_{1,n}=\frac{q_1^+(i\xi_n^+,1)\tau^{++}(i\xi_n^+,1)}{\xi_n^+h_n^+}
$$

$$
\tau^{++}(\alpha_3,r)=(-i\alpha_3)\lambda_3^+m_1^+-rm_2^+,\tau^{-+}(\alpha_3,r)=(-i\alpha_3)\lambda_3^-m_1^+-rm_2^+,
$$

$$
\tau^{+-}(\alpha_3,r)=(-i\alpha_3)\lambda_3^+m_1^--rm_2^-,\tilde{\beta}^{-+}_{1,n}=\frac{q_1^-(i\xi_n^{\pm},1)\tau^{-+}(i\xi_n^-,1)}{\xi_n^-h_n^-},
$$

$$
\tilde{\beta}^{+-}_{1,n}=\frac{q_1^+(-i\xi_n^+,1)\tau^{+-}(-i\xi_n^+,1)}{\xi_n^+h_n^+},\tilde{\beta}^{++}_{j,n}=\frac{q_j^+(-i\xi_n^+,1)\tau^{++}(-i\xi_n,1)}{\xi_n^+h_n^+},j=\overline{1,4}
$$

$$
h_n^{\pm}=\prod_{l=1,l\neq n}^{3}(\xi_n^{\pm})^2-(\xi_l^{\pm})^2,\tau^{--}(\alpha_3,r)=(-i\alpha_3)\lambda_3^-m_1^--rm_2^-,
$$

$$
\tilde{\beta}^{--}_{1,n}=\frac{q_1^-(i\xi_n^-,1)\tau^{--}(i\xi_n^-,1)}{\xi_n^-h_n^-},R^{\pm}_{j,k}=\sum_{n=1}^{2}R^{*,+}_{j,k,n},\beta_j^{\pm\pm}=\sum_{n=1}^{3}\tilde{\beta}^{\pm\pm}_{j,n},
$$

$$
\beta_j^{\pm\mp}=\sum_{n=1}^{3}\tilde{\beta}^{\pm\mp}_{j,n},\mathbf{A}_0^{-1}=\{a^*_{kj}\}_{k,j=\overline{1,4}},\mathbf{A}_0=\{a_{k,j}\}_{k,j=\overline{1,4}}=\mathbf{N}^++\bar{\mathbf{N}}^-,
$$

$$
\mathbf{N}^{\pm}=\{R^{\pm}_{j,k}\}_{k,j=\overline{1,4}},\alpha^+_{j,m}=\sum_{k=1}^{4}a^*_{jk}\bar{R}^{0,+}_{k,n},\alpha^-_{j,m}=\sum_{k=1}^{4}a^*_{jk}R^{0,-}_{k,m},
$$

$$
\mu_j^+=\sum_{k=1}^{4}a^*_{jk}\beta_k^+,\mu_j^-=\sum_{k=1}^{4}a^*_{jk}\beta_k^-,\beta_j^+=\beta_j^{++}+\beta_j^{-+},\beta_j^-=\beta_j^{--}+\beta_j^{+-}
$$

$$\alpha^{++}_{j,n,m}=\sum_{k=1}^{4}R^{*,+}_{j,k,n}\alpha^{+}_{k,m},\alpha^{+-}_{j,n,m}=\sum_{k=1}^{4}R^{*,+}_{j,k,n}\alpha^{+}_{k,m},\mu^{++}_{j}=\sum_{k=1}^{4}R^{*,+}_{j,k,n}\mu^{+}_{j},$$

$$\mu^{+-}_{j,n}=\sum_{k=1}^{4}R^{*,+}_{j,k,n}\mu^{-}_{j},n=1,2,\mu^{+-}_{j,n}=0,n=3,\alpha^{--}_{j,n,m}=\sum_{k=1}^{4}R^{*,--}_{j,k,n}\alpha^{+}_{k,m},$$

$$\alpha^{-+}_{j,n,m}=\sum_{k=1}^{4}R^{*,-}_{j,k,n}\alpha^{+}_{k,m},\mu^{--}_{j,n}=\sum_{k=1}^{4}R^{*,-}_{j,k,n}\mu^{-}_{j},\mu^{-+}_{j,n}=\sum_{k=1}^{4}R^{*,-}_{j,k,n}\mu^{+}_{j},n=1,2,$$

$$\mu^{--}_{j,n}=\mu^{-+}_{j,n}=0,n=3,\tilde{\omega}^{\pm\pm}_{j,n}=\tilde{\beta}^{\pm\pm}_{j,n}-\mu^{\pm\pm}_{j,n},\tilde{\omega}^{\pm\mp}_{j,n}=\tilde{\beta}^{\pm\mp}_{j,n}-\mu^{\pm\mp}_{j,n},$$

$$\overset{\frown}{R}{}^{0,+}_{j,n}=\theta(z-z_0)R^{0,+}_{j,n}+\theta(z_0-z)\bar{R}^{0,+}_{j,n},\overset{\smile}{R}{}^{0,-}_{j,n}=\theta(z-z_0)R^{0,-}_{j,n}+\theta(z_0-z)\bar{R}^{0,-}_{j,n}$$

$$\omega_{j,n}=-\theta(z,z_0)\tilde{\omega}^{++}_{1,n}+\theta(z,-z_0)\tilde{\omega}^{+-}_{1,n}+\theta(-z,z_0)\tilde{\omega}^{-+}_{1,n}-\theta(-z,-z_0)\tilde{\omega}^{--}_{1,n}$$

$$\alpha_{j,n,m}=\theta(z,z_0)\alpha^{++}_{j,m,n}-\theta(z,-z_0)\alpha^{+-}_{j,m,n}+\theta(-z,-z_0)\alpha^{--}_{j,m,n}-\theta(-z,z_0)\alpha^{-+}_{j,m,n}$$

$$\overset{\frown}{\xi}_n=\theta(z,z_0)\xi^{+}_{n}-\theta(z,-z_0)\xi^{+}_{n}+\theta(-z,-z_0)\xi^{-}_{n}-\theta(-z,z_0)\xi^{-}_{n};$$

$$\overset{\frown}{\xi}_0=\theta(z,z_0)\xi^{+}_{0}-\theta(z,-z_0)\xi^{+}_{0}+\theta(-z,-z_0)\xi^{-}_{0}-\theta(-z,z_0)\xi^{-}_{0};$$

$$\overset{\smile}{\xi}_m=\theta(z,z_0)\xi^{+}_{m}-\theta(z,-z_0)\xi^{-}_{m}+\theta(-z,-z_0)\xi^{-}_{m}-\theta(-z,z_0)\xi^{+}_{m};$$

$$\xi_n=\theta(z)\theta(z_0)\xi^{+}_{n}+\theta(-z)\theta(-z_0)\xi^{-}_{n},R^{0}_{j,n}=\theta(z,z_0)\overset{\frown}{R}{}^{0,+}_{1,n}+\theta(-z,-z_0)\overset{\smile}{R}{}^{0,-}_{1,n},$$

4. Stress and displacement fields in the plane of connection of half-spaces. Putting $z=0$ in the fundamental solutions, we obtain the distribution of normal and tangential stresses and displacements in the plane of connection of half-spaces in the presence of heat sources.

$$\sigma_3(x,y)=-\sum_{n=1}^{3}\frac{R^0_{1,n}}{\sqrt{r_0^2+(\xi_n z_0)^2}}+\frac{\omega_1}{\sqrt{r_0^2+(\overset{\smile}{\xi}_0 z_0)^2}}+\sum_{n=1}^{3}\frac{\alpha_{1,n}}{\sqrt{r_0^2+(\overset{\smile}{\xi}_n z_0)^2}},$$

$$\sigma_4(x,y)=(y-y_0)\{\sum_{n=1}^{3}\frac{R^0_{2,n}(r_0^2+(\xi_n z_0)^2)^{-1/2}}{(\xi_n|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\xi_n z_0)^2})}-\frac{\omega_2(r_0^2+(\overset{\smile}{\xi}_0 z_0)^2)^{-1/2}}{(\overset{\smile}{\xi}_0|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\overset{\smile}{\xi}_0 z_0)^2})}-$$
$$-\sum_{n=1}^{3}\frac{\alpha_{2,n}(r_0^2+(\overset{\smile}{\xi}_n z_0)^2)^{-1/2}}{(\overset{\smile}{\xi}_n|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\overset{\smile}{\xi}_n z_0)^2})}\},$$

$$\sigma_5(x,y) = (x-x_0)\{\sum_{n=1}^{3} \frac{R^0_{2,n}(r_0^2+(\xi_n z_0)^2)^{-1/2}}{(\xi_n|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\xi_n z_0)^2})} - \frac{\omega_2(r_0^2+(\breve{\xi}_0 z_0)^2)^{-1/2}}{(\breve{\xi}_0|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\breve{\xi}_0 z_0)^2})} -$$
$$- \sum_{n=1}^{3} \frac{\alpha_{2,n}(r_0^2+(\breve{\xi}_n z_0)^2)^{-1/2}}{(\breve{\xi}_n|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\breve{\xi}_n z_0)^2})}\},$$

$$u_1(x,y) = (x-x_0)\{\sum_{n=1}^{3} \frac{R^0_{3,n}}{(\xi_n|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\xi_n z_0)^2})} - \frac{\omega_3}{(\breve{\xi}_0|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\breve{\xi}_0 z_0)^2})} -$$
$$- \sum_{n=1}^{3} \frac{\alpha_{3,n}}{(\breve{\xi}_n|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\breve{\xi}_n z_0)^2})}\},$$

$$u_2(x,y) = (y-y_0)\{\sum_{n=1}^{3} \frac{R^0_{3,n}}{(\xi_n|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\xi_n z_0)^2})} - \frac{\omega_3}{(\breve{\xi}_0|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\breve{\xi}_0 z_0)^2})} -$$
$$- \sum_{n=1}^{3} \frac{\alpha_{3,n}}{(\breve{\xi}_n|z_0|+\sqrt{r_0^2+(\breve{\xi}_n z_0)^2})}\},$$

$$u_3(x,y) = -\sum_{n=1}^{3} R^0_{4,n}(\ln\tfrac{c}{2} + \ln(|z_0|\,\xi_n^+ + \sqrt{r_0^2+(\xi_n z_0)^2}))+$$
$$+\omega_4(\ln\tfrac{c}{2} + \ln((\breve{\xi}_0\,|z_0|) + \sqrt{r_0^2+(\breve{\xi}_0 z_0)^2}))+$$
$$+\sum_{n=1}^{3} \alpha_{4,n}(\ln\tfrac{c}{2} + \ln((\breve{\xi}_n\,|z_0|) + \sqrt{r_0^2+(\breve{\xi}_n z_0)^2})).$$

5. Discussion and numerical results. Numerical investigations of the temperature distribution were carried out depending on the thermophysical properties of materials. Figures 1-4 show the temperature distribution in the $Z0Y$ plane depending on for some combinations of transversely isotropic materials. In particular, for zinc Zn : $(\lambda_1^+ = 115, \lambda_3^+ = 117, /^0)$ - material m1; Cadmium Cd : $(\lambda_1^- = 93, \lambda_3^- = 94, /^0)$ - material m2; aluminum oxide Al_2O_3 : $(\lambda_1^+ = 25\lambda_3^+ = 30/^0)$ - m3 material; magnesium Mg:$(\lambda_1^- = 156, \lambda_3^- = 157, /^0)$ - material m4, and in the presence of two heat sources of the same power $Q = 10^5$

3. Conclusion

The problem of constructing fundamental solutions to the thermoelasticity problem for a piecewise-homogeneous transversely isotropic space is reduced to the matrix Riemann problem in the space of generalized slow growth functions.As a result of the solution of which, were obtained expressions in explicit

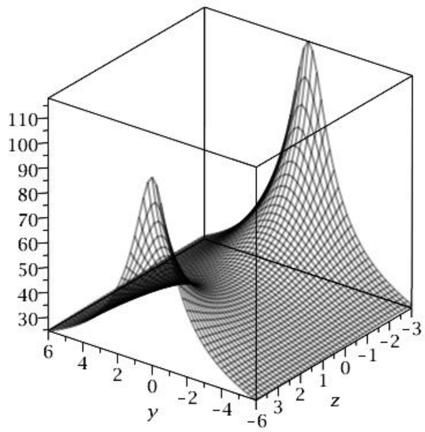

Fig.1 m1-m2

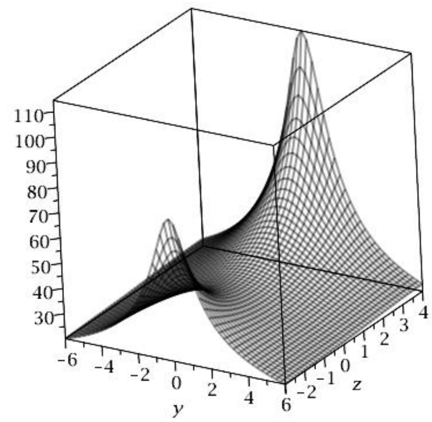

Fig.2 m2-m4

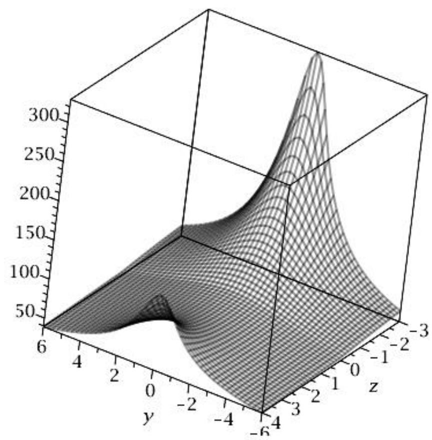

Fig.3 m2-m3

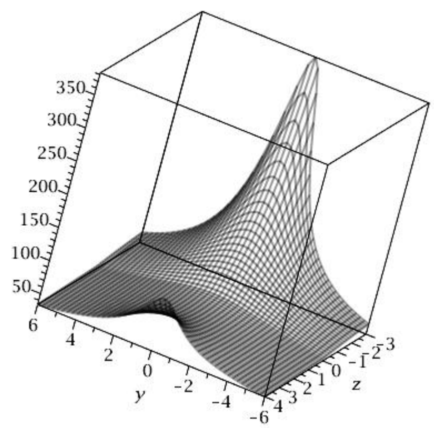

Fig.4 m1-m3

form for the components of the vector of the fundamental solution of the heat conduction problem, as well as simple representations for the components of the stress tensor and the displacement vector in plane of connection of transversely isotropic elastic half-spaces containing concentrated stationary heat sources. The temperature distribution is investigated depending on the thermophysical characteristics of the half-space materials.

Кривий О. Ф., Морозов Ю. О.

Фундаментальні розв'язки задачі термопружності для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного пружного простору

Резюме

Проблема побудови фундаментальних розв'язків задачі термопружності для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору зведена до матричної задачі Рімана в просторі узагальнених функцій повільного зростання. В результаті розв'язування якої отримано в явному вигляді вирази для компонент вектора фундаментального розв'язку задачі теплопровідності, а також прості подання для компонент тензора напружень і вектора переміщень у площині з'єднання трансверсально-ізотропних пружних півпросторів, які містять зосереджені стаціонарні джерелі тепла. Досліджено розподіл температури в залежності від теплофізичних характеристик матеріалів півпросторів.
Ключові слова: фундаментальні розв'язки, матрична задача Рімана, трансверсально-ізотропний неоднорідний простір, узагальнені функції.

Кривой А. Ф., Морозов Ю. А.

Фундаментальные решения задач термоупругости для кусочно-однородной трансверсально-изотропной упругого пространства

Резюме

Проблема построения фундаментальных решений задачи термоупругости для кусочно-однородной трансверсально-изотропного пространства сведена к матричной задачи Римана в пространстве обобщенных функций медленного роста. В результате решения которой получено в явном виде выражения для компонент вектора фундаментального решении задачи теплопроводности, а также простые представления для компонент тензора напряжений и вектора перемещений в плоскости соединения трансверсально-изотропных упругих полупространств, содержащих сосредоточенные стационарные источнике тепла. Исследовано распределение температуры в зависимости от теплофизических характеристик материалов полупространств.
Ключевые слова: фундаментальные решения, матричная задача Римана, трансверсально-изотропное неоднородное пространство, обобщенные функции.

References

1. Kit H. S., Sushko O. P. Axially symmetric problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with thermally active or thermally insulated disk inclusion (crack) // J. Math. Sci. (2011) – 176, No. 4. – P. 561–577. – https://doi.org/10.1007/s10958-011-0422-7
2. Kit H. S., Sushko O. P. Problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with a heat permeable disk-shaped inclusion (crack) // J. Math. Sci. (2011) – 174, No. 3. – P. 309–321. – https://doi.org/10.1007/s10958-011-0422-7
3. Efimov V. V.,Krivoi A. F., Popov G. Ya. Problems on the stress concentration near a circular imperfection in a composite elastic medium // Mech. Solids. (1998) – 33, No. 2. – P. 35–49.
4. Kryvyi O. F. Mutual influence of an interface tunnel crack and an interface tunnel inclusion in a piecewise homogeneous anisotropic space // J. Math. Sci. (2015) – 208, No. 4. – P. 409–416. – https://doi.org/10.1007/s10958–015–2455–9.

5. Kryvyi O. F. Delaminated interface inclusion in a piecewise homogeneous transversely isotropic space // Mater. Sci. (2014). – 50, No. 2. – P. 245–253. – https://doi.org/10.1007/s11003–014–9714–7.
6. Kryvyi O. F. Interface circular inclusion under mixed conditions of interaction with a piecewise homogeneous transversally isotropic space // J. Math. Sci. (2012) – 184, No. 1. – P. 101–119. – https://doi.org/10.1007/s10958–012–0856–6.
7. Kryvyi O. F. Singular integral relations and equations for a piecewise homogeneous transversally isotropic space with interphase defects // J. Math. Sci. (2011) – 176, No. 4. – P. 515–531. – https://doi.org/10.1007/s10958–011–0419–2.
8. Kryvyi O. F., Morozov Yu. O. Solution of the problem of heat conduction for the transversely isotropic piecewise-homogeneous space with two circular inclusions // J. Math. Sci. (2019) – 243, No. 1. – P. 162–182. – https://doi.org/10.1007/s10958–019–04533–1.
9. Kryvyi O. F., Morozov Yu. O. Interphase circular inclusion in a piecewise-homogeneous transversely isotropic space under the action of a heat flux // Proc. 1st Int. conf. Theor. Appl. Exper. Mech., ICTAEM-2018 / E. Gdoutos (ed). – P. 394–396. – https://doi.org/10.1007/978–3–319–91989–8–94.
10. Kryvyi O. F. The discontinuous solution for the piece-homogeneous transversal isotropic medium // Oper. Theory: Adv. Appl. (2009) – 191. – P. 395–406. – https://doi.org/10.1007/978–3–7643–9921–4–25
11. Kryvyi O. F. Mutual influence of an interface tunnel crack and an interface tunnel inclusion in a piecewise homogeneous anisotropic space / O. F. Kryvyi // J. Math. Sci. (2015) – 208, No. 4. – P. 409–416. – https://doi.org/10.1007/s10958–015–2455–9.
12. Kryvyi O. F. Tunnel internal crack in a piecewise homogeneous anisotropic space // J. Math. Sci. (2014) – 198, No. 1. – P. 62–74. – https://doi.org/10.1007/s10958–014–1773–7.
13. Kryvyi O. F., Popov G. Ya. Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space //Int. Appl. Mech. (2008) – 44, No. 6. – P. 626–634. – https://doi.org/10.1007/s10778–008–0084–4.
14. Kryvyi O. F.,Popov G. Ya., Radiollo M. V. Certain problems of an arbitrarily oriented stringer in a composite an isotropic plane //J. Appl. Math. Mech. (1986) – 50, No. 4. – P. 475–483. – https://doi.org/10.1016/0021–8928(86)90012–2.
15. Kryvyi O. F., Morozov Yu. O. Thermally active interphase inclusion in a smooth contact conditions with transversely isotropic half-spaces // Frattura ed Integrita Strutturale, 52 (2020) 33-50; DOI: 10.3221/IGF-ESIS.52.04.
16. Yue Z. Q. Elastic fields in two joined transversely isotropic solids due to concentrated forces // Int. J. Eng. Sci. (1995) – 33, No. 3. – P. 351–369.– https://doi.org/10.1016/0020–7225(94)00063–P.
17. Li X.F., Fan T.Y. The asymptotic stress field for a ring circular inclusion at the interface of two bonded dissimilar elastic half-space materials // Int. J. Solids Struct. (2001) - 38, No. 44-45. - P. 8019–8035. - https://doi.org/10.1016/S0020–7683(01)00010–5.

18. Hou P.F., Leung A. T. Y., He Y.J. Three-dimensional Green's functions for transversely isotropic thermoelastic bimaterials // Int. J. Solids Struct. (2008) - 45, No. 24 .– P. 6100-6113. - doi.org/10.1016/j.ijsolstr. 2008.07.022.

19. Kumar R., Gupta V. Green's function for transversely isotropic thermoelastic diffusion bimaterials // J. Therm. Stresses. (2014) – 37, No. 10. – P. 1201–1229.

20. Kushnir R. M., Protsyuk Yu. B. Thermoelastic state of layered thermosensitive bodies of revolution for the quadratic dependence of the heat-conduction coefficients // Mater Sci. (2011) – 46, No. 1. – P. 1–15. – https://doi.org/10.1007/s11003–010–9258–4.

21. Kushnir R. M., Protsyuk B. A. A method of the Green's functions for quasistatic thermoelasticity problems in layered thermosensitive bodies under complex heat exchange // Oper. Theory: Adv. Appl. (2009) – 191. – P. 143–154. – doi.org/10.100 7/978–3–7643–9921–4–9.

Researches in Mathematics and Mechanics. — 2020. — V. 25, Is. 1(35). — P. 31–50

UDC 517.926

S. Shchogolev
Odessa I. I. Mechnikov National University

ON THE REDUCTION OF THE LINEAR SYSTEM OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH COEFFICIENTS OF OSCILLATING TYPE TO THE TRIANGULAR KIND IN THE RESONANT CASE

For the linear homogeneous differential system, whose coefficients are represented as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency, the conditions of the existence of the transformation which leads it to triangular kind, are obtained in the resonant cases.
MSC 2010: 34A30, 34C25.
Key words: linear differential systems, triangular kind, Fourier-series, slowly varying parameters.
DOI: XXXX.

1. Introduction

In the theory of linear systems of differential equations is well known problem of the construction for the linear homogeneous system of the differential equations

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{1}$$

where $x = \mathrm{colon}(x_1, ..., x_n)$, $A(t) = (a_{jk}(t))_{j,k=\overline{1,n}}$, Lyapunov's transformation

$$x = L(t)y,$$

which leads the system (1) to the triangular kind

$$\frac{dy}{dt} = T(t)y,$$

where $T(t) = (b_{jk}(t))_{j,k=\overline{1,n}}$, $b_{jk}(t) \equiv 0$ $(j < k)$ [1–4].

In this paper, we assume, that the system (1) already reduced to a kind, close to triangular:

$$\frac{dx}{dt} = (T(t) + \mu P(t))x, \tag{2}$$

Received 29.06.2020

where μ – small parameter, and the matrix $P(t)$ has a some special kind. And we study the problen on bringing the system (2) to a purely triangular form

$$\frac{dy}{dt} = D(t)y,$$

where $D(t) = (d_{jk}(t))_{j,k=\overline{1,n}}$, $d_{jk} \equiv 0$ $(j < k)$.

This paper continues the research, begun in the paper [5]. The basic notation and definitions of the paper [5] are retained. As in the paper [5], we will study this problem for a third-order system ($n = 3$) so as not to clutter up the presentation with secondary technical difficulties associated with the dimension of the system. All fundamental difficulties take place in this case too.

Statement of the Problem. We consider the next system of differential equations:

$$\frac{dx}{dt} = (B(t,\varepsilon) + \mu P(t,\varepsilon,\theta))x, \tag{3}$$

where $x = \mathrm{colon}(x_1, x_2, x_3)$,

$$B(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} b_{11}(t,\varepsilon) & 0 & 0 \\ b_{21}(t,\varepsilon) & b_{22}(t,\varepsilon) & 0 \\ b_{31}(t,\varepsilon) & b_{32}(t,\varepsilon) & b_{33}(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$b_{jk}(t,\varepsilon) \in S(m;\varepsilon_0)$ $(j,k = 1,2,3)$, $P(t,\varepsilon,\theta) = (p_{jk}(t,\varepsilon,\theta))_{j,k=1,2,3}$, $p_{jk}(t,\varepsilon,\theta) \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $\mu \in (0,\mu_0) \subset \mathbb{R}^+$.

We assume that

$$b_{jj}(t,\varepsilon) - b_{kk}(t,\varepsilon) = i m_{jk} \varphi(t,\varepsilon), \tag{4}$$

$m_{jk} \in \mathbb{Z}$, $m_{jj} \equiv 0$, $m_{jk} = -m_{kj}$ $(j,k = 1,2,3)$, $\varphi(t,\varepsilon)$ – the function that appears in the definition of the class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

We study the problem of the existence of a transformation of kind

$$x = (E + \mu\Psi(t,\varepsilon,\theta,\mu))y, \tag{5}$$

$y = \mathrm{colon}(y_1, y_2, y_3)$, E – unit matrix of third order, Ψ – matrix of third order with elements from $F(l;\varepsilon_1;\theta)$ $(0 < l \leq m,\ 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0)$, which leads at sufficiently small μ the system (3) to the kind:

$$\frac{dy}{dt} = K(t,\varepsilon,\theta,\mu))y, \tag{6}$$

where $K = (k_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu))_{j,k=\overline{1,2,3}}$, $k_{jk} \equiv 0$ $(j < k)$, $k_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F(l;\varepsilon_1;\theta)$.

That is, the same problem is considered as in work [5], but, taking into account conditions (4), in the resonance case, in contrast to [5].

2. Auxiliary results

Lemma. *Let we have the system*

$$\frac{dv}{dt} = \left(A(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} Q_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right) v, \tag{7}$$

$v = \mathrm{colon}(v_1, v_2, v_3)$, $q \in \mathbb{N}$,

$$A(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} im_{12}\varphi(t,\varepsilon) & -c_{32}(t,\varepsilon) & 0 \\ 0 & im_{13}\varphi(t,\varepsilon) & 0 \\ 0 & c_{21}(t,\varepsilon) & im_{23}\varphi(t,\varepsilon) \end{pmatrix} \tag{8}$$

$m_{jk} \in \mathbb{N}$, $c_{jk}(t,\varepsilon) \in S(m;\varepsilon_0)$, *and* $\varphi(t,\varepsilon)$ *– the function in the definition of class* $F(m;\varepsilon_0;\theta)$*, the elements of matrices* Q_l $(l = \overline{1,q})$ *belongs to the class* $F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Then there exists $\mu_1 \in (0,\mu_0)$*, such that for all* $\mu \in (0,\mu_1)$ *there exists the Lyapunov's transformation of kind*

$$v = \left(E + \sum_{l=1}^{q} \Psi_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right) w, \tag{9}$$

where elemens of matrices $\Psi_l(t,\varepsilon,\theta)$ $(l = \overline{1,q})$ *belongs to the class* $F(m;\varepsilon_0;\theta)$*, which leads the system (7) to kind:*

$$\frac{dw}{dt} = \left(A(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} U_l(t,\varepsilon)\mu^l + \varepsilon\sum_{l=1}^{q} V_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l + \mu^{q+1}W(t,\varepsilon,\theta,\mu)\right) w, \tag{10}$$

where $U_l(t,\varepsilon)$ *– the matrices with elements from* $S(m;\varepsilon_0)$*,* V_l, W *– the matrices with elements from* $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$.

Proof. We substitute the expression (8) into system (7), and require that the transformed system has the kind (9). We obtain the next chain of matrix differential equations for detemining matrices $\Psi_1, ..., \Psi_q$:

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = A(t,\varepsilon)\Psi_1 - \Psi_1 A(t,\varepsilon) + Q_1(t,\varepsilon,\theta) - U_1(t,\varepsilon) - \varepsilon V_1(t,\varepsilon,\theta), \tag{11}$$

$$\frac{d\Psi_l}{dt} = A(t,\varepsilon)\Psi_l - \Psi_l A(t,\varepsilon) + Q_l(t,\varepsilon,\theta) - \sum_{\nu=1}^{l-1} Q_\nu \Psi_{l-\nu} -$$

$$-\sum_{\nu=1}^{l-1} \Psi_\nu U_{l-\nu}(t,\varepsilon) - \varepsilon \sum_{\nu=1}^{l-1} \Psi_\nu V_{l-\nu}(t,\varepsilon,\theta) - U_l(t,\varepsilon) - \varepsilon V_l(t,\varepsilon,\theta),\ l = \overline{2,q}. \quad (12)$$

where $\Psi_l = (\psi_{jk}^l)_{j,k=1,2,3}$, $Q_l = (q_{jk}^l)_{j,k=1,2,3}$, $U_l = (u_{jk}^l)_{j,k=1,2,3}$, $V_l = (v_{jk}^l)_{j,k=1,2,3}$ $(l = \overline{1,q})$.

Then the matrix W at sufficiently small values μ is determined from the equation:

$$\left(E + \sum_{l=1}^{q} \Psi_l \mu^l\right) W = \sum_{s=0}^{q-1} \left[\sum_{\sigma+\delta=s+q+1} (Q_\sigma \Psi_\delta - \Psi_\sigma U_\delta \right] \mu^s -$$

$$-\sum_{s=0}^{q-1} \left(\sum_{\sigma+\delta=s+q+1} \Psi_\sigma V_\delta \right) \mu^s. \quad (13)$$

We consider the equation (11). In the component it looks like this:

$$\frac{d\psi^1_{11}}{dt}=-c_{32}(t,\varepsilon)\psi^1_{21}+q^1_{11}(t,\varepsilon,\theta)-u^1_{11}(t,\varepsilon)-\varepsilon v^1_{11}(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\frac{d\psi^1_{12}}{dt}=i(m_{12}-m_{13})\varphi(t,\varepsilon)\psi^1_{12}-c_{32}(t,\varepsilon)(\psi^1_{22}-\psi^1_{11})-c_{21}(t,\varepsilon)\psi^1_{13}+$$

$$+q^1_{12}(t,\varepsilon,\theta)-u^1_{12}(t,\varepsilon)-\varepsilon v^1_{12}(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\frac{d\psi^1_{13}}{dt}=i(m_{12}-m_{23})\varphi(t,\varepsilon)\psi^1_{13}-c_{32}(t,\varepsilon)\psi^1_{23}+$$

$$+q^1_{13}(t,\varepsilon,\theta)-u^1_{13}(t,\varepsilon)-\varepsilon v^1_{13}(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\frac{d\psi^1_{21}}{dt}=i(m_{13}-m_{12})\varphi(t,\varepsilon)\psi^1_{21}+q^1_{21}(t,\varepsilon,\theta)-u^1_{21}(t,\varepsilon)-\varepsilon v^1_{21}(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\frac{d\psi^1_{22}}{dt}=c_{32}(t,\varepsilon)\psi^1_{21}-c_{21}(t,\varepsilon)\psi^1_{32}+q^1_{22}(t,\varepsilon,\theta)-u^1_{11}(t,\varepsilon)-\varepsilon v^1_{22}(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\frac{d\psi^1_{23}}{dt}=i(m_{13}-m_{23})\varphi(t,\varepsilon)\psi^1_{23}+q^1_{23}(t,\varepsilon,\theta)-u^1_{23}(t,\varepsilon)-\varepsilon v^1_{23}(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\frac{d\psi^1_{31}}{dt}=i(m_{23}-m_{12})\varphi(t,\varepsilon)\psi^1_{31}+c_{21}(t,\varepsilon)\psi^1_{21}+$$

$$+q^1_{31}(t,\varepsilon,\theta)-u^1_{31}(t,\varepsilon)-\varepsilon v^1_{31}(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\frac{d\psi^1_{32}}{dt}=i(m_{23}-m_{13})\varphi(t,\varepsilon)\psi^1_{32}+c_{21}(t,\varepsilon)(\psi^1_{21}-\psi^1_{33})+c_{32}(t,\varepsilon)\psi^1_{31}+$$

$$+q^1_{32}(t,\varepsilon,\theta)-u^1_{32}(t,\varepsilon)-\varepsilon v^1_{32}(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\frac{d\psi^1_{33}}{dt}=c_{21}(t,\varepsilon)\psi^1_{23}+q^1_{33}(t,\varepsilon,\theta)-u^1_{33}(t,\varepsilon)-\varepsilon v^1_{33}(t,\varepsilon,\theta). \tag{14}$$

Define ψ^1_{jk}, u^1_{jk}, v^1_{jk} by the following expression:

$$\psi^1_{21}(t,\varepsilon,\theta)=-\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq m_{13}-m_{12})}}^{\infty}\frac{\Gamma_n[q^1_{21}(t,\varepsilon,\theta)]}{i(m_{13}-m_{12}-n)\varphi(t,\varepsilon)}\ e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$u^1_{21}(t,\varepsilon)=\Gamma_{m_{13}-m_{12}}[q^1_{21}(t/\varepsilon,\theta)],$$

$$v_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq m_{13}-m_{12})}}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n[q_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{i(m_{13}-m_{12}-n)\varphi(t,\varepsilon)}\right)e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$\psi_{11}^1(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n[q_{11}^1(t,\varepsilon,\theta)-c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi(t,\varepsilon)}\ e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$u_{11}^1(t,\varepsilon)=\Gamma_0[q_{11}^1(t,\varepsilon,\theta)-c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)],$$

$$v_{11}^1(t,\varepsilon,\theta)=-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n[q_{11}^1(t,\varepsilon,\theta)-c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi(t,\varepsilon)}\right)e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$\psi_{31}^1(t,\varepsilon,\theta)=-\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq m_{23}-m_{12})}}^{\infty}\frac{\Gamma_n[q_{31}^1(t,\varepsilon,\theta)+c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{i(m_{23}-m_{12}-n)\varphi(t,\varepsilon)}\ e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$u_{31}^1(t,\varepsilon)=\Gamma_{m_{23}-m_{12}}[q_{11}^1(t,\varepsilon,\theta)-c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)],$$

$$v_{31}^1(t,\varepsilon,\theta)=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq m_{23}-m_{12})}}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n[q_{31}^1(t,\varepsilon,\theta)+c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{i(m_{23}-m_{12}-n)\varphi(t,\varepsilon)}\right)e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)=-\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq m_{13}-m_{23})}}^{\infty}\frac{\Gamma_n[q_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{i(m_{13}-m_{23}-n)\varphi(t,\varepsilon)}\ e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$u_{23}^1(t,\varepsilon)=\Gamma_{m_{13}-m_{23}}[q_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)],$$

$$v_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq m_{13}-m_{23})}}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n[q_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{i(m_{13}-m_{23}-n)\varphi(t,\varepsilon)}\right)e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$\psi_{33}^1(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n[q_{33}^1(t,\varepsilon,\theta)+c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi(t,\varepsilon)}\ e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$u_{33}^1(t,\varepsilon)=\Gamma_0[q_{33}^1(t,\varepsilon,\theta)+c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)],$$

$$v_{33}^1(t,\varepsilon,\theta)=-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n[q_{33}^1(t,\varepsilon,\theta)+c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi(t,\varepsilon)}\right)e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$\psi_{22}^1(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n[q_{22}^1(t,\varepsilon,\theta)+c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)-c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi(t,\varepsilon)}\ e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$u_{22}^1(t,\varepsilon)=\Gamma_0[q_{22}^1(t,\varepsilon,\theta)+c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)-c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)],$$

$$v_{22}^1(t,\varepsilon,\theta) = -\frac{1}{\varepsilon}\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n[q_{22}^1(t,\varepsilon,\theta)+c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{21}^1(t,\varepsilon,\theta)-c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{in\varphi(t,\varepsilon)}\right)e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$\psi_{32}^1(t,\varepsilon,\theta) = -\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq m_{23}-m_{13})}}^{\infty}\frac{\Gamma_n[q_{32}^1(t,\varepsilon,\theta)+c_{21}(t,\varepsilon)(\psi_{22}^1-\psi_{33}^1)+c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{31}^1]}{i(m_{23}-m_{13}-n)\varphi(t,\varepsilon)}\,e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$u_{32}^1(t,\varepsilon) = \Gamma_{m_{23}-m_{13}}[q_{32}^1(t,\varepsilon,\theta)+c_{21}(t,\varepsilon)(\psi_{22}^1-\psi_{33}^1)+c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{31}^1],$$

$$v_{32}^1(t,\varepsilon,\theta) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq m_{23}-m_{13})}}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n[q_{32}^1(t,\varepsilon,\theta)+c_{21}(t,\varepsilon)(\psi_{22}^1-\psi_{33}^1)+c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{31}^1]}{i(m_{23}-m_{13}-n)\varphi(t,\varepsilon)}\right)e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$\psi_{13}^1(t,\varepsilon,\theta) = -\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq m_{12}-m_{23})}}^{\infty}\frac{\Gamma_n[q_{13}^1(t,\varepsilon,\theta)-c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{i(m_{12}-m_{23}-n)\varphi(t,\varepsilon)}\,e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$u_{13}^1(t,\varepsilon) = \Gamma_{m_{12}-m_{23}}[q_{13}^1(t,\varepsilon,\theta)-c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)],$$

$$v_{13}^1(t,\varepsilon,\theta) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq m_{12}-m_{23})}}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n[q_{13}^1(t,\varepsilon,\theta)-c_{32}(t,\varepsilon)\psi_{23}^1(t,\varepsilon,\theta)]}{i(m_{12}-m_{23}-n)\varphi(t,\varepsilon)}\right)e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$\psi_{12}^1(t,\varepsilon,\theta) = -\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq m_{12}-m_{13})}}^{\infty}\frac{\Gamma_n[q_{12}^1(t,\varepsilon,\theta)-c_{32}(t,\varepsilon)(\psi_{22}^1-\psi_{11}^1)-c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{13}^1]}{i(m_{12}-m_{13}-n)\varphi(t,\varepsilon)}\,e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$u_{12}^1(t,\varepsilon) = \Gamma_{m_{12}-m_{13}}[q_{12}^1(t,\varepsilon,\theta)-c_{32}(t,\varepsilon)(\psi_{22}^1-\psi_{11}^1)-c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{13}^1],$$

$$v_{12}^1(t,\varepsilon,\theta) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq m_{12}-m_{13})}}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n[q_{12}^1(t,\varepsilon,\theta)-c_{32}(t,\varepsilon)(\psi_{22}^1-\psi_{11}^1)-c_{21}(t,\varepsilon)\psi_{13}^1]}{i(m_{12}-m_{13}-n)\varphi(t,\varepsilon)}\right)e^{in\theta(t,\varepsilon)}.$$

All the elements of matrix U_1 belongs to the class $S(m;\varepsilon_0)$. All the elements of matrix Ψ_1 belongs to the class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$. All the elements of matrix V_1 belongs to the class $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$.

All the equations (12) are considered similarly to equations (11), and so the matrices Ψ_l, U_l, V_l $(l=\overline{1,q})$ are determined. And also all the elements of matrix Ψ_l belongs to the class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, all the elements of matrix U_l belongs to the class $S(m;\varepsilon_0)$, all the elements of matrix V_l belongs to the class $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ $(l=\overline{1,q})$. Matrix W are determined from the equations (13).

Lemma are proved.

3. Problem solving method and basic results.

We seek the transformation of the kind:

$$x = (E + \mu\Psi(t, \varepsilon, \theta, \mu))y, \tag{15}$$

$y = \mathrm{colon}(y_1, y_2, y_3)$, E – unit matrix of third order,

$$\Psi(t, \varepsilon, \theta, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & \psi_{12}(t, \varepsilon, \theta, \mu) & \psi_{13}(t, \varepsilon, \theta, \mu) \\ 0 & 0 & \psi_{23}(t, \varepsilon, \theta, \mu) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\psi_{jk} \in F(m_1; \varepsilon_1; \theta)$ $(0 \le m_1 \le m;\ 0 \le \varepsilon_1 < \varepsilon_0)$, which leads the system (3) to the kind:

$$\frac{dy}{dt} = (B(t, \varepsilon) + \mu D(t, \varepsilon, \theta, \mu))\, y, \tag{16}$$

where

$$D(t, \varepsilon, \theta, \mu) = \begin{pmatrix} d_{11}(t, \varepsilon, \theta, \mu) & 0 & 0 \\ d_{21}(t, \varepsilon, \theta, \mu) & d_{22}(t, \varepsilon, \theta, \mu) & 0 \\ d_{31}(t, \varepsilon, \theta, \mu) & d_{32}(t, \varepsilon, \theta, \mu) & d_{33}(t, \varepsilon, \theta, \mu) \end{pmatrix}.$$

We substitute the expression (15) into system (3), and require that the transformed system has the kind (16). We obtain the next system of the differential equations for detemining $\psi_{12}, \psi_{13}, \psi_{23}$:

$$\begin{aligned} \tfrac{d\psi_{12}}{dt} &= K_{12}(t, \varepsilon, \theta, \psi_{12}, \psi_{13}, \psi_{23}, \mu), \\ \tfrac{d\psi_{13}}{dt} &= K_{13}(t, \varepsilon, \theta, \psi_{12}, \psi_{13}, \psi_{23}, \mu), \\ \tfrac{d\psi_{23}}{dt} &= K_{23}(t, \varepsilon, \theta, \psi_{12}, \psi_{13}, \psi_{23}, \mu), \end{aligned} \tag{17}$$

where

$$K_{12} = (m_{11} - m_{22})\varphi(t, \varepsilon)\psi_{12} - b_{32}(t, \varepsilon)\psi_{13} + p_{12}(t, \varepsilon, \theta) +$$

$$+\mu b_{21}(t, \varepsilon)\psi_{12}^2 + \mu b_{32}(t, \varepsilon)\psi_{12}\psi_{23} -$$

$$-\mu^2 p_{21}(t, \varepsilon, \theta)\psi_{12}^2 + \mu^2 b_{31}(t, \varepsilon)\psi_{12}^2\psi_{23} + \mu^2 p_{32}(t, \varepsilon, \theta)\psi_{12}\psi_{23} +$$

$$+\mu^2 b_{31}(t, \varepsilon)\psi_{12}\psi_{13} + \mu^2 p_{32}(t, \varepsilon, \theta)\psi_{13} + \mu^3 p_{31}(t, \varepsilon, \theta)\psi_{12}^2\psi_{23} + \mu^3 p_{31}(t, \varepsilon, \theta)\psi_{12}\psi_{13},$$

$$K_{13} = (m_{11} - m_{33})\varphi(t,\varepsilon)\psi_{13} + p_{13}(t,\varepsilon,\theta) + \mu(p_{11}(t,\varepsilon,\theta) - p_{33}(t,\varepsilon,\theta))\psi_{13}+$$

$$+\mu p_{12}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{23} - \mu b_{13}(t,\varepsilon)\psi_{13}^2 - \mu b_{32}(t,\varepsilon)\psi_{13}\psi_{23}-$$

$$-\mu^2 p_{31}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{13}^2 - \mu^2 p_{32}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{13}\psi_{23},$$

$$K_{23} = (m_{22} - m_{33})\varphi(t,\varepsilon)\psi_{23} + b_{21}(t,\varepsilon)\psi_{13} + p_{23}(t,\varepsilon,\theta) + \mu p_{21}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{12}+$$

$$+\mu(p_{22}(t,\varepsilon,\theta) - p_{33}(t,\varepsilon,\theta))\psi_{23} - \mu b_{31}(t,\varepsilon)\psi_{13}\psi_{23}-$$

$$-\mu b_{32}(t,\varepsilon)\psi_{23}^2 - \mu^2 p_{31}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{13}\psi_{23} - \mu^2 p_{32}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{23}^2.$$

In this case $d_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j \geq k)$ has a kind:

$$d_{31}(t,\varepsilon,\theta) = p_{31}(t,\varepsilon,\theta),$$

$$d_{32}(t,\varepsilon,\theta,\mu) = p_{32}(t,\varepsilon,\theta) + b_{31}(t,\varepsilon)\psi_{12} + \mu p_{31}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{12},$$

$$d_{33}(t,\varepsilon,\theta,\mu) = p_{33}(t,\varepsilon,\theta)+b_{31}(t,\varepsilon)\psi_{13}+b_{32}(t,\varepsilon)\psi_{23}+\mu(p_{31}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{13}+p_{32}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{23}),$$

$$d_{21}(t,\varepsilon,\theta,\mu) = p_{21}(t,\varepsilon,\theta) - b_{31}(t,\varepsilon)\psi_{13} - \mu p_{31}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{23},$$

$$d_{22}(t,\varepsilon,\theta,\mu) = p_{22}(t,\varepsilon,\theta)-b_{21}(t,\varepsilon)\psi_{12}-b_{32}(t,\varepsilon)\psi_{23}+\mu p_{21}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{12}-\mu d_{32}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\psi_{23},$$

$$d_{11}(t,\varepsilon,\theta,\mu) = p_{11}(t,\varepsilon,\theta)-b_{21}(t,\varepsilon)\psi_{12}-b_{31}(t,\varepsilon)\psi_{13}-\mu(d_{21}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\psi_{12}+p_{31}(t,\varepsilon,\theta)\psi_{13}). \tag{18}$$

Together with the system (17) we consider the auxiliary system:

$$\begin{aligned}
\varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_{12}}{d\theta} &= K_{12}(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12},\xi_{13},\xi_{23},\mu),\\
\varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_{13}}{d\theta} &= K_{13}(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12},\xi_{13},\xi_{23},\mu),\\
\varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_{23}}{d\theta} &= K_{23}(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12},\xi_{13},\xi_{23},\mu),
\end{aligned} \tag{19}$$

where $\varphi(t,\varepsilon)$ – function in the definition of the class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, and t,ε are considered as constant. Using the method of the small parameter of Poincarais [6], we construct the partial sums of the series in degrees of the small parameter representing the 2π-periodic with respect to θ solution of the system (19):

$$\xi_{jk}^*(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \xi_{jk}^0(t,\varepsilon,\theta) + \mu\xi_{jk}^1(t,\varepsilon,\theta) + \ldots + \mu^{2q-1}\xi_{jk}^{2q-1}(t,\varepsilon,\theta), \tag{20}$$

where $\xi^s_{jk}(t,\varepsilon,\theta)$ $(s=\overline{0,2q-1})$ – 2π-periodic with respect to θ functions. Regarding these functions, we obtain the chain of the system of the differential equations:

$$\frac{d\xi^0_{12}}{d\theta}=im_{12}\xi^0_{12}-\frac{b_{32}(t,\varepsilon)}{\varphi(t,\varepsilon)}\ \xi^0_{13}+\frac{p_{12}(t,\varepsilon,\theta)}{\varphi(t,\varepsilon)},$$

$$\frac{d\xi^0_{13}}{d\theta}=im_{13}\xi^0_{13}+\frac{p_{13}(t,\varepsilon,\theta)}{\varphi(t,\varepsilon)}, \tag{21}$$

$$\frac{d\xi^0_{23}}{d\theta}=im_{23}\xi^0_{23}+\frac{b_{21}(t,\varepsilon)}{\varphi(t,\varepsilon)}\ \xi^0_{13}+\frac{p_{23}(t,\varepsilon,\theta)}{\varphi(t,\varepsilon)},$$

$$\frac{d\xi^1_{12}}{d\theta}=im_{12}\xi^1_{12}-\frac{b_{32}(t,\varepsilon)}{\varphi(t,\varepsilon)}\ \xi^1_{13}+\frac{1}{\varphi(t,\varepsilon)}F_{12}(t,\varepsilon,\theta,\xi^0_{12},\xi^0_{13},\xi^0_{23}),$$

$$\frac{d\xi^1_{13}}{d\theta}=im_{13}\xi^1_{13}+\frac{1}{\varphi(t,\varepsilon)}F_{13}(t,\varepsilon,\theta,\xi^0_{12},\xi^0_{13},\xi^0_{23}), \tag{22}$$

$$\frac{d\xi^1_{23}}{d\theta}=im_{23}\xi^1_{23}+\frac{b_{21}(t,\varepsilon)}{\varphi(t,\varepsilon)}\ \xi^1_{13}+\frac{1}{\varphi(t,\varepsilon)}F_{23}(t,\varepsilon,\theta,\xi^0_{12},\xi^0_{13},\xi^0_{23}),$$

where

$$F_{12}(t,\varepsilon,\theta,\xi^0_{12},\xi^0_{13},\xi^0_{23})=b_{21}(t,\varepsilon)(\xi^0_{12})^2+b_{32}(t,\varepsilon)\xi^0_{12}\xi^0_{23},$$

$$F_{13}(t,\varepsilon,\theta,\xi^0_{12},\xi^0_{13},\xi^0_{23})=$$

$$=(p_{11}(t,\varepsilon,\theta)-p_{33}(t,\varepsilon,\theta))\xi^0_{13}+p_{12}(t,\varepsilon,\theta)\xi^0_{23}-b_{31}(t,\varepsilon)(\xi^0_{13})^2-b_{32}(t,\varepsilon)\xi^0_{13}\xi^0_{23},$$

$$F_{23}(t,\varepsilon,\theta,\xi^0_{12},\xi^0_{13},\xi^0_{23})=$$

$$=(p_{22}(t,\varepsilon,\theta)-p_{33}(t,\varepsilon,\theta))\xi^0_{23}+p_{21}(t,\varepsilon,\theta)\xi^0_{12}-b_{32}(t,\varepsilon)(\xi^0_{23})^2-b_{31}(t,\varepsilon)\xi^0_{13}\xi^0_{23},$$

$$\frac{d\xi^s_{12}}{d\theta}=im_{12}\xi^s_{12}-\frac{b_{32}(t,\varepsilon)}{\varphi(t,\varepsilon)}\ \xi^s_{13}+$$

$$+\frac{1}{\varphi(t,\varepsilon)}\ P^s_{12}(t,\varepsilon,\theta,\xi^0_{12},\xi^0_{13},\xi^0_{23},\ldots,\xi^{s-1}_{12},\xi^{s-1}_{13},\xi^{s-1}_{23}),$$

$$\frac{d\xi^s_{13}}{d\theta}=im_{13}\xi^0_{13}+$$

$$+\frac{1}{\varphi(t,\varepsilon)}\ Q^s_{13}(t,\varepsilon,\theta,\xi^0_{12},\xi^0_{13},\xi^0_{23},\ldots,\xi^{s-1}_{12},\xi^{s-1}_{13},\xi^{s-1}_{23}),$$

$$\frac{d\xi^s_{23}}{d\theta}=im_{23}\xi^s_{23}+\frac{b_{21}(t,\varepsilon)}{\varphi(t,\varepsilon)}\ \xi^s_{13}+$$

$$+\frac{1}{\varphi(t,\varepsilon)}\ R^s_{23}(t,\varepsilon,\theta,\xi^0_{12},\xi^0_{13},\xi^0_{23},\ldots,\xi^{s-1}_{12},\xi^{s-1}_{13},\xi^{s-1}_{23}),\ \ s=2,3,\ldots,2q-1. \tag{23}$$

$P_{12}^s, Q_{13}^s, R_{23}^s$ – polynomials from $\xi_{12}^0, \ldots, \xi_{23}^{s-1}$ with coefficients from the class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Theorem. *Let the system (17) such that:*

1) there exists the such functions $\xi_{jk}^*(t,\varepsilon,\theta,\mu)$, $\Phi_{jkl}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j,k = 1,2,3; j<k; l=1,2,3)$ *belongs to the class* $F(m;\varepsilon_0;\theta)$*, that the transformation*

$$\psi_{jk} = \xi_{jk}^*(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \Phi_{jk1}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\sigma_{12} + \Phi_{jk2}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\sigma_{13} + \Phi_{jk3}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\sigma_{23} \tag{24}$$

$j,k = 1,2,3; j<k,$
leads the system (17) to a kind:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \left(A_1(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} U_l(t,\varepsilon)\mu^l\right)\sigma + \varepsilon g(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^{2q}c(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+\varepsilon\left(\sum_{l=1}^{q} V_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)\sigma + \mu^{q+1}L(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu H(t,\varepsilon,\theta,\sigma,\mu), \tag{25}$$

where $\sigma = \mathrm{colon}(\sigma_{12},\sigma_{13},\sigma_{23})$,

$$A_1(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} im_{12}\varphi(t,\varepsilon) & -b_{32}t,\varepsilon) & 0 \\ 0 & im_{13}\varphi(t,\varepsilon) & 0 \\ 0 & b_{21}(t,\varepsilon) & im_{23}\varphi(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$U_l(t,\varepsilon)$ $(l=\overline{1,q})$ *– matrices with elements from* $S(m;\varepsilon_0)$, $g = \mathrm{colon}(g_1,g_2,g_3)$, $g_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ $(j=1,2,3)$, $c = \mathrm{colon}(c_1,c_2,c_3)$, $c_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $V_l(t,\varepsilon,\theta)$ $(l=\overline{1,q})$ *– matrices with elements from* $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, $L(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ – m*atrix with elements from* $F(m;\varepsilon_0;\theta)$*, the components of vector-function* H *– polynomials in respect to* $\sigma_{12},\sigma_{13},\sigma_{23}$*, containing terms not lower than second order with respect theese variables, with coefficients, belongs to the class* $F(m;\varepsilon_0;\theta)$;

2)*the eigenvalues* $\lambda_j(t,\varepsilon,\mu)$ $(j=1,2,3)$ *of the matrix*

$$U(t,\varepsilon,\mu) = A_1(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} U_l(t,\varepsilon)\mu^l$$

such that

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} |\mathrm{Re}\lambda_j(t,\varepsilon,\theta)| \geq \gamma_0\mu^{q_0} \ (\gamma_0 \geq 0,\ 0 < q_0 \leq q);$$

3) *for the matrix* $U(t,\varepsilon,\mu)$ *there exists the matrix* $Y(t,\varepsilon,\mu)$ *such that*

a) $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)} |\det Y(t,\varepsilon,\mu)| > 0$,

b) $Y^{-1}UY = \Lambda(t,\varepsilon,\mu)$ – *diagonal matrix.*

Then there exists $\mu_1 \in (0,\mu_0)$, $\varepsilon_1(\mu) \in (0,\mu_0)$ *such that for all* $\mu \in (0,\mu_1)$ *and for all* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1(\mu))$ *there exists the transformation of the kind (15), whose coefficients* $\psi_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j < k)$ *belongs to the class* $F(m-1;\varepsilon_2(\mu);\theta)$*, which leads the system (3) to a triangular kind (16), where* $d_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j \geq k)$ *are determines by the formulas (18).*

Proof is complete analogous to the proof of the Theorem 3 from [5].

Now for different relationships between m_{jk} we get for the system (17) more specific conditions of existence of the transformation (24). We will check only condition 1) of the theorem, assuming conditions 2) and 3) to be satisfied.

Case 1. $m_{12} \neq m_{13}$, $m_{13} \neq m_{23}$, $m_{12} \neq m_{23}$.

Consider a generating system (21). Under the conditions

$$\int\limits_0^{2\pi} p_{13}(t,\varepsilon,\theta)\; e^{-im_{13}\theta} d\theta = 0,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} (p_{12}(t,\varepsilon,\theta) - b_{32}(t,\varepsilon)\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta))\; e^{-im_{12}\theta} d\theta = 0, \tag{26}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} (p_{12}(t,\varepsilon,\theta) + b_{21}(t,\varepsilon)\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta))\; e^{-im_{23}\theta} d\theta = 0,$$

where

$$\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq m_{13})}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[p_{13}(t,\varepsilon,\theta)]}{i(n-m_{13})\varphi(t,\varepsilon)}\; e^{in\theta}, \tag{27}$$

the system (21) has a family of the 2π-periodic on θ solutions:

$$\xi^0_{13}(t,\varepsilon,\theta) = \chi_{13}(t,\varepsilon,\theta) + M_{13}(t,\varepsilon)e^{im_{13}\theta},$$

$$\xi^0_{12}(t,\varepsilon,\theta) = \chi_{12}(t,\varepsilon,\theta) - a_{12}(t,\varepsilon)e^{im_{13}\theta} + M_{12}(t,\varepsilon)e^{im_{12}\theta},$$

$$\xi^0_{23}(t,\varepsilon,\theta) = \chi_{23}(t,\varepsilon,\theta) + a_{23}(t,\varepsilon)e^{im_{13}\theta} + M_{23}(t,\varepsilon)e^{im_{23}\theta},$$

where

$$\chi_{12}(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq m_{12})}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[p_{12}(t,\varepsilon,\theta) - b_{32}(t,\varepsilon)\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta)]}{i(n-m_{12})\varphi(t,\varepsilon)}\; e^{in\theta},$$

$$a_{12}(t,\varepsilon) = \frac{b_{32}(t,\varepsilon)M_{13}(t,\varepsilon)}{i(m_{13}-m_{12})\varphi(t,\varepsilon)},$$

$$\chi_{23}(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq m_{23})}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[p_{23}(t,\varepsilon,\theta)+b_{21}(t,\varepsilon)\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta)]}{i(n-m_{23})\varphi(t,\varepsilon)}\, e^{in\theta},$$

$$a_{23}(t,\varepsilon) = \frac{b_{32}(t,\varepsilon)M_{13}(t,\varepsilon)}{i(m_{13}-m_{23})\varphi(t,\varepsilon)},$$

and $M_{13}(t,\varepsilon)$, $M_{12}(t,\varepsilon)$, $M_{23}(t,\varepsilon)$ – the function from the class $S(m;\varepsilon_0)$, which defined from the next system of the equations:

$$R_1^{(1)}(t,\varepsilon,M_{12},M_{13},M_{23}) = \int_0^{2\pi} F_{13}\left(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12}^0,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0\right) e^{-im_{13}\theta}d\theta = 0,$$

$$R_2^{(1)}(t,\varepsilon,M_{12},M_{13},M_{23}) = \int_0^{2\pi} \left(F_{12}\left(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12}^0,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0\right) - b_{32}(t,\varepsilon)\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta)\right) e^{-im_{12}\theta}d\theta = 0,$$

$$R_3^{(1)}(t,\varepsilon,M_{12},M_{13},M_{23}) = \int_0^{2\pi} \left(F_{23}\left(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12}^0,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0\right) + b_{21}(t,\varepsilon)\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta)\right) e^{-im_{23}\theta}d\theta = 0. \tag{28}$$

We assume, that the system (28) has a solution $M_{jk}(t,\varepsilon)$, such that

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} \left| \det \frac{\partial\left(R_1^{(1)},R_2^{(1)},R_3^{(1)}\right)}{\partial(M_{12},M_{13},M_{23})} \right| > 0. \tag{29}$$

Then, in accordance with the small parameter method, all systems (23) will have a solution, belongs to the class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$. Consequently, the functions $\xi_{jk}^*(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ in (20) will also belongs to the class $F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Thus, the functions $\xi_{jk}^*(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ in the theorem are defined, and the substitution

$$\psi_{jk} = \xi_{jk}^*(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \psi_{jk}^1 \ (j<k) \tag{30}$$

leads the system (17) to the kind:

$$\frac{d\psi^1}{dt} = \left(A_1(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} K_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)\psi^1 + \varepsilon g^1(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^{2q}c^1(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+\mu^{q+1}L^1(t,\varepsilon,\theta,\mu)\psi^1 + \mu\Psi^1(t,\varepsilon,\theta,\psi^1,\mu), \tag{31}$$

where $\psi^1 = \mathrm{colon}(\psi^1_{12}, \psi^1_{13}, \psi^1_{23})$, elements of the matrices K_l, L^1 $(l = \overline{1, q})$ and the vector c^1 belongs to the class $F(m; \varepsilon_0; \theta)$, and the elements of vector g^1 belongs to the class $F(m-1; \varepsilon_0; \theta)$. The components of the vector-function Ψ^1 are the polynomials in respect to elements of vector ψ^1 with coefficients from the class $F(m; \varepsilon_0; \theta)$, and containing the terms not lover second order in respect theese variables.

Based on the lemma, using the transformation of kind

$$\psi^1 = \left(E + \sum_{l=1}^{q} \Psi_l(t, \varepsilon, \theta)\mu_l \right) \sigma \tag{32}$$

we will lead the system (31) to the kind (25).

Case 2. $m_{12} = m_{13}$, $m_{13} \neq m_{23}$.

In this case under the conditions

$$\begin{gathered} \int\limits_0^{2\pi} p_{13}(t, \varepsilon, \theta)\ e^{-im_{13}\theta} d\theta = 0, \\ \int\limits_0^{2\pi} (p_{23}(t, \varepsilon, \theta) + b_{21}(t, \varepsilon)\chi_{13}(t, \varepsilon, \theta))\ e^{-im_{23}\theta} d\theta = 0, \end{gathered} \tag{33}$$

where $\chi_{13}(t, \varepsilon, \theta)$ are defined by formula (27), the system (21) has a family of the 2π-periodic on θ solutions:

$$\xi^0_{13}(t, \varepsilon, \theta) = \chi_{13}(t, \varepsilon, \theta) + M_{13}(t, \varepsilon) e^{im_{13}\theta},$$

$$\xi^0_{12}(t, \varepsilon, \theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq m_{12})}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[p_{12}(t, \varepsilon, \theta) - b_{32}(t, \varepsilon)(\chi_{13}(t, \varepsilon, \theta) + M_{13}(t, \varepsilon) e^{im_{13}\theta}]}{i(n - m_{12})\varphi(t, \varepsilon)}\ e^{in\theta} +,$$

$$+ M_{12}(t, \varepsilon) e^{im_{12}\theta},$$

$$\xi^0_{23}(t, \varepsilon, \theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq m_{23})}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[p_{12}(t, \varepsilon, \theta) + b_{21}(t, \varepsilon)(\chi_{13}(t, \varepsilon, \theta) + M_{13}(t, \varepsilon) e^{im_{13}\theta}]}{i(n - m_{23})\varphi(t, \varepsilon)}\ e^{in\theta} +$$

$$+ M_{23}(t, \varepsilon) e^{im_{23}\theta},$$

where $\chi_{13}(t, \varepsilon, \theta)$ are defined by formula (27),

$$M_{13}(t, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi b_{32}(t, \varepsilon)} \int\limits_0^{2\pi} (p_{12}(t, \varepsilon, \theta) - b_{32}(t, \varepsilon)\chi(t, \varepsilon, \theta)) e^{-im_{12}\theta} d\theta,$$

and $M_{12}(t,\varepsilon)$, $M_{23}(t,\varepsilon)$ – functions of class $S(m;\varepsilon_0)$, which defined from the next system of equations:

$$R_1^{(2)}(t,\varepsilon,M_{12},M_{23}) = \int\limits_0^{2\pi} F_{13}\left(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12}^0,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0\right) e^{-im_{13}\theta} d\theta = 0,$$

$$R_2^{(2)}(t,\varepsilon,M_{12},M_{23}) = \int\limits_0^{2\pi} \left(F_{23}\left(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12}^0,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0\right) + b_{21}(t,\varepsilon)\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta)\right) e^{-im_{23}\theta} d\theta = 0. \tag{34}$$

We assume, that the system (34) has a solution $M_{12}(t,\varepsilon)$, $M_{23}(t,\varepsilon)$ such that

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} \left| \det \frac{\partial\left(R_1^{(2)},R_2^{(2)}\right)}{\partial(M_{12},M_{23})} \right| > 0. \tag{35}$$

Further reasonings are the same as in case 1.

Case 3. $m_{23} = m_{13}$, $m_{12} \neq m_{23}$.

In this case under the conditions

$$\begin{gathered} \int\limits_0^{2\pi} p_{13}(t,\varepsilon,\theta)\ e^{-im_{13}\theta} d\theta = 0, \\ \int\limits_0^{2\pi} \left(p_{12}(t,\varepsilon,\theta) - b_{32}(t,\varepsilon)\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta)\right)\ e^{-im_{12}\theta} d\theta = 0, \end{gathered} \tag{36}$$

where $\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta)$ are defined by formula (27), the system (21) has a family of the 2π-periodic on θ solutions:

$$\xi_{13}^0(t,\varepsilon,\theta) = \chi_{13}(t,\varepsilon,\theta) + M_{13}(t,\varepsilon)e^{im_{13}\theta},$$

$$\xi_{12}^0(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq m_{12})}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[p_{12}(t,\varepsilon,\theta) - b_{32}(t,\varepsilon)(\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta) + M_{13}(t,\varepsilon)e^{im_{13}\theta}]}{i(n-m_{12})\varphi(t,\varepsilon)}\ e^{in\theta}+,$$

$$+M_{12}(t,\varepsilon)e^{im_{12}\theta},$$

$$\xi_{23}^0(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq m_{23})}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[p_{23}(t,\varepsilon,\theta) + b_{21}(t,\varepsilon)(\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta) + M_{13}(t,\varepsilon)e^{im_{13}\theta}]}{i(n-m_{23})\varphi(t,\varepsilon)}\ e^{in\theta}+$$

$$+M_{23}(t,\varepsilon)e^{im_{23}\theta},$$

where $\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta)$ are defined by formula (27),

$$M_{13}(t,\varepsilon)=-\frac{1}{2\pi b_{21}(t,\varepsilon)}\int\limits_0^{2\pi}(p_{23}(t,\varepsilon,\theta)+b_{21}(t,\varepsilon)\chi(t,\varepsilon,\theta))e^{-im_{23}\theta}d\theta,$$

and $M_{12}(t,\varepsilon)$, $M_{23}(t,\varepsilon)$ – functions of class $S(m;\varepsilon_0)$, which defined from the next system of equations:

$$R_1^{(3)}(t,\varepsilon,M_{12},M_{23})=\int\limits_0^{2\pi}F_{13}\left(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12}^0,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0\right)e^{-im_{13}\theta}d\theta=0,$$

$$R_2^{(3)}(t,\varepsilon,M_{12},M_{23})=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(F_{12}\left(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12}^0,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0\right)-b_{32}(t,\varepsilon)\left(\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta)+M_{13}(t,\varepsilon)e^{im_{13}\theta}\right)\right)e^{-im_{12}\theta}d\theta=0. \tag{37}$$

We assume, that the system (37) has a solution $M_{12}(t,\varepsilon)$, $M_{23}(t,\varepsilon)$ such that

$$\inf_{G(\varepsilon_0)}\left|\det\frac{\partial\left(R_1^{(3)},R_2^{(3)}\right)}{\partial(M_{12},M_{23})}\right|>0. \tag{38}$$

Further reasonings are the same as in case 1.

Case 4. $m_{12}=m_{23}$, $m_{12}\neq m_{13}$.

In this case under the conditions

$$\int\limits_0^{2\pi}p_{13}(t,\varepsilon,\theta)\;e^{-im_{13}\theta}d\theta=0,$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(p_{12}(t,\varepsilon,\theta)-b_{32}(t,\varepsilon)\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta)\right)\;e^{-im_{12}\theta}d\theta=0, \tag{39}$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(p_{23}(t,\varepsilon,\theta)=b_{21}(t,\varepsilon)\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta)\right)\;e^{-im_{23}\theta}d\theta=0,$$

where $\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta)$ are defined by formula (27), the system (21) has a family of the 2π-periodic on θ solutions:

$$\xi_{13}^0(t,\varepsilon,\theta)=\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta)+M_{13}(t,\varepsilon)e^{im_{13}\theta},$$

$$\xi_{12}^0(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq m_{12})}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[p_{12}(t,\varepsilon,\theta) - b_{32}(t,\varepsilon)(\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta) + M_{13}(t,\varepsilon)e^{im_{13}\theta}]}{i(n-m_{12})\varphi(t,\varepsilon)}\ e^{in\theta}+,$$

$$+M_{12}(t,\varepsilon)e^{im_{12}\theta},$$

$$\xi_{23}^0(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq m_{23})}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[p_{23}(t,\varepsilon,\theta) + b_{21}(t,\varepsilon)(\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta) + M_{13}(t,\varepsilon)e^{im_{13}\theta}]}{i(n-m_{23})\varphi(t,\varepsilon)}\ e^{in\theta}+$$

$$+M_{23}(t,\varepsilon)e^{im_{23}\theta},$$

where $\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta)$ are defined by formula (27), and $M_{12}(t,\varepsilon)$, $M_{13}(t,\varepsilon)$ $M_{23}(t,\varepsilon)$ – functions of class $S(m;\varepsilon_0)$, which defined from the next system of equations:

$$R_1^{(4)}(t,\varepsilon,M_{12},M_{13},M_{23}) = \int\limits_0^{2\pi} F_{13}\left(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12}^0,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0\right) e^{-im_{13}\theta}d\theta = 0,$$

$$R_2^{(4)}(t,\varepsilon,M_{12},M_{13},M_{23}) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(F_{12}\left(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12}^0,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0\right) - b_{32}(t,\varepsilon)\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta)\right) e^{-im_{12}\theta}d\theta = 0, \qquad (40)$$

$$R_3^{(4)}(t,\varepsilon,M_{12},M_{13},M_{23}) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(F_{23}\left(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12}^0,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0\right) + b_{21}(t,\varepsilon)\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta)\right) e^{-im_{23}\theta}d\theta = 0,$$

We assume, that the system (37) has a solution $M_{12}(t,\varepsilon)$, $M_{13}(t,\varepsilon)$ $M_{23}(t,\varepsilon)$ such that

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} \left| \det \frac{\partial\left(R_1^{(4)},R_2^{(4)},R_3^{(4)}\right)}{\partial(M_{12},M_{13},M_{23})} \right| > 0. \qquad (41)$$

Further reasonings are the same as in case 1.

Case 5. $m_{12} = m_{13} = m_{23} = m$.

In this case under the conditions

$$\int\limits_0^{2\pi} p_{13}(t,\varepsilon,\theta)\ e^{-im\theta}d\theta = 0,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{p_{12}(t,\varepsilon,\theta)}{b_{32}(t,\varepsilon)} + \frac{p_{23}(t,\varepsilon,\theta)}{b_{21}(t,\varepsilon)}\right)\ e^{-im\theta}d\theta = 0, \qquad (42)$$

the system (21) has a family of the 2π-periodic on θ solutions:

$$\xi_{13}^0(t,\varepsilon,\theta) = \chi_{13}(t,\varepsilon,\theta) + M_{13}(t,\varepsilon)e^{im\theta},$$

$$\xi_{12}^0(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq m)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[p_{12}(t,\varepsilon,\theta) - b_{32}(t,\varepsilon)(\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta) + M_{13}(t,\varepsilon)e^{im\theta}]}{i(n-m)\varphi(t,\varepsilon)}\ e^{in\theta}+,$$

$$+M_{12}(t,\varepsilon)e^{im\theta},$$

$$\xi_{23}^0(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq m)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[p_{23}(t,\varepsilon,\theta) + b_{21}(t,\varepsilon)(\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta) + M_{13}(t,\varepsilon)e^{im_{13}\theta}]}{i(n-m)\varphi(t,\varepsilon)}\ e^{in\theta}+$$

$$+M_{23}(t,\varepsilon)e^{im\theta},$$

where $\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta)$ are defined by formula (27),

$$M_{13}(t,\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi b_{21}(t,\varepsilon)} \int\limits_0^{2\pi} (p_{23}(t,\varepsilon,\theta) + b_{21}(t,\varepsilon)\chi(t,\varepsilon,\theta))e^{-im\theta}d\theta,$$

and $M_{12}(t,\varepsilon)$, $M_{23}(t,\varepsilon)$ – functions of class $S(m;\varepsilon_0)$, which defined from the next system of equations:

$$R_1^{(5)}(t,\varepsilon,M_{12},M_{23}) = \int\limits_0^{2\pi} F_{13}\left(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12}^0,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0\right)e^{-im\theta}d\theta = 0,$$

$$R_2^{(5)}(t,\varepsilon,M_{12},M_{23}) = \tag{43}$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(F_{23}\left(t,\varepsilon,\theta,\xi_{12}^0,\xi_{13}^0,\xi_{23}^0\right) + b_{21}(t,\varepsilon)\chi_{13}(t,\varepsilon,\theta)\right)e^{-im\theta}d\theta = 0,$$

We assume, that the system (37) has a solution $M_{12}(t,\varepsilon)$, $M_{23}(t,\varepsilon)$ such that

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} \left|\det\frac{\partial\left(R_1^{(5)},R_2^{(5)}\right)}{\partial(M_{12},M_{23})}\right| > 0. \tag{44}$$

Further reasonings are the same as in case 1.

4. Conclusion

Thus, for the system (2) the conditions of the existence of the transformation with coefficients are represented as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency, which leads it to triangular kind, are obtained in the resonant cases.

Щоголев С. А.

Про зведення лінійної системи диференціальних рівнянь з коеффіцієнтами коливного типу до трикутного виглядув резонансному випадку

Резюме

Для лінійної однорідної диференціальної системи, коефіцієнти якої зображувані у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотою, одержано умови існування перетворення, що приводить цю систему до трикутного вигляду в резонансному випадку

Ключові слова: лінійні диференціальні системи, трикутний вигляд, ряди Фур'є, повільно змінні параметри.

Щёголев С. А.

О приведении динейной системы дифференциальных уравнений с коэффициентами осциллирующего типа к треугольному виду в резонансном случае

Резюме

Для линейной однородной дифференциальной системы, коэффициенты которой представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, получены условия существования преобразования, приводящего эту систему к треугольному виду в нерезонансном случае.

Ключевые слова: линейные дифференциальные системы, треугольный вид, ряды Фурье, медленно меняющиеся параметры.

References

1. **Perron, O.** 1930, Uber eine Matrixtransformation. *Math. Zeitschr. V.32*, 465–473.
2. **Persidsky, K. P.** 1947, *O kharakteristicnyh chislah differentsialnyh uravnenyi* [On the characteristic numbers of the differential equations]. *Izv. AN KazSSR, ser. math. and mechan. Is. 1,* 5–47.
3. **Izobov, N. A.** 1971, *O kanonicheskoi forme lineynoi dvumernoi differentsialnoi sistemy* [On the canonical form of the linear two-dimensional differential system]. *Differents. uravn. (Differential equations) – 1971. – V. 7, № 12,* 2136–2142.
4. **Kostin, A. V.** 1984, *Ustoychivostj i asymptotica kvazilineynyh neavtonomnyh differentsialnyh sistem* [The stability and asyptotics of the nonautonomous differential systems], Odessa, OGU, 95 p.

5. **Shchogolev, S. A.** 2020, On the Reduction of the Linear System of the Differential Equations with coefficients of oscillating type to the Triangular Kind in the Non-resonant Case. *Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2020, Vol. 130, №1*, 31-41.

Researches in Mathematics and Mechanics. — 2020. — V. 25, Is. 1(35). — P. 51–61

UDC 511, 512

V. V. Shramko
Odessa I. I. Mechnikov National University

GAUSSIAN INTEGERS PARTITION IN POWER-FREE NUMBERS PRODUCT

Let $\mathrm{g}_1(\alpha)$ be the number of Gaussian integer α representation in a product of square-free factors. Let $\mathrm{g}_2(\alpha)$ be the number of Gaussian integer α representation in a product of power-free factors. In this paper we consider their summatory functions $\sum_{N(\alpha)\le x}\mathrm{g}_1(\alpha)$ and $\sum_{N(\alpha)\le x}\mathrm{g}_2(\alpha)$ and obtain asymptotic formulas for them. Also, we prove analogue of Kátai-Subbarao theorem to study the distribution of $\mathrm{g}_2(\alpha)$ in increasing norm order case.
MSC: 11L05, 11N37, 11N60.
Key words: Hecke zetafunction; square-free Gaussian integer; power-free Gaussian integer; Dirichlet generating series.
DOI: XXXX.

1. Introduction

Let G denote a ring of Gaussian integers

$$G{=}\mathbb{Z}\left[i\right] = \left\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z},\ i^2 = -1\right\}.$$

Let $\mathfrak{p}$ denote a Gaussian prime integer.

Let Gaussian integer α be power-free if $\alpha = \mathfrak{p}_1^{k_1}\mathfrak{p}_2^{k_2}\cdots\mathfrak{p}_r^{k_r}$ and

$$GCD\left(k_1, k_2, \ldots, k_r\right) = 1,$$

where $k_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1; r}$. In other words, α is power-free if there is no Gaussian integer β such that $\alpha = \beta^k$, $k \in \{2,\ 3,\ \ldots\}$. Let us notice that all square-free numbers are power-free.

Let Gaussian integer α be square-free if for any Gaussian prime integer $\mathfrak{p}$ such that $\mathfrak{p} \mid \alpha$ there is no positive integer $k > 1$ that $\mathfrak{p}^k$ divides α. Also notice that all square-free numbers are power-free.

Each Gaussian integer α can be represented as the product of power-free (square-free) numbers except $\varepsilon \in \{\pm 1,\ \pm i\}$. Therefore let $\mathrm{g}_2\left(\alpha\right)$ $\left(\mathrm{g}_1\left(\alpha\right)\right)$ denote the number of Gaussian integer α representation in a product of power-free $\left(\text{square-free}\right)$ numbers.

Received 01.06.2020

For example, consider the following representations of $\alpha = \mathfrak{p}_1^2 \cdot \mathfrak{p}_2^3$ in a product of power-free factors

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathfrak{p}_1^2 \cdot \mathfrak{p}_2^3 = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_2 \\ &= \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1 \cdot \left(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2^3\right) = \mathfrak{p}_1 \cdot \left(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2^2\right) \cdot \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdot \left(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2^2\right).\end{aligned}$$

$\mathrm{g}_2(\alpha) = 7.$

In case of square-free factors α has the following representations

$$\alpha = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_2.$$

$\mathrm{g}_1(\alpha) = 3.$

By $\mathrm{g}_2^*(\alpha)$ we denote the function below

$$\mathrm{g}_2^*(\alpha) = \#\left\{\alpha = \delta_1\delta_2\dots\delta_r \;\middle|\; \delta_i \text{ are power-free, } i = \overline{1;r}, \right.$$
$$\left. N(\delta_1) \leq N(\delta_2) \leq \dots \leq N(\delta_r)\right\},$$

where $N(\alpha)$ is the norm of α (i.e. if $\alpha = \sigma + it$, then $N(\alpha) = \sigma^2 + t^2$).

The purpose of this paper is to prove the asymptotic formula for the summatory functions of $\mathrm{g}_1(\alpha)$, $\mathrm{g}_2(\alpha)$ and $\mathrm{g}_2^*(\alpha)$. These are a generalization of the results of A. Korchevskiy and Ya. Vorobyov in positive integer case.

2. Auxiliary results

Let us consider Hecke zetafunction $Z_m(s)$ with the Hecke character $\lambda_m(\alpha)$

$$Z_m(s) = \sum_{0 \neq \alpha \in G} \frac{\lambda_m(\alpha)}{N(\alpha)^s},$$

where $\lambda_m(\alpha) = \exp(mi \arg \alpha)$, α is a Gaussian integer, $m \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{Re} s > 1$.

Moreover, we are interested in the case when $m = 4m_1,\ m_1 \in \mathbb{Z}$ for $\lambda_m(\alpha)$ be the same for associated Gaussian integers.

Thus, for associated Gaussian integers α and $\varepsilon\alpha$, where $\varepsilon \in \{\pm 1,\ \pm i\}$, the following relation

$$\lambda_m(\alpha) = \lambda_m(\varepsilon\alpha)$$

holds, because

$$\exp(4mi \arg \alpha) = \exp(4mi \arg \varepsilon\alpha).$$

The function $Z_m(s)$ can be analytically continuated to the entire s-plane, except the point $s = 1$, where it has a simple pole with residue π.

For $m = 0$ we have $Z_0(s) = 4\,\zeta(s)\,L\big(s, \chi_4(n)\big)$, where $\zeta(s)$ is Riemann zetafunction, $\chi_4(n)$ is non-main Dirichlet character modulo 4.

Hecke zetafunction $Z_m(s)$ satisfies the functional equation

$$Z_m(s) = \pi^{\,2s-1} \frac{\Gamma(\frac{m}{2} + 1 - s)}{\Gamma(\frac{m}{2} + s)}\, Z_m(1 - s),$$

where Re $s > \frac{1}{2}$, $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty t^{s-1} \exp(-t) dt$ is the gamma function.

It is known that the absolute value of a regular function in the interior of a bounded region is bounded by its absolute value on the boundary of the region.

Moving the function to the left of the line Re $s = \frac{1}{2}$ and using Phragm?n-Lindelöf principle we can get the following estimates for Hecke zetafunction in critical strip.

Lemma 1 (Estimates for Hecke zetafunction in critical strip)**.**

$$Z_m(\sigma + it) \ll \begin{cases} 1, & \text{if } \ \sigma \geq 1 + \varepsilon, \\ \log\left|t^2 + m^2\right|, & \text{if } \ 1 \leq \sigma \leq 1 + \varepsilon, \\ \left(t^2 + m^2\right)^{\frac{1-\sigma}{2}} \log\left(1 + \varepsilon\ \right), & \text{if } \ 0 \leq \sigma < 1. \end{cases}$$

Our purpose is to study special arithmetic functions $\mathrm{g}_1(\alpha)$, $\mathrm{g}_2(\alpha)$ and $\mathrm{g}_2^*(\alpha)$. These functions are related to the functions studied by Kátai and Subbarao in [2].

Let $e(n)$ be an arbitrary arithmetic function. We will assume that $e(n) \geq 0$, $e(n) \ll n^{\varepsilon}$, where $\varepsilon > 0$ is arbitrarily small.

Theorem 1 (Kátai-Subbarao [2], Theorem 5.1)**.** *Let* $\{e(n)\}$ *and* $\{f(n)\}$ *be sequences that satisfy the relation*

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{e(n)}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}\ .$$

Moreover $e(1) = f(1) = 1$. Since we chose the function $e(n)$ so that $e(n) \geq 0$ and $e(n) \ll n^{\varepsilon}$, where $\varepsilon > 0$ is arbitrarily small we have that series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(n)}{n^s}$ absolutely converges in a half-plane Re $s > 1$.

Let the function $E(s)$ define the Dirichlet series created by coefficients $e\,(n)$ in a half-plane Re $s>1$

$$E\,(s)=\sum_{n\,=\,1}^{\infty}\frac{e\,(n)}{n^s}$$

And let $E(s)$ satisfy following assumptions

1. There exist positive constants A and β such that

$$E\,(s)=\frac{A}{(s-1)^{\beta}}+G(s)$$

   where $G(s)$ is a regular function in a half-plane Re $s>\frac{1}{2}$;

2. If $|t|\ \geq\ 3$, then there exists a constant A_0 such that

$$|E\,(1\ +\ it)|\leq A_0\log|t|.$$

If conditions 1 and 2 are met, then exists such a positive integer N that the following asymptotic formula

$$T\,(x)=\sum_{n\,\leq\,x}f\,(n)=\exp\Bigg(c_0\Big(\log x\Big)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\Bigg\{\sum_{(h,v)}H\,(h,v)\,\Big(\log x\Big)^{-\frac{2h+v\beta}{2\beta+2}}$$
$$\times\Bigg(\Big(\Big(1+c_0\log x\Big)^{-\frac{1}{\beta+1}}-\frac{2h+v\beta}{2\beta}\Big(\log x\Big)^{-1}\Big)+O\Big(\Big(\log x\Big)^{-\frac{2N+4+\beta}{2\beta+2}}\Big)\Bigg\}\Bigg)$$

is true. Here c_0 is a countable constant that depends on A and β, N is an arbitrary fixed positive integer, $H\,(h,v)$ are suitable constants independent of x and N. The sum $\sum_{(h,v)}$ means summation over all pairs (h,v), $1\ \leq\ h\ \leq\ N$, $\nu\ =\ 1,\ 2,\ldots$, that satisfy the inequality $h\ +\frac{1}{2}\nu\beta\ \leq\ N\ +\ 2\ +\frac{1}{2}\beta$.

The function $I_n(z)$

$$I_n\,(z)=\frac{\exp z}{\sqrt{2\pi z}}\sum_{k\,=\,0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{a_k\,(n)}{z^k},$$

where $\arg z<\frac{\pi}{2}$, $a_0\,(n)\,=\,1,\ a_k\,(n)\,=\,\frac{\left(4n^2-1^2\right)\left(4n^2-3^2\right)\ldots\left(4n^2-(2k-1)^2\right)}{k!\,8^k}$, is the modified Bessel function.

The modified Bessel function $I_n(z)$ is one of two linearly independent solutions of the differential equation $x^2y''+xy'-(x^2+\alpha^2)y=0$ written as the power series.

The function $I_n(z)$ is regular on $\mathbb{C}$ and goes to infinity for real positive z. Moreover, for $\alpha > 0$ $\lim_{x\to 0+} I_\alpha(x) = 0$ and for $\alpha = 0$ $\lim_{x\to 0+} I_0(x) = 1$.

Lemma 2. *For positive real numbers x, c, α the following relation*

$$I_\alpha\left(x\right) = \frac{x^\alpha}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{z+\frac{x^2}{4z}}}{z^{\alpha+1}}dz$$

holds and for sufficiently large x the following asymptotic formula

$$I_\alpha\left(x\right) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1-\frac{4\alpha^2-1}{8x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

is true.

Let us also notice that the constant in the O-term depends only on α.

3. Gaussian integer partition in a square-free numbers

Theorem 2. *By $\mathrm{g}_1\left(\alpha\right)$ we denote the number of square-free divisors of the Gaussian integer α. Then for $c_0 > 0, d_0 > 0$ and sufficiently large x the following asymptotic formula*

$$\sum_{N(\alpha)\leq x}\mathrm{g}_1\left(\alpha\right) = c_0 x\sum_{n=0}^{\infty} d_n I_{n+1}\left(2\sqrt{\log x}\right)\left(\log x\right)^{-\frac{n+1}{2}} + O\left(x\right).$$

holds. Here coefficients $d_n, n \geq 1$, can be defined through the Taylor series coefficients of some function $\varphi_0\left(s\right)$ considered below.

Proof. Let $e_1\left(\alpha\right)$ be characteristic function over the set of square-free numbers. Then for the generating function of $\mathrm{g}_1\left(\alpha\right)$ following identity in a half-plane Re $s > 1$

$$F_1\left(s\right) = \sum_{0\neq\alpha\in G}\frac{\mathrm{g}_1\left(\alpha\right)}{N(\alpha)^s} = \prod_{N(\alpha)>1}\left(1-\frac{e_1\left(\alpha\right)}{N(\alpha)^s}\right)^{-1}$$

is true.

$$\log F_1\left(s\right) = \sum_{\substack{f \text{ is square-free} \\ N\left(f\right)>1}}\log\left(1-\frac{1}{N(f)^s}\right) = \sum_{f\in F}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,\mu^2\left(f\right)N(f)^{-ks} - 1.$$

$$\log F_1(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{Z(ks)}{Z(2ks)} - 1\right),$$

where $Z(s)$ is the well-known Hecke zetafunction with the Hecke character 1. Thus,

$$F_1(s) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{Z(ks)}{Z(2ks)} - 1\right)\right).$$

The series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\frac{Z(ks)}{Z(2ks)}$$

converges uniformly in each compact of half-plane $\mathrm{Re}\, s > 0$ except points $\frac{1}{k}$ and $\frac{\sigma+i\gamma}{2k}$, where $\sigma + i\gamma$ are complex roots of $Z(s)$. Thus, the function $F_1(s)$ is regular in a half-plane $\mathrm{Re}\, s > 0$ except specified points. Hence in a circle $|s-1| \leq \frac{1}{2}$ the following representation

$$F_1(s) = \exp\left(\frac{1}{Z(2)(s-1)} + \varphi_0(s)\right)$$

is true, where the function $\varphi_0(s)$ is regular in a circle $|s-1| \leq \frac{1}{2}$. Therefore, we can consider the Taylor series of $\varphi_0(s)$ in this circle

$$\begin{aligned}\varphi_0(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_0^{(n)}(1)}{n!}(s-1)^n \\ &= c_0 \exp\left(\frac{1}{Z(s)(s-1)}\right)\left(1 + a_1(s-1) + a_2(s-1)^2 + \dots\right),\end{aligned}$$

where $c_0 = \exp\bigl(\varphi_0(1)\bigr) > 0$.

Now, using the well-known relation

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\, ds = \begin{cases} x-1, & \text{if } x > 1, \\ 0, & \text{if } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

we get

$$\sum_{0 < N(\alpha) \leq x} \mathrm{g}_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} F_1(s)\, \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\, ds.$$

Function $F_1(s)$ doesn't have singularities in a half-plane Re $s \geq 1$ except the first kind pole $s = 1$. Let us replace the integration segment $(2-i\infty,\ 2+i\infty)$ with the union of following segments

Γ_1 denotes a segment $(1-i\infty, 1-ia]$;

Γ_2 denotes a half-circle with radius a and the center in a point $s=1$

$$1+a\exp(i\theta), -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}, (0<a<1);$$

Γ_3 denotes a segment $[1+ia, 1+i\infty)$.

It follows from lemma about estimates of Hecke function in critical strip that integration segments Γ_1 and Γ_3 can be estimated as $O\left(x^2\right)$. For the segment Γ_2 we use substitution of integration variable

$$s=1+\frac{1}{z}.$$

Hence $z=a^{-1}\exp(i\theta)$, $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, $ds=-\frac{1}{z^2}\,dz$.

After constricting the integration segment Γ_2 into a point the following equations

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}F_1(s)\,\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\,ds &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}F_1(s)\,\frac{x^{s-1+2}}{s(s+1)}\,ds\\
&=\frac{x^2}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}F_1(s)\,\frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\,ds\\
&=\frac{x^2}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\exp\left(\varphi_0\left(1+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{x^{\frac{1}{z}}}{\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(2+\frac{1}{z}\right)}\,dz+O\left(x^2\right)\\
&=\frac{x^2}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{z^2x^{\frac{1}{z}}\exp\left(\varphi_0\left(1+\frac{1}{z}\right)\right)}{(z+1)(2z+1)}\,dz+O\left(x^2\right)\\
&=\frac{c_0x^2}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{\exp\left(z+\frac{1}{z}\log x\right)}{(z+1)(2z+1)}\left(1+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\dots\right)dz+O\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

are true for all $b>0$. Hence, we want to use the modified Bessel function $I_n(z)$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}F_1(s)\,\frac{x^{\,s+1}}{s(s+1)}\,ds$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{c_0x^2}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{\exp\left(z+\frac{1}{z}\log x\right)}{z^2}\left(1+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\dots\right)dz\ +O\left(x^2\right)\\
&=c_0\frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\exp\left(z+\frac{1}{z}\log x\right)\,z^{-n-2}dz+O\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

Note that

$$I_n(x) = \frac{x^n}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\exp\left(z+\frac{x^2}{4z}\right)}{z^{n+1}}\,dz.$$

Therefore,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} F_1(s)\,\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\,ds = c_0\frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n I_{n+1}\left(2\sqrt{\log x}\right) + O\left(x^2\right).$$

By the asymptotic differentiation we get the statement of the theorem.

4. Gaussian integer partition in a power-free numbers

Theorem 3. *By* $\mathrm{g}_2(\alpha)$ *we denote the number of power-free divisors of the Gaussian integer* α. *Then for sufficiently large* x *the following asymptotic formula*

$$\sum_{N(\alpha)\le x} \mathrm{g}_2(\alpha) = x\sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{I_{n+1}\left(2\sqrt{\log x}\right)}{(\log x)^{\frac{n+1}{2}}} + O(x)$$

holds. Here d_n, $n = 0, 1, \ldots,$ *can be defined through the Taylor series coefficients of some function* $F_{2,3}(s)$ *considered below.*

Let $e_2(\alpha)$ be characteristic functions over the set of power-free Gaussian integers. Then for the generating function of $\mathrm{g}_2(\alpha)$ following identity in a half-plane Re $s> 1$

$$F_2(s) = \sum_{0\neq\alpha\in G} \frac{\mathrm{g}_2(\alpha)}{N(\alpha)^s} = \prod_{N(\alpha)>1}\left(1-\frac{e_2(\alpha)}{N(\alpha)^s}\right)^{-1}$$

is true.

To find the generating series for $F_2(s)$ let us consider that the number $S(x)$ of power-free numbers with norms not more than x is equal to the number of all Gaussian integers in the circle of a radius $x^{\frac{1}{2}}$ with the center in the point $s = 0$ without the number of power-full numbers in this circle. (The Gaussian integer α is power-full if $\alpha = \mathfrak{p}_1^{k_1}\mathfrak{p}_2^{k_2}\ldots\mathfrak{p}_r^{k_r}$ and $GCD(k_1, k_2, \ldots, k_r) > 1$, where $k_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1;r}$.) Thus,

$$S(x) = x - x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{\frac{1}{5}+\varepsilon}\right).$$

Hence, for Re $s > 1$ we have

$$F_2(x) = \sum_{\alpha\ \text{is power-free}} \frac{1}{N(\alpha)^s} = Z(s) - Z(2s) - Z(3s) + G(s),$$

where the function $G(s)$ is regular in a half-plane Re $s > \frac{1}{5}$.

Therefore,

$$\log F_2(s) = \sum_{\delta \text{ is power-free}} \log\left(1 - \frac{1}{N(\delta)^s}\right) = \sum_{\delta \text{ is power-free}} \frac{1}{N(\delta)^s} + F_{2,1}(s),$$

where $F_{2,1}(s)$ is a regular function in half-plane Re $s > \frac{1}{2}$.

$$\log F_2(s) = Z(s) + F_{2,2}(s),$$

where $F_{2,2}(s)$ is a regular function in half-plane Re $s > \frac{1}{2}$.

$$F_2(s) = \exp\Big(Z(s) + F_{2,2}(s)\Big) = \exp\left(\frac{\pi}{s-1} + F_{2,3}(s)\right),$$

where $F_{2,3}(s)$ is a regular function in half-plane Re $s > \frac{1}{2}$.

Theorem 3 can be proved in a similar way to Theorem 2.

5. Gaussian integer partition in a power-free numbers norm ascending order

The function $g_2^*(\alpha)$ denotes the number of representation of Gaussian integer α in the power-free number product $\alpha = \delta_1\delta_2\ldots\delta_r$, δ_i are power-free, $i = \overline{1;r}$, and $N(\delta_1) \leq N(\delta_2) \leq \ldots \leq N(\delta_r)$, where $N(\alpha)$ is the norm of α.

For Re $s > 1$ we have

$$\sum_{0 \neq \alpha \in G} \frac{g_2^*(\alpha)}{N(\alpha)^s} = \prod_{N(\alpha) \geq 2} \left(1 + \frac{e_2(\alpha)}{N(\alpha)^s}\right).$$

We will study function $g_2^*(\alpha)$ using the Kátai-Subbarao theorem.

We have

$$E(s) = \sum_{0 \neq \alpha \in G} \frac{e_2(\alpha)}{N(\alpha)^s} = \sum_{\alpha \text{ is power-free}} \frac{1}{N(\alpha)^s} = Z(s) + F_0(s),$$

where $e_2(\alpha)$ is a characteristic function over the set of power-free Gaussian integers, $F_0(s)$ is regular function in a half-plane Re $s > \frac{1}{2}$.

Moreover,

$$Z(s) = \sum_{0 \neq \alpha \in G} \frac{1}{N(\alpha)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s},$$

where $r(n)$ is the number of representation of n in a sum of two squares such that $r(n)=O(n^{\varepsilon})$. Here, the constant in the O-term depends on ε.

In this case all the conditions of the Kátai-Subbarao theorem are fulfilled. Hence, we obtain the following theorem.

Theorem 4. *For sufficiently large x the following asymptotic formula*

$$\sum_{N(\alpha)\le x} g_2^*(\alpha) \sim \exp\left(c_0\sqrt{\log\, x}\right)\sum_{(h,\upsilon)} H(h,\upsilon)\left(\log x\right)^{-\frac{2h+\upsilon}{4}} \times\left(1+a_0\left(\log x\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{2h+\upsilon}{4}\left(\log x\right)^{-1}\right)$$

holds, where c_0, a_0 are positive countable constants, mark $*$ above the sum $\sum_{(h,\vartheta)}$ means that we summarize by all the pairs (h,ϑ), $1\le h\le N, \vartheta = 1,2,\ldots$ such that

$$h+\frac{1}{2}\vartheta\le N+\frac{5}{2}.$$

Similar statements can be obtained for analogue for functions $g_2(\alpha)$ and $g_2^*(\alpha)$ that we will consider further.

6. Conclusion

Proposed research methods of Gaussian integers partition number can be applied to study of partition number function of integer ideals (divisors) from arbitrary imaginary quadratic field in a product of integer ideals (divisors) from this field.

Шрамко В. В.

Розбиття цілих гаусових чисел в добуток степенево-вільних

Резюме

Нехай функція $g_1(\alpha)$ являє собою число розкладань цілого гаусового числа α у вигляді добутку безквадратних чисел. Нехай функція $g_2(\alpha)$ являє собою число розкладань цілого гаусового числа α у вигляді добутку степенево-вільних чисел. В цій статті ми розглянемо суматорні функції $\sum_{N(\alpha)\le x} g_1(\alpha)$ та $\sum_{N(\alpha)\le x} g_2(\alpha)$ та отримаємо для них асимптотичні формули. Також, ми використаємо аналог теореми Kátai-Subbarao для вивчення розподілу значень функції $g_2(\alpha)$ у випадку, коли степенево-вільні множники розташовані в порядку зростання їх норм.

Ключові слова: Дзета-функція Гекке, безквадратне ціле гаусове число, степенево-вільне ціле гаусове число, твірний ряд Діріхле.

Шрамко В. В.

Разбиение целых гауссовых чисел в произведение степенно-свободных

Резюме

Пусть функция $\mathrm{g}_1(\alpha)$ представляет собой число разбиения целого гауссового числа α в виде произведения безквадратных чисел. Пусть функция $\mathrm{g}_2(\alpha)$ представляет собой число разбиения целого гауссового числа α в виде произведения степенно-свободных чисел. В этой статтье мы рассмотрим суматорные функции $\sum_{N(\alpha)\le x}\mathrm{g}_1(\alpha)$ и $\sum_{N(\alpha)\le x}\mathrm{g}_2(\alpha)$, а также получим ассимптотические формулы для них. Кроме того, мы воспользуемся аналогом теоремы Kátai-Subbarao для изучения распределения значений функции $\mathrm{g}_2(\alpha)$ в случае, когда степенно-свободные множители располагаются в порядке возростания их норм.

Ключевые слова: Дзета-функция Гекке, безквадратное целое гауссово число, степенно-свободное целое гауссово число, производящий ряд Дирихле.

References

1. Broughan K. Quadrafree factorization numerorum / K. Broughan // Rocky Mountain J. Math. - 2014. - 44 - pp. 791–807.
2. Katai I. On product partitions and asymptotic formulas / I. Katai, M.B. Subbarao // Proc. Of the Intern. Conference on analytic number theory, Bangalore, India. December 13-15, 2003. Mysore: Ramanujan Math. Soc., Ramanujan Math. Soc. Lecture Notice. - 2006. - 2. - pp. 99-114.
3. Canfield E.R. In a problem of Oppenheim concerning "Factorizatio Numerorum"/ E.R. Canfield, P. Erdos, C. Pomerance // J. Number Theory. – 1983. -17. – pp. 1-28.

УДК 517.9, 539.3

М. В. Дудик

Уманський державний педагогічний університет, Умань, Україна

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ВІНЕРА — ГОПФА В ЗАДАЧАХ ПРИКЛАДНОЇ МЕХАНІКИ

Запропоновано метод послідовних наближень для розв'язання системи функціональних рівнянь Вінера — Гопфа. Метод використовує подання матричного коефіцієнта системи у вигляді суми двох матриць, одна з яких допускає точну факторизацію, а відносно іншої — матриці-збурення — передбачається умова її малості порівняно з першим доданком в області задання системи. Розв'язок системи шукається у вигляді розвинень за степенями матриці-збурення. На кожному кроці наближення розв'язання системи здійснюється за допомогою методу Вінера — Гопфа з використанням факторизації основної складової матричного коефіцієнта. Використання методу ілюструється на прикладі розв'язання задачі про розрахунок параметрів зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі в кінці міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних матеріалів. Зона моделюється лінією розриву переміщення, на якій напруження задовольняють критерій міцності Мізеса — Хілла. Показано, що за певних умов вже у першому наближенні метод дозволяє отримувати розв'язки з прийнятною точністю.

MSC: 39B72, 74S99.

Ключові слова: матричне функціональне рівняння Вінера — Гопфа, метод послідовних наближень, міжфазна тріщина, зона передруйнування, критерій Мізеса — Хілла.

DOI: XXXX.

1. Вступ

Багато плоских крайових задач математичної і теоретичної фізики, прикладної механіки за допомогою інтегральних перетворень можуть бути зведені до систем функціональних рівнянь виду

$$\mathbf{\Phi}^{+}(p)+\mathbf{F}(p)=\mathbf{G}(p)\mathbf{\Phi}^{-}(p)\quad (p\in D), \tag{1}$$

визначених у деякій смузі D площини комплексної змінної p, що розв'язуються за допомогою методу Вінера — Гопфа [1]. Тут $\mathbf{\Phi}^{+}(p)$, $\Phi^{-}(p)$ — невідомі векторні функції, аналітичні в областях D^{+} і D^{-} відповідно, $D = D^{+}\bigcap D^{-}$ — спільна смуга їх аналітичності; $\mathbf{F}(p)$ і $\mathbf{G}(p)$ — задані

Надійшла 07.06.2020

векторна і квадратна матрична функції, які можуть мати сингулярності поза смугою аналітичності. Ключовою проблемою розв'язання системи (1) є факторизація її матричного коефіцієнта $\mathbf{G}(p)$, тобто подання його у вигляді добутку

$$\mathbf{G}(p) = \mathbf{G}^{+}(p)\mathbf{G}^{-}(p) \quad (p \in D) \tag{2}$$

двох матриць $\mathbf{G}^{+}(p)$, $\mathrm{G}^{-}(p)$, аналітичних у областях D^{+}, D^{-} відповідно.

Незважаючи на те, що ще у 1958 році М. Крейн та І. Гохберг в [2] довели теоретичну можливість такої факторизації, проте ні вони, а потім і ніхто інший не змогли запропонувати універсального алгоритму точної аналітичної факторизації матричних функцій. Нині відомий лише один, виявлений Г. М. Чеботарьовим [3], вузький нетривіальний клас матричних функцій комплексної змінної, що допускають точну факторизацію у замкнутій аналітичній формі. Метод факторизації цього класу матриць розвивали А. А. Храпков [4-6], V. G. Daniele [7], B. Noble [1] та інші. Він успішно застосовувався для розв'язання ряду задач механіки руйнування, теорії розсіяння електромагнітних і пружних хвиль, контактних задач тощо.

Проте, метод Чеботарьова — Храпкова виявився недієвим у випадку матричних функцій, відмінних від знайденого ними виду. Це стимулювало пошук альтернативних та розвиток наближених методів факторизації матриць, у яких брали участь А. О. Антіпов, В. А. Бабешко, Р. В. Дудучава, Н. Г. Моісеєв, В. І. Острик, В. В. Сільвестров, I. D. Abrahams, V. G. Daniele, I. Gohberg, R. A. Hurd, D. S. Jones, A. B. Lebre, G. Mishuris, A. D. Rawlins, S. Rogosin, G. R. Wickham та інші. Зокрема, у методі В. А. Бабешка факторизація матриці здійснюється у три етапи: нормалізації, наближеної факторизації і уточненої факторизації; на етапі наближеної факторизації нормалізовану матрицю наближають на дійсній вісі матрицею з раціональними коефіцієнтами [8]. Метод А. О. Антіпова полягає у розвиненні неаналітичних елементів матричного рівняння за їх полюсами у ряди з невідомими коефіцієнтами, що призводить до нескінченої системи алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується за допомогою асимптотичного методу [9, 10]. I. D. Abrahams для наближеної факторизації матриць використовує Паде-апроксимацію поліномами довільної степені [11].

В цілому, застосування наближених методів базується на громіздких перетвореннях вихідної матриці, інші методи зводяться до досить трудомістких обчислювальних процедур. Тому існує потреба у розвитку математично зрозумілих і обчислювально простих методів отримання наближених аналітичних розв'язків систем функціональних рівнянь Вінера — Гопфа.

2. Основи методу

На відміну від використання наближених методів факторизації матричного коефіцієнта вихідного рівняння (1) у даній роботі запропоновано метод послідовних наближень розв'язання системи функціональних рівнянь Вінера — Гопфа. Він базується на поданні матричного коефіцієнта системи у вигляді суми двох матриць, одна з яких, $\mathbf{G}_0(p)$, допускає аналітичну факторизацію в замкнутій формі, а відносно іншої — матриці-збурення $\mathbf{G}'(p)$ — приймається умова малості в області визначення системи порівняно з основною матрицею $\mathbf{G}_0(p)$:

$$\mathbf{G}(p)=\mathbf{G}_0(p)+\mathbf{G}'(p)\quad \left(\mathbf{G}_0(p)=\mathbf{G}_0^+(p)\mathbf{G}_0^-(p),\quad \mathrm{G}_0(p)\gg\mathbf{G}'(p),\ \ p\in D\right). \tag{3}$$

Порівняння матриць не є, в цілому, коректною процедурою при відсутності малого параметра, що міг би бути використаний у розкладанні (3). В подальшому вважатимемо, що обґрунтованість такого розкладання може бути перевірена за впливом матриці $\mathbf{G}'(p)$ на скалярні величини, які отримуються з вихідного рівняння Вінера — Гопфа.

У відповідності з прийнятими вище припущеннями подамо розв'язок рівняння (1) у вигляді розвинень за степенями матриці-збурення $\mathbf{G}'(p)$:

$$\mathbf{\Phi}^{\pm}(p)=\mathbf{\Phi}_0^{\pm}(p)+\Phi_1^{\pm}(p)+\Phi_2^{\pm}(p)+...,\tag{4}$$

де кожен наступний доданок є значно меншим порівняно з попереднім. З урахуванням (3) і (4) рівняння (1) у нульовому наближенні зводимо до вигляду

$$\left(\mathbf{G}_0^+(p)\right)^{-1}\mathbf{\Phi}_{\mathbf{0}}^+(p)+\left(\mathbf{G}_0^+(p)\right)^{\mathbf{-1}}\mathbf{F}(p)=\mathbf{G}_0^-(p)\mathbf{\Phi}_{\mathbf{0}}^-(p)\quad (p\in D),\tag{5}$$

де степінь "–1" позначає обернену матрицю. Розв'язання цього рівняння виконуємо за допомогою процедури Вінера — Гопфа [1]. Припускаючи, що елементи вектора $\left(\mathbf{G}_0^+(p)\right)^{-1}\mathrm{F}(p)$ задовольняють умову Гельдера, замінимо його за допомогою інтегралів типу Коші різницею крайових значень аналітичних векторів [12]:

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{G}_0^+(p)\right)^{-1}\mathbf{F}(p)=\mathbf{F}_0^+(p)-\mathbf{F}_0^-(p),\\&\qquad\mathbf{F}_0^{\pm}(p)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\left(\mathbf{G}_0^+(z)\right)^{-1}\mathbf{F}(z)}{z-p}dz\ \ (\gamma\in D,\ \ p\in D^{\pm})\end{aligned}\tag{6}$$

і подамо рівняння (5) у формі

$$\left(\mathbf{G}_0^+(p)\right)^{-1}\mathbf{\Phi}_\mathbf{0}^+(p)+\mathbf{F}_0^+(p)=\mathbf{G}_0^-(p)\mathbf{\Phi}_\mathbf{0}^-(p)+\mathbf{F}_0^-(p)\quad(p\in D).\tag{7}$$

Зробимо також додаткове припущення, що права і ліва частини рівняння (7) при $p\to\infty$ прямують до нуля. (Це припущення не є принциповим, оскільки нескладно узагальнити метод на випадок прямування лівої і правої частин рівняння до одного і того ж полінома, як це трапляється у скалярних функціональних рівняннях Вінера — Гопфа [12].) Тоді у відповідності з принципом аналітичного продовження та теореми Ліувілля отримуємо розв'язок рівняння (7)

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Phi}_0^+(p)=-\mathbf{G}_0^+(p)\mathbf{F}_0^+(p)\ (p\in D^+),\\&\mathbf{\Phi}_0^-(p)=-\left(\mathbf{G}_0^-(p)\right)^{-1}\mathbf{F}_0^-(p)\ (p\in D^-),\end{aligned}\tag{8}$$

який є нульовим наближенням розв'язку вихідного рівняння (1).

У першому наближенні рівняння (1) має вигляд

$$\mathbf{\Phi}_1^+(p)=\mathbf{G}_0(p)\mathbf{\Phi}_\mathbf{1}^-(p)+\mathbf{G}'(p)\mathbf{\Phi}_\mathbf{0}^-(p)\quad(p\in D).$$

Введемо векторну функцію

$$\mathbf{F}_1(p)=-\mathbf{G}'(p)\mathbf{\Phi}_0^-(p).$$

З урахуванням факторизації матриці $\mathbf{G}_0(p)$ приходимо до рівняння

$$\left(\mathbf{G}_0^+(p)\right)^{-1}\mathbf{\Phi}_\mathbf{1}^+(p)+\left(\mathbf{G}_0^+(p)\right)^{\mathbf{-1}}\mathbf{F}_1(p)=\mathbf{G}_0^-(p)\mathbf{\Phi}_\mathbf{1}^-(p)\quad(p\in D),\tag{9}$$

аналогічного рівнянню (5). Подібно до (6) виконаємо в (9) заміну $\left(\mathbf{G}_0^+(p)\right)^{-1}\mathbf{F}_1(p)$ різницею крайових значень аналітичних векторів:

$$\left(\mathbf{G}_0^+(p)\right)^{-1}\mathrm{F}_1(p)=\mathrm{F}_1^+(p)-\mathrm{F}_1^-(p),\tag{10}$$

$$\mathbf{F}_1^{\pm}(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\left(\mathbf{G}_0^{+}(z)\right)^{-1}\mathbf{F}_1(z)}{z-p}dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\left(\mathbf{G}_0^{+}(z)\right)^{-1}\mathbf{G}'(z)\left(\mathbf{G}_0^{-}(z)\right)^{-1}\mathbf{F}_0^{-}(z)}{z-p}dz\ (\gamma\in D,\ p\in D^{\pm}).$$

Після підстановки (10) в (9) і використання принципу аналітичного продовження та теореми Ліувілля знайдемо поправку першого порядку за збуренням до розв'язку (8):

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}_1^{+}(p) &= -\mathbf{G}_0^{+}(p)\mathbf{F}_1^{+}(p) && (p\in D^{+}),\\ \mathbf{\Phi}_1^{-}(p) &= -\left(\mathbf{G}_0^{-}(p)\right)^{-1}\mathbf{F}_1^{-}(p) && (p\in D^{-}).\end{aligned} \tag{11}$$

Поправки n-го порядку $\mathbf{\Phi}_n^{\pm}(p)$ отримуються аналогічно попередньому етапу і описуються формулами, подібними до (10)-(11):

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}_n^{+}(p) &= -\mathbf{G}_0^{+}(p)\mathbf{F}_n^{+}(p) && (p\in D^{+}),\\ \mathbf{\Phi}_n^{-}(p) &= -\left(\mathbf{G}_0^{-}(p)\right)^{-1}\mathbf{F}_n^{-}(p) && (p\in D^{-}),\end{aligned} \tag{12}$$

$$\mathbf{F}_n^{\pm}(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\left(\mathbf{G}_0^{+}(z)\right)^{-1}\mathbf{G}'(z)\left(\mathbf{G}_0^{-}(z)\right)^{-1}\mathbf{F}_{n-1}^{-}(z)}{z-p}dz\ \ (\gamma\in \mathrm{D},\ \ p\in D^{\pm}).$$

Підсумовуючи ці поправки згідно з (4), знаходимо остаточний розв'язок рівняння (1):

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}^{+}(p) &= -\mathbf{G}_0^{+}(p)\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{F}_n^{+}(p) && (p\in D^{+}),\\ \mathbf{\Phi}^{-}(p) &= -\left(\mathbf{G}_0^{-}(p)\right)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{F}_n^{-}(p) && (p\in D^{-}).\end{aligned} \tag{13}$$

З формальної точки зору розв'язок (13) можна вважати точним. Умовою коректності розв'язку є збіжність його рядів, тобто виконання нерівності $\left|\mathbf{F}_n^{\pm}(p)\right| < \left|\mathbf{F}_{n-1}^{\pm}(p)\right|$. Згідно з визначенням $\mathbf{F}_n^{\pm}(p)$ в (12) цій нерівності еквівалентна умова

$$\left|\left(\mathbf{G}_0^{+}(p)\right)^{-1}\mathbf{G}'(p)\left(\mathbf{G}_0^{-}(p)\right)^{-1}\right| < 1. \tag{14}$$

В той же час практичне застосування формул (13) для числових розрахунків наштовхується на зростання кратності інтегралів у кожному наступному наближенні. Ця обставина змушує обмежуватись в (13) невеликим числом доданків, які враховуються при обчисленнях, і накладає замість (14) більш жорстке обмеження на матрицю-збурення:

$$\left|\left(\mathbf{G}_0^+(p)\right)^{-1}\mathbf{G}'(p)\left(\mathbf{G}_0^-(p)\right)^{-1}\right| \ll 1. \tag{15}$$

Як видно з попереднього розгляду, перевагою запропонованого методу є уникнення факторизації матричного коефіцієнта $\mathbf{G}(p)$ вихідного рівняння (1). З іншого боку, формально розв'язок (13) можна представити як результат дії деяких матричних операторів:

$$\mathbf{\Phi}^{\pm}(p) = -\hat{\mathbf{G}}^{\pm}(p)\mathbf{F}_0(p) \ \ (p \in D^{\pm}),$$

що дозволяє процедурі факторизації (2) поставити у відповідність операторне подання

$$\mathbf{G}(p) \to \hat{\mathbf{G}}^{+}(p)\hat{\mathbf{G}}^{-}(p).$$

У такому трактуванні розглянутий метод є близьким до деяких наближених методів факторизації матричних функцій, зокрема, запропонованого в [13] асимптотичного методу факторизації класу матриць, які на нескінченості прямують до тотожної матриці.

3. Приклад застосування методу: модель зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі в кінці міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних матеріалів

В умовах плоскої деформації розглядаємо задачу про розрахунок параметрів початкової зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох пружних однорідних ізотропних матеріалів з модулями Юнґа E_1, E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2. Нехтуючи товщиною з'єднувального прошарку, моделюватимемо зону лінією розриву переміщення, на якій нормальне і дотичне напруження задовольняють умову

$$\left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{r\theta}}{\tau_0}\right)^2 = 1, \tag{16}$$

де σ_0, τ_0 — опори відриву та зсуву з'єднувального матеріалу, що експериментально визначаються як середні значення нормального і дотичного напружень в зоні при відповідній моді навантаження. Умова (16) використовується в одному з варіантів когезійної моделі міжфазного руйнування [14] і відповідає критерію міцності Мізеса — Хілла.

На початковому етапі свого розвитку довжина зони передруйнування l значно менша від довжини тріщини L та інших актуальних розмірів тіла, і оскільки напружено-деформований стан досліджується в околі зони, то вихідна задача зводиться до задачі про лінію розриву скінченної довжини, що поширюється з вершини півнескінченної міжфазної тріщини у кусково-однорідній площині по межі поділу двох різних пружних матеріалів (рис. 1). Умову на нескінченості формулюємо як вимогу переходу шуканого розв'язку на відстанях $l << r << L$ у розв'язок аналогічної задачі теорії пружності без лінії розриву, який відомий з робіт [15, 16].

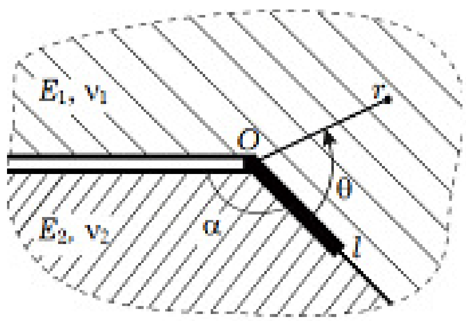

Рис. 1: Розрахункова схема задачі

Враховуючи умову (16) та вважаючи береги тріщини вільними від напружень (за винятком можливої області контакту берегів тріщини, яку вважаємо значно меншою порівняно із зоною передруйнування і нехтуємо нею), приходимо до статичної крайової задачі теорії пружності з граничними умовами

$$\theta = -\alpha \bigcup 2\pi - \alpha : \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \tag{17}$$

$$\theta = 0 : \qquad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \tag{18}$$

$$\theta = 0,\ r < l : \qquad \sigma_\theta = \sigma_0 \cos\psi(r),\ \tau_{r\theta} = \tau_0 \sin\psi(r);$$

$$\theta = 0,\ r > l : \qquad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \tag{19}$$

$$\theta = 0,\ \ r \to \infty : \quad \sigma_\theta \sim \sum_i C_i F_\sigma(\alpha, \lambda_i) r^{\lambda_i},\ \tau_{r\theta} \sim \sum_i C_i F_\tau(\alpha, \lambda_i) r^{\lambda_i}; \tag{20}$$

де $\langle f\rangle$ позначає стрибок величини f на межі поділу; $\psi(r)$ — фазовий кут напруження в зоні передруйнування, який в подальшому через малість розмірів зони і для спрощення розв'язання задачі вважатимемо сталим і рівним його середньому значенню ψ; $F_\sigma(\alpha,\lambda_i)$, $F_\tau(\alpha,\lambda_i)$ — відомі функції з робіт [15, 16]; C_i – довільні сталі, які характеризують інтенсивність зовнішнього навантаження і визначаються із розв'язку зовнішньої задачі; λ_i– показники сингулярності напружень в околі вершини тріщини, що є коренями характеристичного рівняння аналогічної задачі без зони передруйнування [15]:

$$D(\lambda)=0 \quad (-1<\operatorname{Re}\lambda<0),$$

$$D(\lambda)=-\left(1+\kappa_1\right)^2 t_1-4\left(1+\kappa_1\right)(e-1)\, t_1 t_2-e^2(1+\kappa_2)^2 t_3+$$

$$+4\,(e-1)^2\, t_1 t_3+4e(1+\kappa_2)\,(e-1)\, t_3 t_4+2e(1+\kappa_2)\,(1+\kappa_1)\, t_5,$$

$$t_1=(\lambda+1)^2\sin^2\alpha-\sin^2(\lambda+1)\alpha,\quad t_2=\sin^2(\lambda+1)\,(2\pi-\alpha)\,,$$

$$t_3=(\lambda+1)^2\sin^2\alpha-\sin^2(\lambda+1)\,(2\pi-\alpha)\,,$$

$$t_4=\sin^2(\lambda+1)\alpha,\quad t_5=t_1+\sin(\lambda+1)\alpha\sin 2\lambda\pi\cos(\lambda+1)(2\pi-\alpha),$$

$$e=\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}\cdot\frac{E_1}{E_2},\ \kappa_{1(2)}=3-4\nu_{1(2)}.$$

В кінці зони передруйнування реалізується асимтотика, яка відповідає сингулярній частині розв'язку однорідної крайової задачі про півнескінчену лінію розриву переміщень на прямолінійній межі поділу двох різних пружних матеріалів, аналогічну міжфазній тріщині. Зокрема, для напружень має місце асимптотика [17]

$$r\to l+0,\quad \sigma_\theta(r,0)+i\tau_{r\theta}(r,0)\sim\frac{k(r-l)^{i\omega}}{\sqrt{2\pi(r-l)}}, \tag{21}$$

де $k=k_1+ik_2$ — локальний КІН в кінці зони, $\omega=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}$, $\beta=\frac{(1+e\kappa_2)-(e+\kappa_1)}{(1+e\kappa_2)+(e+\kappa_1)}$ — параметр Дандерса.

За допомогою інтегрального перетворення Мелліна крайова задача теорії пружності з граничними умовами (17)-(20) зводиться до матричного рівняння Вінера — Гопфа у смузі $-\varepsilon_1<\operatorname{Re}p<\varepsilon_2$ ($\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ — достатньо малі додатні числа), що містить уявну вісь:

$$\mathbf{\Phi}^+(p)+\mathbf{F}(p)=\mathbf{G}(p)\mathbf{\Phi}^-(p)\quad(-\varepsilon_1<\operatorname{Re}p<\varepsilon_2), \tag{22}$$

$$\mathbf{\Phi}^{+}(p)=\int_1^{\infty}\left(\begin{array}{c}\sigma_\theta(\rho l,0)\\ \tau_{r\theta}(\rho l,0)\end{array}\right)\rho^p d\rho,$$

$$\mathbf{\Phi}^{-}(p)=\frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)}\int_0^1\left\langle\frac{\partial}{\partial r}\left(\begin{array}{c}u_\theta\\ u_r\end{array}\right)\right\rangle\Bigg|_{\begin{array}{l}\theta=0\\ r=\rho l\end{array}}\rho^p d\rho,$$

$$\mathbf{F}(p)=\left(\begin{array}{c}F_1(p)\\ F_2(p)\end{array}\right),$$

$$F_1(p)=\frac{\sigma_0\cos\psi}{p+1}-\sum_i\frac{C_iF_\sigma(\alpha,\lambda_i)l^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i},\quad F_2(p)=\frac{\tau_0\sin\psi}{p+1}-\sum_i\frac{C_iF_\tau(\alpha,\lambda_i)l^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i};$$

$$\mathbf{G}(p)=\frac{-(1+\kappa_1)}{D(-1-p)}\left(\begin{array}{cc}g_{11}(p) & 2g_{12}(p)\\ 2g_{21}(p) & g_{22}(p)\end{array}\right),$$

$$g_{11}(p)=e(1+\kappa_2)d_1(p)d_6(p)-(1+\kappa_1)d_2(p)d_4(p),$$

$$g_{12}(p)=2(1-e)d_1(p)d_2(p)+e(1+\kappa_2)d_1(p)d_8(p)-(1+\kappa_1)d_2(p)d_7(p),$$

$$g_{21}(p)=e(1+\kappa_2)d_1(p)d_9(p)-2(1-e)d_1(p)d_2(p)-(1+\kappa_1)d_2(p)d_5(p),$$

$$g_{22}(p)=(1+\kappa_1)d_2(p)d_3(p)-e(1+\kappa_2)d_1(p)d_{10}(p),$$

$$d_1(p)=p^2\sin^2\alpha-\sin^2 p(2\pi-\alpha),\quad d_2(p)=p^2\sin^2\alpha-\sin^2 p\alpha,$$

$$d_3(p)=p\sin 2\alpha-\sin 2p(2\pi-\alpha),\quad d_4(p)=p\sin 2\alpha+\sin 2p(2\pi-\alpha),$$

$$d_5(p)=p\sin^2\alpha+\sin^2 p(2\pi-\alpha),\quad d_6(p)=p\sin 2\alpha-\sin 2p\alpha,$$

$$d_7(p)=p\sin^2\alpha-\sin^2 p(2\pi-\alpha),\quad d_8(p)=p\sin^2\alpha-\sin^2 p\alpha,$$

$$d_9(p)=p\sin^2\alpha+\sin^2 p\alpha,\qquad d_{10}(p)=p\sin 2\alpha+\sin 2p\alpha.$$

Через складність матриці $\mathbf{G}(p)$ її факторизація за формулами Храпкова — Чеботарьова неможлива, тому використаємо наближений метод розв'язання рівняння (22), описаний у вище. У нульовому наближенні візьмемо значення цієї матриці для плоскої межі поділу [18]:

$$\mathbf{G}_0(p)=\mathbf{G}(p)\left.\right|_{\alpha=\pi}=-A\cdot\operatorname{tg}p\pi G(p)\mathbf{Q}(p),\tag{23}$$

$$G(p)=\frac{4(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)\cos^2 p\pi}{(e+\kappa_1)^2+(1+e\kappa_2)^2+2(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)\cos 2p\pi},$$

$$A = \frac{(1+\kappa_1)(1+\kappa_1+e(1+\kappa_2))}{2\,(e+\kappa_1)\,(1+e\kappa_2)}, \mathbf{Q}(p) = \mathbf{I} + g(p)\mathbf{J}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

де $\mathbf{I}$ - одинична матриця, $g(p) = i\beta\,\mathrm{tg}\,p\pi$. Матриця $\mathbf{Q}(p)$ відноситься до типу Храпкова — Чеботарьова і факторизується на уявній вісі за формулами [6]:

$$\mathbf{Q}(p) = \mathbf{Q}^+(p)\mathbf{Q}^-(p) \;\; (\mathrm{Re}\,p = 0), \;\; \mathrm{Q}^\pm(p) = r^\pm(p)\left[\mathrm{ch}\,\theta^\pm(p)\mathbf{I} + \mathrm{sh}\,\theta^\pm(p)\mathbf{J}\right],$$

де елементи матриць $\mathbf{Q}^+(p)$ і $\mathbf{Q}^-(p)$ аналітичні у півплощинах $\mathrm{Re}\,p < 0$ і $\mathrm{Re}\,p > 0$ відповідно. Функції $r^\pm(p)$ і $\theta^\pm(p)$ знайдено згідно з [6] у [18]:

$$r^\pm(p) = \left(1-\beta^2\right)^{1/4}\exp\left[\pm\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln H_1(t)}{t+ip}dt\right], \; H_1(t) = \frac{1-\beta^2\,\mathrm{th}^2\,\pi t}{1-\beta^2},$$

$$\theta^\pm(p) = \frac{\pm p}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_2(t)}{t+ip}dt, \; H_2(t) = \frac{arth(\beta\cdot\mathrm{th}\,\pi t)}{t}.$$

Скалярні коефіцієнти рівняння (23) факторизуються за формулами [12]:

$$\begin{gathered} G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)} \;(\mathrm{Re}\,p = 0)\,, \\ \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\ln G(z)}{z-p}dz\right] = \begin{cases} G^+(p), & \mathrm{Re}\,p < 0, \\ G^-(p), & \mathrm{Re}\,p > 0; \end{cases} \end{gathered} \tag{24}$$

$$\mathrm{tg}\,p\pi = \frac{p}{K^+(p)K^-(p)}, \; K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1\mp p)}{\Gamma(0,5\mp p)}.$$

Застосовуючи теорему абелевого типу до асимптотики (21) і враховуючи обмеженість напружень біля кінця зони передруйнування, у відповідності з описаним вище наближеним методом і з урахуванням (23)-(24) отримаємо розв'язок рівняння (22) у нульовому наближенні:

$$\mathbf{\Phi}_0^+(p) = -\frac{pG^+(p)}{K^+(p)}\mathbf{Q}^+(p)\mathbf{F}_0^+(p) \qquad (\mathrm{Re}\,p < 0),$$

$$\mathbf{\Phi}_0^-(p) = \frac{K^-(p)G^-(p)}{A}\left[\mathbf{Q}^-(p)\right]^{-1}\mathbf{F}_0^-(p) \quad (\mathrm{Re}\,p < 0), \tag{25}$$

$$\mathbf{F}_0^+(p) = \frac{1}{p+1}\left(\frac{K^+(p)}{pG^+(p)}[\mathbf{Q}^+(p)]^{-1} + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)}[\mathbf{Q}^+(-1)]^{-1}\right)\begin{pmatrix}\sigma_0\cos\psi\\ \tau_0\sin\psi\end{pmatrix}$$
$$-\sum_i \frac{C_i l^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i}\left(\frac{K^+(p)}{pG^+(p)}[\mathbf{Q}^+(p)]^{-1}\right.$$
$$\left.+\frac{K^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i)G^+(-1-\lambda_i)}[\mathbf{Q}^+(-1-\lambda_i)]^{-1}\right)\begin{pmatrix}F_\sigma(\alpha,\lambda_i)\\ F_\tau(\alpha,\lambda_i)\end{pmatrix},$$
$$\mathbf{F}_0^-(p) = \frac{1}{p+1}\frac{K^+(-1)}{G^+(-1)}[\mathbf{Q}^+(-1)]^{-1}\begin{pmatrix}\sigma_0\cos\psi\\ \tau_0\sin\psi\end{pmatrix}$$
$$-\sum_i \frac{C_i l^{\lambda_i}}{p+1+\lambda_i}\frac{K^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i)G^+(-1-\lambda_i)}$$
$$\times[\mathbf{Q}^+(-1-\lambda_i)]^{-1}\begin{pmatrix}F_\sigma(\alpha,\lambda_i)\\ F_\tau(\alpha,\lambda_i)\end{pmatrix}.$$

З розв'язку (25) за процедурою Вінера — Гопфа, подібно до [15, 16], отримаємо рівняння для визначення довжини зони і фазового кута напружень у зоні:

$$\frac{K^+(-1)}{G^+(-1)}[\mathbf{Q}^+(-1)]^{-1}\begin{pmatrix}\sigma_0\cos\psi\\ \tau_0\sin\psi\end{pmatrix}$$
$$-\sum_i \frac{C_i l^{\lambda_i}K^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i)G^+(-1-\lambda_i)}[\mathbf{Q}^+(-1-\lambda_i)]^{-1}\begin{pmatrix}F_\sigma(\alpha,\lambda_i)\\ F_\tau(\alpha,\lambda_i)\end{pmatrix} = 0. \quad (26)$$

Використовуючи знайдене нульове наближення (25) розв'язку вихідного рівняння Вінера — Гопфа (22) і покладаючи матрицю-збурення як

$$\mathbf{G}'(p) = \mathbf{G}(p) - \mathbf{G}_0(p),$$

за формулами (10)-(11) знаходимо поправки до розв'язку у першому наближенні:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}_1^+(p) &= -\mathbf{G}_0^+(p)\mathbf{F}_1^+(p) \qquad (\operatorname{Re} p < 0),\\ \mathbf{\Phi}_1^-(p) &= -\left(\mathbf{G}_0^-(p)\right)^{-1}\mathbf{F}_1^-(p) \quad (\operatorname{Re} p > 0),\end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\left(\mathbf{G}_0^+(z)\right)^{-1}\mathbf{G}'(z)\left(\mathbf{G}_0^-(z)\right)^{-1}\mathbf{F}_0^-(z)}{z-p}dz = \begin{cases}\mathbf{F}_1^+(p), & \operatorname{Re} p < 0,\\ \mathbf{F}_1^-(p), & \operatorname{Re} p > 0.\end{cases}$$

Враховуючи асимптотики (21) і обмеженість напружень біля кінця зони передруйнування, приходимо замість (26) до уточнених рівнянь для визначення довжини зони і фазового кута напружень у зоні:

$$\frac{K^+(-1)}{G^+(-1)}[\mathbf{Q}^+(-1)]^{-1}\begin{pmatrix}\sigma_0\cos\psi\\ \tau_0\sin\psi\end{pmatrix}$$
$$-\sum_i \frac{C_i l^{\lambda_i}K^+(-1-\lambda_i)}{(1+\lambda_i)G^+(-1-\lambda_i)}[\mathbf{Q}^+(-1-\lambda_i)]^{-1}\begin{pmatrix}F_\sigma(\alpha,\lambda_i)\\ F_\tau(\alpha,\lambda_i)\end{pmatrix}$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left(\mathbf{G}_0^+(z)\right)^{-1}\mathbf{G}'(z)\left(\mathbf{G}_0^-(z)\right)^{-1}\mathbf{F}_0^-(z)dz=0.$$

З визначення $\mathbf{\Phi}^-(p)$ в (22) отримуємо компоненти стрибка переміщення у вершині тріщини:

$$\delta u=\begin{pmatrix}\delta u_\theta(0,0)\\ \delta u_r(0,0)\end{pmatrix}=-\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1}\mathbf{\Phi}^-(0),$$

які визначають повне розкриття тріщини у вершині

$$\delta=\sqrt{\delta u_\theta(0,0)^2+\delta u_r(0,0)^2}.$$

На підставі формул (25) і (27) знаходимо розкриття у нульовому і першому наближеннях:

$$\delta u_0=-\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1}\frac{1}{A\sqrt{\pi G(0)}}\mathbf{F}_0^-(0),$$
$$\delta u_1=\left(\mathbf{I}+\frac{1}{2A\sqrt{\pi}}\left[\mathbf{G}_0^+(0)\right]^{-1}\mathbf{G}'(0)\right)\delta\mathbf{u}_0.$$

4. Чисельний аналіз прикладу

Найвища ефективність наближеного підходу у розглянутому вище прикладі про маломасштабну зону передруйнування очікується при кутах зламу межі поділу матеріалів α, близьких до кута $\alpha_0=180^\circ$, якому відповідає нульове наближення (23) матричного коефіцієнта рівняння Вінера — Гопфа (22). При таких кутах зламу, як виявлено в [15], НДС біля вершини міжфазної тріщини довжиною $L\gg l$ визначається двома комплексно спряженими показниками сингулярності $\lambda_1=\bar{\lambda}_2=\lambda_r+i\lambda_m$ і комплексним коефіцієнтом інтенсивності напружень $K=K_1+iK_2$, який входить в коефіцієнти розвинень (20):

$$C_1=\bar{C}_2=\frac{KL^{-i\lambda_m}}{\sqrt{2\pi}}.$$

У зв'язку з цим зовнішнє навантаження задаємо безрозмірним параметром $\sigma = \frac{|K|L^{\lambda_r}}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}$ і фазовим кутом $\varphi = \mathrm{arctg}(K_2/K_1)$, нехтуючи в (20) регулярними вкладами.

У таблицях 1–2 (в кінці статті) наведено результати окремих розрахунків параметрів зони передруйнування (відносної довжини $x = l/L$, фазового кута напружень у зоні ψ та нормованого повного розкриття тріщини в її вершині $\delta' = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)\sigma_0}\frac{\delta}{L}$ і їх відносні відмінності ε_x, ε_ψ, ε_δ у нульовому і першому наближенні) для $E_1/E_2 = 0,5$, $\nu_1/\nu_2 = 0,3$, $\sigma_0/\tau_0 = 5$, $\sigma = 0,1$.

Як видно з таблиць, існують інтервали параметрів досліджуваного тіла і навантаження, яким відповідає цілком прийнятна похибка визначення довжини зони передруйнування, яка виявляється найбільш чутливою до кута зламу межі поділу і фазового кута навантаження. Зокрема, при збільшенні кута зламу межі поділу матеріалів похибка наближеного розв'язку немонотонно зростає. Немонотонною є також залежність похибки від фазового кута навантаження, проте немонотонність залежностей від кутів зламу і фазового кута навантаження є характерною особливістю для параметрів зони передруйнування в околі вершини міжфазної тріщини у кусково-однорідному тілі з ламаною межею поділу [16].

В таблицях жирним шрифтом виділені стрічки зі значними відмінностями розрахованих значень довжин зони передруйнування та/або фазового кута напружень у зоні у нульовому і першому наближеннях теорії збурень. Отже, при відповідних їм кутах зламу межі поділу і фазових кутах навантаження умови застосовності наближеного розв'язку виявляються невиконаними, а відмова від поправок наступного порядку некоректною.

5. Висновки

Запропоновано наближений метод розв'язання системи функціональних рівнянь Вінера — Гопфа, який не використовує факторизацію матричного коефіцієнта. Метод базується на поданні матричного коефіцієнта системи у вигляді суми двох матриць, одна з яких допускає точну факторизацію, а інша розглядається як мале збурення до першої в області визначення системи. Розв'язок системи шукається у вигляді розвинень за степенями матриці-збурення.

В якості ілюстрації застосування методу розглянуто розв'язання з його допомогою задачі про розрахунок параметрів зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі в кінці міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі поділу двох різних матеріалів. Показано, що при певних умовах вже у першому наближенні метод дозволяє отримувати розв'язки з достатньою точністю.

Табл. 1: Параметри зони передруйнування при різних кутах зламу межі поділу для $K_2/K_1 = 2$.

$\alpha, ^\circ$	x_0	x_1	$\varepsilon_x, \%$	$\psi_0, ^\circ$	$\psi_1, ^\circ$	ε_ψ, %	δ'_0	δ'_1	ε_δ, %
150	0,075468	0,07729	2,35	73,52	73,75	0,31	0,18396	0,18372	0,13
155	0,079884	0,07953	0,44	75,51	75,51	0,0017	0,1675	0,16656	0,57
160	0,081855	0,08008	2,22	77,19	77,07	0,15	0,15365	0,15239	0,83
165	0,081389	0,07901	3,01	78,65	78,49	0,20	0,14182	0,14054	0,91
170	0,078668	0,07647	2,87	79,93	79,79	0,18	0,13159	0,13056	0,79
175	0,074009	0,07267	1,84	81,07	80,98	0,10	0,12268	0,12209	0,48
180	0,06783	0,06783	0,00	82,11	82,11	0,00	0,11488	0,11488	0,00
185	0,060607	0,0622	2,56	83,06	83,17	0,13	0,10806	0,10876	0,64
190	0,056028	0,00319	5,70	83,96	84,18	0,26	0,10211	0,10359	1,42
195	**0,044989**	**0,04958**	**9,26**	**84,81**	**85,15**	**0,40**	**0,09696**	**0,09927**	**2,32**
200	**0,037483**	**0,04311**	**13,05**	**85,64**	**86,09**	**0,53**	**0,09256**	**0,09575**	**3,33**

Табл. 2: Параметри зони передруйнування при різних фазових кутах навантаження для $\alpha = 160°$.

$\varphi, ^\circ$	x_0	x_1	ε_x, %	$\psi_0, ^\circ$	$\psi_1, ^\circ$	ε_ψ, %	δ_0'	δ_1'	ε_δ, %
0	**0,0052764**	**0,00569**	**7,20**	**-19,16**	**-25,02**	**23,39**	**0,45206**	**0,45199**	**0,02**
10	**0,0065949**	**0,00599**	**10,14**	**25,10**	**18,73**	**34,04**	**0,43674**	**0,43645**	**0,07**
20	**0,0148477**	**0,01312**	**13,17**	**51,66**	**48,82**	**5,81**	**0,31038**	**0,3098**	**0,19**
30	**0,0283536**	**0,02588**	**9,57**	**63,59**	**62,31**	**2,05**	**0,2353**	**0,2345**	**0,34**
40	**0,0446754**	**0,04182**	**6,82**	**70,15**	**69,49**	**0,95**	**0,19275**	**0,19177**	**0,51**
50	0,0615364	0,05867	4,89	74,47	74,11	0,48	0,16576	0,16464	0,68
60	0,0768316	0,07428	3,44	77,69	77,50	0,25	0,14702	0,14578	0,85
70	0,0887731	0,08681	2,26	80,33	80,23	0,12	0,13318	0,13184	0,12
80	0,0960488	0,09488	1,23	82,66	82,62	0,05	0,1226	0,12117	1,18
90	0,0979388	0,09766	0,29	84,85	84,84	0,01	0,11453	0,11303	1,32
100	0,094368	0,09497	0,63	87,05	87,05	0,01	0,10875	0,10721	1,43
110	0,0858859	0,08726	1,57	89,37	89,37	0,01	0,10561	0,10407	1,48
120	0,0735793	0,07554	2,59	91,99	91,95	0,05	0,10607	0,10459	1,41
130	0,0589268	0,06122	3,75	95,13	95,01	0,14	0,11209	0,11076	1,20
140	0,0436127	0,04596	5,12	99,19	98,91	0,34	0,12714	0,12605	0,86
150	**0,029321**	**0,03146**	**6,81**	**104,90**	**104,32**	**0,77**	**0,15728**	**0,1565**	**0,50**

Список літератури

1. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. — Москва : Изд-во иностр. лит., 1962. — 279 с.
2. Гохберг И. Ц. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн // Успехи матем. наук. — 1958. — Т. XIII, вып. 2. — С. 1–78.
3. Чеботарев Г. Н. К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы n пар функций / Г. Н. Чеботарев // Учен. зап. Казан. ун-та. — 1956. — Т.116, кн.4. — С. 31–58.
4. Храпков А. А. Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил / А. А. Храпков // Прикл. математика и механика. — 1971. — Т. 35, вып. 4. — С. 677–689.
5. Храпков А. А. Задачи об упругом равновесии бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине, разрешимые в замкнутой / А. А. Храпков // Прикл. математика и механика. — 1971. — Т. 35, вып. 6. — С. 1062–1069.
6. Khrapkov A. A. Wiener—Hopf method in mixed elasticity theory problems. — St. Petersburg : B. E. VNIIG Inc., 2001. — 144 p.
7. Daniele V. G. On the factorization of Wiener — Hopf matrices in problems solvable with Hurd's method / V. G. Daniele // IEEE Trans. Antennas Propagat. — 1978. — Vol. 26. — P. 614–616.
8. Бабешко В. А. Обобщенный способ приближенной факторизации матриц-функций / В. А. Бабешко // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247, № 5. — С. 1089–1093.
9. Антипов Ю. А. Точное решение задачи о вдавливании кольцевого штампа в полупространство / Ю. А. Антипов // ДАН Укр. ССР. Серия А. Физ.-мат. и техн. науки. — 1987. — № 7. — С. 29–33.
10. Антипов Ю. А. Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления / Ю. А. Антипов, Н. Х. Арутюнян // Прикл. математика и механика. — 1991. — Т. 55, вып. 6. — С. 1005–1017.
11. Abrahams I. D. On the solution of Wiener — Hopf problems involving noncommutative matrix kernel decompositions / I. D. Abrahams // SIAM J. Appl. Math. — 1997. — Vol. 57. — P. 541–567.
12. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Изд. 3-е / Гахов Ф. Д. — Москва : Наука, 1977. — 640 с.
13. Mishuris G. An asymptotic method of factorization of a class of matrix functions / G. Mishuris, S. Rogosin // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science. — 2014. — Vol. 470, № 2166. — P. 0109–0123.
14. Lee M. Y. Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model / M.J. Lee, T.M. Cho, W.S. Kim, B.C. Lee, J.J. Lee // Int. Journal of Adhesion & Adhesives. — 2010. — Vol. 30. — P. 322–328.

15. Дудик М. В., Діхтяренко Ю. В. Розвиток зони передруйнування від міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу двох пружних середовищ / М. В. Дудик, Ю. В. Діхтяренко // Матем. методи та фіз.-мех. поля. — 2011. — Т. 54, № 2. — С. 103–114.
16. Дудик М. В. Вплив пластичності з'єднувального матеріалу на поворот міжфазної тріщини у кутовій точці межі поділу середовищ / М. В. Дудик, Ю. В. Діхтяренко, В. М. Дякон // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 2014. — № 1. — С. 45–52.
17. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concepts for interface crack / J. R. Rice // Transactions of the ASME. J. Appl. Mech. — 1988. — Vol. 55. — P. 98–103.
18. Дудик М. В. Аналітичний розв'язок плоскої задачі про когезійну зону передруйнування у з'єднувальному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини / М. В. Дудик // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. — 2013. — Т. 19, вип. 4. — С. 84–95.

Дудик М. В.

Приближенный метод решения матричных уравнений Винера — Хопфа в задачах прикладной механики

Резюме

Предложен метод последовательных приближений для решения системы функциональных уравнений Винера — Хопфа. Метод использует представление матричного коэффициента системы в виде суммы двух матриц, одна из которых допускает точную факторизацию, а относительно другой — матрицы-возмущения — предполагается условие ее малости по сравнению с первым слагаемым в области задания системы. Решение системы ищется в виде разложений по степеням матрицы-возмущения. На каждом шаге приближения решение системы осуществляется с помощью метода Винера — Хопфа с использованием факторизации основной составляющей матричного коэффициента. Использование метода иллюстрируется на примере решения задачи о расчете параметров зоны передруйнування в соединительном материале в конце межфазной трещины, выходящей из угловой точки ломаной границе раздела двух различных материалов. Зона моделируется линией разрыва перемещения, на которой напряжение удовлетворяет критерий прочности Мизеса — Хилла. Показано, что при определенных условиях уже в первом приближении метод позволяет получать решения с допустимой точностью.
Ключевые слова: матричное функциональное уравнение Винера — Хопфа, метод последовательных приближений, межфазная трещина, зона предразрушения, критерий Мизеса — Хилла.

Dudyk M. V.

An approximate method for solving Wiener—Hopf matrix equations in problems of applied mechanics

Summary

Method of successive approximations for the solution of the Wiener—Hopf functional equations system is offered. The method uses the presentation of matrix coefficient of the system

as a sum of two matrices, where the first matrix assumes the exact factorization, and the second matrix — matrix-perturbation — is much smaller than the first matrix in the domain of system definition. Solution of the system is sought in the form of expansions in powers of the matrix-perturbation. At each step of the approximation the solution of the system is carried out by means of the Wiener—Hopf method using factorization of the main component of the matrix coefficient. The example of the use of method is considered for the solution of the problem about the calculation of the pre-fracture zone parameters in connecting material near the tip of the interfacial crack outcoming from the angular point of the broken interface of two different materials. The zone is modeled by the discontinuity line of displacement, on which the stresses meet the Mises—Hill failure criterion. It is shown that under certain conditions, already in the first approximation, the method allows to obtain solutions with permissible accuracy.
Key words: Wiener—Hopf matrix functional equation, method of successive approximations, interfacial crack, pre-fracture zone, Mises—Hill criterion.

References

1. Noble, B. (1988). *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique*, 2nd ed. New York, Chelsea.
2. Gohberg, I.C., Krein, M.G. (1960). Systems of integral equations on a half-line with kernels depending on the difference of the arguments. *American Mathematical Society Translations: Series 2*. Vol. 14, P. 217–287.
3. Chebotarev, G.N. (1956). To close-form solution of boundary-value Riemann problem for systems of n pairs of functions. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta*, Vol. 116, № 4, P. 31–58.
4. Khrapkov, A.A. (1971). Certain cases of the elastic equilibrium of an infinite wedge with a nonsymmetric notch at the vertex, subjected to concentrated forces. *J. Appl. Math. Mech.* Vol. 35, P. 625–637.
5. Khrapkov, A.A. (1971). Closed form solutions of the problems on the elastic equilibrium of an infinite wedge with a nonsymmetric notch at the apex. *J. Appl. Math. Mech.* Vol. 35, P. 1009–1016.
6. Khrapkov, A.A. (2001). *Wiener—Hopf method in mixed elasticity theory problems.* St. Petersburg: B. E. Vedeneev VNIIG Inc.
7. Daniele, V.G. (1978). On the factorization of Wiener—Hopf matrices in problems solvable with Hurd's method. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* Vol. 26, P. 614–616.
8. Babeshko, V.A. (1979). An efficient method of approximate factorization of matrix functions. *Doklady AN SSSR* [*Proc. USSR Acad. Sci.*]. Vol. 247, № 5, P. 1089–1093.
9. Antipov, Yu.A. (1987). Exact Solution of Problem Pertaining to Pressing of Circular Die into Half-Space. *Doklady AN USSR. Seriya A: Fiziko-Matematicheskie i Tekhnicheskie Nauki* [*Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, Series A, Physico-Mathematical and Engineering Sciences*]. № 7, P. 29–33.

10. Antipov, Yu.A., Arutyunyan, N.Kh. (1991). Contact problems of the theory of elasticity with friction and adhesion. J. Appl.Mat. Mech. (*PMM*). Vol. 55, № 6, P. 887–901.

11. Abrahams, I. D. (1997). On the solution of Wiener—Hopf problems involving noncommutative matrix kernel decompositions. *SIAM J. Appl. Math.* Vol. 57, P. 541–567.

12. Gakhov, F.D. (1966). Boundary Value Problems. Oxford, Pergamon Press.

13. Mishuris, G., Rogosin, S. (2014). An asymptotic method of factorization of a class of matrix functions. *Proc. Royal Society A: Math., Phys. and Eng. Science.* Vol. 470, № 2166, P. 0109–0123.

14. Lee, M.Y., Cho, T.M., Kim,W.S., Lee, B.C., Lee, J.J. (2010). Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model. *Int. Journal of Adhesion & Adhesives.* Vol. 30, P. 322–328.

15. Dudyk, M.V., Dikhtyarenko, Yu.V. (2012). Development of a prefracture zone from an interfacial crack at a corner point of an interface of two elastic media. *J. Math. Sciences.* Vol.184, № 2, P. 121–135.

16. Dudyk, M.V., Dikhtyarenko, Yu.V., Dyakon, V.M. (2014). Influence of the plasticity of a joining material on the kink of an Interface crack at the corner point of the interface of media. *Materials Science.* Vol. 50, № 1, P. 46–54.

17. Rice, J.R. (1988). Elastic fracture mechanics concepts for interface crack. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* Vol. 55, P. 98–103.

18. Dudyk, M.V. (2013). Analytical solution of the plane problem on the cohesive prefracture zone in conjunctive material near the tip of the interfacial crack. *Visnyk Odes'k. nats. universytetu. Matematyka i mekhanika* [*Odesa National University Herald. Mathematics and Mechanics*]. Vol. 18, No. 4, P. 84–95.

УДК 517.911

О. Р. Поліщук (Чайчук)

Одеська Маріїнська гімназія Одеської міської ради Одеської області

ЯКІСНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКОГО СИНГУЛЯРНОГО ФУНКЦІОНАЛЬНО–ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Розглядається сингулярна задача Коші для функціонально-диференціального рівняння деякого типу, яке розв'язано відносно похідної невідомої функції. Розв'язки шукаються в класі неперервно-диференційованих функцій. Доводиться, що існує непуста множина неперервно диференційовних розв'язків, що мають певні асимптотичні властивості в досить малому напівоколі особливої точки. Побудована асимптотика розв'язків є не менш важливою, ніж доведення існування розв'язків. Для дослідження поставленої задачі використовується методика, яка поєднує елементи теорії функцій і якісної теорії диференціальних рівнянь. При цьому якісний аналіз використано не тільки при побудові деякого нелінійного оператора,але і при доведені того, що цей оператор задовільняє умовам теореми о нерухомій точці. Ця методіка, на наш погляд, може бути використана при розв'язувані широкого класу задач нелінійної теорії звичайних диференціальних рівнянь.

MSC: 99A99, 88B88, 77C77, 66D66.

Ключові слова: функціонально-диференціальні рівняння,задача Коши, асимптотика розв'язків, сингулярна задача, неперервно-диференційований розв'язок, функції Ляпунова.

DOI: XXXX.

1. Вступ

Регулярні задачі для функціонально-диференціальних рівнянь вивчені досить докладно [1], [2], [3], [6], [18], [21]. Настільки ж докладно досліджені сингулярні початкові задачі для звичайних диференціальних рівнянь, головним чином, розв'язаних відносно старших похідних невідомих [11], [12], [13], [17], [19], [20], [22]. Разом з тим сингулярні крайові задачі для функціонально-диференціальних рівнянь вивчені порівняно мало; відзначимо роботи [3], [4], [5], [7], [8], [9], [23], у яких розглянуті питання існування й кількості розв'язків у різних функціональних просторах. Однак асимптотична поведінка розв'язків таких задач в околі особливої точки практично не досліджувалася навіть у простих випадках; відзначимо тут лише роботи [7], [14], [15], [16], [24], [25].

Надійшла 17.03.2020

У даній роботі розглядається сингулярна задача Коші для одного класу нелінійних функціонально-диференціальних рівнянь. Використовуючи методи якісної теорії диференціальних рівнянь [10], [11], а також [12], [13] і продовжуючи дослідження, розпочаті в [14], [15], [16], у роботі доводиться існування непустої множини неперервно диференційованих розв'язків, що мають певні властивості в досить малому напівоколі особливої точки.

Розглядається задача Коші

$$t^r x' = f(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \tag{1}$$

$$x(0) = 0 \tag{2}$$

де $r > 1$, $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — дійсна змінна, $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, $f : D \to \mathbb{R}$ — неперервна функція,

$$D = \{(t, y_1, y_2, y_3, y_4) \colon t \in (0, \tau), |y_i| < \lambda_i(t), i \in \{1, 2, 3, 4\}\},$$

де всі $\lambda_i : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — неперервні функції, $g : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ і $h : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — неперервні функції.

2. Основні результати

Означення 1. **Розв'язком задачі (1), (2)** *називається неперервно диференційована функція $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ (ρ — стала, $\rho \in (0, \tau)$) із наступними властивостями:*

1. *$(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))) \in D$ при всіх $t \in (0, \rho]$;*
2. *x тотожньо задовольняє рівнянню (1) при всіх $t \in (0, \rho]$;*
3. *$\lim\limits_{t \to +0} x(t) = 0$.*

Означення 2. *Назвемо умовами A сукупність наступних умов:*

1. *$g : (0, \tau) \to (0, +\infty), h : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — неперервно диференційовані функції, причому $g(t) \le t, h(t) \le t$ при $t \in (0, \tau)$;*
2. *існують неперервно диференційовані функції $\varphi : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ та $\omega : (0, \tau) \to (0, +\infty)$, такі, що $\lim\limits_{t \to +0} \omega(t) = 0, \lim\limits_{t \to +0} \omega(t) t^{1-r} = 0$, $\lim\limits_{t \to +0} \varphi(t) = 0$, $\lim\limits_{t \to +0} t\varphi'(t) = 0$, і при цьому виконана умова*

$$\left| t^r \varphi'(t) - f(t, \varphi(t), \varphi(g), \varphi'(t), \varphi'(h(t))) \right| \le \omega(t),$$

$t \in (0, \tau)$;

3. $|f(t, x_1, y_1, u_1, v_1) - f(t, x_2, y_2, u_2, v_2)| \le l_2(t)\,|x_1 - x_2| + l_3\,(t)\,|y_1 - y_2| + $ $+ l_4\,(t)\,|u_1 - u_2| + l_5\,(t)\,|v_1 - v_2|$, $(t, x_i, y_i, u_i, v_i) \in D, i \in \{1, 2\}$, *де* $l_j : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ *— неперервні функції,* $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Позначимо через $U\,(\rho, M, q)$ множину неперервно диференційованих функцій $u : (0; \rho] \to \mathbb{R}$, що задовольняють нерівностям:

$$|u(t) - \varphi(t)| \le M\frac{\omega(t)}{t^{r-1}},\ \left|u'(t) - \varphi'(t)\right| \le (q + r)\,M\frac{\omega(t)}{t^r}, t \in (0, \rho]\,; \qquad (3)$$

тут ρ, q, M — додатні сталі, $\rho < \tau$.

Означення 3. *Назвемо* **умовами B** *сукупність умов:*

1. $l_2(t) = l_2 t^{r-1}$, $l_3(t) = l_3\,(g(t))^{r-1}\,\omega(t)/\omega(g(t))$, $l_4(t) = l_4 t^r$, $l_5(t) = l_5\,(h(t))^r\,, t \in (0, \tau)$, *де все* l_i *— додатні сталі,* $i \in \{2, 3, 4, 5\}$;
2. $l_2 + l_3 + (l_4 + l_5)(1 + \omega_0 + r) < \omega_0 - r + 1$;
3. $\lim\limits_{t \to +0} t\omega'(t)\omega^{-1}(t) = \omega_0, \omega_0 > r - 1$;
4. $\lim\limits_{t \to +0} tg'(t)g^{-1}(t) = g_0$, $\lim\limits_{t \to +0} th'(t)h(t) = h_0$

Теорема 1. *Нехай виконані умови A, B. Тоді існують сталі M, q, ρ такі, що задача Коші (1),(2) має хоча б один розв'язок $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, що належить множині $U\,(\rho, M, q)$.*

Доведення. Насамперед, обираємо сталі ρ, M, q. Нехай виконані наступні нерівності:

$$1 + \omega_0 + r < q < (\omega_0 - r + 1 - l_2 - l_3)(l_4 + l_5)^{-1},$$
$$M > (\omega_0 - r + 1 - l_2 - l_3 - (r + q)(l_4 + l_5))^{-1}.$$

Стала ρ задовольняє умові

$$\rho = \min_{1 \le i \le 8} \rho_i,$$

де всі сталі $\rho_i, i \in \{1, 2, ..., 8\}$ визначаються в процесі доведення теореми. Зрозуміло, що ρ достатньо мале. Вибір ρ, M, q забезпечує законність всіх подальших міркувань.

Нехай B — простір неперервно диференційованих функцій $u:[0,\rho]\to\mathbb{R}$ з нормою

$$\|u\|=\max_{t\in[0,\rho]}(|u(t)|+\left|u'(t)\right|). \tag{4}$$

Позначимо через U підмножину B, кожний елемент $u:[0,\rho]\to\mathbb{R}$ якого задовольняє умовам

$$|u\left(t\right)-t^{r}\varphi\left(t\right)|\leq Mt\omega\left(t\right),\ \left|u'\left(t\right)-rt^{r-1}\varphi\left(t\right)-t^{r}\varphi'\left(t\right)\right|\leq qM\omega\left(t\right),\ t\in\left(0,\rho\right], \tag{5}$$

причому $u(0)=0, u'(0)=0$ й, крім того, виконана умова:

$$\forall\varepsilon>0\forall u\in U\forall t_i\in\left[0,\rho\right],i\in\{1,2\}:|t_1-t_2|\leq\delta(\varepsilon)\Rightarrow\left|u'(t_1)-u'(t_2)\right|\leq\varepsilon; \tag{6}$$

тут $\delta(\varepsilon)=(1-l_4-l_5)(2B\left(t_\varepsilon\right))^{-1}\varepsilon$, де стала $B(t_\varepsilon)$ визначена рівністю $B(t_\varepsilon)=l_1(t_\varepsilon)+(h\left(t_\varepsilon\right))^{-2-r}+2(g(t_\varepsilon)\omega(g(t_\varepsilon))^{-1}$; при цьому стала $t_\varepsilon\in(0,\rho)$ обрана так, щоб виконувалися умови

$$rt^{r-1}\left|\varphi(t)\right|\leq\frac{1-l_4-l_5}{24}\varepsilon,\quad t^{r}\left|\varphi'(t)\right|\leq\frac{1-l_4-l_5}{24}\varepsilon,$$
$$qM\omega(t)\leq\frac{1-l_4-l_5}{24}\varepsilon,\quad t\in\left(0,t_\varepsilon\right].$$

Неважко переконається в тому, що U — замкнена, обмежена, опукла множина. Відповідно до критерію Арцела, множина U компактна.

Розглянемо рівняння (1) і покладемо $x(t)=\frac{y(t)}{t^r}$, де y — нова невідома функція. Тоді рівняння (1) набуває вигляду:

$$ty'(t)=ry(t)+tf\left(t,\frac{y(t)}{t^r},\frac{y(g(t))}{g^r(t)},\frac{y'(t)}{t^r}-\frac{y(t)}{t^{r+1}},\frac{y'(h(t))}{\left(h(t)\right)^r}-\frac{y(h(t))}{\left(h(t)\right)^{r+1}}\right). \tag{$*$}$$

Очевидно, що існує таке, достатньо мале, $\rho_1\in(0,\tau)$, що при $t\in(0,\rho_1]$ для всіх $u\in U$, якщо тільки $\rho\leq\rho_1$.

Далі будемо розглядати диференціальне рівняння

$$ty'(t)=ry(t)+tf\left(t,\frac{u(t)}{t^r},\frac{u(g(t))}{\left(g(t)\right)^r},\frac{u'(t)}{t^r}-\frac{ru(t)}{t^{r+1}},\frac{u'(h(t))}{\left(h(t)\right)^r}-\frac{u(h(t))}{\left(h(t)\right)^{r+1}}\right), \tag{7}$$

з початковою умовою $y\left(0\right)=0$, де $u\in U$ — довільна фіксована функція.

Позначимо $D_0=\{(t,y(t)):t\in(0;\rho],y\in\mathbb{R}\}$. При $(t,y)\in D_0$ для рівняння (7) виконані умови теореми існування й одиничності розв'язків й неперервної залежності розв'язків від початкових даних. Покладемо

$$\Phi_1 = \{(t,y) : t \in (0,\rho], |y - t^r\varphi(t)| = Mt\omega(t)\},$$
$$D_1 = \{(t,y) : t \in (0,\rho], |y - t^r\varphi(t)| < Mt\omega(t)\},$$
$$H = \{(t,y) : t = \rho, |y - \rho^r\varphi(\rho)| < M\rho\omega(\rho)\}.$$

Нехай допоміжна функція $A_1 : D_0 \to [0,+\infty)$ визначена рівністю $A_1(t,y) = (y - t^r\varphi(t))^2 (t\omega(t))^{-2}$ і нехай $a_1 : D_0 \to \mathbb{R}$ — похідна цієї функції в силу рівняння (7). Неважко переконатися в тому, що існує таке, достатньо мале $\rho_2 \in (0,\tau)$, що $a_1(t,y) < 0$ при $(t,y) \in \Phi_1$, якщо тільки $\rho \le \rho_2$. Тепер доведемо, що тоді кожна інтегральна крива $J : (t, y(t))$ рівняння (7), що перетинає Φ_1 розташована таким чином: $(t,y(t)) \in D_1$ при $t \in (t_0, t_0+\delta)$ й $(t,y(t)) \notin \overline{D}_1$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$, де (t_0, y_0) — точка перетину J з Φ_1, а $\delta > 0$ — досить мале. Дійсно, нехай $P(t_0,y_0) \in \Phi_1$ — будь-яка точка, а $J : (t, y_P(t))$ — інтегральна крива рівняння (7) така, що $y_P(t_0) = y_0$. Тоді $a_1(t_0, y_P(t_0)) = a_1(t_0,y_0) < 0$. Тому якщо $0 < t_0 < \rho$, то знайдеться таке, досить мале, $\delta > 0$, що $\mathrm{sign}(A_1(t,y_p(t)) - A_1(t_0,y_p(t_0))) = \mathrm{sign}(t_0 - t)$, $|t - t_0| < \delta$.

Так як $A_1(t_0, y_P(t_0)) = A_1(t_0,y_0) = M^2$, то маємо

$$\mathrm{sign}\left(|y_P(t) - t^r\varphi(t)|^2 (t\omega(t))^{-2} - M^2\right) = \mathrm{sign}(t_0 - t),$$

$|t_0 - t| < \delta$, або $\mathrm{sign}(|y_P(t) - t^r\varphi(t)| - Mt\omega(t)) = \mathrm{sign}(t_0 - t)$, $|t_0 - t| < \delta$

Це означає, що $(t, y_P(t))\overline{\in}\overline{D_1}$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$ й $(t, y_p(t)) \in D_1$, при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$. Якщо ж $t_0 = \rho$, то існує таке достатньо мале $\delta > 0$, що $A_1(t,y_p(t)) > A_1(\rho, y_p(\rho))$, $t \in (\rho - \delta, \rho)$. Це означає, що $|y_P(T) - t^r\varphi(t)|^2 (t\omega(t))^{-2} > M^2$, $t \in (\rho - \delta, \rho)$, або $|y_P(T) - t^r\varphi(t)| > Mt\omega(t)$, $t \in (\rho - \delta, \rho)$, або $(t, y_p) \notin \overline{D}_1$ при $t \in (\rho - \delta, \rho)$. Наше твердження доведене.

Доведемо, що кожна інтегральна крива рівняння (7), що перетинає H, залишається всередині D_1 при всіх $t \in (0,\rho]$ (і тому примикає до точки (0,0) при $t \to +0$, залишаючись в D_1). Дійсно, жодна з інтегральних кривих (7), які перетинають Φ_1, у разі подальшого зростання t не може перетнути Φ_1 знову. Отже, кожна така інтегральна крива перетне $\overline{H}$. Визначимо відображення $\Psi : \Phi_1 \to \overline{H}$, ставлячи у відповідність кожній точці $P \in \Phi_1$ точку $\Psi(\Phi_1) \in \overline{H}$, що лежить на тій же інтегральній кривій рівняння (7), що й точка P. Позначимо через $\Psi(\Phi_1)$ множину образів всіх точок Φ_1.

Відображення Ψ взаємно однозначно й взаємно неперервне. Множина Φ_1 незамкнута, тому що воно не містить свою граничну точку O(0,0). Тому образ цієї множини при неперервному відображенні Ψ теж є незамкнутою множиною.

Водночас множина $\overline{H}$ замкнута. Тому множина $\Omega = \overline{H} \backslash \Psi(\Phi_1)$ не порожня.

Розглянемо інтегральну криву $J_u : (t, y_u(\rho))$, рівняння (7) таку, що $(\rho, y_u(\rho)) \in \Omega$. На підставі вищезазначеного, якщо t спадає від $t = \rho$ до $t = t_-$, де (t_-, ρ) — лівий максимальний інтервал існування розв'язків y_u, то ця інтегральна крива не зможе перетнути Φ_1. Тому інтегральна крива $J : (t, y_u(t))$ визначена при всіх $t \in (0, \rho]$, лежить у D_1 при всіх $t \in (0, \rho]$ і входить у точку O(0,0) при $t \to +0$ (залишаючись у D_1 при $t \in (0, \rho]$), що й потрібно було довести.

Таким чином, $|y_u(t) - t^r \varphi(t)| \le M t \omega(t), t \in (0, \rho]$.

З тотожності

$$
\begin{aligned}
ty_u'(t) &= ry_u(t) \\
&\quad + tf\left(t, \frac{u(t)}{t^r}, \frac{u(g(t))}{(g(t))^r}, \frac{u'(t)}{t^r} - \frac{u(t)}{t^{r+1}}, \frac{u'(h(t))}{(h(t))^r} - \frac{u(h(t))}{(h(t))^{r+1}}\right), t \in (0, \rho]
\end{aligned}
$$

неважко отримати, що $\left|y_u'(t) - rt^{r-1}\varphi(t) - t^r\varphi'(t)\right| \le qM\omega(t), t \in (0, \rho]$, якщо тільки $\rho \le \rho_3$, де ρ_3 — достатньо мале, $\rho_3 \in (0, \tau)$.

Доведемо тепер, що в рівняння (7) є тільки одна інтегральна крива (а саме — крива $J_u : (t, y_u(t))$), що перетинає H й лежить усередині D_1 при $t \in (0, \rho]$ (входячи при цьому в точку O(0,0) при $t \to +0$), а всі інші криві рівняння (7), що перетинають H, залишають множину $\overline{D_1}$ при $t \to +0$. Для цього розглянемо однопараметричні сімейства множин

$$
\begin{aligned}
\Phi_2(\upsilon) &= \left\{(t, y) : t \in (0, \rho], |y - y_u(t)| = \upsilon t \omega(t)(-\ln t)\right\}, \\
D_2(\upsilon) &= \left\{(t, y) : t \in (0, \rho], |y - y_u(t)| < \upsilon t \omega(t)(-\ln t)\right\}.
\end{aligned}
$$

де υ — параметр, $\upsilon \in (0, 1]$.

Нехай допоміжна функція $A_2 : D_0 \to [0; +\infty)$ визначається рівністю $A_2(t, y) = (y - y_u(t))^2 \left(t\omega(t)(-\ln t)\right)^{-2}$ і нехай $a_2 : D_0 \to \mathbb{R}$ — похідна цієї функції відповідно до рівняння (7). Неважко переконатися в тому, що існує таке, достатньо мале, $\rho_4 \in (0, \tau)$, що $a_2(t, y) < 0$ при $(t, y) \in \Phi_2(\upsilon), \upsilon \in (0, \rho]$ і при всіх $t \in (0, \rho]$, якщо тільки $\rho \leq \rho_4$. Звідси випливає, що для будь-якого фіксованого $\upsilon \in (0, \rho]$ інтегральна крива $J : (t, y(t))$ рівняння (7), яка перетинає $\Phi_2(\upsilon)$ в будь-якій точці (t_0, y_0), розташована таким чином: $(t, y\,(t)) \overline{\in} \overline{D_2(\upsilon)}$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$ й $(t, y(t)) \in D_2(\upsilon)$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$, де $\delta > 0$ — досить мале. Це доводиться тими ж міркуваннями, що й при розгляді Φ_1.

Нехай тепер $(t_*, y_*)-$ будь-яка точка множини D_1 така, що $y_* \neq y_u(t_*)$.Найдеться таке $\upsilon_* \in (0, 1]$, що $(t_*, y_*) \in \Phi_2(\upsilon_*)$. Розглянемо інтегральну криву $J_* : (t, y_*(t))$ рівняння (7), що проходить через точку (t_*, y_*). На підставі вищезазначеного, при зменшені t $(t \leq t_*)$ ця інтегральна крива не зможе перетнути $\Phi_2(\upsilon_*)$. Отже, вона лежить поза $D_2(\upsilon_*)$ при всіх припустимих $t < t_*$. Водночас $|y(t) - y_u(t)| \leq |y(t) - t^r\varphi(t)| + |y_u(t) - t^r\varphi(t)t^r| \leq$ $\leq 2Mt\omega(t) < \upsilon t\omega(t)(-\ln t)$, якщо $t \in (0, t_{**}]$, де значення $t_{**} \in (0, \rho)$ обрано так, щоб при $t \in (0, t_{**}]$ виконувалася умова $-\dfrac{1}{\ln t} < \dfrac{\upsilon}{2M}$.

Покладемо за означенням $y_u(0) = 0, y_u'(0) = 0$. Неважко переконатися в тому, що функція $y_u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ задовольняє умові :

$$\forall \varepsilon > 0 \forall t_i \in [0, \tau]\,, i \in \{1, 2\} : |t_1 - t_2| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left|u'(t_1) - u'(t_2)\right| \leq \varepsilon,$$

якщо тільки $\rho \leq \rho_5$. (Тут $\delta(\varepsilon)$ — те ж, що й в умові (6).). Ми бачимо, що $y_u \in U$. Визначимо оператор $T : U \to U$, так : $Tu = y_u$. Доведемо, що оператор $T : U \to U$ неперервний. Дійсно, нехай $u_i \in U, i \in \{1, 2\}$ — довільні фіксовані функції. Позначимо $Tu_i = y_i, i \in \{1, 2\}$. Тоді $y_i \in U, i \in \{1, 2\}$ і виконуються тотожності

$$\begin{aligned} ty_i'(t) = ry_i(t) + tf\Bigg(t, \frac{u_i(t)}{t^r}, \frac{u_i(g(t))}{(g(t))^r}, \frac{u_i'(t)}{t^r} \\ - \frac{u_i(t)}{t^{r+1}}, \frac{u_i'(h(t))}{(h(t))^r} - \frac{u_i(h(t))}{(h(t))^{r+1}}\Bigg), \quad i \in \{1, 2\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Нехай $\|u_1 - u_2\| = d$. Якщо $d = 0$, то $y_1 = y_2$. Далі вважаємо, що $d > 0$. Нехай υ — стала, яка задовольняє умовам: $\upsilon \in (0, 1)$, $\upsilon < (\omega_0 - r + 1)\,|g_0 + h_0 + g_0\omega_0 - 1|^{-1}$. Приймаючи до уваги вибір υ, неважко переконатися в тому, що

$$t\left|f\left(t,\frac{u_1(t)}{t^r},\frac{u_1(g(t))}{(g(t))^r},\frac{u_1'(t)}{t^r}-\frac{ru_1(t)}{t^{r+1}},\frac{u_1'(h(t))}{(h(t))^r}-\frac{ru_1(h(t))}{(h(t))^{r+1}}\right)-\right.$$
$$\left.-f\left(t,\frac{u_2(t)}{t^r},\frac{u_2(g(t))}{(g(t))^r},\frac{u_2'(t)}{t^r}-\frac{ru_2(t)}{t^{r+1}},\frac{u_2'(h(t))}{(h(t))^r}-\frac{ru_2(h(t))}{(h(t))^{r+1}}\right)\right|\le$$
$$\le K_0d^{\upsilon}t\omega(t)\left(\frac{g(t)h(t)\omega(g(t))}{t}\right)^{-\upsilon},t\in(0,\rho], \quad (10)$$

де $K_0=(l_2+l_3+r(l_4+l_5)+1)(2M)^{1-\upsilon}$.

Будемо вивчати поведінку інтегральних кривих диференціального рівняння

$$ty'(t)=ry(t)+tf\left(t,\frac{u(t)}{t^r},\frac{u(g(t))}{(g(t))^r},\frac{u'(t)}{t^r}-\frac{u(t)}{t^{r+1}},\frac{u'(h(t))}{(h(t))^r}-\frac{u(h(t))}{(h(t))^{r+1}}\right). \quad (11)$$

Покладемо

$$\Phi_3=\left\{(t,y):t\in(0,\rho],|y-y_2(t)|=\gamma d^{\upsilon}t\omega(t)\left(\frac{g(t)h(t)}{t}\omega(g(t))\right)^{-\upsilon}\right\},$$
$$D_3=\left\{(t,y):t\in(0,\rho],|y-y_2(t)|<\gamma d^{\upsilon}t\omega(t)(\frac{g(t)h(t)}{t}\omega(g(t)))^{-\upsilon}\right\},$$

де γ — стала, $\gamma>2K\left(\omega_0-r+1-\upsilon(g_0+h_0+g_0\omega_0-1)\right)^{-1}$. Визначимо допоміжну функцію $A_3:D_0\to\mathbb{R}$ рівністю

$$A_3(t,y)=(y-y_2(t))^2\left(t\omega(t)\left(\frac{g(t)h(t)}{t}\omega(g(t)\right)^{-\upsilon}\right)^{-2}.$$

Нехай $a_3:D_0\to\mathbb{R}$ — похідна функції $A_3(t,y)$ в силу рівняння (7). Легко з'ясувати, що існує таке, достатньо мале $\rho_7\in(0,\tau)$, що $a_3(t,y)<0$ при $(t,y)\in\Phi_3$, якщо тільки $\rho\le\rho_7$. Тому інтегральна крива рівняння (11), що перетинає Φ_3 в будь-якій точці (t_0,y_0), розташована так: вона лежить в D_3 при $t\in(t_0,t_0+\delta)$ і лежить зовні $\overline{D_3}$ при $t\in(t_0-\delta,t_0)$, де $\delta>0$ — достатньо мале. Крім того,

$$|y_1(t)-y_2(t)|\le|y_1(t)-t^r\varphi(t)|+|y_2(t)-t^r\varphi(t)|\le$$
$$\le 2Mt\omega(t)<\gamma d^{\upsilon}t\omega(t)\left(\frac{g(t)h(t)}{t}\omega(g(t))\right)^{-\upsilon},$$

якщо $t \in (0, t\,(d)]$, де $t\,(d)$ достатньо мале, $t\,(d) \in (0, \rho)$. Тому інтегральна крива $J : (t, y_1\,(t))$ рівняння (11) лежить всередині D_3 при $t \in (0, t\,(d)]$. На основі вищесказаного, якщо t збільшується від $t = t\,(d)$ до $t = \rho$, то вказана інтегральна крива не може мати спільних точок з Φ_3. Тому, вона (крива) лежить в D_3 при всіх $t \in (0, \rho]$. Отже,

$$|y_1(t) - y_2(t)| < \gamma d^{\upsilon} t \omega(t) \left(\frac{g(t)h(t)}{t} \omega\,(g(t)) \right)^{-\upsilon}, t \in (0, \rho] \qquad (12)$$

За допомогою (9), (12) неважко переконатися в тому, що

$$|y_1(t) - y_2(t)| + \left| y_1'(t) - y_2'(t) \right| \leq d^{\upsilon} (g(t)h(t)\omega(g(t)))^{-\upsilon}, t \in (0, \rho]\,. \qquad (13)$$

Перейдемо тепер безпосередньо до доведення неперервності оператора $T : U \to U$. Нехай $\varepsilon > 0$ дано. Існує таке $t_{\varepsilon} \in (0, \rho)$, що

$$2Mt\omega(t) + 2qM\omega(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

при $t \in (0, t_{\varepsilon}]$. Якщо $t \in (0, t_{\varepsilon}]$, то

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| + \left| y_1'(t) - y_2'(t) \right| &\leq |y_1(t) - t^r \varphi(t)| + |y_2(t) - t^r \varphi(t)| \\ &+ \left| y_1'(t) - r t^{r-1} \varphi(t) - t^r \varphi'(t) \right| + \left| y_2(t) - r t^{r-1} \varphi(t) - t^r \varphi'(t) \right| \\ &\leq 2Mt\omega(t) + 2qM\omega(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Якщо ж $t \in [t_{\varepsilon}, \rho]$, то з (13) маємо

$$|y_1(t) - y_2(t)| + \left| y_1'(t) - y'(t) \right| \leq d^{\upsilon} \left(g(t_{\varepsilon}) h(t_{\varepsilon}) \omega(g(t_{\varepsilon})) \right)^{-\upsilon}, \quad t \in [t_{\varepsilon}, \rho]\,.$$

Покладемо $\delta\,(\varepsilon) = (\varepsilon/2)^{\frac{1}{\upsilon}} g(t_{\varepsilon}) h(t_{\varepsilon}) \omega(g(t_{\varepsilon}))$. Якщо $d < \delta(\varepsilon)$, то $|y_1(t) - y_2(t)| + + |y_1'(t) - y_2'(t)| \leq \varepsilon/2$ при всіх $t \in (0, \rho]$. Крім того, $y_i\,(0) = 0$ і $y_i'\,(0) = 0, i \in \{1, 2\}$. Тому $\max\limits_{t \in [0, \rho]} (|y_1(t) - y_2(t)| + |y_1'(t) - y_2'(t)|) \leq \varepsilon/2$ або $\|y_1(t) - y_2(t)\| \leq \varepsilon/2$.

Отже, доведено, що якщо $\|u_1 - u_2\| = \delta < \delta\,(\varepsilon)$, то

$$\|Tu_1 - Tu_2\| = \|y_1(t) - y_2(t)\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Ці міркування не залежать ані від вибору функції $u_i \in U, i \in \{1, 2\}$, ані від вибору $\varepsilon > 0$.

Неперервність оператора $T : U \to U$ доведена.

Застосуємо до оператора $T : U \to U$ принцип нерухомої точки Шаудера. В оператора $T : U \to U$ є хоча б одна нерухома точка $y_0 \in U$, тобто $Ty_0 = y_0$. Оскільки існує єдина функція $x_0 : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ така, що $x_0(t) = \frac{y_0(t)}{t^r}$, то маємо: $|x_0(t) - \varphi(t)| \leq M\frac{\omega(t)}{t^{r-1}}$, $|x_0'(t) - \varphi'(t)| \leq (q + r)M\frac{\omega(t)}{t^r}, t \in (0, \rho]$.

Теорему доведено.

Відмітимо, що з умови теореми, взагалі кажучи, не випливає, що $\varphi'(t) \to c$, $t \to +0$, $\frac{\omega(t)}{t^r} \to 0, t \to +0$, де c — стала.

Назвемо <u>*умовами C*</u> сукупність наступних умов:

1. $l_2(t) = l_2 t^{2r-2}\beta(t), l_3(t) = l_3 t^{r-1}(g(t))^{r-1}\beta(t), l_4(t) = l_4 t^{2r-1}\beta(t)$,
   $l_5(t) = l_5 t^{r-1}\,(h(t))^r\,\beta(t)$, де l_i — додатні сталі, $i \in \{2, 3, 4, 5\}$;
2. $\beta : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — неперервна функція;
3. $\lim\limits_{t\to+0} \beta\,(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+0} \frac{\omega(t)}{t^{r-1}\beta(t)} = 0$.

Теорема 2. *Нехай виконані умови B,C. Тоді існують сталі ρ, M, q такі, що задача Коші (1), (2) має єдиний розв'язок $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, що належить множині $U(\rho, M, q)$.*

Доведення. Насамперед, обираємо сталі ρ, M, q. Нехай виконані наступні нерівності:

$$M > 2/(\omega_0 - r + 1), \quad q > 1/2(\omega_0 + r + 1).$$

Умови, що визначають вибір ρ тут не наводимо. Ці умови можна було б конкретно виписати, таким самим чином, як і при доведенні теореми 1; зараз ми вкажемо, що ρ досить мало. Вибір ρ, M, q забезпечує законність всіх подальших міркувань.

Нехай B — простір неперервно диференційованих функцій $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ з нормою (4). Позначимо через U підмножину B, кожний елемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ якої при $t \in (0, \rho]$ задовольняє нерівностям (5), причому $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$. Множина U замкнена й обмежена. Розглянемо рівняння (1) і покладемо $x = \frac{y(t)}{t^r}$, де y — нова невідома функція. Тоді рівняння (1) матиме вигляд (*). Далі будемо розглядати задачу Коші (7), (8), де $u \in U$ — довільна фіксована функція. Тими самими міркуваннями, що й у теоремі 1, з'ясуємо, що існує єдиний розв'язок $y_u : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ задачі (7), (8) такий, що відповідає оцінкам

$$\begin{gathered} \left|y_u(t) - t^r\varphi(t)\right| \le Mt\omega(t), \\ \left|y_u'(t) - rt^{r-1}\varphi(t) - t^r\varphi'(t)\right| \le qM\omega(t), \quad t \in (0,\rho]. \end{gathered}$$

Покладемо за означенням $y_u(0) = 0$, $y_u'(0) = 0$. Тоді $y_u \in U$. Визначимо оператор $T : U \to U$, покладаючи $Tu = y_u(t)$. Доведемо, що оператор $T : U \to U$ — оператор стиску.

Нехай $u_i \in U, i \in \{1,2\}$ — довільні фіксовані функції. Позначимо $Tu_i = y_i$, $i \in \{1,2\}$. Тоді $y_i \in U, i \in \{1,2\}$ й виконуються тотожності (9). Нехай $\|u_1 - u_2\| = d$. Якщо $d = 0$, то $y_1 = y_2$. Нехай далі $d > 0$. Будемо досліджувати поведінку розв'язків диференціального рівняння (11).

Позначимо

$$\begin{gathered} \Phi_4 = \left\{(t,y) : t \in (0,\rho], |y(t) - y_2(t)| = \gamma d t^r \beta(t)\right\}, \\ D_4 = \left\{(t,y) : t \in (0,\rho], |y(t) - y_2(t)| < \gamma d t^r \beta(t)\right\}, \end{gathered}$$

де γ — стала, яка задовольняє умові:

$$\gamma > (\beta_0)^{-1}(l_2 + l_3 + (1+r)(l_4 + l_5)). \tag{14}$$

Розглянемо допоміжну функцію $A_4 : D_0 \to [0,+\infty)$, задану рівністю

$$A_4(t,y) = (y - y_2(t))^2 (t^r\beta(t))^{-2}$$

і позначимо через $a_4 : D_0 \to \mathbb{R}$ похідну цієї функції в силу рівняння (11). Так як ρ достатньо мале, то неважко переконатися в тому, що $a_4(t,y) < 0$ при $(t,y) \in \Phi_4$. Отже, кожна інтегральна крива $J : (t, y(t))$ рівняння (9), яка перетинає Φ_4 в будь-якій точці (t_0, y_0), розташована таким чином: $(t, y(t)) \overline{\in} \overline{D_4}$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$ і $(t, y(t)) \in D_4$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$, де $\delta > 0$– досить мале.

При цьому маємо

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| &\le |y_1(t) - t^r\varphi(t)| + |y_2(t) - t^r\varphi(t)| \\ &\le 2Mt\omega(t) = \gamma t^r d\beta(t) \frac{2Mt\omega(t)}{\gamma d t^r \beta(t)} < \gamma t^r d\beta(t), \end{aligned}$$

якщо $t \in (0, t(d)]$, де стала $t(d) \in (0, \rho)$ визначена з умови $\frac{\omega(t)}{t^{r-1}\beta(t)} < \frac{\gamma d}{2M}$ при $t \in (0, t(d)]$, тобто $t(d)$ — достатньо мале. Виходить, інтегральна крива $J_1 : (t, y_1(t))$ рівняння (11) лежить усередині D_4 при $t \in (0, t(d)]$. Водночас, на підставі сказаного вище, якщо t монотонно зростає від $t = t(d)$ до $t = \rho$, то ця інтегральна крива не може мати спільних точок з Φ_4. Тому дана інтегральна крива лежить у D_4 при всіх $t \in (0, \rho]$. Таким чином,

$$|y_1(t) - y_2(t)| \le \gamma t^r d\beta(t), \quad t \in (0, \rho]\,. \tag{15}$$

За допомогою тотожностей (9) неважко одержати оцінку:

$$t\left|y_1'(t) - y_2'(t)\right| \le (\beta_0 + r)\gamma t^r \beta(t) d, \quad t \in (0, \rho]\,. \tag{16}$$

З (15) і (16) випливає, що

$$|y_1(t) - y_2(t)| + \left|y_1'(t) - y_2'(t)\right| \le \gamma t^r \beta(t) d + (\beta_0 + r)\gamma t^{r-1}\beta(t) d \le \frac{d}{2}, \quad t \in (0, \rho]\,,$$

оскільки ρ досить мале. Тому $\max\limits_{t\in[0,\rho]}(|y_1(t) - y_2(t)| + |y_1'(t) - y_2'(t)|) \le 1/2d$, тобто, $\|y_1(t) - y_2(t)\| \le \dfrac{d}{2}$.

Таким чином, доведено, що $\|Tu_1 - Tu_2\| \le \dfrac{1}{2}\|u_1 - u_2\|$.

Наведені міркування не залежать від вибору функцій $u_i \in U$, $i \in \{1, 2\}$. Тому $T : U \to U$ — стискаючий оператор. Для завершення доведення теореми залишається застосувати принцип стислих відображень Банаха.

3. Висновки

Дана методика може використовуватися для дослідження широкого класу задач Коши для функціонально - диференціальних рівнянь і дозволяє досліджувати асимптотичну поведінку розв'зків задач такого вигляду.

Список літератури

1. **Азбелев Н. В.** Современное состояние и тенденции развития теории функционально-дифференциальных уравнений Изв. вузов. Математика.– 1999.– №6.– С. 8–19.
2. **Азбелев Н. В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.** Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.

3. **Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.** Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. – М.: Институт Компьютерных Исследований, 2002. – 384 с.
4. **Азбелев Н.В., Алвеш М.Ж., Бравый Е.И.** *О сингулярных краевых задачах для линейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка* Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 2. – С. 3–11.
5. **Алвеш М.Ж.** *О разрешимости двухточечной краевой задачи для сингулярного нелинейного функционально-дифференциального уравнения* Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 2. – С. 12–19.
6. **Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С, Родкина А.Е., Садовский Б.Н.** *Теория уравнений нейтрального типа* Итоги науки и техники. Математический анализ. – 1981. – Т.19. – С. 55–126.
7. **Бельский Д.В.** *Асимптотические свойства решений систем дифференциально-функциональных уравнений: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук.* –Киев, 2005 – 121 с.
8. **Бравый Е.И.** *О разрешимости одной краевой задачи для нелинейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения* Известия вузов. Математика. – 1993. – № 5. – С. 17–23.
9. **Бравый Е.И.** *Линейные функционально-дифференциальные уравнения с внутренними сингулярностями. Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук.* – Пермь, 1996. – 18 с.
10. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
11. **Еругин Н.П.** Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1972. – 664 с.
12. **Зернов А.Е.** *О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши* Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 5. – С. 756–760.
13. **Зернов А.Е.** *Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши* Украинский матем. журнал. – 2001. – Т. 53. – № 3. – С. 302–310.
14. **Зернов А.Е.** *О разрешимости и асимптотике решений некоторого функционально-дифференциального уравнения с сингулярностью* Украинский матем. журнал. – 2001. – Т.53. – № 4. – С. 455–465.
15. **Зернов А.Е., Чайчук О.Р.** *Качественное исследование сингулярной задачи Коши для некоторого функционально- дифференциального уравнения* Украинский матем. журнал. – 2005. – Т. 57. – № 10. – С.1344–1358.
16. **Зернов А.Е., Чайчук О.Р.** *О сингулярных функционально-дифференциальных уравнениях* Современная математика и ее приложения – 2005. – Т. 36. – С. 86–94.
17. **Кигурадзе И.Т.** Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. – 352 с.

18. **Пелюх Г.П., Шарковский А.Н.** Введение в теорию функциональных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1974. – 120 с.

19. **Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.** Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.

20. **Филиппов А.Ф.** Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2004. –240 с.

21. **Хейл Дж.** Теория функционально–дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

22. **Чечик В.А.** *Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью* Труды Моск. матем. об-ва. – 1959. – № 8. – С. 155–198.

23. **Шиндяпин А.И.** *О краевой задаче для одного сингулярного уравнения* Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. - № 3. – С.450–455.

24. **Grimm L.J.** *Analytic solutions of a neutral differential equation near a singular point* Proceedings of the Amer. Math. Soc. – 1972. – V.36. – JM. – P. 187–190.

25. **Grimm L.J. and Hall L.M.** *Holomorphic solutions of singular functional differential equations* Journal of Math. Anal. and Appl. – 1975. – V.50. – № 3. – P. 627–638.

Полищук (Чайчук) О. Р.

Качественное исследование некоторого сингулярного функционально-дифференциального уравнения

Резюме

Рассматривается сингулярная задача Коши для функционально-дифференциального уравнения определенного типа, разрешенного относительно производной неизвестной функции. Решения ищутся в классе непрерывно-дифференцируемых функций. Доказывется, что существует непустое множество непрерывно-дифференцируемых решений, имеющих определенные асимптотические свойства в достаточно малой окрестности особой точки. Построение асимптотики решений является не менее важным результатом, чем доказательство существования решений. Для исследования поставленной задачи использована методика, соединяющая элементы теории функций и качественной теории дифференциальных уравнений. При этом качественный анализ применен не только при построении некоторого нелинейного оператора, но и при доказательстве того, что этот оператор удовлетворяет условиям теоремы о неподвижной точке. Эта методика, по нашему мнению, может быть использована при решении широкого класса задач нелинейной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, задача Коши, асимптотика решений, сингулярная задача, непрерывно -дифференцируемое решение, функции Ляпунова.

Polishchuk (Chaichook) O. R.

A qualitative investigation for some singular functional differential eqation

Summary

A singular Cauchy problem for functional differential equations of a certain type is considered, solved for the derivative of the unknown function. Solutions are sought in the class of continuously differentiable functions. It is proved that there exists a nonempty set of continuously differentiable solutions having certain asymptotic properties in a sufficiently small neighborhood of the singular point. Construction of the asymptotic behavior of solutions is as important result as proof of the existence of solutions. To study the task, a technique was used that combines elements of the theory of functions and the qualitative theory of differential equations. Moreover, a qualitative analysis was applied not only in constructing a certain nonlinear operator, but also in proving that this operator satisfies the conditions of the fixed-point theorem. This technique, in our opinion, can be used for a wide range of problems of the theory of nonlinear ordinary differential equations.
Key words: functional differential equation, initial value problem, solution asymptotics, singular problem, continuously differentiable solution, Lyapunov functions.

References

1. Azbelev, N. V.(1999). Sovremennoe sostoyanie i tendentsii razvitiya teorii funktsionalno-differentsialnyih uravneniy [Current state and development tendencies of the functional-differential equations theory] Izv. vuzov. Matematika № 6 8-19 p.

2. Azbelev, N.V., Maksimov, V.P., Rahmatullina, L.F. (1991). Vvedenie v teoriyu funktsionalno-differentsialnyih uravneniy [Introduction to the functional-differential equations theory] *M.: Nauka.*, P. 280.

3. Azbelev, N.V., Maksimov, V.P., Rahmatullina, L.F. (2002). *Elementyi sovremennoy teorii funktsionalno-differentsialnyih uravneniy. Metodyi i prilozheniya [Elements of the modern functional differential equations theory. Methods and applications]* Moscow: Institut Kompyuternyih Issledovaniy, 384 p.

4. Azbelev N.V., Alvesh M.Zh., Bravyiy E.I. (1999). *O singulyarnyih kraevyih zadachah dlya lineynogo funktsionalno-differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka [On singular boundary value problems for a second-order linear functional-differential equation]*. Izv. vuzov. Matematika № 2, 3-11 p.

5. Alvesh, M.Zh. (1999). O razreshimosti dvuhtochechnoy kraevoy zadachi dlya singulyarnogo nelineynogo funktsionalno-differentsialnogo uravneniya [On solvability of a two-point boundary problem for a singular nonlinear functional-differential equation]. *Izv. vuzov. Matematika*, № 2, P. 12-19.

6. Ahmerov, P.P., Kamenskiy, M.I., Potapov, A.S, Rodkina, A.E., Sadovskiy, B.N. (1981). Teoriya uravneniy neytralnogo tipa [Neutral type equations theory]. *Itogi nauki i tehniki. Matematicheskiy analiz*, P. 55-126.

7. Belskiy, D.V. (2005).Asimptoticheskie svoystva resheniy sistem differentsialno-funktsionalnyih uravneniy [Asymptotic properties of solutions for systems of differential-functional equations] *Avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk.-Kiev* ,121 p.

8. Bravyiy, E.I. (1993). *O razreshimosti odnoy kraevoy zadachi dlya nelineynogo singulyarnogo funktsionalno-differentsialnogo uravneniya [On the solvability of a boundary value problem for a nonlinear singular functional-differential equation].* Izv. vuzov. Matematika № 5, 17-23 p.
9. Bravyiy, E.I. (1996). *Lineynyie funktsionalno-differentsialnyie uravneniya s vnutrennimi singulyarnostyami [Linear functional-differential equations with internal singularities].* Avtoref. dis.... kand. fiz.-mat. nauk.— Perm, 18 p.
10. Demidovich, B.P. (1967). *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti [Lectures on the mathematical theory of stability].* M.: Nauka, 472 p.
11. Erugin N.P. (1972). *Kniga dlya chteniya po obschemu kursu differentsialnyih uravneniy [A book for reading on the general course of differential equations.].* Minsk: Nauka i tehnika, 664 p.
12. Zernov, A.E. (1992). *O razreshimosti i asimptoticheskih svoystvah resheniy odnoy singulyarnoy zadachi Koshi [On the solvability and asymptotic properties of solutions for a singular Cauchy problem].* Differents. uravneniya.— 1992.— T. 28.,No 5, 756-760 p.
13. Zernov, A.E. (2001). *Kachestvennyiy analiz neyavnoy singulyarnoy zadachi Koshi [Qualitative analysis of an implicit singular Cauchy problem].* Differents. uravneniya.— T. 28.,No 5, 756-760 p.
14. Zernov, A.E. (2001). *O razreshimosti i asimptotike resheniy nekotorogo funktsionalno-differentsialnogo uravneniya s singulyarnostyu [On the solvability and asymptotics of solutions for a functional-differential equation with a singularity].* Ukrainskiy matem. zhurnal.—T.57, No 10, 1344-1358 p.
15. Zernov, A.E., Chaychuk, O.R. (2005). *O singulyarnyih funktsionalno-differentsialnyih uravneniyah [On singular functional-differential equations].* Sovremennaya matematika i ee prilozheniya- T.36.86-94 p.
16. Kiguradze, I. T. (1975). *Nekotoryie singulyarnyie kraevyie zadachi dlya obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy[Some singular boundary-value problems for ordinary differential equations].* Tbilisi: Izd-vo Tbilisskogo un-ta, 352 p.
17. Pelyuh, G.P., Sharkovskiy A.N. (1974). *Vvedenie v teoriyu funktsionalnyih uravneniy [Introduction to the theory of functional equations.].* Kiev: Naukova dumka, 1974.— 120 p.
18. Samoylenko, A.M., Perestyuk, M.O., Parasyuk, I.O. (2003). *DiferentsIalnI rivnyannya [Differential equations.].* K.: LibId, 600 p.
19. Filippov, A.F.(2004). *Vvedenie v teoriyu differentsialnyih uravneniy [Introduction to the theory of differential equations]* M.: Editorial URSS 240 p.
20. Heyl, Dzh. (1984). *Teoriya funktsionalno-differentsialnyih uravneniy [Theory of functional-differential equations]* M.: Mir, 421 p.
21. Chechik, V.A. (1959). *Issledovanie sistem obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy s singulyarnostyu [Investigation of systems of ordinary differential equations with singularity]* Trudyi Mosk. matem. ob-va, No 8, 155-198 p.

22. Shindyapin,A. I. (1984). . *O kraevoy zadache dlya odnogo singulyarnogo uravneniya [On a boundary-value problem for a singular equation]* Differents. uravneniya.— T.20.— No 3, 450-455 p.

23. Grimm, L.J. (1972). *Analytic solutions of a neutral differential equation near a singular point* Proceedings of the Amer. Math. Soc.— V.36.— JM. 187-190 p.

24. Grimm,L. J., Hall,L. M. (1975). *Holomorphic solutions of singular functional differential equations* Journal of Math. Anal. and Appl.— V.50.— No 3. 627-638 p.

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ
(скорочений варіант)

Журнал «Дослідження в математиці і механіці» має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень, огляди з актуальних проблем за тематикою видання, а також повідомлення про ювілеї, знаменні дати та події.

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Електронну версію рукопису слід надсилати на e-mail журналу

rmm-journal@onu.edu.ua

або завантажувати через сайт журналу

www.rmm-journal.onu.edu.ua

Вона повинна складатися з

1) вихідного TEX-файла,
2) PDF-файла,
3) всіх допоміжних файлів (графіки, рисунки, ілюстрації тощо),
4) документа з анкетними даними авторів (прізвище, ім'я, по батькові, місце роботи, e-mail, адреса для листування та телефон).

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LATEX відповідно до вимог та з використанням шаблону, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті. Також вимоги можна отримати в редакційній колегії журналу.

Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 25 сторінок.

Структура статті:

— УДК;
— список авторів;
— місце роботи авторів;
— назва статті;
— резюме мовою оригіналу обсягом не менше 100 слів;
— Mathematical Subject Classification (2010);

— список ключових слів мовою оригіналу;

— основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України «Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України» від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується подана стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером у квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформлюється відповідно до Державного стандарту України ДСТУ 7.1:2006 «Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання» та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008);

— анотації двома іншими мовами, які повинні містити назву, список авторів, резюме обсягом не менше 100 слів та список ключових слів;

— додатково, якщо стаття написана українською або російською мовами, після анотацій подається список літератури у транслітерації, оформлений у відповідності до міжнародного стандарту *Harvard* (зразок та правила оформлення можна знайти в шаблоні статті на сайті).

Усі надіслані статті проходять анонімне рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу «Дослідження в математиці і механіці».

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, зокрема й у співавторстві.

Редакційна колегія журналу
«Дослідження в математиці і механіці»
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2
м. Одеса, 65082

Українською, російською та англійською мовами

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: серія КВ, № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

Затверджено до друку вченою радою
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова
Протокол № 7 від 26 травня 2020 р.

Відповідальний за випуск *Р. В. Шанін*
Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*
Технічний редактор *М. М. Бушин*

Тираж 100 прим. Зам. № 330(68).

Адреса редколегії:
65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
astro_print@ukr.net
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Дослідження в математиці і механіці. — 2020. — Т. 25, вип. 1(35). — С. 1–101.