

ISSN 2519–206X

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ДОСЛІДЖЕННЯ В МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

Науковий журнал

Виходить 2 рази на рік

Журнал заснований у січні 1997 р.

Том 24. Випуск 2(34). 2019

Одеса
«Астропринт»
2019

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

Редакційна колегія журналу

Головний редактор — М. О. Перестюк, д. ф.-м. н., проф., акад. НАНУ (Україна)

Заступник головного редактора — В. М. Євтухов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Відповідальний редактор — О. Д. Кічмаренко, к. ф.-м. н., доц. (Україна)

A. Alifov, д. ф.-м. н., проф. (Азербайджан)

A. Ashyralyev, д. ф.-м. н., проф. (Туреччина)

S. Dashkovskiy, Dr. habil., проф. (Німеччина)

F. Iacoviello, PhD, проф. (Італія)

I. T. Kiguradze, д. ф.-м. н., проф. (Грузія)

С. К. Асланов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Н. Д. Вайсфельд, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

П. Д. Варбанець, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Д. В. Дмитришин, д. т. н., проф. (Україна)

A. A. Дороговцев, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

М. І. Іванчов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. В. Капустян, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

П. І. Когут, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Ан. О. Кореновський, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. Ф. Кривий, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

В. Є. Круглов, к. ф.-м. н., проф. (Україна)

О. Меньшиков, д. ф.-м. н., проф. (Шотландія)

A. В. Плотніков, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

В. Г. Попов, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

В. В. Реут, к. ф.-м. н., доц. (Україна)

Н. В. Скрипник, д. ф.-м. н., доц. (Україна)

О. М. Станжицький, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

І. М. Черевко, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

С. А. Щоголев, д. ф.-м. н., проф. (Україна)

Відповідальний за випуск — Р. В. Шанін, к. ф.-м. н.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу

масової інформації серія КВ № 21400—11200ПР від

17 червня 2015 р.

Журнал внесений до переліку наукових фахових видань наказами

Міністерства освіти і науки України № 527 від 24.05.2018 р.

та № 775 від 16.07.2018 р.

ISSN 2519–206X

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Scientific journal

Published twice a year

Journal founded in January, 1997

Volume 24. Issue 2(34). 2019

Odesa
«Astroprint»
2019

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

Editorial board of the journal

Editor-in-chief — M. O. Perestyuk, D.Sc., prof., academ. NANU (Ukraine)

Deputy Editor-in-chief — V. M. Evtukhov, D.Sc., prof. (Ukraine)

Executive Editor — O. D. Kichmarenko, PhD, docent (Ukraine)

A. Alifov, D.Sc., prof. (Azerbaijan)

A. Ashyralyev, D.Sc., prof. (Turkey)

S. K. Aslanov, D.Sc., prof. (Ukraine)

I. M. Cherevko, D.Sc., prof. (Ukraine)

S. Dashkovskiy, Dr. habil., prof. (Germany)

D. V. Dmitrishin, D.Sc., prof. (Ukraine)

A. A. Dorogovtsev, D.Sc., prof. (Ukraine)

M. I. Ivanchov, D.Sc., prof. (Ukraine)

O. V. Kapustyan, D.Sc., prof. (Ukraine)

I. T. Kiguradze, D.Sc., prof. (Georgia)

P. I. Kogut, D.Sc., prof. (Ukraine)

An. O. Korenovskiy, D.Sc., prof. (Ukraine)

V. Ye. Kruglov, PhD, prof. (Ukraine)

O. F. Kryvyi, D.Sc., prof. (Ukraine)

F. Iacoviello, D.Sc., prof. (Italy)

O. Menshykov, D.Sc., prof. (Scotland)

A. V. Plotnikov, D.Sc., prof. (Ukraine)

V. G. Popov, D.Sc., prof. (Ukraine)

V. V. Reut, PhD, docent (Ukraine)

S. A. Shchogolev, D.Sc., prof. (Ukraine)

N. V. Skripnik, D.Sc., docent (Ukraine)

O. M. Stanzhytskyi, D.Sc., prof. (Ukraine)

P. D. Varbanets, D.Sc., prof. (Ukraine)

N. D. Vaysfeld, D.Sc., prof. (Ukraine)

Publication Editor — R. V. Shanin, PhD

The certificate of mass media state registration under the number № 21400–11200IIP issued on June 17, 2015.

The journal was included in the list of scientific specialized publications by the orders of Ministry of education and science of Ukraine №527 issued on May 24, 2018 and № 775 issued on July 16, 2018.

ЗМІСТ

<i>Дрожжина А. В.</i> Асимптотика некоторых типов одного класса решений нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков	7
<i>Капустян О. В., Капустян О. А., Перегуда О. В., Романюк І. В.</i> Стійкість рівномірного атратора для еволюційного рівняння другого порядку з розривними траєкторіями	31
<i>Комлева Т. А., Молчанюк І. В., Скрипник Н. В., Плотников А. В.</i> Одна линейная многозначная задача управления	45
<i>Якімова Н. А.</i> Предикатні логічні матриці	67
<i>Fesenko A. A.</i> An exact solution of the dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity	75
<i>Pozhylenkov O. V.</i> The stress state of a rectangular elastic domain	88
<i>Skuratovskii R. V.</i> Minimal generating set of the commutator subgroup of sylow 2-subgroups of alternating group and its structure	97
<i>Zhuravlova Z. Yu.</i> New approach of analytical inversion of Laplace transform for some cases	122

CONTENTS

<i>Drozhdzina A. V.</i> Asymptotic of some types of one class of solutions of nonlinear differential equations of higher orders	7
<i>Kapustyan O. V., Kapustian O. A., Pereguda O. V., Romaniuk I. V.</i> Stability of a uniform attractor for a second-order evolution equation with discontinuous trajectories	31
<i>Komleva T. A., Molchanyuk I. V., Skripnik N. V., Plotnikov A. V.</i> One linear set-valued control problem	45
<i>Yakimova N. A.</i> Predicative logical matrices	67
<i>Fesenko A. A.</i> An exact solution of the dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity	75
<i>Pozhylenkov O. V.</i> The stress state of a rectangular elastic domain	88
<i>Skuratovskii R. V.</i> Minimal generating set of the commutator subgroup of sylow 2-subgroups of alternating group and its structure . .	97
<i>Zhuravlova Z. Yu.</i> New approach of analytical inversion of Laplace transform for some cases	122

УДК 517.925

А. В. Дрожжина

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

АСИМПТОТИКА НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Для дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$, где $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \dots \times \Delta_{Y_{n-1}} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Y_i равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_i} — некоторая односторонняя окрестность Y_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$, исследуются при некоторых ограничениях на функцию f вопросы о существовании, асимптотике и количестве $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i})$ -решений для всех $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Такие решения относятся к особым случаям класса $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений, где $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, который был введен в работах В. М. Евтухова, посвященных дифференциальным уравнениям типа Эмдена-Фаулера n -го порядка. Данные особые случаи требуют отдельного их рассмотрения в связи со специфическими априорными асимптотическими свойствами таких решений. Исследование поставленных задач осуществляется при предположении, что дифференциальное уравнение является в некотором смысле асимптотически близким к двучленному дифференциальному уравнению с правильно меняющимися нелинейностями.

MSC: 34D05, 34C11.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, правильно меняющиеся функции, асимптотика решений, $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решения.

DOI: 10.18524/2519-206x.2019.2(34).189938.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1)$$

где $n \geq 2$, $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \dots \times \Delta_{Y_{n-1}} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Y_j равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_j} — некоторая односторонняя окрестность Y_j , $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Определение 1. Решение y дифференциального уравнения (1) называется $P_\omega(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решением, где $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет следующим условиям

$$y^{(j)}(t) \in \Delta_{Y_j} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(j)}(t) = Y_j \quad (j = \overline{0, n-1}), \quad (2)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n-2)}(t)y^{(n)}(t)} = \lambda_0. \quad (3)$$

Случаи, когда $\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i}$ ($i = \overline{1, n-1}$) являются особыми при изучении таких решений и требуют отдельного их рассмотрения. В силу результатов из [1] (Глава 3, §10) имеет место следующее утверждение об априорных асимптотических свойствах таких решений.

Лемма 1. Если $y : [t_0, \omega[\rightarrow \mathbb{R}$ является $P_\omega \left(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решением при некотором $i \in \{1, \dots, n-1\}$ дифференциального уравнения (1), то для этого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические соотношения

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{i-k}}{(i-k)!} y^{(i-1)}(t) \quad (k = \overline{1, i-1}),^* \quad y^{(i)}(t) = o\left(\frac{y^{(i-1)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right), \quad (4)$$

$$y^{(k)}(t) \sim (-1)^{k-i} \frac{(k-i)!}{[\pi_\omega(t)]^{k-i}} y^{(i)}(t) \quad (k = \overline{i+1, n}), \quad (5)$$

где

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty, \end{cases}$$

причем в случае, когда $i = n-1$, соотношение (5) имеет место при дополнительном условии существования конечного или равного $\pm\infty$ предела $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$.

Асимптотическое поведение $P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решений при $i \in \{1, \dots, n-1\}$ в работах [2] и [3], [4] исследовалось для неавтономных дифференциальных уравнений n -го порядка, которые содержат в правой части одно или несколько слагаемых с правильно меняющимися нелинейностями, и в работе Л.И. Кусик [5] для уравнения (1) общего вида при $n = 2$, т.е. в случае дифференциального уравнения второго порядка. При этом в [5] предполагалось, что уравнение (1) является в некотором смысле асимптотически близким к дифференциальному уравнению

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y'),$$

где $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная и правильно меняющаяся при $y^{(j)} \rightarrow Y_j$ функция порядка σ_j , Y_j равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_j} — некоторая односторонняя окрестность Y_j , $j = 0, 1$.

Теория правильно меняющихся функций подробно изложена в монографиях Е. Сенета [6] и Н.Н. Bingham, С.М. Goldie, J.L. Teugels [7]. Согласно этой теории каждая правильно меняющаяся при $y \rightarrow Y$ функция

*При $i = 1$ эти соотношения отсутствуют.

$\varphi : \Delta_Y \rightarrow]0, +\infty[$ порядка σ , где Y равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_Y - некоторая односторонняя окрестность Y , допускает представление вида

$$\varphi(y) = |y|^\sigma L(y), \quad (6)$$

в котором $L : \Delta_Y \rightarrow]0, +\infty[$ медленно меняющаяся функция при $y \rightarrow Y$, т.е. такая, что

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1 \quad \text{для любого } \lambda > 0. \quad (7)$$

Среди свойств медленно меняющихся при $y \rightarrow Y$ функций $L : \Delta_Y \rightarrow]0, +\infty[$, где Y равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_Y - некоторая односторонняя окрестность Y , отметим следующие.

\mathcal{M}_1 . Предельное соотношение (7) выполняется равномерно по λ на любом отрезке $[c, d] \subset]0, +\infty[$;

$$\mathcal{M}_2. \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{\ln L(y)}{\ln |y|} = 0.$$

\mathcal{M}_3 . Существует непрерывно дифференцируемая функция $L_0 : \Delta_Y \rightarrow]0, +\infty[$, которая носит название нормализованная медленно меняющаяся функция при $y \rightarrow Y$, такая, что

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{L_0(y)}{L(y)} = 1, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{yL_0'(y)}{L_0(y)} = 0.$$

\mathcal{M}_4 . При $\gamma \neq 0$

$$\int_B^y \frac{|z|^{\gamma-1} dz}{L(z)} = \frac{\nu |y|^\gamma}{\gamma L(y)} [1 + o(1)] \quad \text{при } y \rightarrow Y \quad (y \in \Delta_Y),$$

где

$$\nu = \text{sign } y, \quad B = \begin{cases} y_0, & \text{если } \left| \int_{y_0}^Y \frac{|z|^{\gamma-1} dz}{L(z)} \right| = +\infty, \\ Y, & \text{если } \left| \int_{y_0}^Y \frac{|z|^{\gamma-1} dz}{L(z)} \right| < +\infty \end{cases} \quad y_0 \in \Delta_Y.$$

Введем также для медленно меняющихся функций условие S_0 .

Определение 2. Будем говорить, что медленно меняющаяся при $y \rightarrow Y$ функция $L : \Delta_Y \rightarrow]0, +\infty[$, где Y равно либо нулю, либо $\pm\infty$, и Δ_Y - односторонняя окрестность Y , удовлетворяет условию S_0 , если

$$L\left(\nu e^{[1+o(1)] \ln |y|}\right) = L(y)[1 + o(1)] \quad \text{при } y \rightarrow Y \quad (y \in \Delta_Y),$$

где $\nu = \text{sign } y$.

Условию S_0 заведомо удовлетворяют функции, которые имеют отличный от нуля конечный предел при $y \rightarrow Y$ и функции вида

$$|\ln |y||^{\gamma_1}, \quad \ln^{\gamma_2} |\ln |y||, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}.$$

Целью настоящей работы является распространение результатов из [5] на случай произвольного $n \geq 2$, а именно установление условий существования у дифференциального уравнения (1) $P_\omega \left(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решений при $i \in \{1, \dots, n-1\}$ и асимптотических представлений для таких решений и их производных до порядка $n-1$ включительно. Для таких решений $i-1$ -я производная является медленно меняющейся функцией при $t \uparrow \omega$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определение 3. Будем говорить, что функция f в дифференциальном уравнении (1) удовлетворяет условию $(RN)_{\lambda_0}$ при $\lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i}$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n-1\}$, если существует число $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, непрерывная функция $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ и непрерывные правильно меняющиеся при $z_j \rightarrow Y_j$ ($j = \overline{0, n-1}$) функции $\varphi_j : \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$ ($j = \overline{0, n-1}$) порядков σ_j ($j = \overline{0, n-1}$) такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций $z_j : [a, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_j}$ ($j = \overline{0, n-1}$), которые удовлетворяют условиям

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_j(t) = Y_j, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) z_j'(t)}{z_j(t)} = i - j - 1 \quad (j = \overline{0, n-1}), \quad (8)$$

имеет место асимптотическое представление

$$f(t, z_0(t), z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(z_j(t)) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (9)$$

Поскольку в (9) каждая из функций φ_j является правильно меняющейся функцией порядка σ_j при $z_j \rightarrow Y_j$, то согласно (6)

$$\varphi_j(z_j) = |z_j|^{\sigma_j} L_j(z_j) \quad (j = \overline{0, n-1}), \quad (10)$$

где каждая $L_j : \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$ ($j = \overline{0, n-1}$)- непрерывная медленно меняющаяся функция при $z_j \rightarrow Y_j$.

При выполнении для некоторого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ условия $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$ наряду с (10) будем использовать следующие обозначения:

$$\nu_j = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_j = +\infty, \text{ либо} \\ & Y_j = 0 \text{ и } \Delta_{Y_j} \text{ — правая окрестность нуля,} \\ -1, & \text{если } Y_j = -\infty, \text{ либо} \\ & Y_j = 0 \text{ и } \Delta_{Y_j} \text{ — левая окрестность нуля} \end{cases} \quad (j = \overline{0, n-1}),$$

$$\begin{aligned}\gamma &= 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j, & \gamma_i &= 1 - \sum_{j=i}^{n-1} \sigma_j, \\ \mu_i &= n - i - 1 + \sum_{j=0}^{i-2} \sigma_j(i - j - 1) - \sum_{j=i+1}^{n-1} \sigma_j(j - i), \\ C_i &= \frac{1}{(n - i)!} \prod_{j=0}^{i-1} [(i - j - 1)!]^{-\sigma_j} \prod_{j=i+1}^{n-1} [(j - i)!]^{\sigma_j}, \\ J_i(t) &= \int_{A_i}^t p(s) |\pi_\omega(s)|^{\mu_i} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} L_j(\nu_j |\pi_\omega(s)|^{i-j-1}) ds, \\ J_{ii}(t) &= \int_{A_{ii}}^t |J_i(s)|^{\frac{1}{\gamma_i}} ds,\end{aligned}$$

где каждый из пределов интегрирования A_i , A_{ii} выбирается равным точке $a_0 \in [a, \omega[$ (справа от которой, т.е. при $t \in [a_0, \omega[$ подинтегральная функция непрерывна), если при этом значении предела интегрирования соответствующий интеграл стремится к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, и равным ω если при таком значении предела интегрирования он стремится к нулю при $t \uparrow \omega$.

Теорема 1. Пусть $n > 2$, $i \in \{1, \dots, n - 2\}$, функция f удовлетворяет условию $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$, выполняется неравенство $\gamma\gamma_i \neq 0$ и функции L_j при всех $j \in \{0, \dots, n - 1\} \setminus \{i - 1\}$ удовлетворяют условию S_0 . Тогда для существования y дифференциального уравнения (1) $P_\omega\left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i}\right)$ -решений необходимо, а если алгебраическое относительно ρ уравнение

$$\sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{(j - i)!} \prod_{m=1}^{j-i} (m - \rho) + \sigma_i = \frac{1}{(n - i)!} \prod_{m=1}^{n-i} (m - \rho) \quad (11)$$

не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы соблюдались неравенства

$$\nu_j \nu_{j-1} (i - j) \pi_\omega(t) > 0 \quad \text{при всех } j \in \{1, \dots, n - 1\} \setminus \{i\}, \quad (12)$$

$$\nu_i \nu_{i-1} \gamma \gamma_i J_{ii}(t) > 0, \quad \nu_i \alpha_0 \gamma_i (-1)^{n-i-1} \pi_\omega^{n-i-1}(t) J_i(t) > 0 \quad (13)$$

в некоторой левой окрестности ω , а также условия

$$\nu_{j-1} \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)|^{i-j} = Y_{j-1} \quad \text{при всех } j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}, \quad (14)$$

$$\nu_{i-1} \lim_{t \uparrow \omega} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}} = Y_{i-1}, \quad (15)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_i(t)}{J_i(t)} = -\gamma_i, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)} = 0. \quad (16)$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$y^{(j-1)}(t) = \frac{[\pi_\omega(t)]^{i-j}}{(i-j)!} y^{(i-1)}(t) [1 + o(1)] \quad (j = 1, \dots, i-1), \quad (17)$$

$$y^{(j)}(t) = (-1)^{j-i} \frac{(j-i)!}{[\pi_\omega(t)]^{j-i}} \cdot \frac{\gamma_i J'_{ii}(t)}{\gamma J_{ii}(t)} y^{(i-1)}(t) [1 + o(1)] \quad (j = i, \dots, n-1), \quad (18)$$

$$\frac{|y^{(i-1)}(t)|^\gamma}{L_{i-1}(y^{(i-1)}(t))} = |\gamma_i C_i| \left| \frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t) \right|^{\gamma_i} [1 + o(1)], \quad (19)$$

причем таких решений в случае $\omega = +\infty$ существует $l + i$ -параметрическое семейство при выполнении неравенства $\nu_i \nu_{i-1} \gamma < 0$ и $l + i - 1$ -параметрическое семейство при выполнении неравенства $\nu_i \nu_{i-1} \gamma > 0$, а в случае $\omega < +\infty$ существует $n - i - l + 1$ -параметрическое семейство таких решений при выполнении неравенства $\nu_i \nu_{i-1} \gamma < 0$ и $n - i - l$ -параметрическое семейство при выполнении неравенства $\nu_i \nu_{i-1} \gamma > 0$, где l — число корней (с учетом кратных) уравнения (11) с отрицательной действительной частью.

Замечание 1. Алгебраическое уравнение (11) заведомо не имеет корней с нулевой действительной частью, если $\sum_{j=i}^{n-1} |\sigma_j| \leq 1$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y : [t_0, \omega[\rightarrow \mathbb{R}$ — произвольное $P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решение дифференциального уравнения (1). Тогда в силу условий (2) определения 1 существует $t_1 \in [t_0, \omega[$ такое, что на промежутке $[t_1, \omega[$ это решение и его производные до порядка $n - 1$ включительно сохраняют знаки, причем $\text{sign } y^{(j)}(t) = \nu_j$ ($j = \overline{0, n-1}$) при $t \in [t_1, \omega[$. Кроме того, в силу леммы 1 имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические соотношения (4), (5), из которых, в частности, вытекает справедливость асимптотических представлений (17). Кроме того, из (4) и (5) следует, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)} = i - j - 1 \quad (j = \overline{0, n-1}), \quad (20)$$

откуда вытекает справедливость неравенств (12) и условий (14). В силу (20) также ясно, что для функций $z_j(t) = y^{(j)}(t)$ ($j = \overline{0, n-1}$) выполняются условия (8) и поэтому согласно условию $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$ из (1) получим

асимптотическое соотношение

$$y^{(n)}(t) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j \left(y^{(j)}(t) \right) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

или с учетом представлений (10) – соотношение вида

$$y^{(n)}(t) = \alpha_0 p(t) [1 + o(1)] \prod_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}(t)|^{\sigma_j} L_j(y^{(j)}(t)) \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (21)$$

Здесь согласно условиям теоремы функции L_j при всех $j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \{i-1\}$ удовлетворяют условию S_0 и в силу (20)

$$\ln |y^{(j)}(t)| = [i - j - 1 + o(1)] \ln |\pi_\omega(t)| \quad (j = \overline{0, n-1}) \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Поэтому для всех $j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \{i-1\}$

$$\begin{aligned} L_j(y^{(j)}(t)) &= L_j \left(\nu_j e^{[1+o(1)] \ln |\pi_\omega(t)|^{i-j-1}} \right) = \\ &= L_j \left(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{i-j-1} \right) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

С учетом (20) также находим, что

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \cdots \frac{y^{(i+2)}(t)}{y^{(i+1)}(t)} y^{(i+1)}(t) = \\ &= \frac{(-1)^{n-i-1} (n-i)!}{\pi_\omega^{n-i-1}(t)} y^{(i+1)}(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Используя эти асимптотические соотношения, а также асимптотические соотношений (4), (5) и введенные обозначений μ_i , γ , γ_i и C_n из (21) получим соотношение вида

$$\begin{aligned} &\frac{y^{(i+1)}(t) |y^{(i)}(t)|^{\gamma_i - 1}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{i-1}(y^{(i-1)}(t))} = \\ &= \alpha_0 (-1)^{n-i-1} (\text{sign} [\pi_\omega(t)]^{n-i-1}) C_i p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_i} \times \\ &\times \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} L_j \left(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{i-j-1} \right) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega, \quad (22) \end{aligned}$$

В силу свойства \mathcal{M}_3 медленно меняющихся функций существует непрерывно дифференцируемая нормализованная медленно меняющаяся при

$y^{(i-1)} \rightarrow Y_{i-1}$ функция $L_{0i-1} : \Delta_{Y_{i-1}} \rightarrow]0, +\infty[$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{\substack{y^{(i-1)} \rightarrow Y_{i-1} \\ y^{(i-1)} \in \Delta_{Y_{i-1}}}} \frac{L_{i-1}(y^{(i-1)})}{L_{0i-1}(y^{(i-1)})} = 1, \quad \lim_{\substack{y^{(i-1)} \rightarrow Y_{i-1} \\ y^{(i-1)} \in \Delta_{Y_{i-1}}}} \frac{y^{(i-1)} L'_{0i-1}(y^{(i-1)})}{L_{0i-1}(y^{(i-1)})} = 0. \quad (23)$$

С использованием этих условий, (2) и (20) находим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{|y^{(i)}(t)|^{\gamma_i}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} \right)' = \frac{\nu_i y^{(i+1)}(t) |y^{(i)}(t)|^{\gamma_i - 1}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} \times \\ & \quad \times \left(\gamma_i + (\gamma - \gamma_i) \frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i+1)}(t)} \cdot \frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i-1)}(t)} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i+1)}(t)} \cdot \frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i-1)}(t)} \cdot \frac{y^{(i-1)}(t) L'_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))}{L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} \right) = \\ & = \frac{y^{(i+1)}(t) |y^{(i)}(t)|^{\gamma_i - 1}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} [\nu_i \gamma_i + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Поэтому (22) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & \left(\frac{|y^{(i)}(t)|^{\gamma_i}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} \right)' = \\ & = \nu_i \alpha_0 (-1)^{n-i-1} \gamma_i (\text{sign} [\pi_\omega(t)]^{n-i-1}) C_i p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_i} \times \\ & \quad \times \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} L_j (\nu_j |\pi_\omega(t)|^{i-j-1}) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_1 до t и учитывая, что дробь под знаком производной в силу условия $\gamma_i \neq 0$ стремится либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{|y^{(i)}(t)|^{\gamma_i}}{|y^{(i-1)}(t)|^{\gamma_i - \gamma} L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} = \\ & = \nu_i \alpha_0 (-1)^{n-i-1} \gamma_i (\text{sign} [\pi_\omega(t)]^{n-i-1}) C_i J_i(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Отсюда, прежде всего, следует, что выполняется второе из неравенств (13). Кроме того, отсюда и (22) ввиду эквивалентности функций L_{i-1} и L_{0i-1} при $y^{(i-1)} \rightarrow Y_{i-1}$ следует, что

$$\frac{y^{(i+1)}(t)}{y^{(i)}(t)} = \frac{J'_i(t)}{\gamma_i J_i(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

откуда с учетом (20) при $j = i$ вытекает справедливость первого из условий (16).

Из полученного соотношения также имеем

$$\frac{y^{(i)}(t)}{|y^{(i-1)}(t)|^{\frac{\gamma_i - \gamma}{\gamma_i}} L_{i-1}^{\frac{1}{\gamma_i}}(y^{(i-1)}(t))} = \nu_i |C_i \gamma_i J_i(t)|^{\frac{1}{\gamma_i}} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (24)$$

Интегрируя теперь это соотношение на промежутке от t_1 до t , с учетом условия $\gamma \gamma_i \neq 0$ и использованием свойства \mathcal{M}_3 медленно меняющихся функций, находим, что

$$\frac{|y^{(i-1)}(t)|^{\frac{\gamma}{\gamma_i}}}{L_{i-1}^{\frac{1}{\gamma_i}}(y^{(i-1)}(t))} = \frac{\nu_i \nu_{i-1} \gamma}{\gamma_i} |\gamma_i C_i|^{\frac{1}{\gamma_i}} J_{ii}(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

т.е. справедливо асимптотическое представление (19) и первое из неравенств (13). Кроме того, из (24) и (19) следует, что

$$\frac{y^{(i)}(t)}{y^{(i-1)}(t)} = \frac{\gamma_i J'_{ii}(t)}{\gamma J_{ii}(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (25)$$

В силу этого соотношения соблюдается условие (15) и из (20) вытекает справедливость второго из условий (16), а также асимптотических представлений (18).

Достаточность. Пусть соблюдаются условия (12) – (16) и алгебраическое уравнение (11) не имеет корней с нулевой действительной частью. Покажем, что в этом случае у дифференциального уравнения (1) существуют решения, допускающие при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (17) – (19) и выясним вопрос об их количестве.

Сначала рассмотрим соотношение

$$\frac{|Y|^\gamma}{L_{0i-1}(Y)} = |\gamma_i C_i| \left| \frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t) \right|^{\gamma_i} [1 + v_n] \quad (26)$$

где $L_{0i} : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0, +\infty[$ – непрерывно дифференцируемая медленно меняющаяся при $Y \rightarrow Y_{i-1}$ функции, удовлетворяющие условиям (23), существующая в силу свойства \mathcal{M}_3 медленно меняющихся функций.

Выбрав произвольным образом число $d \in]0, \frac{\gamma_i}{\gamma}[$, покажем, что при некотором $t_0 \in]a, \omega[$ соотношение (25) однозначно определяет, заданную на множестве $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$, где $\mathbb{R}_{\frac{1}{2}} = \{v \in \mathbb{R} : |v| \leq \frac{1}{2}\}$, непрерывно дифференцируемую неявную функцию $Y = Y(t, v_n)$ вида

$$Y(t, v_n) = \nu_{i-1} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma} + z(t, v_n)}, \quad (27)$$

где функция z такова, что

$$|z(t, v_n)| \leq d \quad \text{при} \quad (t, v_n) \in [t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$$

и

$$\lim_{t \uparrow \omega} z(t, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}.$$

Полагая в (26)

$$Y = \nu_{i-1} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma} + z}, \quad (28)$$

находим после элементарных преобразований, что

$$z = a(t) + b(t, v_n) + Z(t, z), \quad (29)$$

где

$$a(t) = \frac{\gamma_i}{\gamma} \cdot \frac{\ln \left| \frac{\gamma}{\gamma_i} \right| + \frac{1}{\gamma_i} \ln |\gamma_i C_i|}{\ln |J_{ii}(t)|}, \quad b(t, v_n) = \frac{\gamma_i}{\gamma} \cdot \frac{\ln[1 + v_n]}{\ln |J_{ii}(t)|},$$

$$Z(t, z) = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\ln L_{0i-1} \left(\nu_{i-1} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma} + z} \right)}{\ln |J_{ii}(t)|}.$$

Здесь в силу условия (15) и свойства \mathcal{M}_2 медленно меняющихся функций

$$\nu_{i-1} \lim_{t \uparrow \omega} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma} + z} = Y_{i-1} \quad \text{равномерно по} \quad z \in [-d, d],$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} a(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} b(t, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}},$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} Z(t, z) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad z \in [-d, d].$$

Так как

$$\frac{\partial Z(t, z)}{\partial z} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\nu_{i-1} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma} + z} L'_{0i-1} \left(\nu_{i-1} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma} + z} \right)}{L_{0i-1} \left(\nu_{i-1} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma} + z} \right)},$$

то ввиду (15) и второго из условий (23) имеем

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\partial Z(t, z)}{\partial z} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad z \in [-d, d].$$

Согласно этим условиям существует число $t_1 \in [a, \omega[$ такое, что

$$\nu_{i-1} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma} + z} \in \Delta_{Y_{i-1}} \quad \text{при} \quad (t, z) \in [t_1, \omega[\times [-d, d],$$

$$|a(t) + b(t, v_1, v_2) + Z(t, z)| \leq d \quad \text{при} \quad (t, v_n, z) \in [t_1, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}} \times [-d, d]$$

и

$$|Z(t, z_1) - Z(t, z_2)| \leq \frac{1}{2}|z_1 - z_2| \quad \text{при } t \in [t_1, \omega[\text{ и } z_1, z_2 \in [-d, d].$$

Подобрав таким образом число t_1 , обозначим через \mathbf{B} банахово пространство непрерывных и ограниченных на множестве $\Omega = [t_1, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ функций $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|z\| = \sup \{|z(t, v_n)| : (t, v_n) \in \Omega\}.$$

Выделим из него подпространство \mathbf{B}_0 тех функций из \mathbf{B} , для которых $\|z\| \leq d$, и рассмотрим на \mathbf{B}_0 , выбрав предварительно произвольным образом число $\nu \in (0, 1)$, оператор

$$\Phi(z)(t, v_n) = z(t, v_n) - \nu [z(t, v_n) - a(t) - b(t, v_n) - Z(t, z(t, v_n))]. \quad (30)$$

В силу указанных выше свойств функций a , b и Z ясно, что $\Phi(\mathbf{B}_0) \subset \mathbf{B}_0$ и $\|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)\| \leq (1 - \frac{\nu}{2}) \|z_1 - z_2\|$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbf{B}_0$.

Значит, оператор Φ отображает пространство \mathbf{B}_0 в себя и является на нем оператором сжатия. Тогда согласно принципу сжатых отображений существует единственная функция $z \in \mathbf{B}_0$ такая, что $z = \Phi(z)$. В силу (30) эта непрерывная на множестве Ω функция является единственным решением уравнения (29), удовлетворяющим условию $\|z\| \leq d$. Из (29) с учетом этого условия и свойств функций a , b , Z следует, что данное решение стремится к нулю при $t \uparrow \omega$ равномерно по $v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$. Непрерывная дифференцируемость этого решения на множестве $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$, где t_0 — некоторое число из промежутка $[t_1, \omega[$ непосредственно вытекает из известной локальной теоремы о существовании неявной функции, определяемой соотношением (29). В силу замены (28) полученной функции z соответствует непрерывно дифференцируемая на множестве $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ функция Y вида (27), которая является решением уравнения (26) и удовлетворяет условиям

$$Y(t, v_n) \in \Delta_{Y_{i-1}} \quad \text{при } (t, v_n) \in [t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}, \quad (31)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} Y(t, v_n) = Y_{i-1} \quad \text{равномерно по } v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}, \quad (32)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\gamma J_{ii}(t) \frac{\partial Y(t, v_n)}{\partial t}}{\gamma_i J'_{ii}(t) Y(t, v_n)} = 1 \quad \text{равномерно по } v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \quad (33)$$

Теперь, применяя к дифференциальному уравнению (1) преобразова-

ние

$$\begin{aligned}
 y^{(j-1)}(t) &= \frac{[\pi_\omega(t)]^{i-j}}{(i-j)!} y^{(i-1)}(t)[1 + v_j(\tau)] \\
 j &= 1, \dots, i-1, \\
 y^{(j)}(t) &= (-1)^{j-i} \frac{(j-i)!}{[\pi_\omega(t)]^{j-i}} \cdot \frac{\gamma_i J'_{ii}(t)}{\gamma J_{ii}(t)} y^{(i-1)}(t)[1 + v_j(\tau)] \\
 j &= i, \dots, n-1, \\
 y^{(i-1)}(t) &= Y(t, v_n(\tau))
 \end{aligned} \tag{34}$$

и учитывая, что функция $y^{(i-1)}(t) = Y(t, v_n(\tau))$ при $t \in [t_0, \omega[$ и $v_n(\tau) \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{|y^{(i-1)}(t)|^\gamma}{L_{0i-1}(y^{(i-1)}(t))} = |\gamma_i C_i| \left| \frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t) \right|^{\gamma_i} [1 + v_n(\tau)],$$

получим с использованием знаковых условий (12), (13) систему дифференциальных уравнений вида

$$\left\{ \begin{aligned}
 v'_j &= \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[(i-j)(v_{j+1} - v_j) - \frac{\gamma_i}{\gamma} h_1(\tau)(1 + v_j)(1 + v_i) \right] \\
 j &= 1, \dots, i-2, \\
 v'_{i-1} &= \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[-v_{i-1} - \frac{\gamma_i}{\gamma} h_1(\tau)(1 + v_{i-1})(1 + v_i) \right], \\
 v'_j &= \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[(j-i)(1 + v_j) - (j+1-i)(1 + v_{j+1}) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\gamma_i} h_2(\tau)(1 + v_j) + \frac{1}{\gamma} h_1(\tau)(1 + v_j)(\gamma - \gamma_i - \gamma_i v_i) \right] \\
 j &= i, \dots, n-2, \\
 v'_{n-1} &= \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[\frac{(-1)^{n-i-1} \gamma J_{ii}(t) [\pi_\omega(t)]^{n-i} G(t, v_1, \dots, v_n)}{(n-i-1)! \gamma_i J'_{ii}(t) Y(t, v_n)} + (n-i-1)(1 + v_{n-1}) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\gamma_i} h_2(\tau)(1 + v_{n-1}) + \frac{1}{\gamma} h_1(\tau)(1 + v_{n-1})(\gamma - \gamma_i - \gamma_i v_i) \right], \\
 v'_n &= \frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)} \left[(1 + v_n)(1 + v_i) - (1 + v_n) - \frac{1}{\gamma} H(\tau, v_n)(1 + v_n)(1 + v_i) \right],
 \end{aligned} \right.$$

в которой

$$\begin{aligned}
 h_1(\tau) &= \frac{\pi_\omega(t) J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)}, \quad h_2(\tau) = \frac{\pi_\omega(t) J'_i(t)}{J_i(t)}, \\
 H(\tau(t), v_n) &= \frac{Y(t, v_n) L'_{0i-1}(Y(t, v_n))}{L_{0i-1}(Y(t, v_n))}, \quad G(\tau(t), v_1, \dots, v_n) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(t, z_0(t, v_1, \dots, v_n), \dots, z_n(t, v_1, \dots, v_n)), \quad z_j(t, v_1, \dots, v_n) = \\
&= \begin{cases} \frac{\pi_\omega^{i-j-1}(t)}{(i-j-1)!} Y(t, v_n)(1 + v_{j+1}) & \text{при } j = \overline{0, i-2}, \\ Y(t, v_n) & \text{при } j = i-1, \\ (-1)^{j-i} \frac{(j-i)!}{\pi_\omega^{j-i}(t)} \frac{\gamma_i}{\gamma} \frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)} Y(t, v_n)(1 + v_j) & \text{при } j = \overline{i, n-1}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Здесь в силу условий (16), (31), (32) и второго из условий (23)

$$\lim_{t \uparrow \omega} h_1(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} h_2(t) = -\frac{1}{\gamma_i} \quad (35)$$

и

$$\lim_{t \uparrow \omega} H(t, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по } v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \quad (36)$$

Кроме того, согласно условиям (31)–(33), (14)–(16)

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_j(t, v_1, \dots, v_n) = Y_j, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \frac{\partial z_j(t, v_1, \dots, v_n)}{\partial t}}{z_j(t, v_1, \dots, v_n)} = i - j - 1 \quad (j = \overline{0, n-1}) \quad (37)$$

равномерно по $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$, где

$$\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n = \left\{ (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R} : |v_j| \leq \frac{1}{2} \quad (j = \overline{1, n}) \right\}.$$

Поэтому ввиду выполнения условия $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$ имеет место представление

$$G(t, v_1, \dots, v_n) = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(z_j(t, v_1, \dots, v_n)) [1 + r_1(t, v_1, \dots, v_n)],$$

где функция $r_1 : [t_0, \omega] \times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и такова, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_1(t, v_1, \dots, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по } (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n.$$

Отсюда с учетом представлений (10) и вида функций z_j ($j = \overline{0, n-1}$) находим

$$\begin{aligned}
G(t, v_1, \dots, v_n) &= \alpha_0 C_i (n-i)! p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_i + i + 1 - n} \left| \frac{\gamma_i J'_{ii}(t)}{\gamma J_{ii}(t)} \right|^{1-\gamma_i} |Y(t, v_n)|^{1-\gamma} \times \\
&\times \prod_{j=0}^{i-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j} \prod_{j=i}^{n-1} |1 + v_j|^{\sigma_j} \prod_{j=0}^{n-1} L_j(z_j(t, v_1, \dots, v_n)) [1 + r_1(t, v_1, \dots, v_n)].
\end{aligned}$$

Так как в силу условий (37)

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln |z_j(t, v_1, \dots, v_n)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} = i - j - 1 \quad (j = \overline{0, n-1})$$

равномерно по $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$ и функции L_j ($j = \overline{0, n-1}$) при $j \neq i-1$ удовлетворяют условию S_0 , то соотношение для G может быть записано в виде

$$\begin{aligned} G(t, v_1, \dots, v_n) &= \frac{\alpha_0 C_i (n-i)! p(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_i}}{|\pi_\omega(t)|^{n-i-1} \left| \frac{\gamma_i J_{ii}'(t)}{\gamma J_{ii}(t)} \right|^{\gamma_i - 1}} |Y(t, v_n)|^{1-\gamma} L_{i-1}(Y(t, v_n)) \times \\ &\times \prod_{j=0}^{i-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j} \prod_{j=i}^{n-1} |1 + v_j|^{\sigma_j} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} L_j(v_j |\pi_\omega(t)|^{i-j-1}) [1 + r_2(t, v_1, \dots, v_n)], \end{aligned}$$

где функция $r_2 : [t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и такова, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_2(t, v_1, \dots, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по } (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n,$$

откуда с учетом вида функции J_i имеем

$$\begin{aligned} G(t, v_1, \dots, v_n) &= \frac{\alpha_0 C_i (n-i)! J_i'(t)}{|\pi_\omega(t)|^{n-i-1} \left| \frac{\gamma_i J_{ii}'(t)}{\gamma J_{ii}(t)} \right|^{\gamma_i - 1}} |Y(t, v_n)|^{1-\gamma} L_{i-1}(Y(t, v_n)) \times \\ &\times \prod_{j=0}^{i-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j} \prod_{j=i}^{n-1} |1 + v_j|^{\sigma_j} [1 + r_2(t, v_1, \dots, v_n)]. \end{aligned}$$

Наконец, учитывая, что $Y(t, v_n)$ является решением уравнения (26) и соблюдаются условия (23), (31), (32), а также вид функций J_i и J_{ii} , находим

$$\begin{aligned} G(t, v_1, \dots, v_n) &= \frac{\alpha_0 \nu_{i-1} (n-i)! J_i'(t) Y(t, v_n)}{|\gamma_i| |\pi_\omega(t)|^{n-i-1} \left| \frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t) \right|^{\gamma_i} \left| \frac{\gamma_i J_{ii}'(t)}{\gamma J_{ii}(t)} \right|^{\gamma_i - 1} (1 + v_n)} \times \\ &\times \prod_{j=0}^{i-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j} \prod_{j=i}^{n-1} |1 + v_j|^{\sigma_j} [1 + r_3(t, v_1, \dots, v_n)] = \\ &= \frac{\alpha_0 \nu_{i-1} (n-i)! J_i'(t) J_{ii}'(t) Y(t, v_n)}{|\gamma| |\pi_\omega(t)|^{n-i-1} |J_i(t)| |J_{ii}(t)|} \times \\ &\times \frac{\prod_{j=0}^{i-2} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_j} \prod_{j=i}^{n-1} |1 + v_j|^{\sigma_j}}{1 + v_n} [1 + r_3(t, v_1, \dots, v_n)], \end{aligned}$$

где функция $r_3 : [t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и такова, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_3(t, v_1, \dots, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по } (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n.$$

Тогда с использованием неравенств (13) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{n-i-1} \gamma J_{ii}(t) [\pi_\omega(t)]^{n-i} G(t, v_1, \dots, v_n)}{(n-i-1)! \gamma_i J'_{ii}(t) Y(t, v_n)} = \\ & = \frac{n-i}{\gamma_i} \frac{\pi_\omega(t) J'_i(t)}{J_i(t)} \frac{\prod_{j=0}^{i-2} |1+v_{j+1}|^{\sigma_j} \prod_{j=i}^{n-1} |1+v_j|^{\sigma_j}}{1+v_n} [1+r_3(t, v_1, \dots, v_n)]. \end{aligned}$$

В силу этого представления, а также условий (35), (36), полученная выше система дифференциальных уравнений имеет следующий вид

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_j = \frac{1}{\pi_\omega(t)} [f_j(t, v_1, \dots, v_n) + (i-j)(v_{j+1} - v_j)], \\ j = 1, \dots, i-2, \\ v'_{i-1} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} [f_{i-1}(t, v_1, \dots, v_{n-1}) - v_{i-1}], \\ v'_j(t) = \frac{1}{\pi_\omega(t)} [f_j(t, v_1, \dots, v_n) + (j-i+1)(v_j - v_{j+1})] \\ j = i, \dots, n-2, \\ v'_{n-1} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left[f_{n-1}(t, v_1, \dots, v_n) - (n-i) \left(\sum_{k=1}^{i-1} \sigma_{k-1} v_k + \sum_{k=i}^{n-2} \sigma_k v_k \right) \right. \\ \quad \left. + (n-i)(1 - \sigma_{n-1})v_{n-1} + (n-i)v_n + V_{n-1}(v_1, \dots, v_n) \right], \\ v'_n = \frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)} [f_n(t, v_1, \dots, v_n) - v_i + V_n(v_1, \dots, v_n)], \end{array} \right. \quad (38)$$

где функции f_i ($i = \overline{1, n}$) непрерывны на множестве $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$ и таковы, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} f_i(\tau, \bar{v}) = 0 \quad (i = \overline{1, n}) \quad \text{равномерно по } \bar{v} \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n,$$

$$\begin{aligned} V_{n-1}(v_1, \dots, v_n) = & -(n-i) \left[\frac{\prod_{k=0}^{i-2} |1+v_{k+1}|^{\sigma_k} \prod_{k=i}^{n-1} |1+v_k|^{\sigma_k}}{1+v_n} - \right. \\ & \left. -1 - \sum_{k=1}^{i-1} \sigma_{k-1} v_k - \sum_{k=i}^{n-1} \sigma_k v_k + v_n \right], \quad V_n(v_1, \dots, v_n) = v_i v_n. \end{aligned}$$

Здесь

$$V_j(0, \dots, 0) = 0, \quad \lim_{|v_1| + \dots + |v_n| \rightarrow 0} \frac{\partial V_j(v_1, \dots, v_n)}{\partial v_k} = 0 \quad (k = \overline{1, n}) \quad \text{при } j = n-1, n$$

и

$$\int_{t_0}^t \frac{d\tau}{\pi_\omega(\tau)} = \ln |\pi_\omega(\tau)| \Big|_{t_0}^t \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

$$\int_{t_0}^t \frac{J'_{ii}(\tau) d\tau}{J_{ii}(\tau)} = \ln |J_{ii}(\tau)| \Big|_{t_0}^t \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Поэтому данная система дифференциальных уравнений принадлежит к классу систем, которые исследовались в работе [8]. При этом также заметим, что

$$\text{sign } \pi_\omega(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если } \omega < +\infty, \end{cases}$$

и в силу условий (13), (16)

$$\text{sign } \frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)} = \text{sign } J_{ii}(t) = \nu_i \nu_{i-1} \text{sign } (\gamma \gamma_i),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\left(\frac{\pi_\omega(t) J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)} \right)'}{\frac{J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)}} = \lim_{t \uparrow \omega} \left[1 + \frac{\pi_\omega(t) J'_i(t)}{\gamma_i J_i(t)} + \frac{\pi_\omega(t) J'_{ii}(t)}{J_{ii}(t)} \right] = 0.$$

Обозначим через P_{n-1} матрицу коэффициентов при v_1, \dots, v_{n-1} , стоящих в квадратных скобках первых $n-1$ уравнений системы, а через P_n — матрицу коэффициентов, стоящих в квадратных скобках всех уравнений системы.

Нетрудно проверить, что

$$\det P_{n-1} = (-1)^{i-1} (i-1)! (n-i)! \gamma_i, \quad \det P_n = (-1)^{i-1} (i-1)! (n-i)!$$

и

$$\det [P_{n-1} - \rho E_{n-1}] = (-1)^{i-1} \prod_{k=1}^{i-1} (k + \rho) \times$$

$$\times \left[\prod_{m=1}^{n-i} (m - \rho) - (n-i)! \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{(j-i)!} \prod_{m=1}^{j-i} (m - \rho) - (n-i)! \sigma_i \right],$$

где E_{n-1} — единичная матрица размерности $(n-1) \times (n-1)$.

Из вида характеристического многочлена матрицы P_{n-1} ясно, что он имеет $i-1$ корней вида $\rho_k = -k$ ($k = \overline{1, i-1}$), а остальные его $n-i$ корней являются корнями алгебраического уравнения (11), которое в силу условий теоремы не имеет корней с нулевой действительной частью. Поэтому

матрица P_{n-1} не имеет собственных значений с нулевой действительной частью.

Тем самым показано, что для системы дифференциальных уравнений (38) выполнены все условия теоремы 2.6 из работы [8]. Согласно этой теореме у системы (38) существует хотя бы одно решение $(v_j)_{j=1}^n : [t_1, \omega[\rightarrow \mathbb{R}^n$ ($t_1 \in [t_0, \omega[$), стремящееся к нулю при $t \uparrow \omega$. Более того, если l - число корней (с учетом кратных) уравнения (11) с отрицательной действительной частью, то согласно этой же теореме в случае $\omega = +\infty$ у данной системы существует $l + i$ - параметрическое семейство таких решений при выполнении неравенства $\nu_i \nu_{i-1} \gamma < 0$ и $l + i - 1$ - параметрическое семейство при выполнении неравенства $\nu_i \nu_{i-1} \gamma > 0$, а в случае $\omega < +\infty$ существует $n - i - l + 1$ -параметрическое семейство в случае выполнения неравенства $\nu_i \nu_{i-1} \gamma < 0$ и $n - i - l$ - параметрическое в случае, когда $\nu_i \nu_{i-1} \gamma > 0$.

Каждому такому решению системы (38) соответствует в силу замен (34) и первого из условий (23) решение $y : [t_1, \omega[\rightarrow \mathbb{R}$ ($t_1 \in [a, \omega[$) уравнения (1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (17) - (19). Используя эти представления и условия (12) - (17) нетрудно убедиться в том, что оно является $P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ - решением. Теорема полностью доказана.

Полученное в теореме асимптотическое представление для $i - 1$ -й производной $P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решения записано в неявном виде. В следующей теореме приведены дополнительные условия, при выполнении которых асимптотические представления для любого такого решения и его производных до порядка $n - 1$ включительно записываются в явном виде.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и, кроме того, функция L_{i-1} удовлетворяет условию S_0 .

Тогда для каждого $P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решения дифференциального уравнения (1) (в случае их существования) имеют место при $t \uparrow \omega$ наряду с асимптотическими представлениями (17), (18) следующее представление

$$y^{(i-1)}(t) = \nu_{i-1} |\gamma_i C_i|^{\frac{1}{\gamma}} \left| \frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t) \right|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}} L_{i-1}^{\frac{1}{\gamma}} \left(\nu_{i-1} |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}} \right) [1 + o(1)]. \quad (39)$$

Доказательство. Пусть $y : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_0} - P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решение дифференциального уравнения (1). Тогда согласно необходимости теоремы 1 выполняются условия (12)–(16), (25) и для данного решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (17)–(19). В силу условия (25)

$$\ln |y^{(i-1)}(t)| = [1 + o(1)] \ln |J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}} \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Поэтому, учитывая, что функция L_{i-1} удовлетворяет условию S_0 , получим

$$\begin{aligned} L_{i-1}(y^{(i-1)}(t)) &= L_{i-1}\left(\nu_{i-1}e^{[1+o(1)]\ln|J_{ii}(t)|}\right) = \\ &= L_{i-1}\left(\nu_{i-1}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}}\right)[1+o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Принимая во внимание это представление, запишем (19) в виде

$$|y^{(i-1)}(t)|^\gamma = |\gamma_i C_i| \left| \frac{\gamma}{\gamma_i} J_{ii}(t) \right|^{\gamma_i} L_{i-1}\left(\nu_{i-1}|J_{ii}(t)|^{\frac{\gamma_i}{\gamma}}\right)[1+o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

откуда следует (39). Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 не охватывают случай, когда $i = n-1$. В этом случае при некотором дополнительном ограничении аналогично данным двум теоремам могут доказаны следующие две теоремы.

Теорема 3. Пусть $n \geq 2$, функция f удовлетворяет условию $(RN)_0$, выполняется неравенство $\gamma\gamma_{n-1} \neq 0$ и функции L_j при всех $j \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{n-2\}$ удовлетворяют условию S_0 . Тогда для существования у дифференциального уравнения (1) $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решений, для которых существует конечный или равный $\pm\infty$ предел $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$, необходимо и достаточно, чтобы соблюдались неравенства

$$\nu_j \nu_{j-1} (n-j-1) \pi_\omega(t) > 0 \quad \text{при всех } j \in \{1, \dots, n-2\},$$

$$\nu_{n-1} \nu_{n-2} \gamma \gamma_{n-1} J_{n-1n-1}(t) > 0, \quad \nu_{n-1} \alpha_0 \gamma_{n-1} J_{n-1}(t) > 0$$

в некоторой левой окрестности ω , а также условия

$$\nu_{j-1} \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)|^{n-j-1} = Y_{j-1} \quad \text{при всех } j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{n-1\},$$

$$\nu_{n-2} \lim_{t \uparrow \omega} |J_{n-1n-1}(t)|^{\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma}} = Y_{n-2},$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{n-1}(t)}{J_{n-1}(t)} = -\gamma_{n-1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{n-1n-1}(t)}{J_{n-1n-1}(t)} = 0.$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$y^{(j-1)}(t) = \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!} y^{(n-2)}(t)[1+o(1)] \quad (j = 1, \dots, n-2), \quad (40)$$

$$y^{(n-1)}(t) = \frac{\gamma_{n-1} J'_{n-1n-1}(t)}{\gamma J_{n-1n-1}(t)} y^{(n-2)}(t)[1+o(1)], \quad (41)$$

$$\frac{|y^{(n-2)}(t)|^\gamma}{L_{n-2}(y^{(n-2)}(t))} = |\gamma_{n-1}C_{n-1}| \left| \frac{\gamma}{\gamma_{n-1}} J_{n-1n-1}(t) \right|^{\gamma_{n-1}} [1 + o(1)],$$

причем таких решений в случае $\omega = +\infty$ существует n -параметрическое семейство при выполнении неравенства $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma < 0$ и $n-1$ -параметрическое семейство при выполнении неравенства $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma > 0$, а в случае $\omega < +\infty$ - существует однопараметрическое семейство таких решений при выполнении неравенства $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma < 0$.

Теорема 4. Пусть выполняются условия теоремы 3 и, кроме того, функция L_{n-2} удовлетворяет условию S_0 . Тогда для каждого $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решения дифференциального уравнения (1) (в случае их существования) имеют место при $t \uparrow \omega$ наряду с асимптотическими представлениями (40), (41) следующее представление

$$y^{(n-2)}(t) = \nu_{n-2} |\gamma_{n-1} C_{n-1}|^{\frac{1}{\gamma}} \times \left| \frac{\gamma}{\gamma_{n-1}} J_{n-1n-1}(t) \right|^{\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma}} L_{n-2}^{\frac{1}{\gamma}} \left(\nu_{n-2} |J_{n-1n-1}(t)|^{\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma}} \right) [1 + o(1)].$$

3. ПРИМЕР ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В качестве примера, иллюстрирующего полученные результаты, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \frac{\sum_{k=1}^l \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)})}{\sum_{k=l+1}^m \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)})}, \quad (42)$$

в котором $\alpha_k \in \{-1, 1\}$, $p_k : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($\omega \leq +\infty$) - непрерывная функция, $\varphi_{kj} : \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$ - непрерывная и правильно меняющаяся при $y^j \rightarrow Y_j$ функция порядка σ_{kj} , Y_j равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_j} - некоторая односторонняя окрестность Y_j , $k = 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Допустим, что при $i \in \{1, \dots, n-1\}$ для некоторых $s \in \{1, \dots, l\}$ и $r \in \{l+1, \dots, m\}$ выполняются при $k \in \{1, \dots, l\} \setminus \{s\}$ неравенства

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} < \beta \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(i-j-1) \quad (43)$$

и при $k \in \{l+1, \dots, m\} \setminus \{r\}$ неравенства

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_r(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} < \beta \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} (\sigma_{rj} - \sigma_{kj})(i-j-1), \quad (44)$$

где

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Покажем, что при выполнении этих условий правая часть уравнения (42) удовлетворяет условию $RN_{\frac{n-i-1}{n-i}}$.

Пусть $z_j : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_j}$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$) – произвольные непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям (8). В силу этих условий

$$\ln |z_j(t)| = [i - j - 1 + o(1)] \ln |\pi_\omega(t)| \quad (j = \overline{0, n-1}) \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Учитывая эти асимптотические соотношения, а также представления

$$\varphi_{kj}(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_{kj}} L_{kj}(y^{(j)}) \quad (k = \overline{1, m}; j = \overline{0, n-1}),$$

где $L_{kj}(y^{(j)}) : \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$ – непрерывная медленно меняющаяся функция при $y^{(j)} \rightarrow Y_j$, и свойство \mathcal{M}_2 медленно меняющихся функций (из введения), будем при $k \in \{1, \dots, l\} \setminus \{s\}$ иметь

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))} \right) &= \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} (\ln \varphi_{kj}(z_j(t)) - \ln \varphi_{sj}(z_j(t))) = \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} ((\sigma_{kj} - \sigma_{sj}) \ln |z_j(t)| + \ln L_{kj}(z_j(t)) - \ln L_{sj}(z_j(t))) = \ln p_k(t) - \\ &- \ln p_s(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \ln |z_j(t)| \left(\sigma_{kj} - \sigma_{sj} + \frac{\ln L_{kj}(z_j(t))}{\ln |z_j(t)|} - \frac{\ln L_{sj}(z_j(t))}{\ln |z_j(t)|} \right) = \\ &= \ln p_k(t) - \ln p_s(t) + \ln |\pi_\omega(t)| \left(\sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{kj} - \sigma_{sj})(i - j - 1) + o(1) \right) = \\ &= |\ln |\pi_\omega(t)|| \left(\frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} - \beta \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} (\sigma_{kj} - \sigma_{sj})(i - j - 1) + o(1) \right) \end{aligned}$$

при $t \uparrow \omega$. Отсюда в силу выполнения условия (43) следует, что выражение,

стоящее слева, стремится к $-\infty$ при $t \uparrow \omega$ и поэтому

$$\lim_{t \uparrow \omega} \left(\frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))} \right) = 0 \quad \text{при всех } k \in \{1, \dots, l\} \setminus \{s\}.$$

Аналогично, с использованием условия (44) устанавливаем, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} \left(\frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{p_r(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{rj}(z_j(t))} \right) = 0 \quad \text{при всех } k \in \{l+1, \dots, m\} \setminus \{r\}.$$

В силу этих предельных соотношений

$$\frac{\sum_{k=1}^l \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))}{\sum_{k=l+1}^m \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(z_j(t))} = \frac{\alpha_s p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(z_j(t))}{\alpha_r p_r(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{rj}(z_j(t))} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

т.е. имеет место асимптотическое соотношение (9), в котором

$$\alpha_0 = \alpha_s \alpha_r, \quad p(t) = \frac{p_s(t)}{p_r(t)}, \quad \varphi_j(z_j(t)) = \frac{\varphi_{sj}(z_j(t))}{\varphi_{rj}(z_j(t))} \quad (j = 0, 1, \dots, n-1),$$

причем здесь φ_j – непрерывная правильно меняющаяся при $z_j \rightarrow Y_j$ функция порядка $\sigma_j = \sigma_{sj} - \sigma_{rj}$ и ее медленно меняющаяся составляющая L_j равна отношению медленно меняющихся составляющих L_{sj} и L_{rj} функций φ_{sj} и φ_{rj} .

Следовательно, правая часть уравнения (42) удовлетворяет условию $(RN)_{\frac{n-i-1}{n-i}}$. Поэтому в случае, когда при некоторых $s \in \{1, \dots, l\}$, $r \in \{l+1, \dots, m\}$ выполняются условия (43), (44) к уравнению (42) применимы теоремы 1–4 с заменой в условиях и утверждениях этих теорем постоянных α_0 , σ_j ($j = 0, 1, \dots, n-1$) и функций p , φ_j , L_j ($j = 0, 1, \dots, n-1$) на указанные выше постоянные и функции.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье впервые установлены условия существования и асимптотические представления $P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -решений для дифференциального уравнения вида (1) при $i = \overline{1, n-1}$. Эти результаты

существенно дополняют результаты, полученные ранее в работах [3] и [4]. В частности, результаты из [3] и [4] не охватывают уравнения вида (42), которые рассмотрены здесь в качестве примера, допускающего применение теорем 1–4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Дисс.... д. физ.-мат. наук. — Киев, 1997. — 295 с.
2. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференциальные уравнения. — 2011. — т. 47, № 5. — С. 628–650.
3. *Evtukhov V. M., Klopot A. M.* Asymptotic Behavior of Solutions of Ordinary Differential Equations of n -th Order with Regularly Varying Nonlinearities // Mem. Differential Equations Math. Phys. — 2014. — v. 61. — P. 37–61.
4. *Клопот А. М.* Асимптотическое поведение решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. — 2013. — т.18, вип. 3(19). — С. 16–34.
5. *Кусик Л. И.* Признаки существования одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Вісник Одеського нац. ун-ту. — 2012. — т.17. — Вип. 1–2(13–14). — Матем. і механ. — С. 80–97.
6. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука. — 1985. — 144с.
7. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. — Cambridge university press. Cambridge. — 1987. — 494p.
8. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. Мат. Ж. — 2010. — Т.62, №1. — С. 52–80.

Дрожджина А. В.

АСИМПТОТИКА ДЕЯКИХ ТИПОВ ОДНОГО КЛАСУ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Резюме

Для диференціального рівняння $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$, де $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \dots \times \Delta_{Y_{n-1}} \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Y_i дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_i} — деякий односторонній окіл Y_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$, досліджуються при деяких обмеженнях на функцію f питання про існування, асимптотику і кількість $P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ -розв'язків для всіх $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Такі розв'язки відносяться до особливих випадків класу $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -розв'язків, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, який був уведений в роботах В. М. Евтухова, що присвячені диференціальним рівнянням типу Емдена-Фаулера n -го порядку. Дані особливі випадки потребують окремого їх розгляду у зв'язку зі специфічними апріорними асимптотичними властивостями таких розв'язків. Дослідження поставлених питань здійснюється при припущенні, що диференціальне рівняння є у деякому сенсі асимптотично близьким до двочленого диференціального рівняння з правильно змінними нелінійностями.

Ключові слова: нелінійні диференціальні рівняння, правильно змінні функції, асимптотика розв'язків, $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -розв'язки.

Drozhzhina A. V.

ASYMPTOTIC OF SOME TYPES OF ONE CLASS OF SOLUTIONS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGHER ORDERS

Summary

For the differential equation $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$, where $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \times \dots \times \Delta_{Y_{n-1}} \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Y_i equals to zero or to $\pm\infty$, Δ_{Y_i} is some one-sided neighborhood of Y_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$, questions about the existence, asymptotics and about quantity of $P_\omega \left(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \frac{n-i-1}{n-i} \right)$ — solutions for all $i \in \{1, \dots, n-1\}$ are investigated under certain restrictions on the function f . Such solutions refer to special cases of class of $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -solutions where $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, that was introduced in works of V. M. Evtukhov devoted to the differential equations of Emden-Fowler type of the n -th order. Such special cases require their separate consideration because of their specific a priori asymptotic properties. The study of the formulated problems is carried out under the assumption that the differential equation is in some sense asymptotically close to the two-term differential equation with regularly varying nonlinearities.

Key words: non-linear differential equation, regularly varying functions, asymptotic of solutions, $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -solutions.

REFERENCES

1. Evtuhov V. M. (1997) *Asimptoticheskie predstavleniya resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Asymptotic representations of solutions of non-autonomous ordinary differential equations]*. Disc.... d. fiz.-mat. nauk. Kiev, 295 p.
2. Evtuhov V. M., Samoylenko A. M. (2011) *Asimptoticheskoe predstavlenie resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy pravilno menyayuschimisya nelineynostyami [Asymptotic representations of solutions of non-autonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities]*. *Differentsialnyie uravneniya*, Vol. 47, № 5, P. 628–650.

3. Evtukhov V. M., Klopot A. M. (2014) Asymptotic Behavior of Solutions of Ordinary Differential Equations of n -th Order with Regularly Varying Nonlinearities, *Met. Differential Equations Math. Phys.*, Vol. 61, P. 37–61.
4. Klopot A. M. (2013) Asimptoticheskoe povedenie resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy n -go poryadka s pravilno menyayuschimisya nelineynostyami [Asymptotic behavior of solutions of non-autonomous ordinary differential equations of n -th order with regularly varying nonlinearities]. *Visnik Od. nats. un-ut. Mat. i meh.*, Vol. 18, № 3(19), P. 16–34.
5. Kusik L. I. (2012) Priznaki suschestvovaniya odnogo klassa resheniy suschestvenno nelineynykh differentsialnykh uravneniy vtorogo poryadka [Signs of the existence of one class of solutions of essentially nonlinear differential equations of the second order]. *Visnik Odeskogo nats. un-tu. Matem. i mehan.*, Vol. 17, № 1–2(13–14), P. 80–97.
6. Senata E. (1985) *Pravilno menyayuschiesya funktsii [Correctly Changing Functions]*. M.: Nauka, 144 p.
7. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. (1987) *Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 494 p.
8. Evtuhov V. M., Samoylenko A. M. (2010) Usloviya suschestvovaniya ischezayuschih v osoboy toчке resheniy u veschestvennykh neavtonomnykh sistem kvazilineynykh differentsialnykh uravneniy [Conditions for the existence of solutions of quasilinear differential equations that disappear at a singular point in real non-autonomous systems]. *Ukr. Mat. Zh.*, Vol. 62, № 1, P. 52–80.

УДК 517.9

О. В. Капустян, О. А. Капустян, О. В. Перегуда, І. В. Романюк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

СТІЙКІСТЬ РІВНОМІРНОГО АТРАКТОРА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З РОЗРИВНИМИ ТРАЄКТОРІЯМИ

Публікація містить результати досліджень, що проводяться в межах україно-німецького науково-дослідного проекту ДФФД та DFG “Стійкість та робастність щодо збурень атракторів нелінійних нескінченновимірних систем”

Робота присвячена дослідженню якісної поведінки розв’язків хвильового рівняння, траєкторії якого зазнають імпульсного збурення при досягненні фіксованої (імпульсної) підмножини в фазовому просторі. Користуючись загальною схемою побудови нескінченновимірної імпульсної динамічної системи та використовуючи поняття рівномірного атрактора — мінімальної компактно рівномірно притягуючої множини, отримано результат щодо існування та явного вигляду рівномірного атрактора для імпульсної динамічної системи, породженої хвильовим рівнянням. Траєкторії такої системи можуть мати нескінченну кількість імпульсних точок при зустрічі з імпульсною підмножиною фазового простору. Таким чином, рівномірний атрактор може мати непорожній перетин з імпульсною множиною, і, як результат, не мати властивості стійкості. Проте, завдяки додатковим умовам щодо імпульсних параметрів задачі, у даній роботі вдалося довести властивість стійкості для не імпульсної частини рівномірного атрактора.

MSC: 34D45, 35R12.

Ключові слова: імпульсна динамічна система, стійкість, імпульсне збурення, рівномірний атрактор, хвильове рівняння.

DOI: 10.18524/2519-206x.2019.2(34).190047.

1. Вступ

Описуючи поведінку багатьох еволюційних процесів з миттєвими змінами, досить поширеним є математичний підхід, що ґрунтується на теорії диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням [1]–[4]. Важливим підкласом систем з розривними траєкторіями є імпульсні (розривні) динамічні системи [5]–[8]. Зокрема системи, траєкторії яких зазнають імпульсних збурень у момент зустрічі з певною фіксованою підмножиною фазового простору. У випадку нескінченновимірного фазового простору одним з найефективніших інструментів для вивчення якісної поведінки розв’язків таких систем є теорія глобальних атракторів [9], [10]. Проте при застосуванні основних понять та результатів цієї теорії до імпульсних динамічних систем виникає ряд ускладнень, перш за все пов’язаних з втратою в таких системах властивості неперервної залежності розв’язків від початкових даних, що в свою чергу вимагає застосування нових концепцій як і для поняття глобального атрактора, так і для його основних властиво-

стей (інваріантності, стійкості та робастності). Глобальну асимптотичну поведінку системи в цьому випадку можна описати за допомогою поняття рівномірного атрактора - компактної, мінімальної, рівномірно притягуючої множини [10], [11]. Виявилось, що у випадку, коли траєкторії імпульсної динамічної системи мають нескінченну кількість імпульсних збурень, перетин рівномірного атрактора Θ з імпульсною множиною M може бути не порожній, і, як наслідок, рівномірний атрактор може не мати властивості інваріантності та стійкості [16]. Проте вже найпростіші приклади показують, що цими властивостями може володіти не імпульсна частина рівномірного атрактора $\Theta \setminus M$. Основні абстрактні результати щодо інваріантності $\Theta \setminus M$ для різних класів імпульсних систем були одержані в роботах [13], [14], [15]. Стійкість $\Theta \setminus M$ для параболічних імпульсно-збурених рівнянь та систем вивчалась в [16], [17]. Для хвильових імпульсно-збурених систем існування рівномірного атрактора було доведено в [18]. У даній роботі, використовуючи результати [18], досліджується властивість стійкості не імпульсної частини рівномірного атрактора для імпульсної динамічної системи, породженої еволюційним рівнянням 2-го порядку.

2. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Атрактори імпульсних напівпотоків.

Імпульсна (або розривна [1]) динамічна система, що задана на нормованому просторі E , складається з неперервної напівгрупи $V : R_+ \times E \rightarrow E$, імпульсної множини $M \subset E$ та імпульсного відображення $I : M \rightarrow E$. Рух в імпульсній динамічній системі відбувається по траєкторіям V до моменту часу τ , коли фазова точка системи $x(t)$ досягає множини M . У момент такої зустрічі вона зазнає імпульсного впливу величини I та миттєво опиняється в новому положенні $Ix(\tau)$.

Для коректності побудови такої імпульсної динамічної системи необхідне виконання наступних умов [5]:

$$\begin{aligned} M &\text{ – замкнена, } M \cap IM = \emptyset, \\ \forall x \in M \exists \tau = \tau(x) > 0 \forall t \in (0, \tau) V(t, x) &\notin M, \\ \text{кожна імпульсна траєкторія визначена на } [0, +\infty). \end{aligned} \quad (1)$$

Введемо позначення:

$$\forall x \in M Ix = x^+, \quad \forall x \in E \quad M^+(x) = \left(\bigcup_{t>0} V(t, x) \right) \cap M.$$

Якщо $M^+(x) \neq \emptyset$, то з неперервності V і умов (1) виводимо, що існує момент часу $s > 0$ такий, що

$$\forall t \in (0, s) V(t, x) \notin M, \quad V(s, x) \in M.$$

Тоді імпульсний напівпотік G описується наступним чином [5]:
якщо для $x \in E$ для всіх $t > 0$ $V(t, x) \notin M$, то

$$G(t, x) = V(t, x).$$

Інакше

$$G(t, x) = \begin{cases} V(t - t_n, x_n^+), & t \in [t_n, t_{n+1}), \\ x_{n+1}^+, & t = t_{n+1}, \end{cases} \quad (2)$$

де $t_0 = 0$, $t_{n+1} = \sum_{k=0}^n s_k$, $x_{n+1}^+ = IV(s_n, x_n^+)$, $x_0^+ = x$, s_n — моменти імпульсного збурення, що характеризуються умовою $V(s_n, x_n^+) \in M$.

Формула (2) визначає (не обов'язково неперервну) напівгрупу $G : R_+ \times E \rightarrow E$ [8], яку будемо називати імпульсним напівпотокком.

Надалі будемо використовувати наступні позначення:

$b(E)$ — сукупність всіх обмежених підмножин E ;

$$\text{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\|_E;$$

$$O_\delta(A) = \{x \in E \mid \text{dist}(x, A) < \delta\}.$$

Означення 1. [12] Компактна множина $\Theta \subset E$ називається рівномірним аттрактором імпульсного напівпотокку G , якщо

1) Θ — рівномірно притягуюча множина, тобто

$$\forall B \in b(E) \text{ dist}(G(t, B), \Theta) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty;$$

2) Θ — мінімальна замкнена множина, що задовольняє умову 1).

Наступна теорема дає критерій існування рівномірного атрактора.

Теорема 1. [13] Нехай для імпульсного напівпотокку G виконується умова дисипативності, тобто

$$\exists B_0 \in b(E) \quad \forall B \in b(E) \quad \exists T = T(B) \quad \forall t \geq T \quad G(t, B) \subset B_0. \quad (3)$$

Тоді G має рівномірний аттрактор Θ тоді і тільки тоді, коли G — асимптотично компактний, тобто

$$\forall \{t_n \nearrow \infty\} \quad \forall \{x_n\} \in b(E)$$

$$\text{послідовність } \{G(t_n, x_n)\} \text{ предкомпактна в } E. \quad (4)$$

При цьому справедливою є рівність

$$\Theta = \omega(B_0) := \bigcap_{\tau > 0} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} G(t, B_0)}. \quad (5)$$

Одним з означень стійкості інваріантної множини відносно напівпотoku (еквівалентних у випадку неперервних напівпотоків) є наступне.

Означення 2. [19] Множина $A \subset E$ називається стійкою відносно напівпотoku G , якщо

$$A = D^+(A) := \bigcup_{x \in A} \{y \mid y = \lim G(t_n, x_n), x_n \rightarrow x, t_n \geq 0\}. \quad (6)$$

Зауваження Оскільки $A \subset D^+(A)$ за побудовою, то властивість (6) еквівалентна вкладенню $D^+(A) \subset A$.

Відомо, що для неперервних напівпотоків, що задовольняють умови Теорема 1, рівномірний аттрактор є інваріантним і стійким в сенсі (6). В даній роботі ми доведемо, що для імпульсного напівпотoku, породженого імпульсно-збуреним хвильовим рівнянням, рівномірний аттрактор Θ задовольняє вкладення

$$D^+(\Theta \setminus M) \subset \overline{\Theta \setminus M}. \quad (7)$$

2. Імпульсно-збурене хвильове рівняння

Розглянемо триплет гільбертових просторів $V \subset H \subset V^*$ з компактним та щільним вкладенням, де $\|\cdot\|$ та (\cdot, \cdot) відповідно норма та скалярний добуток в H . $A : V \rightarrow V^*$ — лінійний, неперервний, самоспряжений, коерцитивний оператор. Функція $\langle Au, u \rangle^{\frac{1}{2}}$ визначає норму в V , яку будемо позначати $\|u\|_V$.

У даній роботі будемо розглядати таку еволюційну задачу ($\beta > 0$):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial y}{\partial t} + Ay = 0, \\ y|_{t=0} = y_0 \in V, \\ y_t|_{t=0} = y_1 \in H, \end{cases} \quad (8)$$

яка в фазовому просторі $E = V \times H$ породжує неперервну напівгрупу $V : R_+ \times E \rightarrow E$, де

$$\text{для } z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in E \quad V(t, z_0) = z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y_t(t) \end{pmatrix}.$$

Норма в E задається рівністю:

$$\text{для } z = \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} \in E \quad \|z\|_E = \|y\|_V + \|w\|.$$

Вперше поведінка траєкторій еволюційного рівняння другого порядку з розривними траєкторіями була досліджена у роботі [20], де в якості імпульсної множини розглядалась множина рівня повної енергії. Проте, як показано в роботі [18], задача (8) з імпульсними параметрами

$$M = \left\{ z \in E \mid \|z\|_E = a \right\}, \quad Iz = (1 + \mu)z$$

залишаючись дисипативною, не має рівномірного атрактора в фазовому просторі E . Тому в якості імпульсної множини природно розглядати лінію рівня деякої напівнорми l_p такої, що

$$\forall z \in E \quad l_p(z) \rightarrow \|z\|_E, \quad p \rightarrow \infty.$$

Надалі будемо використовувати $\{\lambda_i\}, \{\psi_i\}$ — розв'язки спектральної задачі:

$$\forall i \geq 1 \quad A\psi_i = \lambda_i\psi_i, \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lambda_i \rightarrow \infty, \quad i \rightarrow \infty.$$

Для $p \geq 1$ виберемо $l_p : E \rightarrow R$ наступним чином:

$$\text{для } z = \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} \in E \quad l_p(z) = \left(\sum_{i=1}^p \{\lambda_i(y, \psi_i)^2 + (w, \psi_i)^2\} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

При фіксованих $\forall p \geq 1, a > 0, \mu > 0$ покладемо

$$M = \left\{ z \in E \mid l_p(z) = a \right\}, \quad (9)$$

$$M' = \left\{ z \in E \mid l_p(z) = a(1 + \mu) \right\},$$

Щодо імпульсного відображення $I : M \rightarrow M'$, то будемо вважати, що воно змінює лише перші p координат фазового вектора, тобто

$$\begin{aligned} \text{для } z = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \in M \\ I(z) \in \left\{ \sum_{i=1}^p \begin{pmatrix} c'_i \\ d'_i \end{pmatrix} \psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \mid \right. \\ \left. \sum_{i=1}^p \{\lambda_i(c'_i)^2 + (d'_i)^2\} = a^2(1 + \mu)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Наприклад, відображення I може збільшувати в $1 + \mu$ разів перші p координат фазового вектора

$$I\left(\sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i\right) = (1 + \mu) \sum_{i=1}^p \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i.$$

3. Існування та стійкість рівномірного атрактора задачі (8)–(10).

Результат щодо існування рівномірного атрактора для імпульсного напівпотуку, породженого задачею (8)–(10), було доведено в [18]. Ми наводимо його в тому обсязі, який необхідний для доведення основного результату про стійкість.

Теорема 2. [18] Для довільного імпульсного відображення $I : M \mapsto M'$, що задовольняє (10), імпульсна задача (8), (9) породжує дисипативний імпульсний напівпотік $G : R_+ \times E \rightarrow E$, що має рівномірний аттрактор Θ , причому

$$\Theta \subset \left\{ \sum_{i=1}^p \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \mid \sum_{i=1}^p \{\lambda_i c_i^2 + d_i^2\} \in [a^2, a^2(1 + \mu)^2] \right\} \cup \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Доведення.

Відносно розв'язків еволюційної задачі (8) $z(t) = V(t, z_0) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y_t(t) \end{pmatrix}$ маємо, що наступні функції

$$\forall i \geq 1 \quad u_i(t) = (y(t), \psi_i), \quad v_i(t) = u_i'(t) = (y_t(t), \psi_i)$$

задовольняють задачу Коші:

$$\begin{cases} u_i''(t) + 2\beta u_i' + \lambda_i u_i(t) = 0, \\ u_i(0) = (y_0, \psi_i), \quad u_i'(0) = (y_1, \psi_i). \end{cases} \quad (12)$$

Крім того, справедливою є така рівність

$$\forall t \geq 0 \quad \lambda_i u_i^2(t) + v_i^2(t) = \lambda_i u_i^2(0) + v_i^2(0) - 4\beta \int_0^t v_i^2(s) ds. \quad (13)$$

Беручи до уваги (12) та (13) отримуємо, що функція

$$t \rightarrow l_p^2(z(t)) = \sum_{i=1}^p \{\lambda_i u_i^2(t) + v_i^2(t)\}, \quad \text{де } l_p(z_0) \neq 0 \quad (14)$$

є строго спадною на $[0, +\infty)$. Зокрема виконується умова (1). Більш того, з формули (12) отримуємо, що $\exists c > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall i \geq 1 \quad \forall t \geq 0$

$$\lambda_i u_i^2(t) + v_i^2(t) \leq c^2 (\lambda_i u_i^2(0) + v_i^2(0)) e^{-2\eta t}. \quad (15)$$

Нехай $z_0 \in IM$. Враховуючи (13) та (15) $\exists \bar{t} > 0$ таке, що $z(\bar{t}) \in M$. Таким чином,

$$a^2 = a^2(1 + \mu)^2 - 4\beta \int_0^{\bar{t}} \sum_{i=1}^p v_i^2(s) ds \quad (16)$$

і в силу (13) справедливою є така нерівність:

$$\forall t \geq 0 \quad \sum_{i=1}^p v_i^2(t) \leq a^2(1 + \mu)^2. \quad (17)$$

Отже, враховуючи (16) та (17) отримуємо, що

$$\bar{t} \geq \frac{1}{4\beta} \left(1 - \frac{1}{(1 + \mu)^2}\right). \quad (18)$$

З (18) випливає, що задача (8)–(10) породжує імпульсний напівпотік G за формулою (2).

При досягненні імпульсної множини M фазовим вектором z імпульсного збурення зазнають лише перші p координат даного вектора. Тому в силу (13) та (15) можемо отримати таку оцінку:

$$\begin{aligned} \forall z_0 \in E \quad \forall t \geq 0 \quad \|G(t, z_0)\|_E^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i u_i^2(t) + v_i^2(t)) \leq \\ &\leq c^2 \|z_0\|_E^2 e^{-2\eta t} + a^2 (1 + \mu)^2, \end{aligned} \quad (19)$$

яка гарантує властивість дисипативності (3).

Далі доведемо виконання умови асимптотичної компактності. Розглянемо таку послідовність

$$\xi_n = G(t_n, z_n^0), \text{ де } \|z_n^0\|_E \leq r, \quad t_n \nearrow \infty.$$

Якщо для нескінченно багатьох $n \geq 1$ $V(\cdot, z_n^0)$ не мають перетину з імпульсною множиною M , то

$$\xi_n = V(t_n, z_n^0).$$

Так як в силу [9] $\exists c > 0, \eta > 0$ такі, що $\forall z_0 \in E$ для $z(t) = V(t, z_0)$ справедлива оцінка

$$\forall t \geq 0 \quad \|z(t)\|_E \leq c \|z_0\|_E e^{-\eta t}, \quad (20)$$

то

$$\xi_n \rightarrow 0 \text{ в } E.$$

Якщо ж існують точки перетину з імпульсною множиною M , зокрема $\tau_n > 0$ є моментом першого потрапляння $V(\cdot, z_n^0)$ на множину M , то з (20) отримуємо таку оцінку

$$a^2 \leq \|V(\tau_n, z_n^0)\|_E^2 \leq c^2 r^2 e^{-2\eta \tau_n}.$$

Таким чином

$$\tau_n \leq \frac{1}{\eta} \ln \frac{cr}{a}, \quad (21)$$

тобто фазова точка досягає множини M за невід'ємний час, який залежить лише від величини r . Тому без обмеження загальності можемо вважати, що

$$z_n^0 \in IM, \quad \|z_n^0\|_E \leq r.$$

Для $\forall i \geq p + 1$ в силу (15)

$$\lambda_i(u_i^{(n)}(t_n)^2) + (v_i^{(n)}(t_n))^2 \leq c^2(\lambda_i u_i^2(0)^2 + v_i^2(0))e^{-2\eta t_n}. \quad (22)$$

З іншого боку, враховуючи формулу (13)

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i(u_i^{(n)}(t_n))^2 + (v_i^{(n)}(t_n))^2) \in [a^2, a^2(1 + \mu)^2]. \quad (23)$$

Тоді можемо вважати, що по підпоследовності

$$\forall i \in \overline{1, p}, \quad u_i^{(n)}(t_n) \rightarrow c_i, \quad v_i^{(n)}(t_n) \rightarrow d_i.$$

Звідси,

$$\text{для } \xi = \sum_{i=1}^p \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i$$

$$\|\xi_n - \xi\|_E^2 \leq \sum_{i=1}^p \{\lambda_i(u_i^{(n)}(t_n) - c_i)^2 + (v_i^{(n)}(t_n) - d_i)^2\} + c^2 e^{-2\eta t_n} r^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Таким чином з (24) одержуємо предкомпактність ξ_n , а отже, імпульсний напівпотік G має рівномірний аттрактор Θ , причому в силу (20), (24) має місце вкладення (11). Теорема доведена.

Зауваження 1. Кожна імпульсна траєкторія, що стартує з IM , має нескінчену кількість імпульсних збурень, часові проміжки між якими задовольняють (18). Це, зокрема, означає, що $\Theta \cap M \neq \emptyset$.

Зауваження 2. Кожна імпульсна траєкторія, що стартує з M , в силу (14) не має імпульсних збурень і в силу оцінки (20) прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$. Це, зокрема, означає, що $0 \in \Theta$.

Наступна теорема є основним результатом роботи.

Теорема 3. Нехай імпульсне відображення $I : M \rightarrow M'$ є неперервним. Тоді рівномірний аттрактор Θ імпульсного напівпотіку, породженого задачею (8)–(10), є стійким в тому сенсі, що

$$D^+(\Theta \setminus M) \subset \overline{\Theta \setminus M}. \quad (25)$$

Доведення.

Нехай $\xi \in \Theta \setminus M$. Якщо $\xi = 0$, то $G(t, 0) = 0 \in \Theta \forall t \geq 0$. Інакше в силу (11)

$$\xi = \sum_{i=1}^p \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i, \text{ де } \sum_{i=1}^p \{\lambda_i c_i^2 + d_i^2\} \in (a^2, a^2(1 + \mu)^2]. \quad (26)$$

Враховуючи (14), маємо

$$\forall t \geq 0 \quad l_p^2(V(t, \xi)) \in (a^2, a^2(1 + \mu)^2]. \quad (27)$$

Крім того, оскільки для $\xi = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ маємо

$$(u_0, \psi_i) = (v_0, \psi_i) = 0 \quad \forall i \geq p + 1,$$

то в силу (12) для $V(t, \xi) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ маємо

$$(u(t), \psi_i) = (v(t), \psi_i) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall i \geq p + 1.$$

Це означає, що

$$\forall t \geq 0 \quad G(t, \Theta \setminus M) \subset \Theta \setminus M \quad (28)$$

Доведемо рівність

$$\Theta = \overline{\Theta \setminus M} \quad (29)$$

В силу замкненості Θ маємо вкладення $\overline{\Theta \setminus M} \subset \Theta$. Тепер нехай $\xi \in \Theta \cap M$. В силу (11)

$$\xi = \sum_{i=1}^p \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i, \text{ де } \sum_{i=1}^p \{\lambda_i c_i^2 + d_i^2\} = a^2. \quad (30)$$

Розглядаючи послідовність

$$\xi_n = \sum_{i=1}^p \begin{pmatrix} c_i + 1/n \\ d_i + 1/n \end{pmatrix} \psi_i, \text{ де } \sum_{i=1}^p \{\lambda_i c_i^2 + d_i^2\} = a^2, \quad (31)$$

маємо, що $\xi_n \in \Theta$ і $\|\xi_n - \xi\|_E \rightarrow 0$. Звідси $\xi \in \overline{\Theta \setminus M}$ і шукана рівність доведена.

Тепер для того, щоб довести (25), достатньо довести вкладення

$$D^+(\Theta \setminus M) \subset \Theta. \quad (32)$$

Будемо міркувати від супротивного. Нехай для деяких $\xi_n \rightarrow \xi \in \Theta \setminus M$ та $\tau_n \geq 0$ виконується

$$z_n = G(\tau_n, \xi_n) \rightarrow z \notin \Theta. \quad (33)$$

Якщо $\tau_n \rightarrow \infty$, то в силу (5) і асимптотичної компактності напівпотіку G послідовність $\{z_n\}$ має принаймні одну граничну точку і всі її граничні точки належать Θ , тобто маємо протиріччя з (33).

Тоді можемо вважати, що $\tau_n \rightarrow \tau \geq 0$.

Оскільки $\xi \in \Theta \setminus M$, то $l_p(\xi) > a$, $l_p(\xi_n) > a$. Тоді в силу умови монотонності (14) виводимо, що існують $s_0^{(n)}$ та s_0 - моменти першого попадання траєкторій $V(\cdot, \xi_n)$ та $V(\cdot, \xi)$ на множину M і при цьому $s_0 > 0$. Крім того, в силу оцінки (21) можемо вважати, що по підпослідовності $s_0^{(n)} \rightarrow s_0$.

Якщо $\tau < s_0$, то $\tau_n < s_0^{(n)}$, отже, в силу (28)

$$z_n = V(\tau_n, \xi_n) \rightarrow V(\tau, \xi) = G(\tau, \xi) \in \Theta \setminus M \Rightarrow \text{протиріччя з (33)}.$$

Якщо $\tau = s_0$ і $\tau_n < s_0^n$, то

$$z_n = V(\tau_n, \xi_n) \rightarrow V(\tau, \xi) = V(s_0, \xi) \in M.$$

Оскільки для $\eta_n \searrow 0$ $\tau - \eta_n < s_0$, то з одного боку

$$V(\tau - \eta_n, \xi) \rightarrow V(\tau, \xi),$$

а з іншого,

$$V(\tau - \eta_n, \xi) = G(\tau - \eta_n, \xi) \in \Theta \setminus M.$$

Звідси, $z = V(\tau, \xi) \in \overline{\Theta \setminus M} \subset \Theta \Rightarrow$ протиріччя з (33).

Якщо $\tau = s_0$ і $\tau_n \geq s_0^n$, то $\tau_n = s_0^n + \alpha_n$, $\alpha_n \rightarrow 0 +$. Нехай $z_1^{(n)+} = IV(s_0^{(n)}, \xi_n)$. В силу умов неперервності імпульсного відображення I маємо

$$z_1^{(n)+} \rightarrow IV(s_0, \xi) = z_1^+.$$

Отже,

$$z_n = V(\alpha_n, z_1^{(n)+}) \rightarrow z_1^+ = G(s_0, \xi) \in \Theta \setminus M \Rightarrow \text{протиріччя з (33)}.$$

Нехай $\tau > s_0$. Тоді $\tau_n > s_0^{(n)}$. Оскільки $z_1^{(n)+}, z_1^+ \in IM$, то $l_p(z_1^{(n)+}) = l_p(z_1^+) = a(1 + \mu) > a$. Отже, існують $s_1^{(n)}$ та s_1 - моменти першого попадання траєкторій $V(\cdot, z_1^{(n)+})$ та $V(\cdot, z_1^+)$ на множину M , причому по підпослідовності $s_1^{(n)} \rightarrow s_1 > 0$. Користуючись формулою (2), можемо повторити попередні міркування для $s_0 < \tau \leq s_0 + s_1$ і т.д. і кожного разу одержувати протиріччя з (33). Отже,

$$D^+(\Theta \setminus M) \subset \Theta = \overline{\Theta \setminus M}$$

і теорема доведена.

3. ВИСНОВКИ

У роботі досліджується якісна поведінка імпульсного напівпотoku, породженого хвильовим рівнянням, розв'язки якої зазнають імпульсного збурення при досягненні фіксованої імпульсної підмножини в фазовому просторі. Для широких класів імпульсних відображень доведено існування та встановлено явний вигляд рівномірного атрактора. За додаткової умови неперервності імпульсного відображення доведено теорему про стійкість неімпульсної частини рівномірного атрактора.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Самойленко А. М.** Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. — К.: Вища школа, 1987. — 287 с.
2. **Lakshmikantham V.** Theory of impulsive differential equations / V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov. — Singapore : World Scientific, 1989. — 288 p.
3. **Samoilenko A. M.** Impulsive differential equations / A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk. — Singapore : World Scientific, 1995. — 462 p.
4. **Akhmet M.** Principles of Discontinuous Dynamical Systems / M Akhmet. — New York: Springer, 2010. — 176 p.
5. **Kaul S. K.** Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems / S. K. Kaul // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. — 1994. — Vol. 7. — №4. — P. 509–523.
6. **Pavlidis T.** Stability of a class of discontinuous dynamical systems / T. Pavlidis // Information and control. — 1996. — Vol. 9. — P. 298–322.
7. **Ciesielski K.** On stability in impulsive dynamical systems / K. Ciesielski // Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics — 2004. — Vol. 52. — P. 81–91.
8. **Bonotto E. M.** Flows of characteristic $0+$ in impulsive semidynamical systems / E. M. Bonotto // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2007. — Vol. 332. — P. 81–96.
9. **Temam R.** Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics / R. Temam. — New York: Springer, 1988. — 500 p.
10. **Chepyzhov V. V.** Attractors for Equations of Mathematical Physics / V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik — Rhode Island: American Mathematical Society, 2002. — 324 p.
11. **Perestyuk M. O.** Long-time behavior of evolution inclusion with non-damped impulsive effects / M. O. Perestyuk, O. V. Kapustyan // Memoirs of Differential equations and Mathematical physics. — 2012. — Vol. 56. — P. 89–113.
12. **Perestyuk M. O.** Global attractors of impulsive infinite-dimensional systems / M. O. Perestyuk, O. V. Kapustyan // Ukrainian Mathematical Journal. — 2016. — Vol. 68. — №4. — P. 517–528.
13. **Dashkovskiy S.** Invariance and stability of global attractors for multi-valued impulsive dynamical systems / S. Dashkovskiy, P. Feketa, O. Kapustyan and I. Romaniuk // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 458. — P. 193–218.
14. **Bonotto E. M.** Global attractors for impulsive dynamical systems — a precompact approach / E. M. Bonotto, M. C. Bortolan, A. N. Carvalho and R. Czaja // Journal of Differential Equations. — 2015. — Vol. 259. — P. 2602–2625.

15. **Bonotto E. M.** Semicontinuity of attractors for impulsive dynamical systems / E. M. Bonotto, M. C. Bortolan, R. Collegari and R. Czaја // Journal of Differential Equations. — 2016. — Vol. 261. — P. 4338–4367.
16. **Капустян О. В.** Stability of global attractors of impulsive infinite-dimensional systems / О. В. Капустян, М. О. Перестук, І. В. Романюк // Ukrainian Mathematical Journal. — 2018. — Vol. 70. — №1. — P. 30–41.
17. **Капустян О. В.** Стійкість рівномірних аттракторів для одного класу імпульсних параболічних систем / О. В. Капустян, О. В. Перегуда, І. В. Романюк // Дослідження в математиці і механіці. — 2018. — т. 23. — № 2(32). — С. 35–44.
18. **Капустян О. В.** Global attractors of an impulsive dynamical system generated by the wave equation / О. В. Капустян, І. В. Романюк // Journal of mathematical Sciences. — 2019. — Vol. 236. — № 3. — P. 300–311.
19. **Bhatia N.P.** Stability theory of dynamical systems. / N. P. Bhatia, G. P. Szegö. — New York: Springer, 2002. — 255 p.
20. **Myshkis A. D.** Vibrations of the string with energy dissipation and impulsive feedback support // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. — 1996. — Vol. 26. — №7. — P. 1271–1278.

Капустян О. В., Капустян О. А., Перегуда О. В., Романюк І. В.

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНОГО АТТРАКТОРА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ

Резюме

Работа посвящена исследованию качественного поведения решений волнового уравнения, траектории которого испытывают импульсное возмущение при достижении фиксированного (импульсного) подмножества в фазовом пространстве. Пользуясь общей схемой построения бесконечномерной импульсной динамической системы и используя понятие равномерного аттрактора — минимального компактного равномерно притягивающего множества, получен результат о существовании и явном виде равномерного аттрактора для импульсной динамической системы, порожденной волновым уравнением. Траектории такой системы могут иметь бесконечное количество импульсных точек при встрече с импульсным подмножеством фазового пространства. Таким образом равномерный аттрактор может иметь непустое пересечение с импульсным множеством и как результат не обладать свойством устойчивости. Однако благодаря дополнительным условиям на импульсные параметры задачи в данной работе удалось доказать свойство устойчивости для не импульсной части равномерного аттрактора.

Ключевые слова: импульсная динамическая система, устойчивость, импульсное возмущение, равномерный аттрактор, волновое уравнение.

Капустян О. В., Капустян О. А., Перегуда О. В., Романюк І. В.

STABILITY OF A UNIFORM ATTRACTOR FOR A SECOND-ORDER EVOLUTION EQUATION WITH DISCONTINUOUS TRAJECTORIES

Summary

The work is devoted to the study of the qualitative behavior of solutions of the wave equation, whose trajectories have impulsive perturbations in moments when they reach a fixed (impulsive) subset of the phase space. Using the general constructing scheme of the infinite-dimensional impulsive dynamical system and using the concept of a uniform attractor — a minimal compact uniformly attracting set, we obtained the result about the existence and the

explicit form of a uniform attractor for the corresponding impulsive dynamical system. Trajectories of such system can have an infinite number of impulsive points when they encounter an impulsive subset of the phase space. Thus, a uniform attractor may have a non-empty intersection with the impulsive set and, as a result, may not have the stability property. However, due to the additional conditions on the impulsive parameters of the problem, we managed to prove the stability property for the non-impulsive part of the uniform attractor. *Key words: impulsive dynamical system, stability, impulsive perturbation, uniform attractor, wave equation.*

REFERENCES

1. Samoilenko A. M., Perestyuk M. O. (1987). *Dyfferentsyalnie uravneniya s ympulsnim vozdeistviem [Differential equations with impulsive action]*. Kyiv: Vyshcha shkola, 287 p.
2. Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S. (1989). *Theory of impulsive differential equations*. Singapore: World Scientific, 288 p.
3. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. (1995). *Impulsive differential equations*. Singapore: World Scientific, 462 p.
4. Akhmet M. (2010). *Principles of Discontinuous Dynamical Systems*. New York: Springer, 176 p.
5. Kaul S. K. (1994). *Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems*. *J Appl Math Stoch Anal*, Vol. 7, № 4, P. 509–523.
6. Pavlidis T. (1996). *Stability of a class of discontinuous dynamical systems*. *Information and control*, Vol. 9, P. 298–322.
7. Ciesielski K. (2004). *On stability in impulsive dynamical systems*. *Bulletin Polish Acad. Sci. Math.*, Vol. 52, P. 81–91.
8. Bonotto E. M. (2007). *Flows of characteristic $0+$ in impulsive semidynamical systems*. *J Math Anal Appl*, Vol. 332, P. 81–96.
9. Temam R. (1988). *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. New York: Springer, 500 p.
10. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. (2002). *Attractors for Equations of Mathematical Physics*. Rhode Island: American Mathematical Society, 324 p.
11. Perestyuk M. O., (2012). *Long-time behavior of evolution inclusion with non-damped impulsive effects*. *Memoirs Diff eq and Math phys*, Vol. 56, P. 89–113.
12. Perestyuk M. O., Kapustyan O. V. (2016). *Global attractors of impulsive infinite-dimensional systems*. *UMJ*, Vol. 68, № 4, P. 517–528.
13. Dashkovskiy S., Feketa P., Kapustyan O. V., Romaniuk I. V. (2018). *Invariance and stability of global attractors for multi-valued impulsive dynamical systems*. Vol. 458, P. 193–218.
14. Bonotto E. M, Bortolan M. C., Carvalho A. N., Czaja R. (2015). *Global attractors for impulsive dynamical systems — a precompact approach*. *J Diff Eq*, Vol. 259, P. 2602–2625.
15. Bonotto E. M, Bortolan M. C., Collegari R., Czaja R. (2016). *Semicontinuity of attractors for impulsive dynamical systems*. *J Diff Eq*, Vol. 261, № 1, P. 4338–436.
16. Kapustyan O. V., Perestyuk M. O., Romaniuk I. V. (2018). *Stability of global attractors of impulsive infinite-dimensional systems*. *UMJ*, Vol. 70, №1, P. 30–41.
17. Kapustyan O. V., Pereguda O. V., Romaniuk I. V. (2018) *Stability of uniform attractors for one class of impulsive parabolic systems*. *RMM*, Vol. 23, № 2(32), P. 35–44.

18. Kapustyan O. V., Romaniuk I. V (2019) *Global attractors of an impulsive dynamical system generated by the wave equation. J Math Sci*, Vol. 236, № 3, P. 300-311.
19. Bhatia N. P., Szegö G. P. (2002). *Stability theory of dynamical systems*. New York: Springer, 255 p.
20. Myshkis A. D. (1996). *Vibrations of the string with energy dissipation and impulsive feedback support. Nonlin Anal: Theory, Methods and App.*, Vol. 26, №7, P. 1271–1278.

УДК 517.9

**Т. А. Комлева¹, И. В. Молчанюк¹, Н. В. Скрипник²,
А. В. Плотников¹**

¹Одесская государственная академия строительства и архитектуры

²Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОДНА ЛИНЕЙНАЯ МНОГОЗНАЧНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ

В последнее время многие авторы рассматривали вопросы существования, единственности и свойства решений многозначных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, уравнений высших порядков, исследовали импульсные и управляемые системы в рамках теории многозначных уравнений. Очевидно, что получение всех этих результатов было бы невозможно без развития теории многозначного анализа. В последние появились новые определения производной для многозначных отображений, которые в отличие от использовавшейся ранее производной Хукухары, дали возможность дифференцировать многозначные отображения, диаметр которых не только не убывающая функция. В результате были рассмотрены многозначные дифференциальные уравнения, решения которых являются многозначные отображения, диаметр которых не является монотонной функцией. В данной статье рассматривается новая постановка задачи оптимального управления (задача быстрогодействия), которая стала возможна благодаря этим новым производным и дифференциальным уравнениям, а так же приведен метод решения данной задачи.

MSC: 34A60, 34A12.

Ключевые слова: многозначные уравнения, управление, задача быстрогодействия, производная Хукухары.

DOI: 10.18524/2519-206x.2019.2(34).190048.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в рамках теории многозначных уравнений были рассмотрены свойства решений многозначных дифференциальных уравнений, многозначных дифференциальных включений, многозначных интегро-дифференциальных уравнений и многозначных интегральных уравнений, а также исследовались дискретные многозначные системы, импульсные многозначные системы и управляемые многозначные системы (см. [1–7] и ссылки в них). Очевидно, что получение всех этих результатов было невозможно без развития теории многозначного анализа (см. [1–4; 7] и ссылки в них).

В последние десятилетия в работах А.В. Плотникова и Н.В. Скрипник [8–11], М.Т. Malinowski [12; 13], Н. Vu, L.S. Dong [14], Н. Vu, N. Van Hoa [15] и Ş.E. Amrahov, A. Khastan, N. Gasilov, A.G. Fatullayev [16] появились определения производной от многозначного отображения, которые в отличие от уже ставшей классической производной Хукухары [17], дали возможность дифференцировать многозначные отображения, диаметр ко-

торых является не монотонной функцией. Это дало возможность не только рассматривать новые типы многозначных дифференциальных уравнений, но и новые задачи оптимального управления многозначными отображениями.

В данной статье рассмотрена задача быстрогодействия многозначным объектом, поведение которого описывается линейным многозначным дифференциальным уравнением и предложен метод ее разрешения.

1. Необходимые определения и обозначения. Пусть R^n - n -мерное пространство с евклидовой метрикой $d(\cdot, \cdot)$ и $conv(R^n)$ - метрическое пространство всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A, B) = \max \left\{ \max_{a \in A} \min_{b \in B} d(a, b), \max_{b \in B} \min_{a \in A} d(a, b) \right\},$$

где $A, B \in conv(R^n)$.

Как известно, пространство $conv(R^n)$ не является линейным пространством относительно операций сложения и умножения на скаляр, так как в общем случае нельзя ввести противоположного для $A \in conv(R^n)$ элемента, то есть в общем случае $A + (-1)A \neq \{0\}$, хотя, если $A = \{a\} \in R^n$, то для него противоположный элемент существует.

Отсутствие противоположного элемента в пространстве $conv(R^n)$ приводит к неоднозначному введению понятия разности множеств и условиям ее существования. Наиболее распространенной и используемой в научных публикациях является разность Хукухары [17].

Определение 1 ([17]). Пусть $X, Y \in conv(R^n)$, а множество $Z \in conv(R^n)$ таково, что $X = Y + Z$. Тогда множество Z мы будем называть разностью по Хукухаре множеств X и Y и писать $Z = X \overset{H}{-} Y$.

Основными свойствами разности Хукухары [2] являются следующие:

- 1) если разность Хукухары двух множеств $A \overset{H}{-} B$ существует, то она единственная;
- 2) $A \overset{H}{-} A = \{0\}$ для любого $A \in conv(R^n)$;
- 3) $(A + B) \overset{H}{-} B = A$ для любых $A, B \in conv(R^n)$.

М. Нукунага ввел понятие H -дифференцируемости [17] для многозначных отображений, используя разность Хукухары.

Определение 2 ([17]). Будем говорить, что $X(\cdot) : [0, T] \rightarrow conv(R^n)$ имеет производную по Хукухаре (H -производную) $D_H X(t) \in conv(R^n)$ в

точке $t \in (0, T)$, если для всех малых $\Delta > 0$ соответствующие разности Хукухары существуют и выполняется условие:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t + \Delta) \overset{H}{-} X(t)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t) \overset{H}{-} X(t - \Delta)) = D_H X(t).$$

Свойства производной Хукухары рассматривались в работах [1–4; 17]. Приведем некоторые из них.

Теорема 1 ([17]). *Если многозначное отображение $X : [0, T] \rightarrow \text{conv}(R^n)$ является дифференцируемым по Хукухару на $[0, T]$, тогда*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t D_H X(s) ds,$$

где интеграл понимается в смысле Хукухары [17].

Замечание 1. *Если многозначное отображение $X(\cdot)$ дифференцируемо по Хукухару на промежутке $[0, T]$, то функция $\text{diam}(X(\cdot))$ является неубывающей функцией на $[0, T]$.*

Замечание 2 ([18]). *Обратное утверждение не будет верным. Например, пусть $X(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \text{conv}(R^2)$ такое, что $X(t) = A(t)C(t)$, где $C(t) = \{x \in R^2 \mid |x_i| \leq t, i = 1, 2\}$ – квадрат, $A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ – матрица поворота. Очевидно, что $\text{diam}(X(t)) = \sqrt{2}t$. Однако, многозначное отображение $X(\cdot)$ не является дифференцируемым по Хукухару на $[0, 1]$ (так как отсутствует разность Хукухары $X(t_2) \overset{h}{-} X(t_1)$ для всех точек $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$).*

Замечание 3. *Если функция $\text{diam}(X(\cdot))$ является убывающей функцией на $[0, T]$, то многозначное отображение $X(\cdot)$ не является дифференцируемой по Хукухару на $[0, T]$.*

Очевидно, что последнее замечание качественно ухудшает возможности применения производной Хукухары для дифференцирования многозначных отображений и использования ее при рассмотрении многозначных дифференциальных уравнений.

В последующем были предприняты различные подходы для исправления этого недочета. Одним из первых был предложен в работах Н.Т. Banks, М.С. Jacobs [19] и Ю.Н.Тюрин [20]. В этих работах метрическое пространство $(\text{conv}(R^n), h(\cdot, \cdot))$ при помощи теоремы Radström [1–4] вкладывается в линейное пространство над полем действительных чисел \mathcal{B} и вводится понятие π -производной. Некоторые свойства этой производной

рассматривались в работах [1–4; 19; 21; 22]. Там же было доказано, что если многозначное отображение $X(\cdot)$ дифференцируемо по Хукухару на $[0, T]$, то оно π -дифференцируемо на $[0, T]$. Однако, π -производная от многозначного отображения $X(\cdot)$ может быть элементом пространства \mathcal{B} , которое не имеет аналога в пространстве $\text{conv}(R^n)$ и ее применение при рассмотрении многозначных дифференциальных уравнений очень затруднительно (смотри [1–3; 21; 22]).

Далее в работе [23] была введена T -производная, которая обобщает производную Хукухары и аналогична π -производной. Однако, данная производная так же затрудняет запись и рассмотрение соответствующего многозначного дифференциального уравнения [2; 3; 23].

Впоследствии, А.В. Плотников и Н.В. Скрипник, используя основные идеи T -производной [3; 23], ввели новое определение производной для многозначных отображений.

Определение 3 ([8]). Будем говорить, что $X(\cdot) : [0, T] \rightarrow \text{conv}(R^n)$ имеет обобщенную производную (PS -производную) $D_{ps}X(t) \in \text{conv}(R^n)$ в точке $t \in (0, T)$, если для всех малых $\Delta > 0$ соответствующие разности Хукухары существуют и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t + \Delta) \overset{H}{-} X(t)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t) \overset{H}{-} X(t - \Delta)) = D_{ps}X(t); \\ (ii) \quad & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t) \overset{H}{-} X(t + \Delta)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t - \Delta) \overset{H}{-} X(t)) = D_{ps}X(t); \\ (iii) \quad & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t + \Delta) \overset{H}{-} X(t)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t - \Delta) \overset{H}{-} X(t)) = D_{ps}X(t); \\ (iv) \quad & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t) \overset{H}{-} X(t + \Delta)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t) \overset{H}{-} X(t - \Delta)) = D_{ps}X(t). \end{aligned}$$

Замечание 4. Если многозначное отображение дифференцируемо по Хукухару, то оно PS -дифференцируемо и $D_{ps}X(t) = D_HX(t)$ (обратное не верно).

Проиллюстрируем это на следующем примере:

Пример 1. Многозначное отображение $X(t) = B_{|t|}(0)$ имеет PS -производную на R и $D_{ps}X(t) \equiv B_1(0)$ для всех $t \in R$. Однако производная Хукухары будет существовать только на интервале $(0, +\infty)$ и $D_HX(t) = B_1(0)$. На интервале $(-\infty, 0)$ многозначное отображение $X(\cdot)$ не будет дифференцируемо по Хукухару так как его диаметр является убывающей функцией.

Теорема 2 ([8]). Если многозначное отображение $X : [0, T] \rightarrow \text{conv}(R^n)$ дифференцируемо в обобщенном смысле на отрезке $[0, T]$, тогда для всех $t \in [0, T]$

(i) если функция $\text{diam}(X(t))$ – неубывающая функция на $[0, T]$, то

$$X(t) = X(0) + \int_0^t D_{ps}X(s)ds;$$

(ii) если функция $\text{diam}(X(t))$ – убывающая функция на $[0, T]$, то

$$X(t) = X(0) \overset{H}{-} \int_0^t D_{ps}X(s)ds.$$

Более подробно свойства PS-производной изучены в работах [8–11].

В дальнейшем в работах М.Т. Malinowski [12; 13], Н. Vu, L.S. Dong [14], Н. Vu, N. Van Hoa [15] и Ş.E. Amrahov, A. Khastan, N. Gasilov, A.G. Fatullayev [16] была обобщена производная Bede-Gal [24] для интервальнозначных отображений на многозначные отображения.

Определение 4 ([14; 16]). Будем говорить, что $X(\cdot) : [0, T] \rightarrow \text{conv}(R^n)$ имеет Bede-Gal производную (BG-производную) $D_{bg}X(t) \in \text{conv}(R^n)$ в $t \in (0, T)$, если для всех малых $\Delta > 0$ соответствующие разности Хукухары существуют и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- (i) $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t + \Delta) \overset{H}{-} X(t)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t) \overset{H}{-} X(t - \Delta)) = D_{bg}X(t)$
- (ii) $\lim_{\Delta \rightarrow 0} (-\Delta)^{-1}(X(t) \overset{H}{-} X(t + \Delta)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (-\Delta)^{-1}(X(t - \Delta) \overset{H}{-} X(t)) = D_{bg}X(t)$
- (iii) $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t + \Delta) \overset{H}{-} X(t)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (-\Delta)^{-1}(X(t - \Delta) \overset{H}{-} X(t)) = D_{bg}X(t)$
- (iv) $\lim_{\Delta \rightarrow 0} (-\Delta)^{-1}(X(t) \overset{H}{-} X(t + \Delta)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}(X(t) \overset{H}{-} X(t - \Delta)) = D_{bg}X(t)$.

Замечание 5. В работах [12; 13] М.Т. Malinowski рассматривает отображения, которые удовлетворяют условию (ii) и называет производную второй производной Хукухары.

Замечание 6. Если многозначное отображение дифференцируемо по Хукухаре [17], то оно дифференцируемо в смысле Bede-Gal производной и $D_{bg}X(t) = D_HX(t)$ (обратное не верно, смотри пример 1).

Теорема 3 ([16]). Если многозначное отображение $X : [0, T] \rightarrow \text{conv}(R^n)$ BG-дифференцируемо на $[0, T]$, тогда для всех $t \in [0, T]$

(i) если функция $\text{diam}(X(t))$ есть неубывающая функция на $[0, T]$, то

$$X(t) = X(0) + \int_0^t D_{bg}X(s)ds;$$

(ii) если функция $\text{diam}(X(t))$ есть убывающая функция на $[0, T]$, то

$$X(t) = X(0) \frac{H}{(-1)} \int_0^t D_{bg} X(s) ds.$$

Замечание 7. Из замечаний 4 и 6 следует, что если многозначное отображение $X(\cdot)$ дифференцируемо по Хуксуаре на $[0, T]$, то оно BG -дифференцируемо на $[0, T]$ и PS -дифференцируемо на $[0, T]$, а так же $D_H X(t) = D_{ps} X(t) = D_{bg} X(t)$.

Замечание 8. Из примера 1, мы видим, что многозначное отображение $X(t) = B_{|t|}(0)$ BG -дифференцируемо на \mathbb{R} и PS -дифференцируемо на \mathbb{R} , а так же $D_{bg} X(t) \equiv D_{ps} X(t) \equiv B_1(0)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Замечание 9. Так же отметим, что существуют многозначные отображения $X(\cdot)$ такие, что $D_{bg} X(t) \neq D_{ps} X(t)$.

Проиллюстрируем это на следующих примерах:

Пример 2. Пусть многозначное отображение $X : [-1, 1] \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^2)$ такое, что

$$X(t) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq |t|, x_2 \geq 0\}, & t \in [-1, 0], \\ \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq t, x_2 \leq 0\}, & t \in (0, 1] \end{cases} \quad (\text{смотри Рис. 1}).$$

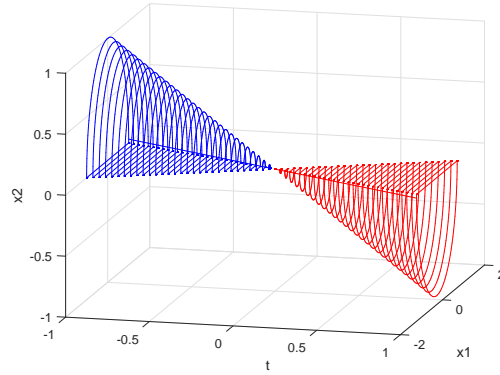


Рис. 1: $X(t)$, $t \in [-1, 1]$

Многозначное отображение $X(\cdot)$ BG -дифференцируемо на $(-1, 1)$ и его BG -производная $D_{bg} X(t) \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_2 \leq 0\}$. Однако, многозначное отображение $X(\cdot)$ PS -дифференцируемо на $(-1, 0)$ и его PS -производная $D_{ps} X(t) \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_2 \geq 0\} \neq D_{bg} X(t)$. Так

же, многозначное отображение $X(\cdot)$ PS-дифференцируемо на $(0, 1)$ и его PS-производная $D_{ps}X(t) \equiv \{x \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_2 \geq 0\} = D_{bg}X(t)$. Следовательно, PS-производная $D_{ps}X(t)$ в точке $t = 0$ не существует (смотри Рис. 2 и Рис. 3).

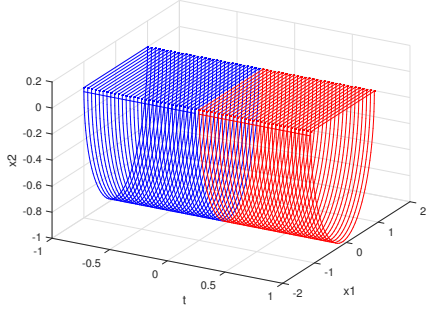


Рис. 2: $D_{bg}X(t), t \in [-1, 1]$

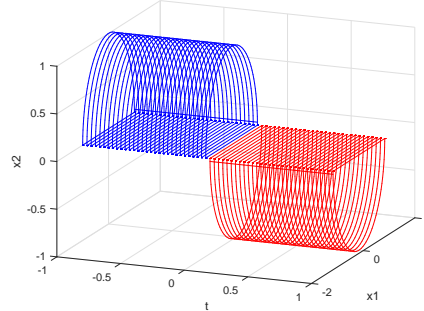


Рис. 3: $D_{ps}X(t), t \in [-1, 1]$

Пример 3. Пусть многозначное отображение $X : [0, 2] \rightarrow conv(R^2)$ такое, что

$$X(t) = \begin{cases} \{x \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq t, x_2 \geq 0\}, & t \in [0, 1], \\ \{x \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 2 - t, x_2 \geq 0\}, & t \in (1, 2] \end{cases} \quad (\text{смотри Рис. 4}).$$

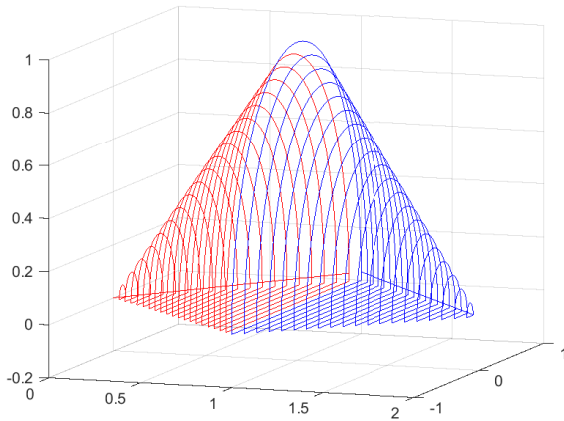
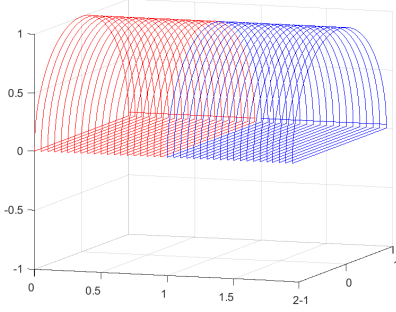
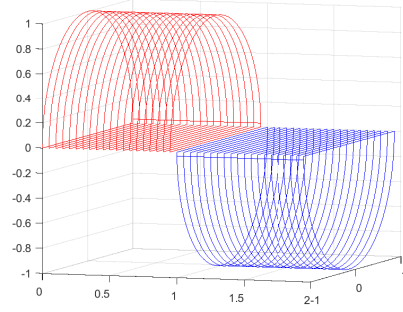


Рис. 4: $X(t), t \in [0, 2]$

Многозначное отображение $X(\cdot)$ PS-дифференцируемо на $(0, 2)$ и его PS-производная $D_{ps}X(t) \equiv \{x \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_2 \geq 0\}$. Однако, многозначное отображение $X(\cdot)$ BG-дифференцируемо на $(0, 1)$ и его

BG-производная $D_{bg}X(t) \equiv D_{ps}X(t)$. Так же, отображение $X(\cdot)$ *BG*-дифференцируемо на (1, 2) и его *BG*-производная $D_{bg}X(t) \equiv (-1)D_{ps}X(t)$. Очевидно, *BG*-производная $D_{bg}X(t)$ в точке $t = 1$ не существует (смотри Рис. 5 и Рис. 6).

Рис. 5: $D_{ps}X(t)$, $t \in [0, 2]$ Рис. 6: $D_{bg}X(t)$, $t \in [0, 2]$

Замечание 10. Далее мы будем использовать только *PS*-производную.

2. Задача быстрогодействия. Пусть поведение объекта описывается следующей системой

$$D_{ps}X = X + u, \quad X(0, u) = X_0, \quad (1)$$

где $X \in \text{conv}(R^n)$ – фазовое множество, $u \in U \subset R^n$ – вектор управления, $U \in \text{conv}(R^n)$ – некоторое заданное множество допустимых значений управления такое, что $0 \in \text{int}U$, $X_0 \in \text{conv}(R^n)$ – начальное множество, $0 \in \text{int}X_0$.

Определение 5. Вектор-функция $u(\cdot)$ называется допустимым управлением для системы (1) на отрезке $[0, T]$, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) суммируема на $[0, T]$;
- 2) $u(t) \in U$ для всех $t \in [0, T]$.

Определение 6. Многозначное отображение $X(\cdot, u)$ будем называть решением системы (1) на отрезке $[0, T]$, соответствующим допустимому управлению $u(\cdot)$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $X(\cdot, u)$ – непрерывно на $[0, T]$;
- 2) $X(\cdot, u)$ – *PS*-дифференцируемо почти всюду на $[0, T]$;
- 3) $X(0, u) = X_0$;
- 4) $D_{ps}X(t, u) \equiv X(t, u) + u(t)$ для почти всех $t \in [0, T]$.

Замечание 11. Для любого допустимого управления $u(\cdot)$ любое решение $X(\cdot, u)$ системы (1) обладает следующим свойством: для всех $t \in [0, T]$ всегда найдутся такое число $a(t) > 0$ и вектор $b(t) \in R^n$, что $X(t, u) = a(t)X_0 + b(t)$, то есть сечение любого решения системы (1) сохраняет форму начального множества.

Определение 7. Многозначное отображение $X_1(\cdot, u)$ будем называть первым базовым решением системы (1) на отрезке $[0, T]$, соответствующее допустимому управлению $u(\cdot)$, если функция его диаметра $\text{diam}(X_1(\cdot, u))$ является монотонно неубывающей функцией на отрезке $[0, T]$.

Замечание 12. Первое базовое решение системы (1) на отрезке $[0, T]$, будет решением следующего интегрального уравнения

$$X(t, u) = X_0 + \int_0^t [X(s, u) + u(s)] ds.$$

Определение 8. Многозначное отображение $X_2(\cdot, u)$ будем называть вторым базовым решением системы (1) на отрезке $[0, T]$, соответствующее допустимому управлению $u(\cdot)$, если функция его диаметра $\text{diam}(X_2(\cdot, u))$ является монотонно убывающей функцией на отрезке $[0, T]$.

Замечание 13. Второе базовое решение системы (1) на отрезке $[0, T]$, будет решением следующего интегрального уравнения

$$X(t, u) = X_0 \frac{H}{H} \int_0^t [X(s, u) + u(s)] ds.$$

Определение 9. Многозначное отображение $X_{ms}(\cdot, u)$ будем называть смешанным решением системы (1) на отрезке $[0, T]$, соответствующее допустимому управлению $u(\cdot)$, если функция его диаметра $\text{diam}(X_{ms}(\cdot, u))$ не является монотонно убывающей или монотонно возрастающей функцией на отрезке $[0, T]$.

Замечание 14. Если многозначное отображение $X_{ms}(\cdot, u)$ является смешанным решением системы (1) на отрезке $[0, T]$, то существует некоторое разбиение не пересекающихся интервалов (t_i, t_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, k$ такое, что $[t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_k, t_{k+1}] = [0, T]$ и на каждом из интервалов многозначное отображение $X_{ms}(\cdot, u)$ удовлетворяет одному из интегральных уравнений

$$X_{ms}(t, u) = X_{ms}(t_i, u) + \int_{t_i}^t [X_{ms}(s, u) + u(s)] ds$$

или

$$X_{ms}(t, u) = X_{ms}(t_i, u) - \frac{H}{t_i} \int_{t_i}^t [X_{ms}(s, u) + u(s)] ds,$$

где $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, k$.

Замечание 15. Для любого допустимого управления $u(\cdot)$ система (1) на любом отрезке $[0, T]$ имеет два базовых решения и бесконечно много смешанных решений.

Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример 4. Пусть поведение объекта описывается системой (1), где $X \in \text{conv}(R^2)$, $X_0 = B_1(0)$, $T = 1$ и $u(t) \equiv 0$ для $t \in [0, 1]$, то есть мы рассмотрим следующую систему

$$D_{ps}X(t) = X(t), \quad X(0) = B_1(0), \quad t \in [0, 1]. \quad (2)$$

Легко получить, что первым базовым решением будет многозначное отображение $X_1(t) = B_{e^t}(0)$, а многозначное отображение $X_2(t) = B_{e^{-t}}(0)$ будет вторым базовым решением (смотри Рис. 7 и Рис. 8).

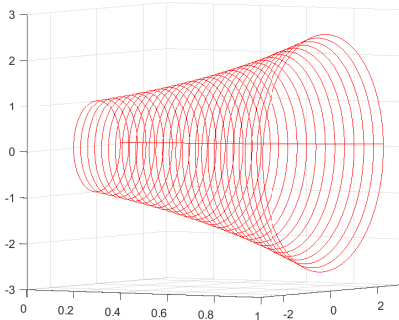


Рис. 7: $X_1(t)$, $t \in [0, 1]$

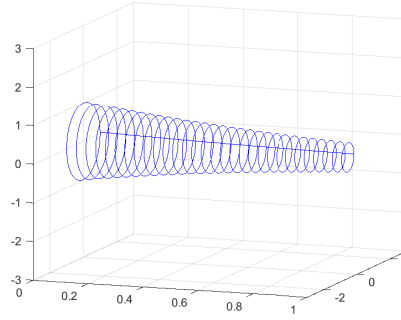


Рис. 8: $X_2(t)$, $t \in [0, 1]$

Используя эти два базовых решения легко построить смешанные решения. Например, смешанными решениями будут следующие многозначные отображения

$$X_{ms}^1(t) = \begin{cases} B_{e^t}(0), & t \in [0, 0.5] \\ B_{e^{1-t}}(0), & t \in [0.5, 1] \end{cases} \quad X_{ms}^2(t) = \begin{cases} B_{e^{-t}}(0), & t \in [0, 0.5] \\ B_{e^{t-1}}(0), & t \in [0.5, 1] \end{cases}$$

(смотри Рис. 9 и Рис. 10).

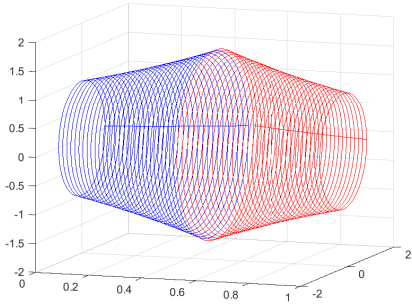


Рис. 9: $X_{ms}^1(t), t \in [0, 1]$

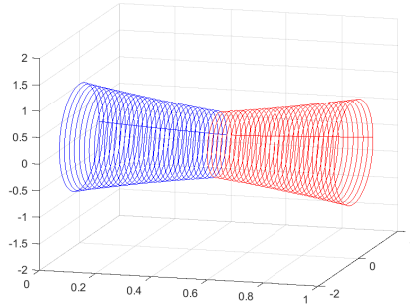


Рис. 10: $X_{ms}^2(t), t \in [0, 1]$

Теперь зададим некоторое множество $X_K \in conv(R^n)$. Предположим, что множество X_K имеет такую же форму как и множество X_0 (X_0 и X_K гомотетичные фигуры с коэффициентом $k > 0$), то есть существуют число $a > 0$ и вектор $b \in R^n$ такие, что $X_K = aX_0 + b$.

Рассмотрим следующую задачу быстрогодействия: требуется перевести объект $X(t, u)$ согласно системы (1) из начального множества X_0 в конечное множество X_K за минимальное время $T > 0$ так, чтобы $X(T, u) = X_K$.

Предположим, что $X_0 = B_1(0)$. Следовательно, $X_K = B_a(b)$.

Решим данную задачу. Рассмотрим следующие две классические задачи быстрогодействия:

Первая задача: требуется перевести объект $x(t, u)$ согласно системы $\dot{x} = x + u$ из начальной точки 0 в конечную точку b за минимальное время $T > 0$;

Вторая задача: требуется перевести объект $x(t, u)$ согласно системы $\dot{x} = -x - u$ из начальной точки 0 в конечную точку b за минимальное время $T > 0$.

Решим данные классические задачи оптимального управления и найдем для первой задачи оптимальное управление $u_*^1(\cdot)$ и минимальное время $T_*^1 < \infty$ и для второй задачи оптимальное управление $u_*^2(\cdot)$ и минимальное время $T_*^2 < \infty$.

Так же легко можно записать соответствующие оптимальные траектории

$$x_*^1(t, u_*^1) = \int_0^t e^{t-s} u_*^1(s) ds,$$

$$x_*^2(t, u_*^2) = - \int_0^t e^{s-t} u_*^2(s) ds.$$

Замечание 16. Как известно, вторая задача может для некоторых $b \in R^n$ не иметь решение. Это следует из того, что область достижимости $X_{ad}^2(t)$ для второй задачи имеет вид

$$X_{ad}^2(t) = (1 - e^{-t})U.$$

Следовательно, если $b \notin (1 - e^{-t})U$ для всех $t \geq 0$, то вторая задача не имеет решение.

Замечание 17. Так как $X_{ad}^1(t) = (e^t - 1)U$ и $X_{ad}^2(t) = (1 - e^{-t})U$, то $X_{ad}^2 \subset X_{ad}^1$ для всех $t > 0$.

Замечание 18. Если оба оптимальных решения существуют, то $T_*^1 < T_*^2$ и существует допустимое управление $u(\cdot)$ для первой задачи, что $x^1(T_*^2, u) = x^2(T_*^2, u_*^2) = b$, т.е.

$$\int_0^{T_*^2} e^{T_*^2-s} u(s) ds = \int_0^{T_*^2} e^{s-T_*^2} u_*^2(s) ds.$$

В начале предположим, что оба оптимальных решения существуют.

Подставим управление $u_*^1(\cdot)$ в систему (1) и получим следующее линейное многозначное дифференциальное уравнение с PS-производной

$$D_{ps}X(t, u_*) = X(t, u_*) + u_*^1(t), \quad X(0, u_*^1) = B_1(0) \quad (3)$$

и найдем первое базовое решение этого уравнения:

$$X_1(t, u_*^1) = B_{e^t}(0) + \int_0^t e^{t-s} u_*^1(s) ds. \quad (4)$$

Далее подставим управление $u_*^2(\cdot)$ в систему (1) и получим следующее линейное многозначное дифференциальное уравнение с PS-производной

$$D_{ps}X(t, u_*) = X(t, u_*) + u_*^2(t), \quad X(0, u_*^2) = B_1(0) \quad (5)$$

и найдем второе базовое решение этого уравнения:

$$X_2(t, u_*^2) = B_{e^{-t}}(0) + \int_0^t e^{s-t} u_*^2(s) ds. \quad (6)$$

Учитывая замечание 18 и свойства базовых решений имеем, что $X_*^2(T_*^2, u_*^2) \subset X_*^1(T_*^1, u_*^1)$. Следовательно, возможны следующие три случая:

- 1) $X_K \subseteq X_*^2(T_*^2, u_*^2) \subset X_*^1(T_*^1, u_*^1)$;
- 2) $X_*^2(T_*^2, u_*^2) \subset X_*^1(T_*^1, u_*^1) \subset X_K$;
- 3) $X_*^2(T_*^2, u_*^2) \subset X_K \subset X_*^1(T_*^1, u_*^1)$.

1. Рассмотрим первый случай.

а) Если $X_K = X_*^2(T_*^2, u_*^2)$, то управление $u_{op}(\cdot) = u_*^2(\cdot)$ и время $T_{op} = T_*^2 = -\ln(b)$ ($0 < b < 1$) являются оптимальными.

б) Если $X_K \subset X_*^2(T_*^2, u_*^2)$, то, следовательно, "объем" второго базового решения в момент времени T_*^2 превышает "объем" конечного множества X_K , т.е. $T_*^2 < -\ln(a)$ ($0 < a < 1$). Поэтому построим следующее управление, которое будет оптимальным

$$u_{op}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, -\ln(a) - T_*^2], \\ u_*^2(t + \ln(a) + T_*^2), & t \in [-\ln(a) - T_*^2, -\ln(a)], \end{cases}$$

и $T_{op} = -\ln(a)$. Если для примера взять $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, то смотри Рис. 11, 12.

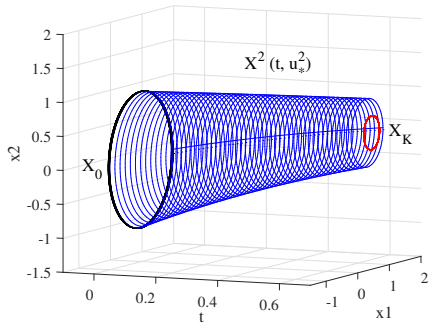


Рис. 11.

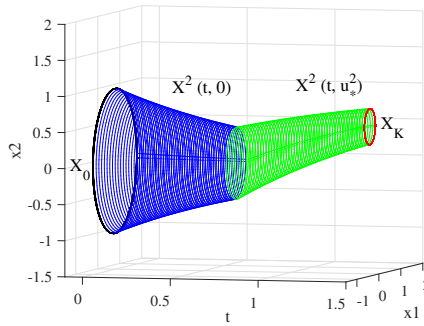


Рис. 12.

Замечание 19. Очевидно, что в данном случае можно построить и другие допустимые управления, которые будут оптимальными. Данное допустимое управление должно удовлетворять условию

$$-\int_0^{-\ln(a)} e^{s+\ln(a)} u^2(s) ds = b.$$

2. Теперь рассмотрим второй случай.

а) Если $X_K = X_*^1(T_*^1, u_*^1)$, то управление $u_{op}(\cdot) = u_*^1(\cdot)$ и время $T_{op} = T_*^1$ являются оптимальными.

б) Если $X_*^1(T_*^1, u_*^1) \subset X_K$, то, следовательно, "объем" первого базового решения в момент времени T_*^1 меньше "объема" конечного множества X_K ,

т.е. $T_*^1 < \ln(a)$ ($a > 1$). Поэтому построим следующее управление, которое будет оптимальным

$$u_{op}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \ln(a) - T_*^2], \\ u_*^1(t - \ln(a) + T_*^2), & t \in [\ln(a) - T_*^2, \ln(a)], \end{cases}$$

и $T_{op} = \ln(a)$. Если для примера взять $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$, то смотри Рис. 13,14.

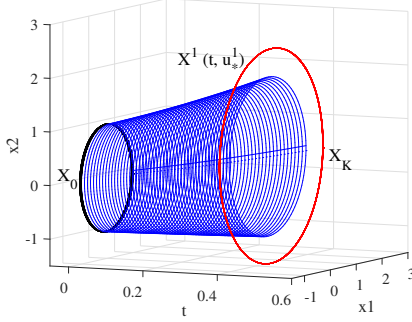


Рис. 13.

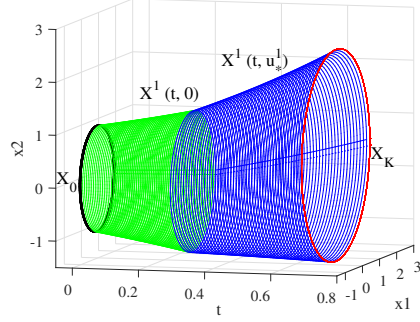


Рис. 14.

Замечание 20. Очевидно, что в данном случае можно построить и другие допустимые управления, которые будут оптимальными. Данное допустимое управление должно удовлетворять условию

$$\int_0^{\ln(a)} e^{\ln(a)-s} u^1(s) ds = b.$$

3. Теперь рассмотрим третий случай. В этом случае решением данной задачи должно быть смешанное решение.

1) Первым будем искать такое смешанное решение, диаметр которого с начала убывает, а потом возрастает. Для этого воспользуемся оптимальными управлениями первой и второй задач, то есть $u_*^1(\cdot)$ и $u_*^2(\cdot)$ и найдем время переключения τ и время окончания процесса T .

Решаем систему $\dot{x} = -x - u_*^2(t)$, $x(0) = 0$. Очевидно, что

$$x(t) = -e^{-t} \int_0^t e^s u_*^2(s) ds.$$

Тогда при $t = \tau$ имеем $x(\tau) = -e^{-\tau} \int_0^\tau e^s u_*^2(s) ds$. Следовательно, это начальная точка для системы $\dot{x} = x + u_*^1(t)$. Тогда

$$x(t) = -e^{t-2\tau} \int_0^\tau e^s u_*^2(s) ds + e^t \int_\tau^t e^{-s} u_*^1(s) ds.$$

Очевидно, при $t = T$ имеем $x(T) = -e^{T-2\tau} \int_0^\tau e^s u_*^2(s) ds + e^T \int_\tau^T e^{-s} u_*^1(s) ds$.

Так как в начале диаметр убывает, то $diam(X(t)) = 2e^{-t}$. Доходим до точки $t = \tau$ и $diam(X(\tau)) = 2e^{-\tau}$. После этого диаметр возрастает и $diam(X(t)) = e^t diam(X(\tau))$. При $t = T$ будем иметь диаметр $diam(X(T)) = e^T diam(X(\tau))$. Получаем систему

$$\begin{cases} e^{-2\tau+T} = a, \\ e^T \int_\tau^T e^{-s} u_*^1(s) ds - e^{T-2\tau} \int_0^\tau e^s u_*^2(s) ds = b. \end{cases} \quad (7)$$

Если, например, $u_*^1(t) \equiv 1$ и $u_*^2(t) \equiv -1$, то получим систему

$$\begin{cases} -2\tau + T = \ln(a), \\ e^T \int_\tau^T e^{-s} ds - e^{T-2\tau} \int_0^\tau e^s ds = b. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \tau = \ln\left(\frac{b+a+1}{2a}\right), \\ T = 2 \ln\left(\frac{b+a+1}{2\sqrt{a}}\right). \end{cases} \quad (8)$$

Например, возьмем $a = 1/2$, $b = 9/10$. Следовательно, первое базовое решение соответствующее оптимальному управлению $u_*^1(t) \equiv 1$ будет иметь вид согласно Рис. 15 и в конечный момент $T = \ln(19/10)$ будет выполняться условие $X_K \subset X^1(T, u_*^1)$, а второе базовое решение соответствующее оптимальному управлению $u_*^2(t) \equiv -1$ будет иметь вид согласно Рис. 16 и в конечный момент $T = -\ln(1/10)$ будет выполняться условие $X^2(T, u_*^2) \subset X_K$. Однако, если взять $\tau_1 = \ln\left(\frac{12}{5}\right)$ и $T_1 = 2 \ln\left(\frac{12}{5\sqrt{2}}\right)$ и построим соответствующее смешанное решение, то смотри Рис. 15, 16 и 17.

2) Теперь второй случай. Будем искать такое смешанное решение, диаметр которого с начала возрастает, а потом убывает. Для этого воспользуемся оптимальными управлениями первой и второй задач, то есть $u_*^1(\cdot)$ и $u_*^2(\cdot)$ и найдем время переключения τ и время окончания процесса T аналогично, как это было сделано в первом случае, то есть получим систему

$$\begin{cases} 2\tau - T = \ln(a), \\ e^{-T} \int_\tau^T e^s u_*^2(s) ds + e^{-T+2\tau} \int_0^\tau e^{-s} u_*^1(s) ds = b. \end{cases} \quad (9)$$

Если, например, $u_*^1(t) \equiv 1$ и $u_*^2(t) \equiv -1$, то получим систему

$$\begin{cases} \tau = \ln\left(\frac{-2a}{b-1-a}\right), \\ T = 2 \ln\left(\frac{-\sqrt{2a}}{b-1-a}\right). \end{cases}$$

Аналогично возьмем, $a = 1/2$, $b = 9/10$. Тогда $\tau_2 = \ln(\frac{5}{3})$, $T_2 = 2 \ln(\frac{5\sqrt{2}}{3})$ и построим соответствующее смешанное решение, то смотри Рис. 15, 16 и 18.

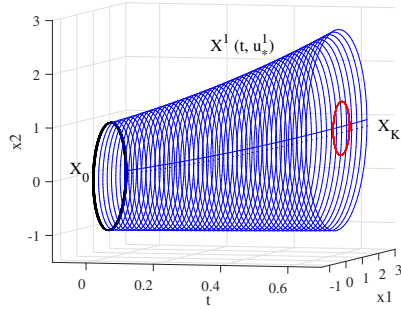


Рис. 15.

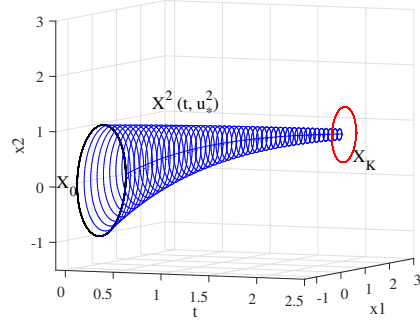


Рис. 16.

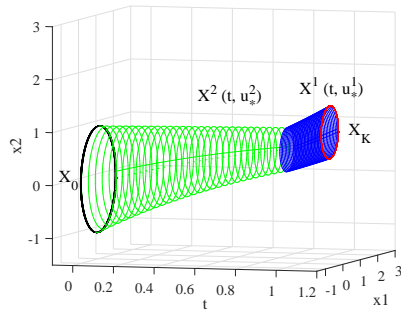


Рис. 17.

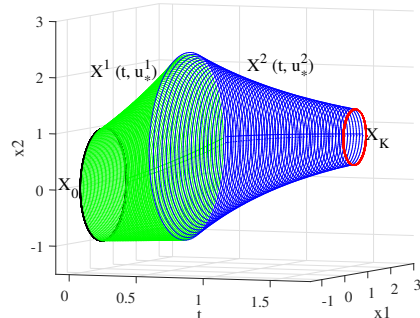


Рис. 18.

Легко проверить, что $T_1 < T_2$. Поэтому в первом случае было получено оптимальное решение.

Теперь рассмотрим случай, когда разрешима только первая задача оптимального управления, то есть $b \notin (1 - e^{-t})U$ для всех $t \geq 0$.

Решим первую задачу оптимального управления и найдем оптимальное управление $u_*^1(\cdot)$ и минимальное время $T_*^1 < \infty$.

Подставим управление $u_*^1(\cdot)$ в систему (1) и получим следующее линейное многозначное дифференциальное уравнение с PS-производной

$$D_{ps}X(t, u_*) = X(t, u_*) + u_*^1(t), \quad X(0, u_*^1) = B_1(0) \quad (10)$$

и найдем первое базовое решение этого уравнения:

$$X_1(t, u_*^1) = B_{e^t}(0) + \int_0^t e^{t-s} u_*^1(s) ds. \quad (11)$$

Возможны три случая:

- 1) $X(T_*^1) = X_K$; 2) $X_*^1(T_*^1, u_*^1) \subset X_K$; 3) $X_K \subset X_*^1(T_*^1, u_*^1)$.

В первом случае – управление $u_*^1(\cdot)$ и время T_*^1 являются оптимальными для исходной задачи.

Во втором случае – построим оптимальное управление так, как это было сделано ранее в случае 2б), когда обе задачи разрешимы.

Теперь рассмотрим последний третий случай. Очевидно, в этом случае решением данной задачи должно быть смешанное решение. Будем искать такое смешанное решение, диаметр которого с начала убывает, а потом возрастает. Для этого воспользуемся оптимальным управлением первой задачей $u_*^1(\cdot)$, найдем $u_*^2(\cdot)$ из условия $\min_{x \in X_K} \|x - u_*^2(t)\| = \min_{x \in X_K} \max_{u \in U} \|x - u\|$ и найдем время переключения τ_1 и время окончания процесса T_1 из системы (7).

Проиллюстрируем данный метод на следующем примере: $X_K = B_2(3)$, $U = B_1(0)$. Тогда $u_*^1(t) \equiv 1$ и $u_*^2(t) \equiv -1$. Следовательно, $\tau_1 = \ln(1.5)$ и $T_1 = 2 \ln(\frac{3\sqrt{2}}{2})$. (Смотри Рис. 19, 20.)

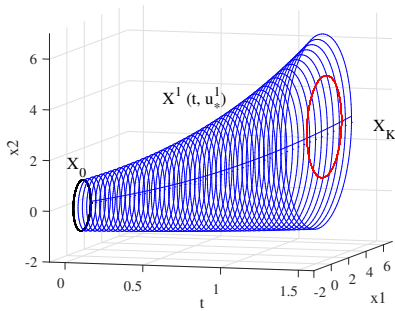


Рис. 19.

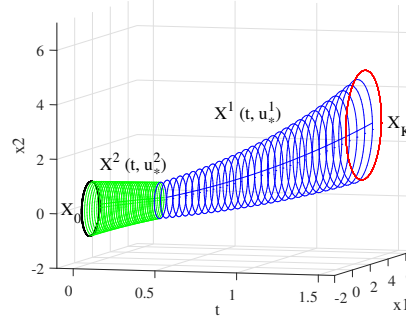


Рис. 20.

Замечание 21. В результате выше приведенного анализа, для заданного конечного множества X_K можно найти допустимое оптимальное управление $u_{op}(\cdot)$ и оптимальное время T_{op} при которых некоторое решение системы

$$D_{ps}X = X + u_{op}, \quad X(0, u) = X_0, \quad (12)$$

будет удовлетворять условию $X(T_{op}, u_{op}) = X_K$. То есть учитывая замечание 15, система (12) имеет бесконечно много решений, но имеет решение, для которого выполняется условие $X(T_{op}, u_{op}) = X_K$, а так же имеет решения для которых это условие не выполняется. Однако в случае, если $T < T_{op}$, то для всех допустимых управлений $u(\cdot)$ и для всех соответствующих решений условие $X(T, u) = X_K$ выполняться не будет.

2. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сделаем несколько замечаний:

Замечание 22. В случае, если X_0 не является шаром (но X_0 и X_K гомотетичные фигуры с коэффициентом $k > 0$), то опишем вокруг множеств X_0 и X_K шары и решим задачу так, как это было сделано для шаров.

Замечание 23. В случае, если множества X_0 и X_K имеют разную форму (негомотетичные фигуры с коэффициентом $k > 0$), то условие $X(T, u) = X_K$ не будет выполняться никогда, то есть не существует $T > 0$ и допустимого управления $u(\cdot)$ чтобы это условие выполнялось. В этом случае необходимо использовать условие $X(T, u) \subset X_K$ или $X(T, u) \supset X_K$. Далее, в первом случае, необходимо вписать в множество X_K максимально возможное множество, которое по форме совпадает с множеством X_0 , а во втором - описать. Далее решать задачу, как это было предложено в предыдущем замечании.

Замечание 24. В случае, когда вместо PS -производной используется BG -производная и начальное множество X_0 удовлетворяет условию, что разность $X_0 \overset{H}{-} (-1)X_0$ существует, то задача будет решаться аналогично. В случае, если разность $X_0 \overset{H}{-} (-1)X_0$ не существует, то соответствующее дифференциальное уравнение будет иметь только первое базовое решение (второе базовое решение система (1) иметь не будет) и бесконечно много смешанных решений. Следовательно, рассматриваемая задача быстрогодействия может не иметь ни одного решения (например, если X_K гомотетично X_0 с коэффициентом $k \in (0, 1)$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Perestyuk N.A.** Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities / N.A. Perestyuk, V.A. Plotnikov, A.M. Samoilenko, N.V. Skripnik. – de Gruyter Stud. Math. Vol. 40. – Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH & Co, 2011, 309 p.
2. **Плотников А.В.** Дифференциальные уравнения с четкой и нечеткой правой частью. Асимптотические методы / А.В. Плотников, Н.В. Скрипник. – Одесса: АстроПринт, 2009, 192 с.
3. **Плотников В.А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В.А. Плотников, А.В. Плотников, А.Н. Витюк. – Одесса: АстроПринт, 1999, 355 с.
4. **Половинкин Е.С.** Многозначный анализ и дифференциальные включения / Е.С. Половинкин. – М.: Физматлит, 2014, 597 с.
5. **Комлева Т.А.** Одна многозначная дискретная система и ее свойства / Т.А. Комлева, Л.И. Плотникова, А.В. Плотников. // УМЖ. – 2018. – Т. 70, №11. – С. 1519–1524.
6. **Komleva, T.A.** Partial averaging of discrete-time set-valued systems / T.A. Komleva, L.I. Plotnikova, A.V. Plotnikov. // Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. – 2018. – V. 63, №4. – P. 539–548.

7. **Plotnikov A.V.** Averaging of a system of set-valued differential equations with the Hukuhara derivative / A.V. Plotnikov, T.A. Komleva, L.I. Plotnikova. // Journal of Uncertain Systems. – 2019. – V. 13, №1. – P. 3–13.
8. **Plotnikov A.V.** Set-Valued differential equations with generalized derivative / A.V. Plotnikov, N.V. Skripnik. // J. Adv. Res. Pure Math. – 2011. – V. 3, №1. – P. 144–160.
9. **Plotnikov A.V.** Existence and uniqueness theorems for generalized set differential equations / A.V. Plotnikov, N.V. Skripnik. // Int. J. Control Sc. Eng. – 2012. – V. 2, №1. – P. 1–6.
10. **Plotnikov A.V.** An existence and uniqueness theorem to the Cauchy problem for generalised set differential equations / A.V. Plotnikov, N.V. Skripnik. // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A, Math. Anal. – 2013. – V. 20, №4. – P. 433–445.
11. **Plotnikov A.V.** Conditions for the existence of local solutions of set-valued differential equations with generalized derivative / A.V. Plotnikov, N.V. Skripnik. // Ukr. Math. J. – 2014. – V. 65, №10. – P. 1498–1513.
12. **Malinowski M.T.** Second type Hukuhara differentiable solutions to the delay set-valued differential equations / M.T. Malinowski. // Appl. Math. Comput. – 2012. – № 218. – P. 9427–9437.
13. **Malinowski M.T.** On set differential equations in Banach spaces – a second type Hukuhara differentiability approach / M.T. Malinowski. // Appl. Math. Comput. – 2012. – № 219. – P. 289–305.
14. **Vu H.** Initial value problem for second-order random fuzzy differential equations / H. Vu, L.S. Dong. // Adv. Difference Equ. – 2015. – №373. – 23 p.
15. **Vu H.** On impulsive fuzzy functional differential equations / H. Vu, N. Van Hoa. // Iranian Journal of Fuzzy Systems. – 2016. – V.13, №4. – P. 79–94.
16. **Amrahov Ş.E.** Relationship between Bede-Gal differentiable set-valued functions and their associated support functions / Ş.E. Amrahov, A. Khastan, N. Gasilov, A.G. Fatullayev. // Fuzzy Sets Syst. – 2016. – №265. – P. 57–72.
17. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe / M. Hukuhara. // Funkcial. Ekvac. – 1967. – №10. – P. 205–223.
18. **Комлева Т.А.** Некоторые замечания к абсолютной непрерывности множественнозначных отображений / Т.А. Комлева, Л.И. Плотникова, А.В. Плотников. // Дослідження в математиці і механіці. – 2017. – Т. 22, №2(30) – С. 17–27.
19. **Banks H.T.** A differential calculus for multifunctions / H.T. Banks, M.Q. Jacobs. // J. Math. Anal. Appl. – 1970. – №29. – P. 246–272.
20. **Tyurin Yu.N.** Mathematical statement of the simplified model of industrial planning / Yu.N. Tyurin. // Econ. math. meth. – 1965. – №3. – P. 391–409.
21. **Chalco-Cano Y.** Generalized derivative and π -derivative for set-valued functions / Y. Chalco-Cano, H. Roman-Flores, M.D. Jimenez-Gamero. // Inform. Sci. – 2011. – V. 181, №11. – P. 2177–2188.
22. **Plotnikova N.V.** Systems of linear differential equations with p-derivative and linear differential inclusions / N.V. Plotnikova. // Sb. Math. – 2005. – №196. – P. 1677–1691.
23. **Plotnikov A.V.** Differentiation of multivalued mappings. T-derivative / A.V. Plotnikov. // Ukr. Math. J. – 2000. – V. 52, №8. – P. 1282–1291.
24. **Bede B.** Generalizations of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications to fuzzy differential equation / B. Bede, S.G. Gal. // Fuzzy Sets Syst. – 2005. – V. 151. – P. 581–599.

Комлева Т. О., Молчанюк І. В., Скрипник Н. В., Плотников А. В.

ОДНА ЛІНІЙНА БАГАТОЗНАЧНА ЗАДАЧА КЕРУВАННЯ

Резюме

Останнім часом багато авторів розглядали питання існування, єдиності та властивості розв'язків багатозначних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь, рівнянь вищих порядків, досліджували імпульсні і керовані системи в рамках теорії багатозначних рівнянь. Очевидно, що отримання всіх цих результатів було б неможливо без розвитку теорії багатозначного аналізу. В останні роки з'явилися нові визначення похідної для багатозначних відображень, які на відміну від похідної Хукухари, дали можливість диференціювати багатозначні відображення, діаметр яких не тільки не спадає функція. В результаті були розглянуті багатозначні диференціальні рівняння, розв'язки яких є багатозначні відображення, діаметр яких не є монотонною функцією. У даній статті розглядається нова постановка задачі оптимального керування (задача швидкодії), яка стала можлива завдяки цим новим похідним та диференціальним рівнянням, а також наведено метод розв'язання даної задачі.

Ключові слова: багатозначні рівняння, керування, задача швидкодії, похідна Хукухари.

Komleva T. A., Molchanyuk I. V., Skripnik N. V., Plotnikov A. V.

ONE LINEAR SET-VALUED CONTROL PROBLEM

Summary

Recently, many authors have considered questions of the existence, uniqueness, and properties of solutions of set-valued differential and integro-differential equations, higher order equations, and have investigated impulse and control systems in the framework of the theory of set-valued equations. Obviously, obtaining all these results would be impossible without the development of the theory of set-valued analysis. In the latter, new definitions of the derivative have appeared for set-valued mappings, which, unlike the previously used Hukuhara derivative, made it possible to differentiate set-valued mappings whose diameter is not only a non decreasing function. As a result, set-valued differential equations were considered whose solutions are set-valued mappings whose diameter is not a monotonic function. This article discusses the new formulation of the optimal control problem (the time-optimality problem) that became possible due to these new derivatives and differential equations, as well as a method for solving this problem.

Key words: set-valued equations, control, time-optimality problem, Hukuhara derivative.

REFERENCES

1. Perestyuk, N.A., Plotnikov, V.A., Samoilenko, A.M., Skripnik, N.V. (2011). *Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities*. de Gruyter Stud. Math. Vol. 40, Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH & Co, 309 p.
2. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2009). *Differential equations with "clear" and fuzzy multivalued right-hand side. Asymptotics methods*. Odessa: AstroPrint, 192 p.
3. Plotnikov, V.A., Plotnikov, A.V., Vityuk, A.N. (1999). *Differential equations with multivalued right-hand side. Asymptotic methods*. Odessa: AstroPrint, 355 p.
4. Polovinkin, E.S. (2014) *Multivalued analysis and differential inclusions*. Moscow: FIZMATLIT, 597 p.
5. Komleva, T.A., Plotnikova, L.I., Plotnikov, A.V. (2018). One set-valued discrete system and its properties. *Ukr. Math. J.*, V. 70, №11, P. 1519–1524.
6. Komleva, T.A., Plotnikova, L.I., Plotnikov, A.V. (2018). Partial averaging of discrete-time set-valued systems. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, V. 63, №4, P. 539–548.
7. Plotnikov, A.V., Komleva, T.A., Plotnikova, L.I. (2019). Averaging of a system of set-valued differential equations with the Hukuhara derivative. *Journal of Uncertain Systems*, V. 13, №1, P. 3–13.
8. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2011). Set-Valued differential equations with generalized derivative. *J. Adv. Res. Pure Math.*, V. 3, №1, P. 144–160.
9. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2012). Existence and uniqueness theorems for generalized set differential equations. *Int. J. Control Sc. Eng.*, V. 2, №1, P. 1–6.
10. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2013). An existence and uniqueness theorem to the Cauchy problem for generalised set differential equations. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A, Math. Anal.*, V. 20, №4, P. 433–445.
11. Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V. (2014). Conditions for the existence of local solutions of set-valued differential equations with generalized derivative. *Ukr. Math. J.*, V. 65, №10, P. 1498–1513.
12. Malinowski, M.T. (2012). Second type Hukuhara differentiable solutions to the delay set-valued differential equations. *Appl. Math. Comput.*, № 218, P. 9427–9437.
13. Malinowski, M.T. (2012). On set differential equations in Banach spaces – a second type Hukuhara differentiability approach. *Appl. Math. Comput.*, № 219, P. 289–305.
14. Vu, H., Dong, L.S. (2015). Initial value problem for second-order random fuzzy differential equations. *Adv. Difference Equ.*, №373, 23 p.
15. Vu, H., Van Hoa, N. (2016). On impulsive fuzzy functional differential equations. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, V.13, №4, P. 79–94.
16. Amrahov, Ş.E., Khastan, A., Gasilov, N., Fatullayev, A.G. (2016). Relationship between Bede-Gal differentiable set-valued functions and their associated support functions. *Fuzzy Sets Syst.*, № 265, P. 57–72.
17. Hukuhara, M. (1967). Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcial. Ekvac.*, №10, P. 205–223.
18. Komleva, T.A., Plotnikova, L.I., Plotnikov, A.V. (2017). Some remarks on the absolute continuity of set-valued mappings. *Researches of Mathematics and Mechanics*, V. 22, №2(30), P. 17–27.
19. Banks, H.T., Jacobs, M.Q. (1970). A differential calculus for multifunctions. *J. Math. Anal. Appl.*, №29, P. 246–272.

20. Tyurin, Yu.N. (1965). Mathematical statement of the simplified model of industrial planning. *Econ. math. meth.*, №3, P. 391–409.
21. Chalco-Cano, Y., Roman-Flores, H., Jimenez-Gamero, M.D. (2011). Generalized derivative and π -derivative for set-valued functions. *Inform. Sci.*, V. 181, №11, P. 2177–2188.
22. Plotnikova, N.V. (2005). Systems of linear differential equations with p-derivative and linear differential inclusions. *Sb. Math.*, №196, P. 1677–1691.
23. Plotnikov, A.V. (2000). Differentiation of multivalued mappings. T-derivative. *Ukr. Math. J.*, V. 52, №8, P. 1282–1291.
24. Bede, B., Gal, S.G. (2005). Generalizations of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications to fuzzy differential equation. *Fuzzy Sets Syst.*, V. 151, P. 581–599.

УДК 519.7

Н. А. Якімова

Одеський національний університет ім. І. І. Мечнікова

ПРЕДИКАТНІ ЛОГІЧНІ МАТРИЦІ

У класичній лінійній алгебрі широко використовується апарат матриць. Але класична лінійна алгебра має справу із безперервними об'єктами. Логічна алгебра, побудована за аналогією з класичною лінійною алгеброю, будує ті ж самі моделі за допомогою дискретних об'єктів, що мають логічну структуру і підкоряються відповідним законам. Це призводить до суттєвих відмінностей у функціонуванні побудованих моделей. Дана стаття присвячена матрицям, в якості елементів для яких взято елементарні логічні елементи, а саме скінченні предикати довільної арності. В роботі досліджені властивості таких матриць та особливості їх застосування. Також розглянуті основні операції над такими матрицями. Крім звичайних операцій, що мають місце в класичній лінійній алгебрі, логічні структури дозволяють виконувати ще декілька операцій.

MSC: 03G05, 03G25, 03F52, 06E25, 15B34.

Ключові слова: скінченний предикат, булева матриця, предикатна матриця, диз'юнкція, кон'юнкція, заперечення, ортогональна матриця, скаляр, обертання матриці.

DOI: 10.18524/2519-206x.2019.2(34).190052.

1. Вступ

Устояні уявлення про математичну логіку як про науку, що вивчає закони мислення із застосуванням апарата математики, головним чином, для потреб самої математики, у сучасних умовах стає занадто вузьким [1]. З розширенням галузей застосування й подальшим розвитком математичної логіки змінюється й погляд на неї. Об'єктами математичної логіки є будь-які дискретні скінченні системи, а її головна задача структурне моделювання таких систем. Людська мова, як явище дискретне, природно, повинна описуватися засобами дискретної математики. Для опису природної людської мови найкраще підійшов би апарат рівнянь, подібний до апарата, використовуваного в математичному аналізі, але відмінного від останнього тим, що він призначений для формалізації не безперервних, а дискретних процесів. Таку мову дають логічні вираховання, а саме: вираховання висловлень і вираховання предикатів. Однак щоб мати можливість ефективно вирішувати зазначені рівняння, необхідно довести ці вираховання до рівня алгебраїчної системи.

2. ПОПЕРЕДНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Однією з важливіших алгебраїчних моделей є апарат матриць. Логічні матриці мають два різновиди: булеві та предикатні.

Означення 1. Логічна матриця називається булевою, якщо її елементами є логічні скаляри із поля $K = \{0, 1\}$ [2].

Тобто елементами булевої матриці є нулі та одиниці [1]. Наприклад, булевою буде матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Означення 2. В свою чергу, логічна матриця називається предикатною, якщо усі її елементи узяті із одного й того ж поля скінченних предикатів довільної арності.

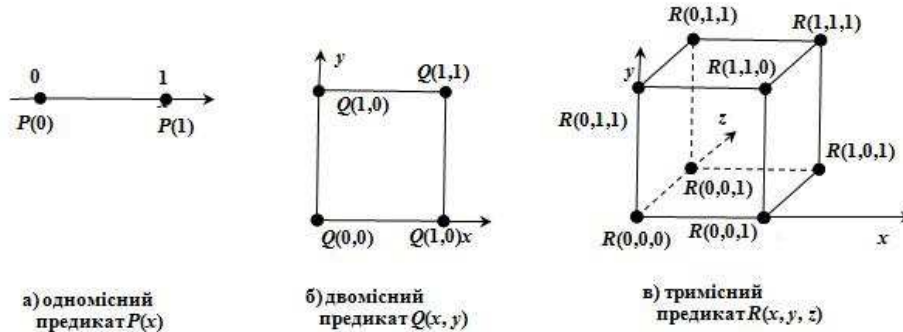
Означення 3. Скінченним n -місним предикатом (предикатом арності n) над алфавітом A називається будь-яка функція $t = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ від n буквених аргументів x_1, x_2, \dots, x_n , заданих на множині A , що приймає логічні значення t .

Іноді скінченний предикат f називають k -їчним, підкреслюючи, що його алфавіт A складається з k букв [4].

Якщо матриця є булевою, усі існуючі операції з нею, що описані в [2], не викликають труднощів та непорозумінь. Але якщо матриця є предикатною, то операції з нею не завжди очевидні і потребують додаткових досліджень.

3. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Графічно елементи предикатних скалярних полів, в залежності від арності предиката, можна подати наступним чином:



Мал. 1.: Графічне подання предикатних логічних скалярів

Таким чином, кожен елемент предикатної логічної матриці може бути поданий у вигляді гіперкуба розмірності n [3]. Наприклад, на мал. 1в)

розглянуто випадок тримісного предиката $R(x, y, z)$, який заданий над алфавітом $K = \{0, 1\}$ із $k = 2$ символів. При цьому кожній вершині гіперкуба відповідає значення предиката при певних значеннях аргументів x, y і z , які створили дану вершину. Роль одиничного елементу поля скалярів відіграє предикат, що дорівнює одиниці при всіх значеннях його аргументів. Відповідно, роль нульового елемента відіграє предикат, що при всіх значеннях його аргументів дорівнює нулю. Графічно одиничний елемент подається гіперкубом, усім вершинам якого відповідають одиниці, а нульовий – гіперкубом, усім вершинам якого відповідають нулі. Згідно визначенням предикатних операцій [4; 5], всі дії над такими елементами поля логічних скалярів виконуються порозрядно.

Означення 4. Під розрядом розуміється значення розглянутого предиката при одному з можливих наборів аргументів.

Таким чином, бінарні операції (диз'юнкція й кон'юнкція) припускають, що їхнім результатом буде елемент, кожному розряду якого відповідає значення виконаної бінарної операції над однойменними розрядами предикатів, що беруть участь в операції.

Означення 5. Під однойменними розрядами розуміються значення цих предикатів від однакових наборів аргументів.

Операція заперечення також проводиться порозрядно. Ці операції будуть обчислюватися за наступними правилами:

$$(P_i \vee P_j)(x_1, \dots, x_n) = P_i(x_1, \dots, x_n) \vee P_j(x_1, \dots, x_n), \quad (1)$$

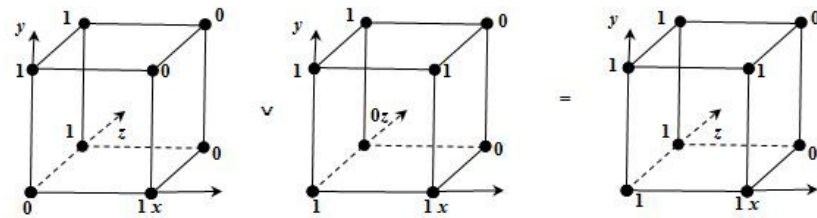
$$(P_i \wedge P_j)(x_1, \dots, x_n) = P_i(x_1, \dots, x_n) \wedge P_j(x_1, \dots, x_n), \quad (2)$$

$$\overline{P_i}(x_1, \dots, x_n) = \overline{P_i(x_1, K, x_n)}. \quad (3)$$

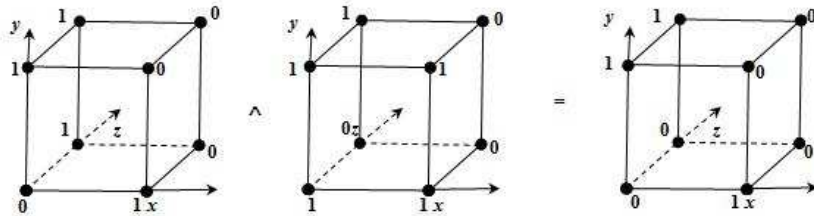
Графічно ці операції над елементами предикатних матриць подані на мал. 2.

Наприклад, як поле логічних скалярів візьмемо множину одномісних предикатів $P_i(x)$, $i = 0, \dots, 3$, де $x \in \{0, 1\}$. Ця множина задана таблицею 1.

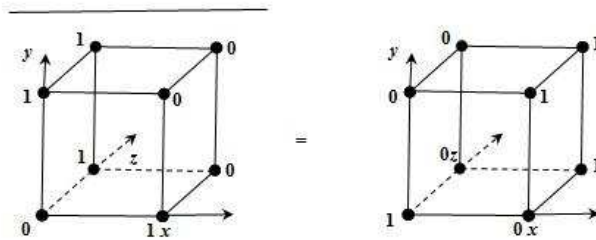
Далі одномісні предикати подаються рядками $P = (P(0), P(1))$. Тоді $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (1, 1)$. Позначимо це скалярне поле через \mathbf{P} . Тоді результати операцій добутку на скаляр, диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення над предикатними матрицями, заданими, наприклад,



а) диз'юнкція



б) кон'юнкція



в) заперечення

Мал. 2.: Графічне подання операцій над скінченними предикатами однакової арності

над полем одномісних предикатів, будуть наступними:

$$\begin{aligned}
 P_1 \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} &= (0, 1) \begin{pmatrix} (0, 1) & (1, 0) & (0, 1) \\ (0, 0) & (1, 1) & (0, 1) \\ (1, 0) & (0, 0) & (1, 1) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} (0, 1) & (0, 0) & (0, 1) \\ (0, 0) & (0, 1) & (0, 1) \\ (0, 0) & (0, 0) & (0, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_0 & P_1 \end{pmatrix}; \\
 \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (0, 1) & (1, 0) & (0, 1) \\ (0, 0) & (1, 1) & (0, 1) \\ (1, 0) & (0, 0) & (1, 1) \end{pmatrix} \vee
 \end{aligned}$$

x	P_0	P_1	P_2	P_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Таблиця 1: Множина одномісних предикатів, заданих на алфавіті $K = \{0, 1\}$

$$\begin{aligned}
 \vee \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (1,1) & (1,1) \\ (1,0) & (0,1) & (1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_3 \\ P_2 & P_1 & P_3 \end{pmatrix}; \\
 \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 \\ P_2 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,1) \\ (1,0) & (0,0) & (1,1) \end{pmatrix} \wedge \\
 \wedge \begin{pmatrix} (1,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (0,1) & (1,0) & (0,1) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_0 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_2 \end{pmatrix}; \\
 \bar{A} &= \begin{pmatrix} \overline{P_1} & \overline{P_2} & \overline{P_1} \\ \overline{P_0} & \overline{P_3} & \overline{P_1} \\ \overline{P_2} & \overline{P_0} & \overline{P_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{(0,1)} & \overline{(1,0)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(0,0)} & \overline{(1,1)} & \overline{(0,1)} \\ \overline{(1,0)} & \overline{(0,0)} & \overline{(1,1)} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) & (1,0) \\ (1,1) & (0,0) & (1,0) \\ (0,1) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_2 \\ P_1 & P_3 & P_0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Операція добутку предикатних матриць виконується за правилом, спільним для усіх логічних матриць. Відповідні необхідні до виконання операції над їх елементами обчислюються за формулами (1) і (2). Але щодо операції обертання, то у випадку предикатних матриць її визначення дещо складніше, ніж для булевих логічних матриць. Якщо розглядати булеві матриці як окремий випадок предикатних матриць (вони задані над полем нуль-місних предикатів), то можна стверджувати, що за цієї умови наступні визначення і твердження розповсюджуються на булеві матриці також. Але для них все це можна обчислювати простіше [2].

Означення 6. Квадратна логічна матриця A називається ортогональною, якщо диз'юнкція всіх елементів кожного її рядка й диз'юнкція всіх елементів кожного її стовпця дорівнюють тотожній одиниці, а кон'юнкція будь-яких двох елементів у кожному її рядку й кон'юнкція будь-яких двох елементів у кожному її стовпці дорівнюють тотожному нулю.

Наприклад, логічна матриця A над полем P одномісних предикатів

$$A \begin{pmatrix} P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_0 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (1,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \\ (0,0) & (1,1) & (0,0) \end{pmatrix}$$

є ортогональною, а матриця

$$A \begin{pmatrix} P_1 & P_3 & P_2 \\ P_0 & P_1 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) & (1,1) & (1,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (1,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} -$$

ні, тому що, наприклад, $a_{12} \wedge a_{13} = P_3 \wedge P_2 = (1,1) \wedge (1,0) \neq 0$

Теорема 1. *Щоб для квадратних логічних матриць A и B над полем логічних скалярів $G = \{0,1\}$ або полем скінченних предикатів довільної арності виконувалася рівність $AB = E$, необхідно й досить, щоб A и B були ортогональними матрицями й підкорялися умові $B = AT$.*

Доведення. Привласнимо кожному розряду елементів скалярного поля, над яким задані матриці A і B , деякий індекс $v = 1, \dots, (k_1 \times \dots \times k_n)$, де n -арність предикатів, що є елементами поля скалярів, а $k_i, i = 1, \dots, n$, - кількість символів в алфавіті, над яким заданий аргумент x_i цих предикатів. Таким чином, матриці A й B розпадаються на $(k_1 \times \dots \times k_n)$ матриць над булевою множиною $G = \{0,1\}$

$$A^v = \begin{pmatrix} a_{11}^v & \dots & a_{1s}^v \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1}^v & \dots & a_{ss}^v \end{pmatrix} \text{ й } B^v = \begin{pmatrix} b_{11}^v & \dots & b_{1s}^v \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{s1}^v & \dots & b_{ss}^v \end{pmatrix},$$

складених з v -тих розрядів елементів матриць A й B . Отже, якщо твердження справедливо для матриць над булевим полем скалярів $G = \{0,1\}$, то воно вірно й для матриць, елементами яких є предикати довільної арності. У силу цього досить довести твердження для випадку скалярного поля $G = \{0,1\}$ [2]. Нехай розмірність матриць A^v й B^v - $s \times s$. Виберемо довільно ціле t , $1 \leq t \leq s$. Якщо t -тий рядок матриці A^v нульовий, то й t -тий рядок матриці $(AB)^v$ буде нульовим. Тому в кожному рядку матриці A^v є хоча б одна одиниця, і цій одиниці відповідає деяка одиниця в матриці B^v (нехай це буде елемент $a_{tj}^v = 1$, якому відповідає b_{jt}^v). При $f \neq t$ ($1 \leq f \leq s$) маємо $a_{fj}^v = 0$, тому що інакше $(AB)_{ft}^v = a_{fj}^v b_{jt}^v = 1$, тобто $(AB)^v \neq E$. Аналогічно, у матриці B^v всі елементи рядка j , за винятком b_{jt}^v , дорівнюють нулю. Таким чином, у кожному рядку матриці A^v є хоча б одна одиниця, причому всі ці одиниці розташовані в різних стовпцях. Тому матриця A^v - ортогональна. Аналогічно, ортогональна й матриця B^v . Рівність $(B)^v = (A^v)^T$ тепер очевидна (кожному елементу $a_{tj}^v = 1$ відповідає $b_{jt}^v = 1$). Теорему доведено.

4. ВИСНОВКИ

Таким чином, предикатна модель логічних матриць узагальнює розглянуту в [1; 2] булеву модель. Кожна операція над предикатними матрицями складається із 2^n операцій над булевими матрицями по кількості розрядів у відповідних елементах предикатного скалярного поля. Таким чином, предикатні логічні матриці можна розглядати як тривимірні булеві матриці, де третій вимір буде відповідати розрядам використаних предикатів. Відповідно, кількість впорядкованих «шарів» по третьому виміру буде складати 2^n . В свою чергу, булеві матриці можна розглядати як окремий випадок предикатних матриць, при якому арність застосованих предикатів дорівнює нулю. За цієї умови $2^n = 2^1 = 1$, тобто третій вимір буде складатися лише з одного шару. Таким чином, до предикатних матриць також можна застосовувати той апарат, що вважається притаманним булевим матрицям, зокрема апарат бінарних предикатів [6].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Сигорский В. П.** Математический аппарат инженера / В. П. Сигорский — Киев: Техника, 1975. — 768с.
2. **Гвоздинская Н. А.** О логических матрицах / Н. А. Гвоздинская, З. В. Дударь, С. А. Пославский, Ю. П. Шабанов-Кушнарченко // Проблемы бионики. Вып.48, 1998. — С. 12 — 22.
3. **Гвоздинская Н. А.** Булевы и предикатные логические пространства / Н. А. Гвоздинская // Проблемы бионики. Вып.51. 1999. — С. 106 — 115.
4. **Шабанов-Кушнарченко Ю. П.** Теория интеллекта. Математические средства. / Ю. П. Шабанов-Кушнарченко — Харьков: Вища школа, 1984. — 143с.
5. **Клини С.** Математическая логика. / С. Клини — М.: Мир, 1973. — 480с.
6. **Гвоздинский А. Н.** Представление булевых логических матриц в виде бинарных предикатов / А. Н. Гвоздинский, Н. А. Якимова, В. А. Губин // Радиоэлектроника и информатика. Вып.2. 2007. — С. 108 — 110.

Якімова Н. А.

ПРЕДИКАТНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ

Резюме

В классической линейной алгебре широко используется аппарат матриц. Но классическая линейная алгебра имеет дело с непрерывными объектами. Логическая алгебра, построенная по аналогии с классической линейной алгеброй, строит те же самые модели с помощью дискретных объектов, имеющих логическую структуру и подчиняющихся соответствующим законам. Это приводит к существенным отличиям в функционировании построенных моделей. Данная статья посвящена матрицам, в качестве элементов для которых берутся элементарные логические элементы, а именно конечные предикаты произвольной арности. В работе исследованы свойства таких матриц и особенности их применения. Также рассмотрены основные операции над такими матрицами. Кроме обычных операций, имеющих место в классической линейной алгебре, логические структуры позволяют выполнять еще несколько операций.

Ключевые слова: конечный предикат, булева матрица, предикатная матрица, дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, ортогональная матрица, скаляр, обращение матрицы.

Yakimova N. A.

PREDICATIVE LOGICAL MATRICES

Summary

In classical linear algebra the machine of matrices is widely used. But the classic linear algebra deals with continuous objects. Logical algebra, built by analogy with the classical linear algebra, builds the same models using discrete objects that have logical structure and obey the relevant laws. This leads to a significant difference in the functioning of the constructed models. This article is devoted to matrices, as elements for which the elementary logical elements are taken, namely the finite predicates of any quality of variables. In the work investigated the properties of such matrices and features of their application. Basic operations on such matrices are also considered. Besides the usual operations that take place in classical linear algebra, logical structures allow to perform this several operations.

Key words: finite predicate, Boolean matrix, predicative matrix, disjunction, conjunction, inversion, orthographic matrix, scalar, rotation of matrix.

REFERENCES

1. Sigorskiy, V. P. (1975). *Matematicheskiy apparat ingenera* [Mathematical Apparatus Engineer]. Kiyv: Tekhnika, 768 p.
2. Gvozdinskaya, N. A., Dudar, Z. V., Poplavskiy, S. A., Shabanov-Kushnarenko, Y. P. (1998). *O logicheskikh matitzhakh* [On logical matrix]. *Problemy bioniki*. Vol. 48, P. 12 — 22.
3. Gvozdinskaya, N. A. (1999). Bulevy i predikatnye logicheskie prostranstva [Boolean and predicative logical spaces]. *Problemy bioniki*. Vol. 51, P. 106 — 115.
4. Shabanov-Kushnarenko, Y. P. (1984). *Teoriya intellekta. Matematicheskie sredstva*. [Theory of Intelligence. Mathematical means]. Kharkiv: Vyscha shkola, 143 p.
5. Kliny, S. (1973). *Matematicheskaya logika*. [Mathematical Logic]. Moscow: Mir, 480 p.
6. Gvozdinsky, A. N., Yakimova, N. A., Gubin, V. A. (2007). Predstavlenie bulevykh logicheskikh matritz v vide binarnykh predikatov [Presentation of the bullet logical matrix in the form of binary predicates]. *Radioelektronika i informatika*. Vol .2, P. 108 — 110.

UDC 539.3

A. A. Fesenko

Odessa I. I. Mechnikov National University, Faculty of Mathematics, Physics and Information Technologies

AN EXACT SOLUTION OF THE DYNAMICAL PROBLEM FOR THE INFINITE ELASTIC LAYER WITH A CYLINDRICAL CAVITY

The wave field of an infinite elastic layer weakened by a cylindrical cavity is constructed in this paper. The ideal contact conditions are given on the upper and bottom faces of the layer. The normal dynamic tensile load is applied to a cylindrical cavity's surface at the initial moment of time. The Laplace and finite *sin*- and *cos*- Fourier integral transforms are applied successively directly to axisymmetric equations of motion and to the boundary conditions, on the contrary to the traditional approaches, when integral transforms are applied to solutions' representation through harmonic and biharmonic functions. This operation leads to a one-dimensional vector homogeneous boundary value problem with respect to unknown transformations of displacements. The problem is solved using matrix differential calculus. The field of initial displacements is derived after application of inverse integral transforms. The case of the steady-state oscillations was investigated. The normal stress on the faces of the elastic layer are constructed and investigated depending on the mechanical and dynamic parameters.

MSC: 74B05, 74H05, 74J20.

Key words: exact solution, elastic layer, dynamic load, cylindrical cavity, integral transform.

DOI: 10.18524/2519-206x.2019.2(34).190054.

1. INTRODUCTION

The presence of defects in elastic bodies causes a stress concentration and significantly affects at the stress state of constructions. A typical and sufficiently investigated problem of this class is the axisymmetric elasticity problem on the stress state of a layer, weakened by a cylindrical defect, when different boundary conditions are set on layer's faces and defect's surface. Existing research can be divided into three approaches: 1) a construction of an analytic solution of the problem in an explicit form [10], [2]; 2) a construction of an analytical-numerical solution, when the problem is reduced either to an integral equation or to an infinite system of algebraic equations [3], [4]; 3) a numerical solving of the problem [5], [6].

For realization of the first approach, it is essential to satisfy the conditions of ideal contact on a cylindrical surface, when the normal displacements and tangential stress are equal to zero. The exact solution of the formulated problem for the case, when the layer is replaced by a half-space and the stresses are given on the faces, is derived in [5]. An approximate analytical - numerical

solutions for other boundary conditions on the defect's surface were obtained at the papers [6], [8].

Dynamic statement of the mentioned problem was considered at the papers [9], [10]. The theory of harmonic oscillations and wave propagation in elastic bodies was widely investigated in the monograph [11]. The papers [12], [13] are devoted to the propagation of elastic waves in plates weakened by the cavities or holes. Based on complex function theory, an analytical solution for the dynamic stress concentration due to an arbitrary cylindrical cavity in an infinite inhomogeneous medium was investigated in [14]. The existence of trapped elastic waves above a circular cylindrical cavity in a half-space was demonstrated in [15].

It should be noted that dynamical problems weakened by the defects have found wide application in the practical problems [16], [17]. An experimental method was proposed to explore dynamic failure process of pre-stressed rock specimen with a circular hole to investigate deep underground rock failure at the [18]. The paper [19] proposes a set of exact solutions for three-dimensional dynamic responses of a cylindrical lined tunnel in saturated soil due to internal blast loading are derived by using Fourier transform and Laplace transform. The surrounding soil was modeled as a saturated medium on the basis of Biot's theory and the lining structure modeled as an elastic medium. By utilizing a reliable and efficient numerical method of inverse Laplace transform and Fourier transform, the numerical solutions for the dynamic response of the lining and surrounding soil were obtained.

Nevertheless, the study of an elastic layer hasn't been completed yet and opens up many problems. The main difficulty during the solving of the dynamic problems by the method of integral transforms remains the inversion problem of the Laplace transform. Therefore, it is often necessary to proceed to a more narrow class of the problems about steady state oscillations. Research contributions over the past 50 years on the theory and analysis of elastodynamics are reviewed in the paper [20]. Major topics reviewed are: general theories, steady-state waves in waveguides, transient waves in layered media, diffraction and scattering, and one and two-dimensional theories of elastic bodies. A brief discussion on the direct and inverse problems of elastic waves completes this review.

The problem of elasticity for an infinite layer with a cylindrical cavity in a static statement was considered by G. Ya. Popov [10], where an exact solution was obtained. In this paper this method was extended on the analogical problem in the dynamic statement.

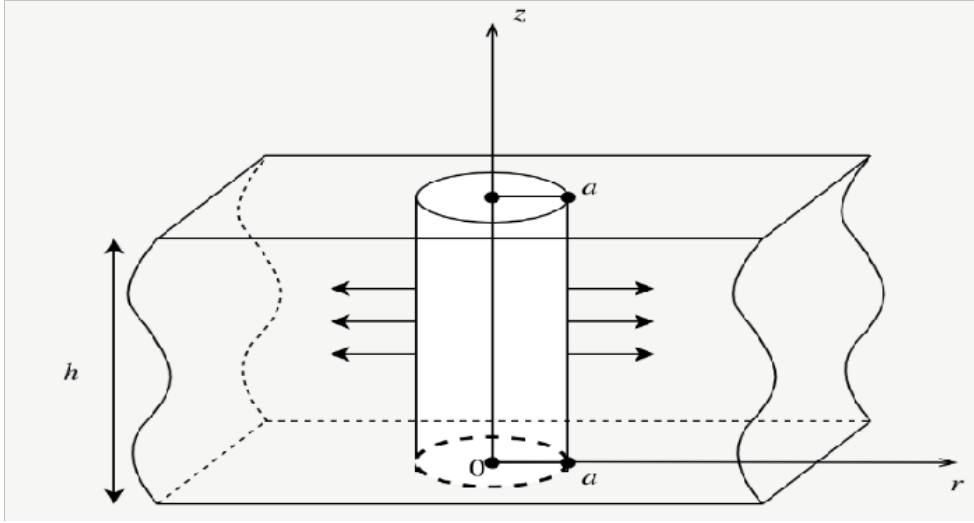


Fig. 1. Geometry of the problem

2. MAIN RESULTS

1. Statement of the problem. An elastic layer of thickness b (G is a shear modulus, μ is a Poisson's ratio, ρ is density), describing in the cylindrical coordinate system by the correspondences: $a < r < \infty$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $0 \leq z \leq h$ is weakened by a cylindrical cavity $0 \leq r \leq a$, $0 < \varphi \leq \pi$, $0 \leq z \leq b$ (Fig. 1). The layer's upper and bottom faces are in the conditions of ideal contact with a rigid base (the layer is supported by a smooth foundation without a friction)

$$u_r(r, 0, t) = 0, \quad \tau_{zr}(r, 0, t) = 0, \quad u_z(r, b, t) = 0, \quad \tau_{zr}(r, b, t) = 0 \quad (1)$$

The cylindrical cavity's surface $r = a$ is under the influence of the normal dynamic tensile force $P = p(z, t)$, applied at the initial moment $t = 0$, the tangential loading is absent

$$\sigma_r(a, z, t) = P(z, t), \quad \tau_{rz}(a, z, t) = 0 \quad (2)$$

Thus, the problem was reduced to solving axisymmetric equations of motion with respect to the functions $u_r(r, z, t) = u(r, z, t)$, $u_z(r, z, t) = w(r, z, t)$ in a cylindrical coordinate system [21]

$$\begin{aligned} r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} u(r, z, t) \right] - r^{-2} u(r, z, t) + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(r, z, t) + \frac{2}{\kappa+1} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} w(r, z, t) = \\ = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u(r, z, t)}{\partial t^2} \\ r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} w(r, z, t) \right] + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} w(r, z, t) + \frac{2}{\kappa-1} r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial z} u(r, z, t) \right] = \\ = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 w(r, z, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3)$$

where $\kappa = 3 - 4\mu$ and subjected to the mixed boundary conditions (1), (2). Here $c_1^2 = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{G}{\rho}$ - squared velocity of longitudinal wave propagation, $c^2 = \frac{G}{\rho}$ - squared velocity of shear wave propagation. So, $c_1^2 = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} c^2$.

The following change of the variables was done

$$\begin{aligned} \rho &= a^{-1}r, \quad \xi = b^{-1}z, \quad \tau = ca^{-1}t, \quad u(a\rho, b\xi, ca^{-1}\tau) = U(\rho, \xi, \tau), \\ w(a\rho, b\xi, ca^{-1}\tau) &= W(\rho, \xi, \tau) \end{aligned} \quad (4)$$

Consequently, the movement equations (3) can be written in the form

$$\begin{aligned} \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} U(\rho, \xi, \tau) \right] - \rho^{-2} U(\rho, \xi, \tau) + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U(\rho, \xi, \tau) + \\ + \frac{2}{\kappa+1} \alpha \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \xi} W(\rho, \xi, \tau) = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\partial^2 U(\rho, \xi, \tau)}{\partial \tau^2} \\ \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} W(\rho, \xi, \tau) \right] + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} W(\rho, \xi, \tau) + \\ + \rho^{-1} \frac{2}{\kappa-1} \alpha \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \xi} U(\rho, \xi, \tau) \right] = \frac{\partial^2 W(\rho, \xi, \tau)}{\partial t^2} \\ 1 < \rho < \infty, \quad 0 < \xi < 1, \quad \alpha = \frac{a}{h}. \end{aligned} \quad (5)$$

Boundary conditions (1), taking into account the replacement (4), are transformed into form

$$\frac{\partial}{\partial \xi} U(\rho, 0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} U(\rho, 1, \tau) = 0, \quad W(\rho, 0, \tau) = 0, \quad W(\rho, 1, \tau) = 0 \quad (6)$$

as the boundary conditions (2) take the form

$$\frac{\partial}{\partial \rho} U(1, \xi, \tau) + \frac{3-\kappa}{1+\kappa} \left[U(1, \xi, \tau) + \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} W(1, \xi, \tau) \right] = aG^{-1} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} P(\xi, \tau) \quad (7)$$

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} U(1, \xi, \tau) + \frac{\partial}{\partial \rho} W(1, \xi, \tau) = 0 \quad (8)$$

2. Solving a vector one-dimensional boundary problem. In order to reduce the problem to the one-dimensional one, the finite *sin*- and *cos*-Fourier integral transforms with regard of the variable ξ and Laplace integral transformation with regard of the variable τ are applied successively to the differential equations (5) and boundary conditions (6)-(8)

$$\begin{bmatrix} U_\lambda(\rho, \tau) \\ W_\lambda(\rho, \tau) \end{bmatrix} = \int_0^1 \begin{bmatrix} U(\rho, \xi, \tau) \cos \lambda_n \xi \\ W(\rho, \xi, \tau) \sin \lambda_n \xi \end{bmatrix} d\xi, \quad \begin{matrix} n = 0, 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, \dots \end{matrix} \quad \lambda_n = \pi n = \lambda$$

$$\begin{bmatrix} U_{\lambda p}(\tau) \\ W_{\lambda p}(\tau) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} U_\lambda(\rho, \tau) \\ W_\lambda(\rho, \tau) \end{bmatrix} e^{-p\tau} d\tau$$

As a result, equations (5) can be written

$$\begin{aligned} \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} U_{\lambda p}(\rho) \right] + \frac{2}{\kappa+1} \lambda_* \frac{\partial}{\partial \rho} W_{\lambda p}(\rho) - \rho^{-2} U_{\lambda p}(\rho) - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_*^2 U_{\lambda p}(\rho) - \\ - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} p^2 U_{\lambda p}(\rho) = 0, \quad 1 < \rho < \infty \\ \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} W_{\lambda p}(\rho) \right] - \rho^{-1} \frac{2}{\kappa-1} \lambda_* \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho U_{\lambda p}(\rho)] - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda_*^2 W_{\lambda p}(\rho) - \\ - p^2 W_{\lambda p}(\rho) = 0, \quad \lambda_* = \lambda \alpha \end{aligned} \quad (9)$$

During this operation the boundary conditions (6) are automatically satisfied, and conditions (7), (8) have the form

$$\begin{aligned} U'_{\lambda p}(1) + \frac{3-\kappa}{1+\kappa} [U_{\lambda p}(1) + \lambda_* W_{\lambda p}(1)] = aG^{-1} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} P_{\lambda p} \\ W'_{\lambda p}(1) - \lambda_* U_{\lambda p}(1) = 0, \quad P_{\lambda p} = \int_0^\infty \left(\int_0^1 P(\xi, \tau) \cos \lambda_n \xi d\xi \right) e^{-p\tau} d\tau \end{aligned} \quad (10)$$

For solving a one-dimensional boundary value problem (9), (10) a second-order matrix differential operator and the unknown vector of displacements' transformations are set

$$\begin{aligned} L_2 = \begin{pmatrix} \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] - \rho^{-2} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} (\lambda_*^2 + p^2) & \frac{2}{\kappa+1} \lambda_* \frac{\partial}{\partial \rho} \\ - \frac{2}{\kappa-1} \lambda_* \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho] & \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda_*^2 - p^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{y}(\rho) = \begin{pmatrix} U_{\lambda p}(\rho) \\ W_{\lambda p}(\rho) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Let's set up the boundary functional corresponding to the boundary conditions (10)

$$\mathbf{U}[\mathbf{y}(1)] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(1) + \mathbf{I} \cdot \mathbf{y}'(1), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{3-\kappa}{1+\kappa} & \frac{3-\kappa}{1+\kappa} \lambda_* \\ -\lambda_* & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In these notations the boundary value problem (9), (10) is written down in a next form [12]

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_2 \mathbf{y}(\rho) = \mathbf{f}(\rho), \quad 1 < \rho < \infty, \quad \mathbf{U}[\mathbf{y}(1)] = \gamma \\ \mathbf{f}(\rho) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} aG^{-1} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} P_{\lambda p} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

In order to get a general decreasing solution when $\rho \rightarrow \infty$ of the vector homogeneous equation in (11), the solution of the matrix differential equation

$$L_2 \mathbf{Y}(\rho) = 0, \quad 1 < \rho < \infty \quad (12)$$

should be constructed previously.

With the help of the auxiliary matrix

$$\mathbf{H}(\rho, \xi) = \begin{pmatrix} H_1^{(1)}(\rho\xi) & 0 \\ 0 & H_0^{(1)}(\rho\xi) \end{pmatrix}$$

where $H_m^{(1)}(z)$ is the Hankel first order function, $m = 0, 1$, an important relationship has been proven [10]

$$\begin{aligned} L_2 \mathbf{H}(\rho, \xi) &= -\mathbf{H}(\rho, \xi) \cdot \mathbf{M}(\xi), \\ \mathbf{M}(\xi) &= \begin{pmatrix} \xi^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}(\lambda_*^2 + p^2) & \frac{2}{\kappa+1}\xi\lambda_* \\ \frac{2}{\kappa-1}\xi\lambda_* & \xi^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1}(\lambda_*^2 + p^2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

The inverse matrix $\mathbf{M}(\xi)$ for has the form

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{-1}(\xi) &= \frac{1}{\det \mathbf{M}} \begin{pmatrix} \xi^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\lambda_*^2 + p^2 & -\frac{2}{\kappa+1}\xi\lambda_* \\ -\frac{2}{\kappa-1}\xi\lambda_* & \xi^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}(\lambda_*^2 + p^2) \end{pmatrix} \\ \det \mathbf{M} &= \left[\xi - i\sqrt{\lambda_*^2 + p^2} \right] \left[\xi + i\sqrt{\lambda_*^2 + p^2} \right] \left[\xi - i\sqrt{\lambda_*^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}p^2} \right] \times \\ &\quad \times \left[\xi + i\sqrt{\lambda_*^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}p^2} \right] \end{aligned}$$

Further, with the help of the equality (13), one can be convinced that the solution of the matrix equation (12) is

$$\mathbf{Y}(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \mathbf{H}(\rho, \xi) \cdot \mathbf{M}^{-1}(\xi) d\xi,$$

where C is the closed loop covering the origin and two poles of the first multiplicity $\xi = i\sqrt{\lambda_*^2 + p^2}$, $\xi = i\sqrt{\lambda_*^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}p^2}$ lying in the upper half-plane. Applying the methods of contour integration, the matrix is derived

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(\rho) &= \frac{1}{2p^2} \begin{pmatrix} i \cdot \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\lambda_*^2}{\delta_1} \cdot H_1^{(1)}(i\rho\delta_1) & \lambda_* \cdot H_1^{(1)}(i\rho\delta_1) \\ \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda_* \cdot H_0^{(1)}(i\rho\delta_1) & -i\delta_1 \cdot H_0^{(1)}(i\rho\delta_1) \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2p^2} \begin{pmatrix} -i \cdot \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \delta_2 \cdot H_1^{(1)}(i\rho\delta_2) & -\lambda_* \cdot H_1^{(1)}(i\rho\delta_2) \\ -\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda_* \cdot H_0^{(1)}(i\rho\delta_2) & i \frac{\lambda_*^2}{\delta_2} \cdot H_0^{(1)}(i\rho\delta_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

where

$$\delta_1 = \sqrt{\lambda_*^2 + p^2} \quad \delta_2 = \sqrt{\lambda_*^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}p^2} \quad (14)$$

which was constructed using the residue theorem.

Taking into account the results in [12] and the range of the parameter $1 < \rho < \infty$, a decreasing solution of the matrix equation is constructed

$$\mathbf{Y}_{\lambda p}(\rho) = \frac{1}{p^2} \begin{pmatrix} -i \cdot \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\lambda_*^2}{\delta_1} \cdot K_1(\rho\delta_1) & -\lambda_* \cdot K_1(\rho\delta_1) \\ -i \cdot \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda_* \cdot K_0(\rho\delta_1) & -\sqrt{\lambda_*^2 + p^2} \cdot K_0(\rho\delta_1) \end{pmatrix} + \\ + \frac{1}{p^2} \begin{pmatrix} i \cdot \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \delta_2 \cdot K_1(\rho\delta_2) & \lambda_* \cdot K_1(\rho\delta_2) \\ i \cdot \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda_* \cdot K_0(\rho\delta_2) & \frac{\lambda_*^2}{\delta_2} \cdot K_0(\rho\delta_2) \end{pmatrix}$$

where $K_m(z)$ is the Macdonald function, $m = 0, 1$.

The solution of the one-dimensional problem (11) is written in the form [12]

$$\mathbf{y}(\rho) = \mathbf{Y}_{\lambda p}(\rho) \cdot \begin{pmatrix} iC_0 \\ C_1 \end{pmatrix}$$

The reality of the solution's values (15) is guaranteed by the special choice of constants C_0, C_1 , which can be found from the boundary conditions (10). It leads to the linear system of equations

$$\begin{cases} a_{11}C_0 + a_{12}C_1 = 0 \\ a_{21}C_0 + a_{22}C_1 = aG^{-1} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} p^2 \cdot P_{\lambda p} \end{cases}$$

$$a_{11} = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left\{ -\frac{\lambda_*(2\lambda_*^2 + p^2)}{\delta_1} K_1(\delta_1) + 2\lambda_*\delta_2 K_1(\delta_2) \right\}$$

$$a_{12} = (2\lambda_*^2 + p^2)K_1(\delta_1) - 2\lambda_*^2 K_1(\delta_2)$$

$$a_{21} = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left\{ -\frac{1}{2}\lambda_*^2 K_2(\delta_1) + \frac{1}{2}\delta_2^2 K_2(\delta_2) + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \left[\frac{\lambda_*^2}{\delta_1} K_1(\delta_1) - \delta_2 K_1(\delta_2) \right] + \right. \\ \left. + \frac{5-3\kappa}{2(\kappa+1)} \lambda_*^2 K_0(\delta_1) - \left(\frac{5-3\kappa}{2(\kappa+1)} \lambda_*^2 - \frac{\kappa-1}{2(\kappa+1)} p^2 \right) K_0(\delta_2) \right\}$$

$$a_{22} = -\frac{1}{2}\lambda_*\delta_1 K_2(\delta_1) - \frac{1}{2}\lambda_*\delta_2 K_2(\delta_2) + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \lambda_* [-K_1(\delta_1) + K_1(\delta_2)] - \\ - \frac{5-3\kappa}{2(\kappa+1)} \lambda_*\delta_1 K_0(\delta_1) - \left(\frac{5-3\kappa}{2(\kappa+1)} \lambda_*^2 - \frac{\kappa-1}{2(\kappa+1)} p^2 \right) \frac{\lambda_*}{\delta_2} K_0(\delta_2)$$

where the known derivatives' formulas of special functions [23] were used

$$\frac{\partial}{\partial \rho} K_0(a\rho) = -aK_1(a\rho), \quad \frac{\partial}{\partial \rho} K_1(a\rho) = -\frac{1}{2}a [K_0(a\rho) + K_2(a\rho)]$$

The coefficients were found in the form

$$C_0 = -\frac{a}{\det} G^{-1} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} p^2 \cdot P_{\lambda p} \cdot a_{12}, \quad C_1 = \frac{a}{\det} G^{-1} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} p^2 \cdot P_{\lambda p} \cdot a_{11}, \\ \det = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

The solution of the one-dimensional value problem (11) in transformation domain was constructed with their help

$$U_{\lambda p}(\rho) = \frac{a}{G} P_{\lambda p} \frac{\delta_2}{\Delta} [-2(\lambda_*^2 + p^2) K_1(\rho\delta_1) K_1(\delta_2) + (2\lambda_*^2 + p^2) K_1(\rho\delta_2) K_1(\delta_1)]$$

$$W_{\lambda p}(\rho) = \frac{a}{G} P_{\lambda p} \frac{\lambda_*}{\Delta} [2\delta_1\delta_2 K_0(\rho\delta_1) K_1(\delta_2) - (2\lambda_*^2 + p^2) K_0(\rho\delta_2) K_1(\delta_1)] \quad (16)$$

where

$$\Delta = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} (\lambda_*^2 + \frac{1}{2}p^2) \delta_2^2 K_1(\delta_1) K_2(\delta_2) - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda_*^2 \delta_1 \delta_2 K_1(\delta_2) K_2(\delta_1) -$$

$$\frac{3-\kappa}{\kappa-1} p^2 \delta_2 K_1(\delta_1) K_1(\delta_2) + (\lambda_*^2 + \frac{1}{2}p^2) \left(\frac{5-3\kappa}{\kappa-1} \lambda_*^2 - p^2 \right) K_1(\delta_1) K_0(\delta_2) +$$

$$+ \frac{5-3\kappa}{\kappa-1} \lambda_*^2 \delta_1 \delta_2 K_1(\delta_2) K_0(\delta_1) \quad (17)$$

3. The final formulas construction. In order to get the solution of initial problem (1-3), the inverse integral transformations should be applied

$$U_p(\rho, \xi) = U_{0,p}(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} U_{\lambda p}(\rho) \cos \lambda_n \xi, \quad W_p(\rho, \xi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} W_{\lambda p}(\rho) \sin \lambda_n \xi.$$

The function $U_{0p}(\rho)$ can be found from the following one-dimensional value problem (as $\lambda_0 = 0, W_{\lambda_0 p}(\rho) = W_0(\rho) = 0$)

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} U_{0p}(\rho) \right] - U_{0p}(\rho) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho} U_{0p}(1) + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} U_{0p}(1) = aG^{-1} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} P_{0p}.$$

It has the form

$$U_{0p}(\rho) = \frac{a}{4G} \rho \int_0^1 p(h\xi) d\xi. \quad (18)$$

The field of the initial displacements of the infinite elastic layer with the cylindrical cavity is derived

$$U(\rho, \xi, \tau) = \frac{a}{G} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left[U_{0p}(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} F_1(\rho) P_{\lambda p} \frac{\delta_2}{\Delta} \cos \lambda_n \xi \right] e^{p\tau} dp$$

$$W(\rho, \xi, \tau) = \frac{a}{G} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} F_2(\rho) P_{\lambda p} \frac{\lambda_*}{\Delta} \sin \lambda_n \xi \right] e^{p\tau} dp \quad (19)$$

The normal stress can be constructed with their help by the formula [21]

$$\sigma_{\xi} = Ga^{-1} \frac{3-\kappa}{\kappa-1} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} U(\rho, \xi, \tau) + \rho^{-1} U(\rho, \xi, \tau) + \frac{1+\kappa}{3-\kappa} \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} W(\rho, \xi, \tau) \right]$$

4. The subcase of steady-state oscillations. The case of steady-state oscillations is considered below. With this aim the substitution $p = i\omega$, $p^2 = -\omega^2$ was made (p - Laplace transform parameter, ω - circular frequency of steady-state oscillations). Taking into account formula (18) and putting in consideration load of constant intensity $P(\xi) = 1$ in formula (10), one can get the following expression instead of (19)

$$U(\rho, \xi; \omega) = \frac{a}{4G}\rho + \frac{2a}{G} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n \xi \cdot \sin \lambda_n \Delta_2}{\lambda_n} \frac{\Delta_2}{\Delta_3} F_n^{(1)}(\rho; \omega) \quad (20)$$

$$W(\rho, \xi; \omega) = \frac{2a}{G} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n \xi \cdot \sin \lambda_n \lambda_*}{\lambda_n} \frac{\lambda_*}{\Delta_3} F_n^{(2)}(\rho; \omega)$$

where

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \sqrt{\lambda_*^2 - \omega^2} \quad \Delta_2 = \sqrt{\lambda_*^2 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \omega^2} \\ \Delta_3 &= \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \left(\lambda_*^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \right) \Delta_2^2 K_1(\Delta_1) K_2(\Delta_2) - \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \lambda_*^2 \Delta_1 \Delta_2 K_1(\Delta_2) K_2(\Delta_1) + \\ &+ \frac{3 - \kappa}{\kappa - 1} \omega^2 \Delta_2 K_1(\Delta_1) K_1(\Delta_2) + \left(\lambda_*^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \right) \left(\frac{5 - 3\kappa}{\kappa - 1} \lambda_*^2 + \omega^2 \right) K_1(\Delta_1) K_0(\Delta_2) + \\ &+ \frac{5 - 3\kappa}{\kappa - 1} \lambda_*^2 \Delta_1 \Delta_2 K_1(\Delta_2) K_0(\Delta_1) \\ F_n^{(1)}(\rho; \omega) &= -2 \left(\lambda_*^2 - \omega^2 \right) K_1(\rho \Delta_1) K_1(\Delta_2) + \left(2\lambda_*^2 - \omega^2 \right) K_1(\rho \Delta_2) K_1(\Delta_1) \\ F_n^{(2)}(\rho; \omega) &= 2\Delta_1 \Delta_2 K_0(\rho \Delta_1) K_1(\Delta_2) - \left(2\lambda_*^2 - \omega^2 \right) K_0(\rho \Delta_2) K_1(\Delta_1) \end{aligned}$$

The normal stress of the layer is derived on the base of displacements (20)

$$\sigma_\xi(\rho, \xi, \omega) = \frac{3 - \kappa}{2(\kappa - 1)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n \xi \cdot \sin \lambda_n}{\lambda_n} \frac{1}{\Delta_3} F_n(\rho, \omega) \right] \quad (21)$$

$$\begin{aligned} F_n(\rho, \omega) &= -2 \left(\lambda_*^2 - \omega^2 \right) \Delta_2 \rho^{-1} K_1(\rho \Delta_1) K_1(\Delta_2) + \\ &+ \left(2\lambda_*^2 - \omega^2 \right) \Delta_2 \rho^{-1} K_1(\rho \Delta_2) K_1(\Delta_1) + \left(\lambda_*^2 - \omega^2 \right) \Delta_1 \Delta_2 K_2(\rho \Delta_1) K_1(\Delta_2) - \\ &- \left(\lambda_*^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \right) \Delta_2^2 K_0(\rho \Delta_2) K_1(\Delta_1) + \left(\frac{5 + \kappa}{3 - \kappa} \lambda_*^2 - \omega^2 \right) \Delta_1 \Delta_2 K_0(\rho \Delta_1) K_1(\Delta_2) - \\ &- \left(\lambda_*^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \right) \left(\frac{5 + \kappa}{3 - \kappa} \lambda_*^2 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \omega^2 \right) K_0(\rho \Delta_2) K_1(\Delta_1) \end{aligned}$$

$$\lambda_* = \lambda_n \cdot \alpha = \pi n \cdot \alpha, \quad \alpha = \frac{a}{h}, \quad \kappa = 3 - 4\mu$$

5. Discussion and numerical results. The normal stress on the lower face of the layer $\xi = 0$, $1 < \rho < \infty$, was investigated, depending on different mechanical characteristics: Poisson's ratio $\mu = 1/3$ or $\mu = 1/4$, ratio of cavity radius to layer thickness $\alpha = a/h$, different variants of natural oscillation frequencies $\omega = 0.1, 0.3, 0.5, 1, 3$. The possibility of the appearance of tensile stress on the lower face of the layer was considered. The dynamic load of constant intensity was set on the cylindrical surface of the cavity.

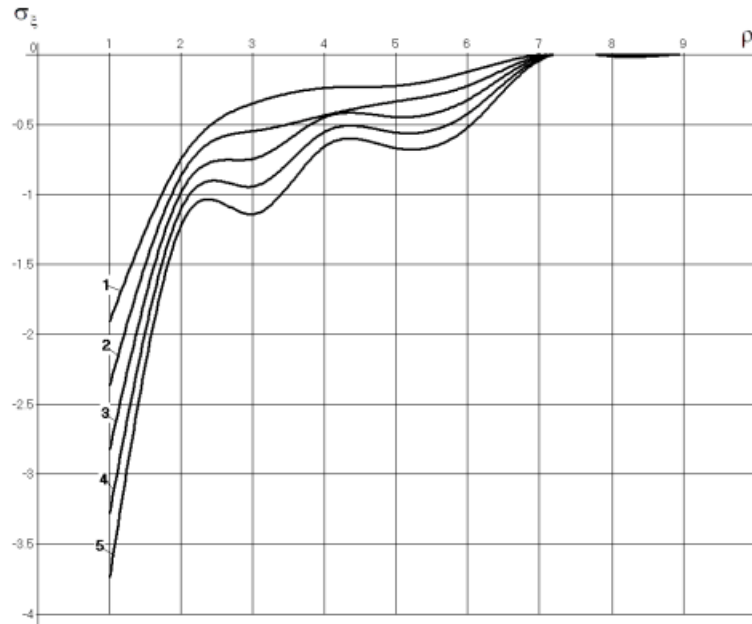


Fig. 2. The normal stress on the lower layer's face

3. CONCLUSION

The dynamical problem's solution of the elasticity for the infinite layer with a cylindrical cavity was derived, when on the faces of the layer the ideal contact conditions are given and the cavity's surface is under the influence of the normal dynamic tensile force, applied at the initial moment of time. Applying the integral transform method directly to the movement equations reduces the initial problem to the one-dimensional vector problem. The last one was solved exactly using the matrix differential calculus.

It should be noted that similar vector boundary problem can be obtained for the elastic layer weakened by a cylindrical inclusion $0 \leq \rho \leq a$, when different kinds of the boundary conditions at a defect's surface and the layer's faces are set.

At the subcase of the ideal contact conditions on a defect's surface or on the edges, the proposed approach makes it possible to obtain an exact solution of the problem.

When some of the layer's face is rigidly fixed, it leads the initial problem to an integral singular equation with respect to an unknown displacement derivative, so the approximate solution will be constructed. If a vector differential equation is inhomogeneous one, the matrix Green's function and the fundamental matrix should be found.

It is worth noting that the difficulties connecting with the integral Laplace transform inversing exist, so it is often possible to investigate just a case of steady-state oscillations.

Фесенко Г. О.

Точний розв'язок динамічної задачі для нескінченного шару з циліндричним отвором

Резюме

Побудовано хвильове поле нескінченного пружного шару, послабленого циліндричним отвором. Умови ідеального контакту задано на верхній та нижній гранях шару. Нормальне динамічне розтягувальне навантаження діє на поверхні циліндричного отвору в початковий момент часу. Інтегральні перетворення Лапласа та скінченні \sin - та \cos - Фур'є застосовано послідовно до осесиметричних рівнянь руху та до граничних умов, на відміну традиційним підходам, коли інтегральні перетворення застосовуються до подання розв'язків через гармонічні та бігармонічні функції. Це приводить до одновимірної векторної однорідної крайової задачі відносно невідомих трансформант переміщень. Задачу розв'язано за допомогою матричного диференціального числення. Поле вихідних переміщень знайдено після застосування обернених інтегральних перетворень. Побудовано нормальне напруження на гранях пружного шару.

Ключові слова: точний розв'язок, динамічне навантаження, циліндричний отвір, інтегральні перетворення.

Фесенко А. А.

Точное решение динамической задачи для бесконечного слоя с цилиндрическим отверстием

Резюме

Построено волновое поле бесконечного упругого слоя, ослабленного цилиндрическим отверстием. Условия идеального контакта заданы на гранях слоя. Нормальная динамическая растягивающая нагрузка действует на поверхности цилиндрического отверстия в начальный момент времени. Интегральные преобразования Лапласа и конечные \sin - и \cos - Фурье применены последовательно к осесимметричным уравнениям движения и к граничным условиям, в отличие от традиционных подходов, когда интегральные преобразования применяются к представлениям решений через гармонические и бигармонические функции. Это приводит к одномерной векторной однородной краевой задаче относительно неизвестных трансформант перемещений. Задача решена с помощью матричного дифференциального исчисления. Поле исходных перемещений найдено после применения обратных интегральных преобразований. Построено нормальное напряжение на гранях упругого слоя.

Ключевые слова: точное решение, динамическая нагрузка, цилиндрическая полость, интегральные преобразования.

REFERENCES

1. Popov, G. Ya. (2013). *An exact solution of the elasticity theory problem for an infinite layer weakened by a cylindrical cavity. Doklady RAN*, Vol. 451 (5), P. 1-4.
2. Menshykov, O., Menshykova, M. & Vaysfeld, N. (2017). *Exact analytical solution for a pie shaped wedge thick plate under oscillating load. Acta Mechanica*, Vol. 228 (12), P. 4435-4450.
3. Malitz, P. Ya., Privarnikov, A. K. (1971). *The application of Weber-type transformations to the solution of elasticity problems for layered media with a cylindrical hole. J. Voprosy prochnosti i plastichnosti*, P. 56 - 64.
4. Arutunyan, N. H., Abramyan, B. L. (1969). *Some axisymmetric problems for a half-space and an elastic layer with a vertical cylindrical notch. J. Izv. AN Arm. SSR. Mekhanika*, Vol. 22 (3), P. 3-13.
5. Yahnioglu, N., Babuscu Yesil, U. (2009). *Forced vibration of an initial stressed rectangular composite thick plate with a cylindrical hole. ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition IMECE09*, Lake BuenaVista, Florida, USA.
6. Jain, N. K., Mittal N. D. (2008). *Finite element analysis for stress concentration and deflection in isotropic, orthotropic and laminated composite plates with central circular hole under transverse static load. Materials Science and Engineering*, Vol. 498. P. 115-124.
7. Guz', A. N. (1962). *Approximate method for calculation of the stress concentrations around curvilinear holes in shells. Prikl. Mekh*, Vol. 2 (6), P. 605-612.
8. Bobyleva, T. (2016). *Approximate method of calculating stresses in layered array. Procedia Engineering*, Vol. 153, P. 103-106.
9. Vorovich, I. I., Babeshko, V. A. (1979). *Dynamic mixed problems in elasticity theory for nonclassical regions*, Nauka: Moscow, 320 p.
10. Bardzokas, D. I., Kushnir, D. V., Filshtinskii, L. A. (2009). *Dynamic problems of the theory of elasticity for layers and semilayers with cavities. J. Acta Mech.*, Vol. 208, P. 81-95.
11. Grinchenko, V. T., Meleshko, V. V. (1981). *Harmonic vibrations and waves in elastic bodies*. Kiev: Naukova Dumka, 284 p.
12. Kubenko, V. D. (1965). *Propagation of elastic waves from a circular hole in an anisotropic inhomogeneous plate. Prikl. Mekh.*, Vol. 1 (2), P. 25-33.
13. Panasyuk, N. N. (1978). *Action of a plane step elastic wave on a spherical cavity. Waves in Continuous Media*. Kiev: Naukova Dumka, P. 79-85.
14. Baoping Hei, Zailin Yang, Yao Wang. (2016). *Dynamic analysis of elastic waves by an arbitrary cavity in an inhomogeneous medium with density variation. Mathematics and Mechanics of Solids*. Vol 21 (8), P. 931-940.
15. Linton, C. M., Thompson, I. (2018). *Elastic waves trapped above a cylindrical cavity. SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 78 (4), P. 2083-2104.
16. Zhou, Y., Zheng, R.-Y., Liu, G.-B. (2011). *Dynamic response of elastic layer on transversely isotropic saturated soil to train load. Yantu Lixue/Rock and Soil Mechanics*, Vol. 32 (2), P. 604-610.
17. Zhuk, A. P., Kubenko, V. D., Zhuk, Ya. A. (2012). *Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid-filled cavity. J. Acoust. Soc. America*, Vol. 132 (4), P. 2189-2197.

-
18. Ming Tao, Ao Ma, Wenzhuo Cao, Xibing Li. (2017). *Dynamic response of pre-stressed rock with a circular cavity subject to transient loading. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol. 99, P. 1-8.
 19. Gaoa, M. (2016). *An exact solution for three-dimensional (3D) dynamic response of a cylindrical lined tunnel in saturated soil to an internal blast load. Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 90, P. 32-37.
 20. Yih-Hsing Pao. (1983). *Elastic waves in solids. J. Appl. Mech*, Vol. 50 (4), P. 1152-1164.
 21. Novazkiy, W. (1975). *The theory of elasticity*. Moscow: Mir, 872 p.
 22. Popov, G. Ya., Abdimanapov, S. A., Efimov, V. V. (1999). *Green's functions and matrix of one-dimensional boundary value problems*. Almati: Rauan, 113 p.
 23. Gradshtein, I., Rygik, L. (1963). *The tables of integrals, series and products*. Moscow: Nauka, 1100 p.

UDC 532.3

O. V. Pozhylenkov

Department of Mathematics, Physics and IT, Odesa Mechnikov University,
Dvoryanska str.2, 65082, Odesa, Ukraine

THE STRESS STATE OF A RECTANGULAR ELASTIC DOMAIN

The problem of the stress state of a rectangular elastic domain is investigated and solved exactly. With the help of Fourier transformation the one-dimensional vector boundary problem in the transformation's domain is obtained. The components of the unknown vector are the displacement transformations. The problem is solved exactly with the methods of the matrix differential calculations, the fundamental solution matrix is constructed in the form of the contour integral, which is found using the residue theorem. The constructed vector is inverted by the corresponding formulas of inverse Fourier series. The numerical investigation of the stress in dependence of the external loading value and domain's size is presented.

MSC: 74G70, 74H99, 74J10.

Key words: mixed boundary problem, exact solution, rectangular domain, vector boundary problem, fundamental matrix.

DOI: 10.18524/2519-206x.2019.2(34).190056.

1. INTRODUCTION

The problem of a rectangular domain stress estimation is not a new one, nevertheless a lot of unsolved issues remain. This problem was considered and solved in the different statements important to the engineering applications as with the help of analytical methods so and with numerical ones. To the last direction one can reference the papers, where the boundary element-free method (BEFM) was applied to two dimensional problems of elasticity. This method is a direct numerical method which combines the boundary integral equation method and an improved moving least-square approximation. This method, as it was stated at [1], gives the higher computational accuracy. Another popular solving methods are well known finite element methods. For example, at [2] the discussion of the condition's type necessary for the penalty methods to provide a basis for the stable and convergent finite element schemes is proposed. In paper [3] was considered the mixed finite element (for short MFE) approximation of a stress-displacement system derived from the Hellinger-Reissner variational principle for the linear elasticity problem. Many benefits of the numerical methods can be attributed by their existence at many numerical software applications, easy for using by the engineers.

But if one need to provide the calculation of the stress at the rectangular domain in the neighborhood of the angular points, the numerical methods

lose their efficiency as it is known. These points of the boundary condition changing cause the stress with a special order of a singularity. To take these singularities in the consideration, to propose the method which solve a problem for a rectangular domain with regard of such singularities existence, one must use the analytical approaches [4].

The world known papers of Konrat'ev and Maz'ya [5; 6] are connected with the investigation of singularities at the angular points of an elastic domain. Also the well known paper [7] was one of the pioneer papers in this direction. The solution of the plane thermoelasticity problem for a rectangular domain was constructed with the help of new solving method. This method permits the construction of an analytical solution, corresponding to Saint-Venan principle in the form of trigonometric series expansion using orthogonal set of the eigenfunctions and associated functions. These investigations were successfully continued by [8].

In paper [9] a simple method to solve a static, plane boundary value problem of elasticity for an isotropic rectangular region was introduced. The method is based on finite Fourier transform transferring the biharmonic equation to a nonhomogeneous ordinary differential equation of the fourth order. Another analytical method of the plane two dimensional problem solving for a rectangular domain was proposed at the papers Prof G. Popov [10; 11]. At the paper [12] the method of solving the plane mixed boundary value problem of elasticity on a rectangular domain was proposed. The problem of current paper is solved exactly with the method of the matrix differential calculations, this method was successfully applied in the paper [13]. The constructed vector in transform's domain is inverted by the corresponding formulas of inverse Fourier transform, so the displacements expressions are found in the form of Fourier series. The numerical investigation of the stress in dependence on the external loading value and domain's size is presented.

The novelty of the presented paper is in the application of the new approach [14] to the solving of the elasticity problem for a rectangular domain. The stress state of a domain was investigated depending on a load properties and domain size.

1. Statement of the problem.

The elastic rectangular domain $0 < x < a$, $0 < y < b$ (G is a shear modulus, μ is a Poisson's coefficient, E is a Young's modulus) meets a load at the upper face of the domain

$$\sigma_y(x, b) = -p(x), \quad \tau_{xy}(x, b) = 0 \quad (1)$$

The lower base conditions are fulfilled at the bottom edge:

$$u_y(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad (2)$$

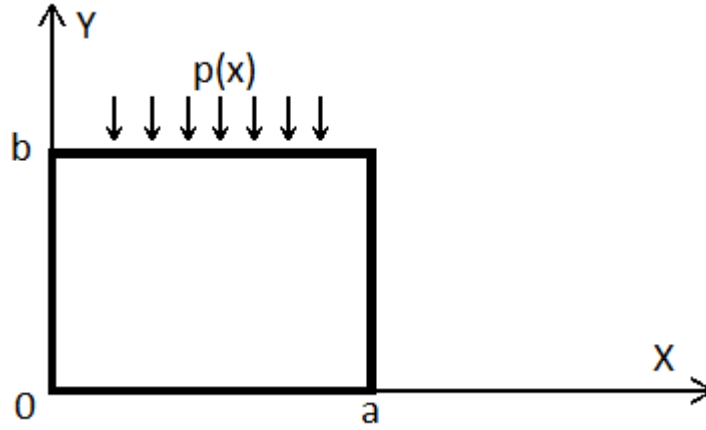


Fig.1 Geometry of the problem

The left and the right side are conditions of ideal contact

$$\begin{aligned} u_x(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = 0 \\ u_x(a, y) = 0, \quad \tau_{xy}(a, y) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

It is required to estimate the stress state of the rectangular domain $0 < x < a$, $0 < y < b$ satisfying the boundary conditions (1)-(3) and the equilibrium equations [15]

$$\begin{aligned} U''(x, y) + U^{**}(x, y) + \mu_0(U''(x, y) + V'^*(x, y)) = 0 \\ V''(x, y) + V^{**}(x, y) + \mu_0(V^{**}(x, y) + U'^*(x, y)) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Here the denotes are taken $U(x, y) = u_x(x, y)$, $V(x, y) = u_y(x, y)$, $f'(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $f^*(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, $\mu_0 = \frac{1}{1-2\mu}$.

2. The problem solving

The Fourier's transforms are applied to the equations (4) with the scheme

$$\begin{pmatrix} U_n(y) \\ V_n(y) \end{pmatrix} = \int_0^a \begin{pmatrix} U(x, y) * \sin(\alpha_n x) \\ V(x, y) * \cos(\alpha_n x) \end{pmatrix} dx, \quad \alpha_n = \frac{\pi n}{a} \quad (5)$$

It leads to the homogeneous system of the ordinary differential equations in the transform's domain

$$\begin{aligned} U_n''(y) + (-\alpha_n^2 - \mu_0 \alpha_n^2) U_n(y) - \mu_0 \alpha_n V_n'(y) = 0 \\ V_n''(y)(1 + \mu_0) - \alpha_n^2 V_n(y) + \mu_0 \alpha_n U_n'(y) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Boundary conditions (1), (2) are reformulated in the terms of the displacements

$$\begin{aligned} U_n'(0) &= 0, \quad V_n(0) = 0 \\ \alpha_n V_n(b) - U_n'(b) &= 0, \quad (2G + \lambda)V_n'(b) + \lambda\alpha_n U_n(b) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

where $\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$, $p_n = \int_0^a p(x) \cos(\alpha_n x) dx$.

To formulate the vector boundary state problem the vectors and matrices are introduced

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \mu_0 \\ \mu_0 \alpha_n & 0 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} (-\alpha_n^2 - \mu_0 \alpha_n^2) & 0 \\ 0 & -\alpha_n^2 \end{pmatrix}, \quad Z_n(y) = \begin{pmatrix} U_n(y) \\ V_n(y) \end{pmatrix}, \\ D_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2G + \lambda) \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ \alpha_n \lambda & 0 \end{pmatrix}, \\ D_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ f_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

With the help of the introduced matrices, the differential operator of the second order is constructed

$$L_2(Z_n(y)) = AZ_n''(y) + BZ_n'(y) + CZ_n(y) \quad (8)$$

The vector boundary problem in the transform's domain is formulated with the help of the introduced operator (8)

$$\begin{aligned} L_2(Z_n(y)) &= 0 \\ U_i(Z_n(y)) &= f_i, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (9)$$

Here $U_i(Z_n(y)) = D_i Z_n'(y) + E_i Z_n(y)$, $b_1 = 0$, $b_2 = b$

To solve this vector boundary problem the fundamental solution matrix $Y(y)$ is constructed. To found it firstly the matrix $e^{\xi y} I$ (where I the unit matrix) must be substituted into the equation (9). From the equality $L_2(e^{\xi y} I) = M(\xi)e^{\xi y}$ one can derive the $M(\xi)$ matrix

$$M(\xi) \begin{pmatrix} \xi^2 - \alpha_n^2 - \mu_0 \alpha_n^2 & -\xi \alpha_n \mu_0 \\ \xi \mu_0 \alpha_n & \xi^2 + \xi 2\mu_0 - \alpha_n^2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

The fundamental solution is found with help of formula $Y(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{\xi y} M^{-1}(\xi) d\xi$ [16]. The calculation of the integral requires to know all poles of the under integral function. To do it the determinant of the matrix $M(\xi)$ was found

$$\det M(\xi) = (1 + \mu_0)(\xi - \alpha_n)^2(\xi + \alpha_n)^2$$

After contour integration procedure the two linear independent solutions of the matrix equation were derived

$$\begin{aligned}
Y(y) &= \frac{2\pi i}{2\pi i(1 + \mu_0)} \sum_{i=0}^N \text{Res}[e^{\xi y} M^{-1}(\xi)], \quad (N - \text{number of poles}) \\
Y(y) &= \frac{1}{1 + \mu_0} (Y_0(y) + Y_1(y)) \\
Y_0(y) &= \frac{e^{\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0 & y\alpha_n\mu_0 \\ -y\alpha_n\mu_0 & -y\alpha_n\mu_0 + 2 + \mu_0 \end{pmatrix} \\
Y_1(y) &= \frac{e^{-\alpha_n y}}{4\alpha_n} \begin{pmatrix} y\alpha_n - 2 - \mu_0 & -y\alpha_n\mu_0 \\ y\alpha_n\mu_0 & -y\alpha_n\mu_0 - 2 - \mu_0 \end{pmatrix} \quad (11)
\end{aligned}$$

The solution of homogeneous vector equation was constructed

$$Z_n(y) = Y_1(y) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + Y_2(y) \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Applying the boundary conditions $U_i(Z_n(y)) = f_i$, $i = 1, 2$ one obtains the linear algebraic system from which the constants C_i , $i = \overline{1, 4}$ can be found

$$\begin{aligned}
&C_1 e^{\alpha_n b} (2b\alpha_n^2 \mu_0 + 2\alpha_n \mu_0 + 2\alpha_n) + C_2 e^{\alpha_n b} (2b\alpha_n^2 \mu_0 - 2\alpha_n) + \\
&+ C_3 e^{-\alpha_n b} (-2b\alpha_n^2 \mu_0 + 2\alpha_n + 2\alpha_n \mu_0) + C_4 e^{-\alpha_n b} (2b\alpha_n^2 \mu_0 + 2\alpha_n) = 0 \\
&C_1 e^{\alpha_n b} (-2Gb\alpha_n^2 \mu_0 - 2G\alpha_n \mu_0 + 2\lambda\alpha_n) + C_2 e^{\alpha_n b} (-2Gb\alpha_n^2 \mu_0 + (2G + \lambda)2\alpha_n) + \\
&+ C_3 e^{-\alpha_n b} (-2Gb\alpha_n^2 \mu_0 + 2G\alpha_n \mu_0 - 2\lambda\alpha_n) + C_4 e^{\alpha_n b} (2Gb\alpha_n^2 \mu_0 + (2G + \lambda)2\alpha_n) = \\
&= -p_n 4\alpha_n (1 + \mu_0)
\end{aligned}$$

$$C_1(2\alpha_n + 2\alpha_n \mu_0) + C_2(-2\alpha_n) + C_3(2\alpha_n + 2\alpha_n \mu_0) + C_4(2\alpha_n) = 0$$

$$C_2(2 + \mu_0) + C_4(-2 - \mu_0) = 0$$

The application of the inverse Fourier's formula finalizes the stated problem's solution

$$U(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(y) \sin \alpha_n x, \quad V(x, y) = \frac{V_0(y)}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} V_n(y) \cos \alpha_n x \quad (13)$$

The last step is to find the term $V_0(y)$ as a special case, which can be derived from the boundary problem:

$$\begin{aligned}
V_0''(y) &= 0, \quad 0 < y < b \\
V_0'(b) &= -p_0/(2G + \lambda), \quad V_0(0) = 0 \quad (14)
\end{aligned}$$

After it (15) solving the formulas (14) are rewritten at the form:

$$U(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(y) \sin \alpha_n x, \quad V(x, y) = \frac{-p_0 y}{(2G + \lambda)a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} V_n(y) \cos \alpha_n x \tag{15}$$

2. Numerical results.

There are presented some numerical results for different loads and domain size.

Displacements $U(x, y)$ and $V(x, y)$ are shown at the Fig. 1-4 correspondingly for the external load $p(x) = (x - 2.5)^2$. At the Fig. 1, Fig. 3 and Fig. 2, Fig. 4 the displacements are presented for the $0 < x < 5, 0 < y < 6$ and $0 < x < 10, 0 < y < 15$ correspondingly.

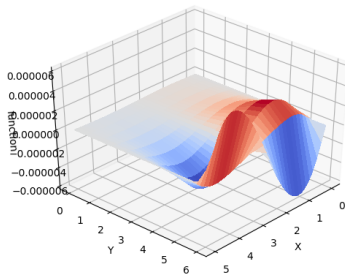


Fig. 1. $U(x, y)$

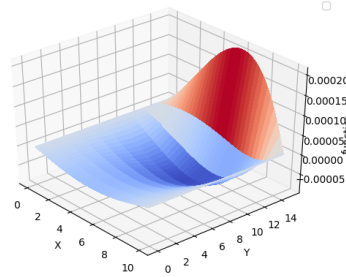


Fig. 2. $U(x, y)$

It can be seen that with the increasing of the domain size the value of the displacements increasing too. Distribution pattern of the displacements are changed, which can be seen on Fig. 1 and Fig. 2. for the displacement $U(x, y)$ and on Fig. 3, Fig. 4 for the displacement $V(x, y)$.

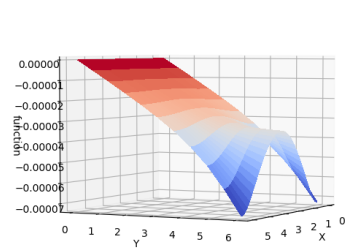


Fig. 3. $V(x, y)$

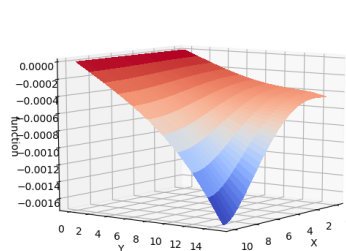
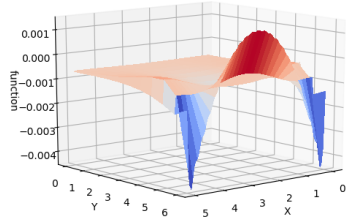
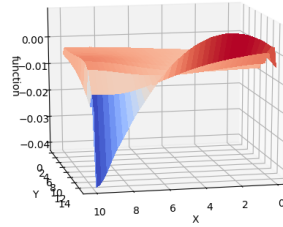
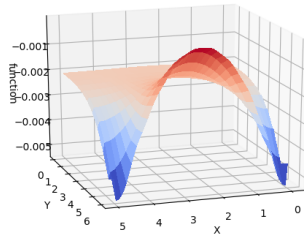
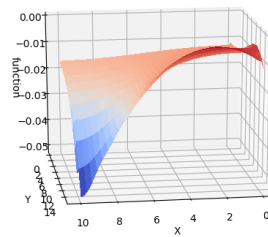


Fig. 4. $V(x, y)$

Fig. 5. $\sigma_x(x, y)$ Fig. 6. $\sigma_x(x, y)$ Fig. 7. $\sigma_y(x, y)$ Fig. 8. $\sigma_y(x, y)$

Stresses $\sigma_x(x, y)$ and $\sigma_y(x, y)$ are shown at the Fig. 5-8 correspondingly for the external load $p(x) = (x - 2.5)^2$. At the Fig. 5, Fig. 7 and Fig. 6, Fig. 8 the stresses are presented for the $0 < x < 5$, $0 < y < 6$ and $0 < x < 10$, $0 < y < 15$ correspondingly.

One can see that the changes are similar to the displacement's changes.

Investigation was also made for the another external load function, but in this paper they are not presented because of the similar pattern of the dependencies.

2. CONCLUSION

The proposed method was applied to solve the boundary stress state problem of the elastic rectangular domain. The exact solution of the stated problem was derived. The displacements and stresses were investigated for the different domain sizes and external load functions.

The future development is to solve the stress state problem for the rectan-

gular domain with the boundary conditions of the first main elasticity problem.

Пожиленков О. В.

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПРЯМОКУТНОЇ ПРУЖНОЇ ОБЛАСТІ

Резюме

У запропонованій роботі досліджена і розв'язана задача про напружений стан прямокутної пружної області. За допомогою інтегрального перетворення Фур'є в просторі трансформант отримана одновимірна векторна крайова задача. Компоненти шуканого вектора є трансформанти переміщень. Отримана крайова задача розв'язана точно за допомогою методу матричного диференціального числення, фундаментальний розв'язок представлений як інтеграл по замкнутому контуру, який, в свою чергу, був знайдений з використанням теореми про лишки. Отримана алгебраїчна система відносно невідомих коефіцієнтів була розв'язана шляхом використання методу Крамера. Остаточні розрахункові формули для поля переміщень і напружень побудовані шляхом застосування оберненого перетворення Фур'є. Досліджено поля переміщень та напружень для різних видів навантаження і розмірів прямокутної області.

Ключові слова: мішана задача пружності, точний розв'язок, прямокутна область, векторна крайова задача, фундаментальна матриця.

Пожиленков А. В.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ УПРУГОЙ ОБЛАСТИ

Резюме

В предложенной работе исследована и решена задача о напряженном состоянии прямоугольной упругой области. С помощью интегрального преобразования Фурье в пространстве трансформант получена одномерная векторная краевая задача. Компоненты вектора представляют собой трансформанты смещений. Полученная краевая задача решена точно с помощью метода матричного дифференциального исчисления, фундаментальное решение представлено в виде интеграла по замкнутому контуру, который в свою очередь был найден используя теорему о вычетах. Полученная алгебраическая система относительно неизвестных коэффициентов, была решена путем использования метода Крамера. Окончательные расчетные формулы для поля смещений и напряжений построены путем применения обратного преобразования Фурье. Представлены численные исследования поля смещения и напряжений для разных видов нагрузки и размеров прямоугольной области.

Ключевые слова: смешанная задача упругости, точное решение, прямоугольная область, векторная краевая задача, фундаментальная матрица.

REFERENCES

1. Liew K. M., Yuming Cheng, Kitipornchai S. (2005) Boundary element-free method (BEFM) and application to two dimensional elasticity problems. *International journal for Numerical Methods in Engineering*. Volume 65, Issue 8.
2. Oden J. T., Kikuchi N. (1982) Finite element methods for constrained problems in elasticity. *International journal for Numerical Methods in Engineering*. Volume 18, Issue 5.
3. Dongyang Shi, Minghao Li, (2014) Superconvergence analysis of the stable conforming rectangular mixed finite elements for the linear elasticity problem *Journal of Computational Mathematics*. Volume 32, Number 2, pp. 205-214.

4. Shyam N. Prasad, Sailendra N. Chatterjee (1973) Some mixed boundary value problems of elasticity in a rectangular domain. *International journal of Solids and Structures*. Volume 9, Issue 10, pp. 1193-1210.
5. V. A. Kondrat'ev (1967) Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Tr. Mosk. Mat. Obs.* Volume 16, pp. 209-292.
6. V. G. Maz'ya, B. A. Plamenevskii (1974) On the coefficients in the asymptotics of solutions of elliptic boundary-value problems near conical points. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. Volume 219, Number 2, pp. 286-289.
7. Vihak V. M., Yuzvyak N. Y., Yasinskij A. V. (1998) The solution of the plane thermoelasticity problem for a rectangular domain. *Journal of Thermal Stresses*. Volume 21, Issue 5.
8. Vihak V. M., Tokovyy Yu. (2002) Construction elementary solutions of the elasticity plane problem for the rectangular domain. *International applied mechanics*. Volume 32, Issue 7, pp. 79-87.
9. El Dhaba, A. R.; Abou-Dina, M. S.; Ghaleb, A. F. (2015) Deformation for a Rectangle by a Finite Fourier Transform. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, Volume 12, Number 1, pp. 31-37(7).
10. Popov G., (1982) The elastic stress concentration around dies, cuts, thin, inclusions and reinforcements (in Russian), Nauka, Moscow.
11. Popov G. Ya., Protserov Yu. S. (2016) Axisymmetric problem for an elastic cylinder of finite length with fixed lateral surface with regard for its weight. *J. Math. Sci.* Volume 212, No. 1., pp. 67-82.
12. Popov G., Vaysfeld N., Zozulevich B. (2014) The exact solution of elasticity mixed plain boundary value problem in a rectangular domain. *20-th International Conference Engineering Mechanics*. Srvatka, Czech Republic.
13. Zhuravlova Z. Yu. (2018) Plane mixed problems of elasticity for a semi-infinite strip. Odesa I.I. Mechnikov National University, Odesa.
14. Popov G., Vaysfeld N. (2011) The steady-state oscillations of the elastic infinite come loaded at a vertex by a concentrated force. *Acta Mechanica*. 221, Issue 3-4, pp. 261-270.
15. Nowacki W. (1970) The theory of elasticity. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa (in Polish).
16. Gantmakher F. R. (1998) The theory of matrices. AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island.

UDC 512.54, 512.53

R. V. Skuratovskii

NTUU, KPI, Kiev

MINIMAL GENERATING SET OF THE COMMUTATOR SUBGROUP OF SYLOW 2-SUBGROUPS OF ALTERNATING GROUP AND ITS STRUCTURE

The size of a minimal generating set for the commutator subgroup of Sylow 2-subgroups of alternating group is found. The structure of commutator subgroup of Sylow 2-subgroups of the alternating group A_{2^k} is investigated.

It is shown that $(Syl_2 A_{2^k})^2 = Syl_2' A_{2^k}$, $k > 2$.

It is proved that the commutator length of an arbitrary element of the iterated wreath product of cyclic groups C_{p_i} , $p_i \in \mathbb{N}$ equals to 1. The commutator width of direct limit of wreath product of cyclic groups is found. This paper presents upper bounds of the commutator width $(cw(G))$ [1] of a wreath product of groups.

A recursive presentation of Sylows 2-subgroups $Syl_2(A_{2^k})$ of A_{2^k} is introduced. As a result the short proof that the commutator width of Sylow 2-subgroups of alternating group A_{2^k} , permutation group S_{2^k} and Sylow p -subgroups of $Syl_2 A_{p^k}$ ($Syl_2 S_{p^k}$) are equal to 1 is obtained.

A commutator width of permutational wreath product $B \wr C_n$ is investigated. An upper bound of the commutator width of permutational wreath product $B \wr C_n$ for an arbitrary group B is found.

MSC: 20B27, 20E08, 20B22, 20B35, 20F65, 20B07.

Key words: wreath product of group, minimal generating set of commutator subgroup of sylow 2-subgroups groups, commutator width of wreath product, commutator width of Sylow p -subgroups, commutator subgroup of alternating group.

DOI: 10.18524/2519-206x.2019.2(34).190058.

1. INTRODUCTION

Meldrum J. [2] briefly considered one form of commutators of the wreath product $A \wr B$. In order to obtain a more detailed description of this form, we take into account the commutator width $(cw(G))$ as presented in work of Muranov A. [1].

As well known the first example of a group G with $cw(G) > 1$ was given by Fite [4]. The smallest finite examples of such groups are groups of order 96, there's two of them, nonisomorphic to each other, were given by Guralnick [23].

We deduce an estimation for commutator width of wreath product of groups $C_n \wr B$ taking in consideration a $cw(B)$ of passive group B . A form of commutators of wreath product $A \wr B$ that was shortly considered in [2]. The form of commutator presentation [2] is proposed by us as wreath recursion [9] and commutator width of it was studied. We impose more weak condition

on the presentation of wreath product commutator then it was imposed by J. Meldrum.

In this paper we continue a researches which was stated in [16; 17]. We find a minimal generating set and the structure for commutator subgroup of $Syl_2 A_{2^k}$.

A research of commutator-group serve to decision of inclusion problem [5] for elements of $Syl_2 A_{2^k}$ in its derived subgroup $(Syl_2 A_{2^k})'$. It was known that, the commutator width of iterated wreath products of nonabelian finite simple groups is bounded by an absolute constant [3; 4]. But it was not proven that commutator subgroup of $\lambda_{i=1}^k C_{p_i}$ consists of commutators. We generalize the passive group of this wreath product to any group B instead of only wreath product of cyclic groups and obtain an exact commutator width.

Also we are going to prove that the commutator width of Sylows p -subgroups of symmetric and alternating groups $p \geq 2$ is 1.

The (permutational) wreath product $H \wr G$ is the semidirect product $H^X \rtimes G$, where G acts on the direct power H^X by the respective permutations of the direct factors. The group C_p or (C_p, X) is equipped with a natural action by the left shift on $X = \{1, \dots, p\}$, $p \in \mathbb{N}$. As well known that a wreath product of permutation groups is associative construction.

The multiplication rule of automorphisms g, h which presented in form of the wreath recursion [6] $g = (g_{(1)}, g_{(2)}, \dots, g_{(d)})\sigma_g$, $h = (h_{(1)}, h_{(2)}, \dots, h_{(d)})\sigma_h$, is given by the formula:

$$g \cdot h = (g_{(1)}h_{(\sigma_g(1))}, g_{(2)}h_{(\sigma_g(2))}, \dots, g_{(d)}h_{(\sigma_g(d))})\sigma_g\sigma_h.$$

We define σ as $(1, 2, \dots, p)$ where p is defined by context.

The set X^* is naturally a vertex set of a regular rooted tree, i.e. a connected graph without cycles and a designated vertex v_0 called the root, in which two words are connected by an edge if and only if they are of form v and vx , where $v \in X^*$, $x \in X$. The set $X^n \subset X^*$ is called the n -th level of the tree X^* and $X^0 = \{v_0\}$. We denote by v_{ji} the vertex of X^j , which has the number i . Note that the unique vertex $v_{k,i}$ corresponds to the unique word v in alphabet X . For every automorphism $g \in Aut X^*$ and every word $v \in X^*$ define the section (state) $g_{(v)} \in Aut X^*$ of g at v by the rule: $g_{(v)}(x) = y$ for $x, y \in X^*$ if and only if $g(vx) = g(v)y$. The subtree of X^* induced by the set of vertices $\cup_{i=0}^k X^i$ is denoted by $X^{[k]}$. The restriction of the action of an automorphism $g \in Aut X^*$ to the subtree $X^{[l]}$ is denoted by $g_{(v)}|_{X^{[l]}}$. A restriction $g_{(v_{ij})}|_{X^{[1]}}$ is called the vertex permutation (v.p.) of g in a vertex v_{ij} and denoted by g_{ij} . We call the endomorphism $\alpha|_v$ restriction of g in a vertex v [6]. For example, if $|X| = 2$ then we just have to distinguish active vertices, i.e., the vertices for which $\alpha|_v$ is non-trivial.

Let us label every vertex of X^l , $0 \leq l < k$ by sign 0 or 1 in relation to state of v.p. in it. Obtained by such way a vertex-labeled regular tree is an element of $AutX^{[k]}$. All undeclared terms are from [7; 8].

Let us make some notations. For brevity, in form of wreath recursion we write a commutator as $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ that is inverse to $a^{-1}b^{-1}ab$. That does not reduce the generality of our reasoning. Since for convenience the commutator of two group elements a and b is denoted by $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, conjugation by an element b as

$$a^b = bab^{-1},$$

We define G_k and B_k recursively i.e.

$$\begin{aligned} B_1 &= C_2, B_k = B_{k-1} \wr C_2 \text{ for } k > 1, \\ G_1 &= \langle e \rangle, G_k = \{(g_1, g_2)\pi \in B_k \mid g_1g_2 \in G_{k-1}\} \text{ for } k > 1. \end{aligned}$$

Note that $B_k = \wr_{i=1}^k C_2$.

The commutator length of an element g of the derived subgroup of a group G , denoted $clG(g)$, is the minimal n such that there exist elements $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ in G such that $g = [x_1, y_1] \dots [x_n, y_n]$. The commutator length of the identity element is 0. The commutator width of a group G , denoted $cw(G)$, is the maximum of the commutator lengths of the elements of its derived subgroup $[G, G]$. We denote by $d(G)$ the minimal number of generators of the group G .

2. MAIN RESULTS

Commutator width of Sylow 2-subgroups of A_{2^k} and S_{2^k} .

The following Lemma imposes the Corollary 4.9 of [2] and it will be deduced from the corollary 4.9 with using in presentation elements in the form of wreath recursion.

Lemma 1. *An element of form $(r_1, \dots, r_{p-1}, r_p) \in W' = (B \wr C_p)'$ iff product of all r_i (in any order) belongs to B' , where $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.*

Proof. More details of our argument may be given as follows.

$$w = (r_1, r_2, \dots, r_{p-1}, r_p),$$

where $r_i \in B$. If we multiply elements from a tuple $(r_1, \dots, r_{p-1}, r_p)$, where $r_i = h_i g_{a(i)} h_{ab(i)}^{-1} g_{aba^{-1}(i)}^{-1}$, $h, g \in B$ and $a, b \in C_p$, then we get a product

$$x = \prod_{i=1}^p r_i = \prod_{i=1}^p h_i g_{a(i)} h_{ab(i)}^{-1} g_{aba^{-1}(i)}^{-1} \in B', \tag{1}$$

where x is a product of corespondent commutators. Therefore, we can write $r_p = r_{p-1}^{-1} \dots r_1^{-1} x$. We can rewrite element $x \in B'$ as the product $x = \prod_{j=1}^m [f_j, g_j]$, $m \leq cw(B)$.

Note that we impose more weak condition on the product of all r_i to belongs to B' then in Definition 4.5. of form $P(L)$ in [2], where the product of all r_i belongs to a subgroup L of B such that $L > B'$.

In more detail deducing of our representation constructing can be reported in following way. If we multiply elements having form of a tuple $(r_1, \dots, r_{p-1}, r_p)$, where $r_i = h_i g_{a(i)} h_{ab(i)}^{-1} g_{aba^{-1}(i)}^{-1}$, $h, g \in B$ and $a, b \in C_p$, then in case $cw(B) = 0$ we obtain a product

$$\prod_{i=1}^p r_i = \prod_{i=1}^p h_i g_{a(i)} h_{ab(i)}^{-1} g_{aba^{-1}(i)}^{-1} \in B'. \quad (2)$$

Note that if we rearrange elements in (1) as

$$h_1 h_1^{-1} g_1 g_2^{-1} h_2 h_2^{-1} g_1 g_2^{-1} \dots h_p h_p^{-1} g_p g_p^{-1},$$

then by the reason of such permutations we obtain a product of corespondent commutators. Therefore, following equality holds true

$$\prod_{i=1}^p h_i g_{a(i)} h_{ab(i)}^{-1} g_{aba^{-1}(i)}^{-1} = \prod_{i=1}^p h_i g_i h_i^{-1} g_i^{-1} x_0 = \prod_{i=1}^p h_i h_i^{-1} g_i g_i^{-1} x \in B', \quad (3)$$

where x_0, x are a products of corespondent commutators. Therefore,

$$(r_1, \dots, r_{p-1}, r_p) \in W' \text{ iff } r_{p-1} \cdot \dots \cdot r_1 \cdot r_p = x \in B'. \quad (4)$$

Thus, one element from states of wreath recursion $(r_1, \dots, r_{p-1}, r_p)$ depends on rest of r_i . This dependence contribute that the product $\prod_{j=1}^p r_j$ for an arbitrary sequence $\{r_j\}_{j=1}^p$ belongs to B' . Thus, r_p can be expressed as:

$$r_p = r_1^{-1} \cdot \dots \cdot r_{p-1}^{-1} x.$$

Denote a j -th tuple, which consists of a wreath recursion elements, by $(r_{j1}, r_{j2}, \dots, r_{jp})$. Closedness by multiplication of the set of forms $(r_1, \dots, r_{p-1}, r_p) \in W = (B \wr C_p)'$ follows from

$$\prod_{j=1}^k (r_{j1} \dots r_{jp-1} r_{jp}) = \prod_{j=1}^k \prod_{i=1}^p r_{ji} = R_1 R_2 \dots R_k \in B', \quad (5)$$

where r_{ji} is i -th element from the tuple number j , $R_j = \prod_{i=1}^p r_{ji}$, $1 \leq j \leq k$.

As it was shown above $R_j = \prod_{i=1}^{p-1} r_{ji} \in B'$. Therefore, the product (5) of R_j , $j \in \{1, \dots, k\}$ which is similar to the product mentioned in [2], has the property $R_1 R_2 \dots R_k \in B'$ too, because of B' is subgroup. Thus, we get a product of form (1) and the similar reasoning as above are applicable.

Let us prove the sufficiency condition. If the set K of elements satisfying the condition of this theorem, that all products of all r_i , where every i occurs in this forms once, belong to B' , then using the elements of form

$$(r_1, e, \dots, e, r_1^{-1}), \dots, (e, e, \dots, e, r_i, e, r_i^{-1}), \dots, \\ (e, e, \dots, e, r_{p-1}, r_{p-1}^{-1}), (e, e, \dots, e, r_1 r_2 \cdot \dots \cdot r_{p-1})$$

we can express any element of form $(r_1, \dots, r_{p-1}, r_p) \in W = (B \wr C_p)'$. We need to prove that in such way we can express all element from W and only elements of W . The fact that all elements can be generated by elements of K follows from randomness of choice every r_i , $i < p$ and the fact that equality (1) holds so construction of r_p is determined.

Lemma 2. For any group B and integer $p \geq 2$ if $w \in (B \wr C_p)'$ then w can be represented as the following wreath recursion

$$w = (r_1, r_2, \dots, r_{p-1}, r_1^{-1} \dots r_{p-1}^{-1} \prod_{j=1}^k [f_j, g_j]),$$

where $r_1, \dots, r_{p-1}, f_j, g_j \in B$ and $k \leq cw(B)$.

Proof. According to Lemma 1 we have the following wreath recursion

$$w = (r_1, r_2, \dots, r_{p-1}, r_p),$$

where $r_i \in B$ and $r_{p-1} r_{p-2} \dots r_2 r_1 r_p = x \in B'$. Therefore we can write $r_p = r_1^{-1} \dots r_{p-1}^{-1} x$. We also can rewrite element $x \in B'$ as product of commutators

$$x = \prod_{j=1}^k [f_j, g_j] \text{ where } k \leq cw(B).$$

Lemma 3. For any group B and integer $p \geq 2$ if $w \in (B \wr C_p)'$ is defined by the following wreath recursion

$$w = (r_1, r_2, \dots, r_{p-1}, r_1^{-1} \dots r_{p-1}^{-1} [f, g]),$$

where $r_1, \dots, r_{p-1}, f, g \in B$ then we can represent w as the following commutator

$$w = [(a_{1,1}, \dots, a_{1,p})\sigma, (a_{2,1}, \dots, a_{2,p})],$$

where

$$\begin{aligned} a_{1,i} &= e, \text{ for } 1 \leq i \leq p-1, \\ a_{2,1} &= (f^{-1})^{r_1^{-1} \dots r_{p-1}^{-1}}, \\ a_{2,i} &= r_{i-1} a_{2,i-1}, \text{ for } 2 \leq i \leq p, \\ a_{1,p} &= g^{a_{2,p}^{-1}}. \end{aligned}$$

Proof. Let us to consider the following commutator

$$\begin{aligned} \kappa &= (a_{1,1}, \dots, a_{1,p}) \sigma \cdot (a_{2,1}, \dots, a_{2,p}) \cdot (a_{1,p}^{-1}, a_{1,1}^{-1}, \dots, a_{1,p-1}^{-1}) \sigma^{-1} \cdot (a_{2,1}^{-1}, \dots, a_{2,p}^{-1}) \\ &= (a_{3,1}, \dots, a_{3,p}), \end{aligned}$$

where

$$a_{3,i} = a_{1,i} a_{2,1+(i \bmod p)} a_{1,i}^{-1} a_{2,i}^{-1}.$$

At first we compute the following

$$a_{3,i} = a_{1,i} a_{2,i+1} a_{1,i}^{-1} a_{2,i}^{-1} = a_{2,i+1} a_{2,i}^{-1} = r_i a_{2,i} a_{2,i}^{-1} = r_i, \text{ for } 1 \leq i \leq p-1.$$

Then we make some transformation of $a_{3,p}$:

$$\begin{aligned} a_{3,p} &= a_{1,p} a_{2,1} a_{1,p}^{-1} a_{2,p}^{-1} \\ &= (a_{2,1} a_{2,1}^{-1}) a_{1,p} a_{2,1} a_{1,p}^{-1} a_{2,p}^{-1} \\ &= a_{2,1} [a_{2,1}^{-1}, a_{1,p}] a_{2,p}^{-1} \\ &= a_{2,1} a_{2,p}^{-1} a_{2,p} [a_{2,1}^{-1}, a_{1,p}] a_{2,p}^{-1} \\ &= (a_{2,p} a_{2,1}^{-1})^{-1} [(a_{2,1}^{-1})^{a_{2,p}}, a_{1,p}^{a_{2,p}}] \\ &= (a_{2,p} a_{2,1}^{-1})^{-1} [(a_{2,1}^{-1})^{a_{2,p} a_{2,1}^{-1}}, a_{1,p}^{a_{2,p}}]. \end{aligned}$$

Now we can see that the form of the commutator κ is similar to the form of w .

Let us make the following notation

$$r' = r_{p-1} \dots r_1.$$

We note that from the definition of $a_{2,i}$ for $2 \leq i \leq p$ it follows that

$$r_i = a_{2,i+1} a_{2,i}^{-1}, \text{ for } 1 \leq i \leq p-1.$$

Therefore

$$\begin{aligned} r' &= (a_{2,p} a_{2,p-1}^{-1}) (a_{2,p-1} a_{2,p-2}^{-1}) \dots (a_{2,3} a_{2,2}^{-1}) (a_{2,2} a_{2,1}^{-1}) \\ &= a_{2,p} a_{2,1}^{-1}. \end{aligned}$$

And then

$$(a_{2,p}a_{2,1}^{-1})^{-1} = (r')^{-1} = r_1^{-1} \dots r_{p-1}^{-1}.$$

And now we compute the following

$$(a_{2,1}^{-1})^{a_{2,p}a_{2,1}^{-1}} = (((f^{-1})r_1^{-1} \dots r_{p-1}^{-1})^{-1})^{r'} = (f^{(r')^{-1}})^{r'} = f,$$

$$a_{1,p}^{a_{2,p}} = (g^{a_{2,p}^{-1}})^{a_{2,p}} = g.$$

Finally we conclude that

$$a_{3,p} = r_1^{-1} \dots r_{p-1}^{-1}[f, g].$$

Thus, the commutator κ is presented exactly in the similar form as w has.

For future using we formulate previous Lemma for the case $p = 2$.

Corollary 1. *For any group B if $w \in (B \wr C_2)'$ is defined by the following wreath recursion*

$$w = (r_1, r_1^{-1}[f, g]),$$

where $r_1, f, g \in B$ then we can represent w as commutator

$$w = [(e, a_{1,2})\sigma, (a_{2,1}, a_{2,2})],$$

where

$$a_{2,1} = (f^{-1})r_1^{-1},$$

$$a_{2,2} = r_1 a_{2,1},$$

$$a_{1,2} = g^{a_{2,2}^{-1}}.$$

Lemma 4. *For any group B and integer $p \geq 2$ inequality*

$$cw(B \wr C_p) \leq \max(1, cw(B))$$

holds.

Proof. We can represent any $w \in (B \wr C_p)'$ by Lemma 1 with the following wreath recursion

$$w = (r_1, r_2, \dots, r_{p-1}, r_1^{-1} \dots, r_{p-1}^{-1} \prod_{j=1}^k [f_j, g_j])$$

$$= (r_1, r_2, \dots, r_{p-1}, r_1^{-1} \dots, r_{p-1}^{-1}[f_1, g_1]) \cdot \prod_{j=2}^k [(e, \dots, e, f_j), (e, \dots, e, g_j)],$$

where $r_1, \dots, r_{p-1}, f_j, g_j \in B$ and $k \leq cw(B)$. Now by the Lemma 3 we can see that w can be represented as a product of $\max(1, cw(B))$ commutators.

Corollary 2. *If $W = C_{p_k} \wr \dots \wr C_{p_1}$ then $cw(W) = 1$ for $k \geq 2$.*

Proof. If $B = C_{p_k} \wr C_{p_{k-1}}$ then taking into consideration that $cw(B) > 0$ (because $C_{p_k} \wr C_{p_{k-1}}$ is not commutative group). Since Lemma 4 implies that $cw(C_{p_k} \wr C_{p_{k-1}}) = 1$ then according to the inequality $cw(C_{p_k} \wr C_{p_{k-1}} \wr C_{p_{k-2}}) \leq \max(1, cw(B))$ from Lemma 4 we obtain $cw(C_{p_k} \wr C_{p_{k-1}} \wr C_{p_{k-2}}) = 1$. Analogously if $W = C_{p_k} \wr \dots \wr C_{p_1}$ and supposition of induction for $C_{p_k} \wr \dots \wr C_{p_2}$ holds, then using an associativity of a permutational wreath product we obtain from the inequality of Lemma 4 and the equality $cw(C_{p_k} \wr \dots \wr C_{p_2}) = 1$ that $cw(W) = 1$.

We define our partial ordered set M as the set of all finite wreath products of cyclic groups. We make of use directed set \mathbb{N} .

$$H_k = \wr_{i=1}^k C_{p_i} \quad (6)$$

Moreover, it has already been proved in Corollary 3 that each group of the form $\wr_{i=1}^k C_{p_i}$ has a commutator width equal to 1, i.e $cw(\wr_{i=1}^k C_{p_i}) = 1$. A partial order relation will be a subgroup relationship. Define the injective homomorphism $f_{k,k+1}$ from the $\wr_{i=1}^k C_{p_i}$ into $\wr_{i=1}^{k+1} C_{p_i}$ by mapping a generator of active group C_{p_i} of H_k in a generator of active group C_{p_i} of H_{k+1} . In more details the injective homomorphism $f_{k,k+1}$ is defined as $g \mapsto g(e, \dots, e)$, where a generator $g \in \wr_{i=1}^k C_{p_i}$, $g(e, \dots, e) \in \wr_{i=1}^{k+1} C_{p_i}$.

Therefore this is an injective homomorphism of H_k onto subgroup $\wr_{i=1}^k C_{p_i}$ of H_{k+1} .

Corollary 3. *The direct limit $\varinjlim_{i=1}^k \wr_{i=1}^k C_{p_i}$ of direct system $\langle f_{k,j}, \wr_{i=1}^k C_{p_i} \rangle$ has commutator width 1.*

Proof. We make the transition to the direct limit in the direct system $\langle f_{k,j}, \wr_{i=1}^k C_{p_i} \rangle$ of injective mappings from chain $e \rightarrow \dots \rightarrow \wr_{i=1}^k C_{p_i} \rightarrow \wr_{i=1}^{k+1} C_{p_i} \rightarrow \wr_{i=1}^{k+2} C_{p_i} \rightarrow \dots$

Since all mappings in chains are injective homomorphisms, it has a trivial kernel. Therefore the transition to a direct limit boundary preserves the property $cw(H) = 1$, because each group H_k from the chain endowed by $cw(H_k) = 1$.

The direct limit of the direct system is denoted by $\varinjlim_{i=1}^k \mathcal{C}_{p_i}$ and is defined as disjoint union of the H_k 's modulo a certain equivalence relation:

$$\varinjlim_{i=1}^k \mathcal{C}_{p_i} = \coprod_{i=1}^k \mathcal{C}_{p_i} / \sim.$$

Since every element g of $\varinjlim_{i=1}^k \mathcal{C}_{p_i}$ coincides with a correspondent element from some H_k of direct system, then by the injectivity of the mappings for g the property $cw(\varinjlim_{i=1}^k \mathcal{C}_{p_i}) = 1$ also holds. Thus, it holds for the whole $\varinjlim_{i=1}^k \mathcal{C}_{p_i}$.

Corollary 4. For prime p and $k \geq 2$ commutator width $cw(\text{Syl}_p(S_{p^k})) = 1$ and for prime $p > 2$ and $k \geq 2$ commutator width $cw(\text{Syl}_p(A_{p^k})) = 1$.

Proof. Since $\text{Syl}_p(S_{p^k}) \simeq \varinjlim_{i=1}^k C_p$ see [10; 11], then $cw(\text{Syl}_p(S_{p^k})) = 1$. As well known in case $p > 2$ we have $\text{Syl}_p S_{p^k} \simeq \text{Syl}_p A_{p^k}$ see [16; 19], then $cw(\text{Syl}_p(A_{p^k})) = 1$.

Proposition 1. The following inclusion $B'_k < G_k$ holds.

Proof. Induction on k . For $k = 1$ we have $B'_k = G_k = \{e\}$. Let us fix some $g = (g_1, g_2) \in B'_k$. Then $g_1 g_2 \in B'_{k-1}$ by Lemma 1. As $B'_{k-1} < G_{k-1}$ by induction hypothesis therefore $g_1 g_2 \in G_{k-1}$ and by definition of G_k it follows that $g \in G_k$.

Corollary 5. The set G_k is a subgroup in the group B_k .

Proof. According to recursively definition of G_k and B_k , where $G_k = \{(g_1, g_2)\pi \in B_k \mid g_1 g_2 \in G_{k-1}\}$ $k > 1$, G_k is subset of B_k with condition $g_1 g_2 \in G_{k-1}$. It is easy to check the closedness by multiplication elements of G_k with condition $g_1 g_2, h_1 h_2 \in G_{k-1}$ because G_{k-1} is subgroup so $g_1 g_2 h_1 h_2 \in G_{k-1}$ too. A condition of existing inverse be verified trivial.

Lemma 5. For any $k \geq 1$ we have $|G_k| = |B_k|/2$.

Proof. Induction on k . For $k = 1$ we have $|G_1| = 1 = |B_1|/2$. Every element $g \in G_k$ can be uniquely write as the following wreath recursion

$$g = (g_1, g_2)\pi = (g_1, g_1^{-1}x)\pi$$

where $g_1 \in B_{k-1}$, $x \in G_{k-1}$ and $\pi \in C_2$. Elements g_1, x and π are independent therefore $|G_k| = 2|B_{k-1}| \cdot |G_{k-1}| = 2|B_{k-1}| \cdot |B_{k-1}|/2 = |B_k|/2$.

Corollary 6. The group G_k is a normal subgroup in the group B_k i.e. $G_k \triangleleft B_k$.

Proof. There exists normal embedding (normal injective monomorphism) $\varphi : G_k \rightarrow B_k$ [20] such that $G_k \triangleleft B_k$. Indeed, according to Lemma index $|B_k : G_k| = 2$ so it is normal subgroup that is quotient subgroup $B_k/C_2 \simeq G_k$.

Theorem 1. For any $k \geq 1$ we have $G_k \simeq Syl_2 A_{2^k}$.

Proof. Group C_2 acts on the set $X = \{1, 2\}$. Therefore we can recursively define sets X^k on which group B_k acts $X^1 = X$, $X^k = X^{k-1} \times X$ for $k > 1$. At first we define $S_{2^k} = Sym(X^k)$ and $A_{2^k} = Alt(X^k)$ for all integer $k \geq 1$. Then $G_k < B_k < S_{2^k}$ and $A_{2^k} < S_{2^k}$.

We already know [16] that $B_k \simeq Syl_2(S_{2^k})$. Since $|A_{2^k}| = |S_{2^k}|/2$ therefore $|Syl_2 A_{2^k}| = |Syl_2 S_{2^k}|/2 = |B_k|/2$. By Lemma 2 it follows that $|Syl_2 A_{2^k}| = |G_k|$. Therefore it is left to show that $G_k < Alt(X^k)$.

Let us fix some $g = (g_1, g_2)\sigma^i$ where $g_1, g_2 \in B_{k-1}$, $i \in \{0, 1\}$ and $g_1 g_2 \in G_{k-1}$. Then we can represent g as follows

$$g = (g_1 g_2, e) \cdot (g_2^{-1}, g_2) \cdot (e, e,)\sigma^i.$$

In order to prove this theorem it is enough to show that

$$(g_1 g_2, e), (g_2^{-1}, g_2), (e, e,)\sigma \in Alt(X^k).$$

Element $(e, e,)\sigma$ just switch letters x_1 and x_2 for all $x \in X^k$. Therefore $(e, e,)\sigma$ is product of $|X^{k-1}| = 2^{k-1}$ transpositions and therefore $(e, e,)\sigma \in Alt(X^k)$.

Elements g_2^{-1} and g_2 have the same cycle type. Therefore elements (g_2^{-1}, e) and (e, g_2) also have the same cycle type. Let us fix the following cycle decompositions

$$\begin{aligned} (g_2^{-1}, e) &= \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_n, \\ (e, g_2) &= \pi_1 \cdot \dots \cdot \pi_n. \end{aligned}$$

Note that element (g_2^{-1}, e) acts only on letters like x_1 and element (e, g_2) acts only on letters like x_2 . Therefore we have the following cycle decomposition

$$(g_2^{-1}, g_2) = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_n \cdot \pi_1 \cdot \dots \cdot \pi_n.$$

So, element (g_2^{-1}, g_2) has even number of odd permutations and then $(g_2^{-1}, g_2) \in Alt(X^k)$.

Note that $g_1 g_2 \in G_{k-1}$ and $G_{k-1} = Alt(X^{k-1})$ by induction hypothesis. Therefore $g_1 g_2 \in Alt(X^{k-1})$. As elements $g_1 g_2$ and $(g_1 g_2, e)$ have the same cycle type then $(g_1 g_2, e) \in Alt(X^k)$.

As it was proven by the author in [16] Sylow 2-subgroup has structure $B_{k-1} \times W_{k-1}$, where definition of B_{k-1} is the same that was given in [16].

Recall that it was denoted by W_{k-1} the subgroup of $AutX^{[k]}$ such that has active states only on X^{k-1} and number of such states is even, i.e. $W_{k-1} \triangleleft St_{G_k}(k-1)$ [6]. It was proven that the size of W_{k-1} is equal to $2^{2^{k-1}-1}$, $k > 1$ and its structure is $(C_2)^{2^{k-1}-1}$. The following structural theorem characterizing the group G_k was proved by us [16].

Theorem 2. *A maximal 2-subgroup of $AutX^{[k]}$ that acts by even permutations on X^k has the structure of the semidirect product $G_k \simeq B_{k-1} \times W_{k-1}$ and isomorphic to $Syl_2A_{2^k}$.*

Note that W_{k-1} is subgroup of stabilizer of X^{k-1} i.e. $W_{k-1} < St_{AutX^{[k]}}(k-1) \triangleleft AutX^{[k]}$ and is normal too $W_{k-1} \triangleleft AutX^{[k]}$, because conjugation keeps a cyclic structure of permutation so even permutation maps in even. Therefore such conjugation induce an automorphism of W_{k-1} and $G_k \simeq B_{k-1} \times W_{k-1}$.

Remark 1. *As a consequence, the structure founded by us in [16] fully consistent with the recursive group representation (which used in this paper) based on the concept of wreath recursion [9].*

Theorem 3. *Elements of B'_k have the following form $B'_k = \{[f, l] \mid f \in B_k, l \in G_k\} = \{[l, f] \mid f \in B_k, l \in G_k\}$.*

Proof. It is enough to show either $B'_k = \{[f, l] \mid f \in B_k, l \in G_k\}$ or $B'_k = \{[l, f] \mid f \in B_k, l \in G_k\}$ because if $f = [g, h]$ then $f^{-1} = [h, g]$.

We prove the proposition by induction on k . For the case $k = 1$ we have $B'_1 = \langle e \rangle$.

Consider case $k > 1$. According to Lemma 2 and Corollary 1 every element $w \in B'_k$ can be represented as

$$w = (r_1, r_1^{-1}[f, g])$$

for some $r_1, f \in B_{k-1}$ and $g \in G_{k-1}$ (by induction hypothesis). By the Corollary 1 we can represent w as commutator of

$$(e, a_{1,2})\sigma \in B_k \text{ and } (a_{2,1}, a_{2,2}) \in B_k,$$

where

$$\begin{aligned} a_{2,1} &= (f^{-1})r_1^{-1}, \\ a_{2,2} &= r_1a_{2,1}, \\ a_{1,2} &= g^{a_{2,2}^{-1}}. \end{aligned}$$

If $g \in G_{k-1}$ then by the definition of G_k and Corollary 6 we obtain $(e, a_{1,2})\sigma \in G_k$.

Remark 2. Let us to note that Theorem 3 improve Corollary 4 for the case $Syl_2 S_{2^k}$.

Proposition 2. If g is an element of the group B_k then $g^2 \in B'_k$.

Proof. Induction on k . We note that $B_k = B_{k-1} \wr C_2$. Therefore we fix some element

$$g = (g_1, g_2)\sigma^i \in B_{k-1} \wr C_2,$$

where $g_1, g_2 \in B_{k-1}$ and $i \in \{0, 1\}$. Let us to consider g^2 then two cases are possible:

$$g^2 = (g_1^2, g_2^2) \text{ or } g^2 = (g_1 g_2, g_2 g_1)$$

In second case we consider a product of coordinates $g_1 g_2 \cdot g_2 g_1 = g_1^2 g_2^2 x$. Since according to the induction hypothesis $g_i^2 \in B'_k$, $i \leq 2$ then $g_1 g_2 \cdot g_2 g_1 \in B'_k$ also according to Lemma 1 $x \in B'_k$. Therefore a following inclusion holds $(g_1 g_2, g_2 g_1) = g^2 \in B'_k$. In first case the proof is even simpler because $g_1^2, g_2^2 \in B'$ by the induction hypothesis.

Lemma 6. If an element $g = (g_1, g_2) \in G'_k$ then $g_1, g_2 \in G_{k-1}$ and $g_1 g_2 \in B'_{k-1}$.

Proof. As $B'_k < G_k$ therefore it is enough to show that $g_1 \in G_{k-1}$ and $g_1 g_2 \in B'_{k-1}$. Let us fix some $g = (g_1, g_2) \in G'_k < B'_k$. Then Lemma 1 implies that $g_1 g_2 \in B'_{k-1}$.

In order to show that $g_1 \in G_{k-1}$ we firstly consider just one commutator of arbitrary elements from G_k

$$f = (f_1, f_2)\sigma, \quad h = (h_1, h_2)\pi \in G_k,$$

where $f_1, f_2, h_1, h_2 \in B_{k-1}$, $\sigma, \pi \in C_2$. The definition of G_k implies that $f_1 f_2, h_1 h_2 \in G_{k-1}$.

If $g = (g_1, g_2) = [f, h]$ then

$$g_1 = f_1 h_i f_j^{-1} h_k^{-1}$$

for some $i, j, k \in \{1, 2\}$. Then

$$g_1 = f_1 h_i f_j (f_j^{-1})^2 h_k (h_k^{-1})^2 = (f_1 f_j)(h_i h_k)x(f_j^{-1} h_k^{-1})^2,$$

where x is product of commutators of f_i, h_j and f_i, h_k , hence $x \in B'_{k-1}$.

It is enough to consider first product $f_1 f_j$. If $j = 1$ then $f_1^2 \in B'_{k-1}$ by Proposition 2 if $j = 2$ then $f_1 f_2 \in G_{k-1}$ according to definition of G_k , the same is true for $h_i h_k$. Thus, for any i, j, k it holds $f_1 f_j, h_i h_k \in G_{k-1}$. Besides that

a square $(f_j^{-1}h_k^{-1})^2 \in B'_k$ according to Proposition 2. Therefore $g_1 \in G_{k-1}$ because of Proposition 2 and Proposition 1, the same is true for g_2 .

Now it lefts to consider the product of some $f = (f_1, f_2), h = (h_1, h_2)$, where $f_1, h_1 \in G_{k-1}$, $f_1h_1 \in G_{k-1}$ and $f_1f_2, h_1h_2 \in B'_{k-1}$

$$fh = (f_1h_1, f_2h_2).$$

Since $f_1f_2, h_1h_2 \in B'_{k-1}$ by imposed condition in this item and taking into account that $f_1h_1f_2h_2 = f_1f_2h_1h_2x$ for some $x \in B'_{k-1}$ then $f_1h_1f_2h_2 \in B'_{k-1}$ by Lemma 1. Other words closedness by multiplication holds and so according Lemma1 we have element of commutator G'_k .

In the following theorem we prove 2 facts at once.

Theorem 4. *The following statements are true.*

1. An element $g = (g_1, g_2) \in G'_k$ iff $g_1, g_2 \in G_{k-1}$ and $g_1g_2 \in B'_{k-1}$.
2. Commutator subgroup G'_k coincides with set of all commutators for $k \geq 1$

$$G'_k = \{[f_1, f_2] \mid f_1 \in G_k, f_2 \in G_k\}.$$

Proof. For the case $k = 1$ we have $G'_1 = \langle e \rangle$. So, further we consider the case $k \geq 2$.

Sufficiency of the first statement of this theorem follows from the Lemma 6. So, in order to prove necessity of the both statements it is enough to show that element

$$w = (r_1, r_1^{-1}x),$$

where $r_1 \in G_{k-1}$ and $x \in B'_{k-1}$, can be represented as a commutator of elements from G_k . By Proposition 3 we have $x = [f, g]$ for some $f \in B_{k-1}$ and $g \in G_{k-1}$. Therefore

$$w = (r_1, r_1^{-1}[f, g]).$$

By the Corollary 1 we can represent w as a commutator of

$$(e, a_{1,2})\sigma \in B_k \text{ and } (a_{2,1}, a_{2,2}) \in B_k,$$

where $a_{2,1} = (f^{-1})r_1^{-1}$, $a_{2,2} = r_1a_{2,1}$, $a_{1,2} = g^{a_{2,2}^{-1}}$. It only lefts to show that $(e, a_{1,2})\sigma, (a_{2,1}, a_{2,2}) \in G_k$. Note the following

$$a_{1,2} = g^{a_{2,2}^{-1}} \in G_{k-1} \text{ by Corollary 6.}$$

$$a_{2,1}a_{2,2} = a_{2,1}r_1a_{2,1} = r_1[r_1, a_{2,1}]a_{2,1}^2 \in G_{k-1} \text{ by Proposition 1 and Proposition 2.}$$

So we have $(e, a_{1,2})\sigma \in G_k$ and $(a_{2,1}, a_{2,2}) \in G_k$ by the definition of G_k .

Proposition 3. *For arbitrary $g \in G_k$ the inclusion $g^2 \in G'_k$ holds.*

Proof. Induction on k : elements of G_1^2 have form $(\sigma)^2 = e$, where $\sigma = (1, 2)$, so the statement holds. In general case, when $k > 1$, the elements of G_k have the form $g = (g_1, g_2)\sigma^i$, $g_1, g_2 \in B_{k-1}$, $i \in \{0, 1\}$. Then we have two possibilities: $g^2 = (g_1^2, g_2^2)$ or $g^2 = (g_1g_2, g_2g_1)$.

Firstly we show that $g_1^2 \in G_{k-1}$, $g_2^2 \in G_{k-1}$. According to Proposition 2, we have $g_1^2, g_2^2 \in B'_{k-1}$ and according to Proposition 1, we have $B'_{k-1} < G_{k-1}$ then using Theorem 4 $g^2 = (g_1^2, g_2^2) \in G_k$.

Consider the second case $g^2 = (g_1g_2, g_2g_1)$. Since $g \in G_k$, then, according to the definition of G_k we have that $g_1g_2 \in G_{k-1}$. By Proposition 1, and definition of G_k , we obtain

$$\begin{aligned} g_2g_1 &= g_1g_2g_2^{-1}g_1^{-1}g_2g_1 = g_1g_2[g_2^{-1}, g_1^{-1}] \in G_{k-1}, \\ g_1g_2 \cdot g_2g_1 &= g_1g_2^2g_1 = g_1^2g_2^2[g_2^{-2}, g_1^{-1}] \in B'_{k-1}. \end{aligned}$$

Note that $g_1^2, g_2^2 \in B'_{k-1}$ according to Proposition 2, then $g_1^2g_2^2[g_2^{-2}, g_1^{-1}] \in B'_{k-1}$. Since $g_1g_2 \cdot g_2g_1 \in B'_{k-1}$ and $g_1g_2, g_2g_1 \in G_{k-1}$, then, according to Lemma 6, we obtain $g^2 = (g_1g_2, g_2g_1) \in G'_k$.

Statement 1. *The commutator subgroup is a subgroup of G_k^2 i.e. $G'_k < G_k^2$.*

Proof. Indeed, an arbitrary commutator presented as product of squares. Let $a, b \in G$ and set that $x = a$, $y = a^{-1}ba$, $z = a^{-1}b^{-1}$. Then $x^2y^2z^2 = a^2(a^{-1}ba)^2(a^{-1}b^{-1})^2 = aba^{-1}b^{-1}$, in more detail: $a^2(a^{-1}ba)^2(a^{-1}b^{-1})^2 = a^2a^{-1}ba a^{-1}ba a^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1} = abbb^{-1}a^{-1}b^{-1} = [a, b]$. In such way we obtain all commutators and their products. Thus, we generate by squares the whole G'_k .

Corollary 7. *For the Sylow subgroup $(Syl_2A_{2^k})$ the following equalities $Syl'_2A_{2^k} = (Syl_2A_{2^k})^2$, $\Phi(Syl_2A_{2^k}) = Syl'_2A_{2^k}$, that are characteristic properties of special p -groups [22], are true.*

Proof. As well known, for an arbitrary group (also by Statement 1) the following embedding $G' \triangleleft G^2$ holds. In view of the above Proposition 3, a reverse embedding for G_k is true. Thus, the group $Syl_2A_{2^k}$ has some properties of special p -groups that is $P' = \Phi(P)$ [22] because $G_k^2 = G'_k$ and so $\Phi(Syl_2A_{2^k}) = Syl'_2(A_{2^k})$.

Corollary 8. *Commutator width of the group $Syl_2A_{2^k}$ equals to 1 for $k \geq 2$.*

It immediately follows from item 2 of Theorem 4.

3. MINIMAL GENERATING SET

For the construction of minimal generating set we used the representation of elements of group G_k by portraits of automorphisms at restricted binary tree $AutX^k$. For convenience we will identify elements of G_k with its faithful representation by portraits of automorphisms from $AutX^{[k]}$.

We denote by $A|_l$ a set of all functions a_l , such, that $[\varepsilon, \dots, \varepsilon, a_l, \varepsilon, \dots] \in [A]_l$. Recall that, according to [21], l -coordinate subgroup $U < G$ is the following subgroup.

Definition 1. For an arbitrary $k \in \mathbb{N}$ we call a k -coordinate subgroup $U < G$ a subgroup, which is determined by k -coordinate sets $[U]_l$, $l \in \mathbb{N}$, if this subgroup consists of all Kaloujnine's tableaux $a \in I$ for which $[a]_l \in [U]_l$.

We denote by $G_k(l)$ a level subgroup of G_k , which consists of the tuples of v.p. from X^l , $l < k - 1$ of any $\alpha \in G_k$. We denote as $G_k(k - 1)$ such subgroup of G_k that is generated by v.p., which are located on X^{k-1} and isomorphic to W_{k-1} . Note that $G_k(l)$ is in bijective correspondence (and isomorphism) with l -coordinate subgroup $[U]_l$ [21].

For any v.p. g_{li} in v_{li} of X^l we set in correspondence with g_{li} the permutation $\varphi(g_{li}) \in S_2$ by the following rule:

$$\varphi(g_{li}) = \begin{cases} (1, 2), & \text{if } g_{li} \neq e, \\ e, & \text{if } g_{li} = e. \end{cases} \quad (7)$$

Define a homomorphic map from $G_k(l)$ onto S_2 with the kernel consisting of all products of even number of transpositions that belongs to $G_k(l)$. For instance, the element (12)(34) of $G_k(2)$ belongs to $\ker\varphi$. Hence, $\varphi(g_{li}) \in S_2$.

Definition 2. We define the subgroup of l -th level as a subgroup generated by all possible vertex permutation of this level.

Statement 2. In G'_k , the following k equalities are true:

$$\prod_{l=1}^{2^l} \varphi(g_{lj}) = e, \quad 0 \leq l < k - 1. \quad (8)$$

For the case $i = k - 1$, the following condition holds:

$$\prod_{j=1}^{2^{k-2}} \varphi(g_{k-1j}) = \prod_{j=2^{k-2}+1}^{2^{k-1}} \varphi(g_{k-1j}) = e. \quad (9)$$

Thus, G'_k has k new conditions on a combination of level subgroup elements, except for the condition of last level parity from the original group.

Proof. Note that the condition (8) is compatible with that were founded by R. Guralnik in [23], because as it was proved by author [16] $G_{k-1} \simeq B_{k-2} \times \mathcal{W}_{k-1}$, where $B_{k-2} \simeq \prod_{i=1}^{k-2} C_2^{(i)}$.

According to Property 1, $G'_k \leq G_k^2$, so it is enough to prove the statement for the elements of G_k^2 . Such elements, as it was described above, can be presented in the form $s = (s_{l1}, \dots, s_{l2^l})\sigma$, where $\sigma \in G_{l-1}$ and s_{li} are states of $s \in G_k$ in v_{li} , $i \leq 2^l$. For convenience we will make the transition from the tuple $(s_{l1}, \dots, s_{l2^l})$ to the tuple $(g_{l1}, \dots, g_{l2^l})$. Note that there is the trivial vertex permutation $g_{lj}^2 = e$ in the product of the states $s_{lj} \cdot s_{lj}$.

Since in G'_k v.p. on X^0 are trivial, so σ can be decomposed as $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{21})$, where σ_{21}, σ_{22} are root permutations in v_{11} and v_{12} .

Consider the square of s . So we calculate squares $((s_{l1}, s_{l2}, \dots, s_{l2^{l-1}})\sigma)^2$. The condition (8) is equivalent to the condition that s^2 has even index on each level. Two cases are feasible: if permutation $\sigma = e$, then $((s_{l1}, s_{l2}, \dots, s_{l2^{l-1}})\sigma)^2 = (s_{l1}^2, s_{l2}^2, \dots, s_{l2^{l-1}}^2)e$, so after the transition from $(s_{l1}^2, s_{l2}^2, \dots, s_{l2^{l-1}}^2)$ to $(g_{l1}^2, g_{l2}^2, \dots, g_{l2^{l-1}}^2)$, we get a tuple of trivial permutations (e, \dots, e) on X^l , because $g_{lj}^2 = e$. In general case, if $\sigma \neq e$, after such transition we obtain $(g_{l1}g_{l\sigma(2)}, \dots, g_{l2^{l-1}}g_{l\sigma(2^{l-1})})\sigma^2$. Consider the product of form

$$\prod_{j=1}^{2^l} \varphi(g_{lj}g_{l\sigma(j)}), \quad (10)$$

where σ and $g_{li}g_{l\sigma(i)}$ are from $(g_{l1}g_{l\sigma(2)}, \dots, g_{l2^{l-1}}g_{l\sigma(2^{l-1})})\sigma^2$.

Note that each element g_{lj} occurs twice in (10) regardless of the permutation σ , therefore considering commutativity of homomorphic images $\varphi(g_{lj})$, $1 \leq j \leq 2^l$ we conclude that $\prod_{j=1}^{2^l} \varphi(g_{lj}g_{l\sigma(j)}) = \prod_{j=1}^{2^l} \varphi(g_{lj}^2) = e$, because of $g_{lj}^2 = e$. We rewrite $\prod_{j=1}^{2^l} \varphi(g_{lj}^2) = e$ as characteristic condition:

$$\prod_{j=1}^{2^{l-1}} \varphi(g_{lj}) = \prod_{j=2^{l-1}+1}^{2^l} \varphi(g_{lj}) = e.$$

According to Property 1, any commutator from G'_k can be presented as a product of some squares s^2 , $s \in G_k$, $s = ((s_{l1}, \dots, s_{l2^l})\sigma)$.

A product of elements of $G_k(k-1)$ satisfies the equation $\prod_{j=1}^{2^l} \varphi(g_{lj}) = e$, because any permutation of elements from X^k , which belongs to G_k is even. Consider the element $s = (s_{k-1,1}, \dots, s_{k-1,2^{k-1}})\sigma$, where $(s_{k-1,1}, \dots, s_{k-1,2^{k-1}}) \in$

$G_k(k-1)$, $\sigma \in G_{k-1}$. If $g_{01} = (1, 2)$, where g_{01} is root permutation of σ , then $s^2 = (s_{k-1,1}s_{k-1,\sigma(1)}, \dots, s_{k-1,(2^{k-1})}s_{k-1,\sigma(2^{k-1})})$, where $\sigma(j) > 2^{k-1}$ for $j \leq 2^{k-1}$, and if $j < 2^{k-1}$ then $\sigma(j) \geq 2^{k-1}$. Because of $\prod_{j=1}^{2^{k-1}} \varphi(g_{k-1,j}) = e$ in G_k and the property $\sigma(j) \leq 2^{k-1}$ for $j > 2^{k-1}$, then the product $\prod_{j=1}^{2^{k-2}} \varphi(g_{k-1,j}g_{k-1,\sigma(j)})$ of images of v.p. from $(g_{k-1,1}g_{k-1,\sigma(1)}, \dots, g_{k-1,(2^{k-1})}g_{k-1,\sigma(2^{k-1})})$ is equal to $\prod_{j=1}^{2^{k-1}} \varphi(g_{k-1,j}) = e$. Indeed in $\prod_{j=1}^{2^{k-1}} \varphi(g_{k-1,j})$ and as in $\prod_{j=1}^{2^{k-1}} \varphi(g_{k-1,j}g_{k-1,\sigma(j)})$ are the same v.p. from X^{k-1} regardless of such σ as described above.

The same is true for right half of X^{k-1} . Therefore the equality (9) holds.

Note that such product $\prod_{j=1}^{2^{k-1}} \varphi(g_{k-1,j})$ is homomorphic image of $(g_{l,1}g_{l,\sigma(1)}, \dots, g_{l,(2^l)}g_{l,\sigma(2^l)})$, where $l = k-1$, as an element of $G'_k(l)$ after mapping (7).

If $g_{01} = e$, where g_{01} is root permutation of σ then σ can be decomposed as $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{12})$, where σ_{11}, σ_{12} are root permutations in v_{11} and v_{12} . As a result s^2 has a form $((s_{l,1}s_{l,\sigma(1)}, \dots, s_{l,\sigma(2^{l-1})})\sigma_1^2, (s_{l,2^{l-1}+1}s_{l,\sigma(2^{l-1}+1)}, \dots, s_{l,(2^l)}s_{l,\sigma(2^l)})\sigma_2^2)$, where $l = k-1$. As a result of action of σ_{11} all states of l -th level with number $1 \leq j \leq 2^{k-2}$ permutes in coordinate from 1 to 2^{k-2} the other are fixed. The action of σ_{11} is analogous.

It corresponds to the next form of element from $G'_k(l)$:

$$(g_{l,1}g_{l,\sigma_1(1)}, \dots, g_{l,\sigma_1(2^{l-1})}), (g_{l,2^{l-1}+1}g_{l,\sigma_2(2^{l-1}+1)}, \dots, g_{l,(2^l)}g_{l,\sigma_2(2^l)}).$$

Therefore the product of form

$$\prod_{j=1}^{2^{k-2}} \varphi(g_{k-1,j}g_{l,\sigma(j)}) = \prod_{j=2^{k-2}+1}^{2^{k-1}} \varphi(g_{k-1,j}^2) = e,$$

because of $g_{k-1,j}^2 = e$. Thus, characteristic equation (9) of $k-1$ level holds.

The conditions (8), (9) for every $s^2, s \in G_k$ hold so it holds for their product that is equivalent to conditions hold for every commutator.

Definition 3. We define a subdirect product of group G_{k-1} with itself by equipping it with condition (8) and (9) of index parity on all of $k-1$ levels.

Corollary 9. The subdirect product $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$ is defined by $k-2$ outer relations on level subgroups. The order of $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$ is 2^{2^k-k-2} .

Proof. We specify a subdirect product for the group $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$ by using $(k-2)$ conditions for the subgroup levels. Each G_{k-1} has even index

on $k - 2$ -th level, it implies that its relation for $l = k - 1$ holds automatically. This occurs because of the conditions of parity for the index of the last level is characteristic of each of the multipliers G'_{k-1} . Therefore It is not an essential condition for determining a subdirect product.

Thus, to specify a subdirect product in the group $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$, there are obvious only $k - 2$ outer conditions on subgroups of levels. Any of such conditions reduces the order of $G_{k-1} \times G_{k-1}$ in 2 times. Hence, taking into account that the order of G_{k-1} is $2^{2^{k-1}-2}$, the order of $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$ as a subgroup of $G_{k-1} \times G_{k-1}$ the following: $|G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}| = \left(2^{2^{k-1}-2}\right)^2 : 2^{k-2} = 2^{2^k-4} : 2^{k-2} = 2^{2^k-k-2}$. Thus, we use $k - 2$ additional conditions on level subgroup to define the subdirect product $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$, which contain G'_k as a proper subgroup of G_k . Because according to the conditions, which are realized in the commutator of G'_k , (9) and (8) indexes of levels are even.

Corollary 10. *A commutator G'_k is embedded as a normal subgroup in $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$.*

Proof. A proof of injective embedding G'_k into $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$ immediately follows from last item of proof of Corollary 9. The minimality of G'_k as a normal subgroup of G_k and injective embedding G'_k into $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$ immediately entails that $G'_k \triangleleft G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$.

Theorem 5. *A commutator of G_k has form $G'_k = G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$, where the subdirect product is defined by relations (8) and (9). The order of G'_k is 2^{2^k-k-2} .*

Proof. Since according to Statement 2 (g_1, g_2) as elements of G'_k also satisfy relations (8) and (9), which define the subdirect product $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$. Also condition $g_1 g_2 \in B'_{k-1}$ gives parity of permutation which defined by (g_1, g_2) because B'_{k-1} contains only element with even index of level [16]. The group G'_k has 2 disjoint domains of transitivity so G'_k has the structure of a subdirect product of G_{k-1} which acts on this domains transitively. Thus, all elements of G'_k satisfy the conditions (8), (9) which define subdirect product $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$. Hence $G'_k < G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$ but G'_k can be equipped by some other relations, therefore, the presence of isomorphism has not yet been proved. For proving reverse inclusion we have to show that every element from $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$ can be expressed as word $a^{-1}b^{-1}ab$, where $a, b \in G_k$. Therefore, it suffices to show the reverse inclusion. For this goal we use that $G'_k < G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$. As it was shown in [16] that the order of G_k is 2^{2^k-2} .

As it was shown above, G'_k has k new conditions relatively to G_k . Each condition is stated on some level-subgroup. Each of these conditions reduces an order of the corresponding level subgroup in 2 times, so the order of G'_k is in 2^k times lesser. On every X^l , $l \leq k - 1$, there is even number of active v.p. by this reason, there is trivial permutation on X^0 .

According to the Corollary 9, in the subdirect product $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$ there are exactly $k - 2$ conditions relatively to $G_{k-1} \times G_{k-1}$, which are for the subgroups of levels. It has been shown that the relations (8), (9) are fulfilled in G'_k .

Let α_{lm} , $0 \leq l \leq k - 1$, $0 \leq m \leq 2^{l-1}$ be an automorphism from G_k having only one active v.p. in v_{lm} , and let α_{lm} have trivial permutations in rest of the vertices. Recall that partial case of notation of form α_{lm} is the generator $\alpha_l := \alpha_{l1}$ of G_k which was defined by us in [16] and denoted by us as α_l . Note that the order of α_{li} , $0 \leq l \leq k - 1$ is 2. Thus, $\alpha_{ji} = \alpha_{ji}^{-1}$. We choose a generating set consisting of the following $2k - 3$ elements: $(\alpha_{1,1;2}), \alpha_{2,1}, \dots, \alpha_{k-1,1}, \alpha_{2,3}, \dots, \alpha_{k-1,2^{k-2}+1}$, where $(\alpha_{1,1;2})$ is an automorphism having exactly 2 active v.p. in v_{11} and v_{12} . Product of the form $(\alpha_{j1}\alpha_{l1}\alpha_{j1})\alpha_{l1}$ are denoted by P_{lm} . In more details, $P_{lm} = \alpha_{ji}\alpha_{lm}\alpha_{ji}\alpha_{lm}$, where $\alpha_{ji} \in G_k(j)$. Using a conjugation by generator α_j , $0 \leq j < l$ we can express any v.p. on l -level, because $(\alpha_j\alpha_l\alpha_j) = \alpha_{l2^{l-j-1}+1}$. Consider the product $P_{lj} = (\alpha_j\alpha_l\alpha_j)\alpha_l$.

1. We need to show that every element of $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$ can be constructed as $g^{-1}h^{-1}gh$, $g, h \in G_k$. This proves the absence of other relations in G'_k except those that in the subdirect product $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$. Thereby we prove the embeddedness of G'_k in $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$. We have to construct an element of form $P_{k-1}P_{k-2} \dots \cdot P_1P_0$ as a product of elements of form

$$[g, h], \text{ where } P_l = \prod_{i=1}^{2^l} P_{lm} \text{ satisfying relations (8), (9).}$$

2. We have to construct an arbitrary tuple of 2 active v.p. on X^l as a product of several P_l . We use the generator α_l and conjugating it by α_j , $j < l$. It corresponds to the tuple of v.p. of the form $(g_{l1}, e, \dots, e, g_{lj}, e, \dots, e)$, where g_{l1}, g_{lj} are non-trivial. Note that this tuple $(g_{l1}, e, \dots, e, g_{lj}, e, \dots, e)$ is an element of direct product if we consider as an element of S_2 in vertices of X^l . To obtain a tuple of v.p. of form $(e, \dots, e, g_{lm}, e, \dots, e, g_{lj}, e, \dots, e)$ we multiply P_{lj} and P_{lm} .

3. To obtain a tuple of v.p. with $2m$ active v.p. we construct $\prod_{i=1}^m P_{lj_i}$, $m < 2^l$ for varying $i, j < 2^{k-2}$.

On the $(k - 1)$ -th level we choose the generator τ which was defined in [16] as $\tau = \tau_{k-1,1}\tau_{k-1,2^{k-1}}$. Recall that it was shown in [16] how to express any τ_{ij} using τ , $\tau_{i,2^{k-2}}$, $\tau_{j,2^{k-2}}$, where $i, j < 2^{k-2}$, as a product of commutators $\tau_{ij} = \tau_{i,2^{k-2}}\tau_{j,2^{k-2}} = (\alpha_i^{-1}\tau_{1,2^{k-2}}^{-1}\alpha_i\tau_{j,2^{k-2}})$. Here $\tau_{i,2^{k-2}}$ was expressed as the commutator $\tau_{i,2^{k-2}} = \alpha_i^{-1}\tau_{1,2^{k-2}}^{-1}\alpha_i\tau_{1,2^{k-2}}$. Thus, we express all tuples of elements satisfying to relations (8) and (9) by using only commutators of G_k .

Thus, we get all tuples of each level subgroup elements satisfying the relations (8) and (9). It means we express every element of each level subgroup by a commutators. In particular to obtain a tuple of v.p. with $2m$ active v.p. on X^{k-2} of $v_{11}X^{[k-1]}$, we will construct the product for τ_{ij} for varying $i, j < 2^{k-2}$.

Thus, all vertex labelings of automorphisms, which appear in the representation of $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$ by portraits as the subgroup of $AutX^{[k]}$, are also in the representation of G'_k .

Since there are faithful representations of $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$ and G'_k by portraits of automorphisms from $AutX^{[k]}$, which coincide with each other, then subgroup G'_k of $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1} \simeq G'_k$ is equal to whole $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$ (i.e. $G_{k-1} \boxtimes G_{k-1} = G'_k$).

The archived results are confirmed by algebraic system GAP calculations. For instance, $|Syl_2A_8| = 2^6 = 2^{2^3-2}$ and $|(Syl_2A_{2^3})'| = 2^{2^3-3-2} = 8$. The order of G_2 is 4, the number of additional relations in subdirect product is $k - 2 = 3 - 2 = 1$. Then we have the same result $(4 \cdot 4) : 2^1 = 8$, which confirms Theorem 5.

Example 1. Set $k = 4$ then $|(Syl_2A_{16})'| = |(G_4)'| = 1024$, $|G_3| = 64$, since $k - 2 = 2$, so according to our theorem above order of $Syl_2A_{16} \boxtimes Syl_2A_{16}$ is defined by $2^{k-2} = 2^2$ relations, and by this reason is equal to $(64 \cdot 64) : 4 = 1024$. Thus, orders are coincides.

Example 2. The true order of $(Syl_2A_{32})'$ is $33554432 = 2^{25}$, $k = 5$. A number of additional relations which define the subdirect product is $k - 2 = 3$. Thus, according to Theorem 5, $|(Syl_2A_{16} \boxtimes Syl_2A_{16})'| = 2^{14}2^{14} : 2^{5-2} = 2^{28} : 2^{5-2} = 2^{25}$.

According to calculations in GAP we have: $Syl_2A_7 \simeq Syl_2A_6 \simeq D_4$. Therefore its derived subgroup $(Syl_2A_7)' \simeq (Syl_2A_6)' \simeq (D_4)' = C_2$.

The following structural law for Sylows 2-subgroups is typical. The structure of Syl_2A_n , Syl_2A_k is the same. If for all n and k that have the same multiple of 2 as multiplier in decomposition on $n!$ and $k!$ Thus, $Syl_2A_{2k} \simeq Syl_2A_{2k+1}$.

Example 3. $Syl_2A_7 \simeq Syl_2A_6 \simeq D_4$, $Syl_2A_{10} \simeq Syl_2A_{11} \simeq Syl_2S_8 \simeq (D_4 \times D_4) \times C_2$. $Syl_2A_{12} \simeq Syl_2S_8 \boxtimes Syl_2S_4$, by the same reasons that from the proof of Corollary 9 its commutator subgroup is decomposed as $(Syl_2A_{12})' \simeq (Syl_2S_8)' \times (Syl_2S_4)'$.

Lemma 7. In G''_k the following equalities are true:

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{2^{l-2}} \varphi(g_{l_j}) &= \prod_{j=2^{l-2}+1}^{2^{l-1}} \varphi(g_{l_j}) = \prod_{j=2^{l-1}+1}^{2^{l-1}+2^{l-2}} \varphi(g_{l_j}) = \\
&= \prod_{j=2^{l-1}+2^{l-2}+1}^{2^l} \varphi(g_{l_j}), \quad 2 < l < k
\end{aligned} \tag{11}$$

In case $l = k - 1$, the following conditions hold:

$$\prod_{j=1}^{2^{l-2}} \varphi(g_{l_j}) = \prod_{j=2^{l-1}+1}^{2^{l-1}} \varphi(g_{l_j}) = e, \quad \prod_{j=2^{l-1}}^{2^{l-1}+2^{l-2}} \varphi(g_{l_j}) = \prod_{j=2^{l-1}+2^{l-2}}^{2^l} \varphi(g_{l_j}) = e \tag{12}$$

In other terms, the subgroup G''_k has an even index of any level of $v_{11}X^{[k-2]}$ and of $v_{12}X^{[k-2]}$.

Proof. As a result of derivation of G'_k , elements of $G''_k(1)$ are trivial. Due the fact that $G'_k \simeq G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$, we can derivate G'_k by components. The commutator of G_{k-1} is already investigated in Theorem 5. As $G_{k-1}^2 = G'_{k-1}$ by Corollary 7, it is more convenient to present a characteristic equalities in the second commutator $G''_k \simeq G'_{k-1} \boxtimes G'_{k-1}$ as equations in $G_{k-1}^2 \boxtimes G_{k-1}^2$. As shown above, for $2 \leq l < k - 1$, in G_{k-1}^2 the following equalities are true:

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{2^{l-1}} \varphi(g_{l_j} g_{l_{\sigma(j)}}) &= \prod_{j=1}^{2^{l-1}} \varphi(g_{l_j}) \prod_{j=1}^{2^{l-1}} \varphi(g_{l_{\sigma(j)}}) = \\
&= \prod_{j=1}^{2^{l-1}} \varphi(g_{l_j}) \prod_{j=1}^{2^{l-1}} \varphi(g_{l_i}) = \prod_{j=1}^{2^{l-1}} \varphi(g_{l_j}^2) = e
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\prod_{j=1}^{2^{l-2}} \varphi(g_{l_j}) = \prod_{j=2^{l-2}+1}^{2^{l-1}} \varphi(g_{l_j}) = \prod_{j=2^{l-1}+1}^{2^{l-1}+2^{l-2}} \varphi(g_{l_j}) = \prod_{j=2^{l-1}+2^{l-2}+1}^{2^l} \varphi(g_{l_j}). \tag{14}$$

The equality (14) is true because of it is the initial group $G'_k \simeq G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$. The equalities

$$\prod_{j=2^{l-1}+1}^{2^{l-1}+2^{l-2}} \varphi(g_{l_j}) = \prod_{j=2^{l-1}+2^{l-2}+1}^{2^l} \varphi(g_{l_j})$$

are right for elements of second group G'_{k-1} , since elements of the original group are endowed with this conditions.

Upon a squaring of G'_k any element of $G'_k(l)$, satisfies the equality (14) in addition to satisfying the previous conditions (11) because of $(G_{k-1}(l))^2 = G'_{k-1}(l)$. The similar conditions appears in $(G'_{k-1}(k-2))^2$ after squaring of G'_k . Thus, taking into account the characteristic equations of $G'_{k-1}(l)$, the subgroup $(G'_{k-1}(k-2))^2$ satisfies the equality:

$$\prod_{j=1}^{2^{k-3}} \varphi(g_{lj}) = \prod_{j=2^{k-3}+1}^{2^{k-2}} \varphi(g_{lj}) = e, \quad \prod_{j=2^{k-2}+1}^{2^{k-2}+2^{k-3}} \varphi(g_{lj}) = \prod_{j=2^{k-1}+2^{k-2}+1}^{2^{k-1}} \varphi(g_{lj}) = e. \quad (15)$$

Taking into account the structure $G'_k \simeq G_{k-1} \boxtimes G_{k-1}$ we obtain after derivation $G''_k \simeq (G_{k-2} \boxtimes G_{k-2}) \boxtimes (G_{k-2} \boxtimes G_{k-2})$. With respect to conditions 8, 9 in the subdirect product we have that the order of G''_k is $2^{2^k-k-2} : 2^{2^k-3} = 2^{2^k-3k+1}$ because on every level $2 \leq l < k$ order of level subgroup $G''_k(l)$ is in 4 times lesser then order of $G'_k(l)$. On the 1-st level one new condition arises that reduce order of $G'_k(1)$ in 2 times. Totally we have $2(k-2) + 1 = 2k - 3$ new conditions in comparing with G'_k .

Example 4. Size of (G'_4) is 32, a size of direct product $(G'_3)^2$ is 64, but, due to relation on second level of G''_k , the direct product $(G'_3)^2$ transforms into the subdirect product $G'_3 \boxtimes G'_3$ that has 2 times less feasible combination on X^2 . The number of additional relations in the subdirect product is $k-3 = 4-3 = 1$. Thus the order of product is reduced in 2^1 times.

Example 5. The commutator subgroup of $Syl_2^l(A_8)$ consists of elements:

$$\{e, (13)(24)(57)(68), (12)(34), (14)(23)(57)(68), (56)(78), \\ (13)(24)(58)(67), (12)(34)(56)(78), (14)(23)(58)(67)\}.$$

The commutator $Syl_2^l(A_8) \simeq C_2^3$ that is an elementary abelian 2-group of order 8. This fact confirms our formula $d(G_k) = 2k - 3$, because $k = 3$ and $d(G_k) = 2k - 3 = 3$. A minimal generating set of $Syl_2^l(A_8)$ consists of 3 generators: $(1, 3)(2, 4)(5, 7)(6, 8)$, $(1, 2)(3, 4)$, $(1, 3)(2, 4)(5, 8)(6, 7)$.

Example 6. The minimal generating set of $Syl_2^l(A_{16})$ consists of 5 (that is $2 \cdot 4 - 3$) generators:

$$(1, 4, 2, 3)(5, 6)(9, 12)(10, 11), (1, 4)(2, 3)(5, 8)(6, 7), (1, 2)(5, 6), \\ (1, 7, 3, 5)(2, 8, 4, 6)(9, 14, 12, 16)(10, 13, 11, 15), \\ (1, 7)(2, 8)(3, 6)(4, 5)(9, 16, 10, 15)(11, 14, 12, 13).$$

Example 7. *Minimal generating set of $Syl_2'(A_{32})$ consists of 7 (that is $2 \cdot 5 - 3$) generators:*

$$\begin{aligned} & (23, 24)(31, 32), (1, 7)(2, 8)(3, 5, 4, 6)(11, 12)(25, 32)(26, 31)(27, 29)(28, 30), \\ & (3, 4)(5, 8)(6, 7)(13, 14)(23, 24)(27, 28)(29, 32)(30, 31), \\ & (7, 8)(15, 16)(23, 24)(31, 32), \\ & (1, 9, 7, 15)(2, 10, 8, 16)(3, 11, 5, 13)(4, 12, 6, 14)(17, 29, 22, 27, 18, 30, 21, 28) \\ & (19, 32, 23, 26, 20, 31, 24, 25), (1, 5, 2, 6)(3, 7, 4, 8)(9, 15)(10, 16)(11, 13) \times \\ & (12, 14)(19, 20)(21, 24, 22, 23)(29, 31)(30, 32), (3, 4)(5, 8)(6, 7)(9, 11, 10, 12) \times \\ & (13, 14)(15, 16)(17, 23, 20, 22, 18, 24, 19, 21)(25, 29, 27, 32, 26, 30, 28, 31). \end{aligned}$$

This confirms our formula of minimal generating set size $2 \cdot k - 3$.

4. CONCLUSION

The size of minimal generating set for commutator of Sylow 2-subgroup of alternating group A_{2^k} was proven is equal to $2k - 3$.

A new approach to presentation of Sylow 2-subgroups of alternating group A_{2^k} was applied. As a result the short proof of a fact that commutator width of Sylow 2-subgroups of alternating group A_{2^k} , permutation group S_{2^k} and Sylow p -subgroups of $Syl_2 A_{p^k}$ ($Syl_2 S_{p^k}$) are equal to 1 was obtained. Commutator width of permutational wreath product $B \wr C_n$ were investigated.

Скुरатовський Р. В.

МИНІМАЛЬНА СИСТЕМА ТВІРНИХ КОМУТАНТА СИЛОВСЬКИХ 2-ПІДГРУП ЗНАКОЗМІННОЇ ГРУПИ І ЇХ СТРУКТУРА

Резюме

Знайдено мінімальну систему твірних для комутанта силовських 2-підгруп знакозміної групи. Досліджено структуру комутанта силовських 2-підгруп знакозміної групи A_{2^k} .

Показано, що $(Syl_2 A_{2^k})^2 = Syl'_2 A_{2^k}$, $k > 2$.

Доведено, що довжина по комутатора довільного елемента ітерированого вінцевого добутку циклічних груп C_{p_i} , $p_i \in \mathbb{N}$ дорівнює 1. Знайдена ширина по коммутанту прямої границі вінцевого добутку циклічних груп. У даній статті знайдені верхні оцінки ширини по комутанту $(cw(G))$ [1] вінцевого добутку груп.

Розглянуто рекурсивне представлення силовських 2-Підгруп $Syl_2(A_{2^k})$ з A_{2^k} . В результаті отримано коротке доведення того, що ширина по комутанту силовських 2-підгруп груп A_{2^k} і S_{2^k} рівна 1.

Досліджено комутаторна ширина перестановочного сплетення $B \wr C_n$. Знайдена верхня оцінка ширини по комутанта сплетення груп діючих перестановками — $B \wr C_n$ для довільної групи B .

Ключові слова: вінцевий добуток, мінімальна система твірних комутанта силовських 2-підгруп знакозміної групи, ширина по комутанту силовських p -підгруп, комутант силовських 2-підгруп знакозміної групи.

Скुरатовский Р. В.

МИНИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОБРАЗУЮЩИХ КОМУТАНТА СИЛОВСКИХ 2-ПОДГРУПП ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ГРУППЫ И ИХ СТРУКТУРА

Резюме

Найдено минимальная система образующих для коммутанта силовских 2-подгрупп знакопеременной группы. Исследована структура коммутаторной подгруппы силовских 2-подгрупп знакопеременной группы A_{2^k} .

Показано, что $(Syl_2 A_{2^k})^2 = Syl'_2 A_{2^k}$, $k > 2$.

Доказано, что длина по коммутатора произвольного элемента итерированого сплетения циклических групп C_{p_i} , $p_i \in \mathbb{N}$ равна 1. Найдена ширина по коммутанту прямого предела сплетения циклических групп. В данной статье представлены верхние оценки ширини коммутатора $(cw(G))$ [1] сплетения групп.

Рассмотрено рекурсивное представление силовских 2-подгрупп $Syl_2(A_{2^k})$ из A_{2^k} . В результате получено краткое доказательство того, что ширина коммутатора силовских 2-подгрупп группы A_{2^k} , группы перестановок S_{2^k} .

Исследована коммутаторная ширина перестановочного сплетения $B \wr C_n$. Найдена верхняя оценка ширини по коммутанту сплетения групп действующих перестановками — $B \wr C_n$ для произвольной группы B .

Ключевые слова: сплетение групп, минимальная система образующих коммутанта силовских 2-подгрупп знакопеременной группы, ширина по коммутанту силовских p -подгрупп, коммутант силовских 2-подгрупп знакопеременной группы.

REFERENCES

1. *Alexey Muranov*, Finitely generated infinite simple groups of infinite commutator width. arXiv:math/0608688v4 [math.GR] 12 Sep 2009.
2. *J.D.P. Meldrum*, Wreath Products of Groups and Semigroups. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematic. 1st Edition. Jun (1995). 425 p.

3. *Nikolay Nikolov*, On the commutator width of perfect groups. Bull. London Math. Soc. 36 (2004) p. 30–36.
4. *W. B. Fite*, On metabelian groups, Trans. Amer. Math. Soc, 3 (1902), pp. 331-353.
5. *Roger C. Lyndon Paul E. Schupp*, Combinatorial group theory. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1977. 447 p.
6. *Nekrashevych V.* Self-similar groups. International University Bremen. American Mathematical Society. Monographs. Volume 117. 230 p.
7. *I.V. Bondarenko, I.O. Samoilych*, On finite generation of self-similar groups of finite type. Int. J. Algebra Comput. February (2013), Volume 23, Issue 01, pp. 69-77
8. *R.I. Grigorchuk*, Solved and unsolved problems around one group. Infinite Groups: Geometric, Combinatorial and Dynamical Aspects. Basel, (2005). Progress Math., vol 248. pp. 117-218.
9. *Lavrenyuk Y.* On the finite state automorphism group of a rooted tree Algebra and Discrete Mathematics Number 1. (2002). pp. 79-87
10. *L. Kaloujnine*, "La structure des p-groupes de Sylow des groupes symetriques finis", Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure. Serie 65, (1948) pp. 239–276.
11. *B. Pawlik*, The action of Sylow 2-subgroups of symmetric groups on the set of bases and the problem of isomorphism of their Cayley graphs. Algebra and Discrete Mathematics. (2016), Vol. 21, N. 2, pp. 264-281.
12. *R. Skuratovskii*, "Corepresentation of a Sylow p-subgroup of a group S_n ". Cybernetics and systems analysis, (2009), N. 1, pp. 27-41.
13. *R. Skuratovskii*. Generators and relations for sylows p-subgroup of group S_n . *Naukovi Visti KPI*. 4 (2013), pp. 94–105. (in Ukrainian)
14. *R.V. Skuratovskii, Y.A. Drozd*, Generators and and relations for wreath products of groups. Ukr Math J. (2008), vol. 60. Issue 7, pp. 1168–1171.
15. *R. V. Skuratovskii*, Minimal generating systems and properties of $Syl_2 A_{2^k}$ and $Syl_2 A_n$. X International Algebraic Conference in Odessa dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd. (2015), pp. 104.
16. *Skuratovskii R. V.* Involution irreducible generating sets and structure of sylow 2-subgroups of alternating groups. ROMAI J., 13, Issue 1, (2017), pp. 117-139.
17. *R. V. Skuratovskii*, Structure and minimal generating sets of Sylow 2-subgroups of alternating groups. Source: <https://arxiv.org/abs/1702.05784v2>
18. *R. Skuratovskii*. Commutators subgroups of sylow subgroups of alternating and symmetric groups their minimal generating sets. The XII International Algebraic Conference in Ukraine (2019) Vinnytsia, p. 75.
19. *U. Dmitruk, V. Suschansky*, Structure of 2-sylow subgroup of alternating group and normalizers of symmetric and alternating group. UMJ. (1981), N. 3, pp. 304-312.
20. *H. Heineken*, Normal embeddings of p-groups into p-groups, Proc. Edinburgh Math. Soc. 35 (1992), pp. 309-314.
21. *Sushchansky V.I.* ℓ -Wreath products and isometries of generalized Baire metrics. // *Translated from Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal*, Vol. 43, No. 7 and 8, Issue – 1991. – pp. 1031-1038.
22. *David Ward*. Topics in Finite Groups: Homology Groups, Pi-product Graphs, Wreath Products and Cuspidal Characters. Manchester Institute for Mathematical Sciences School of Mathematics. July (2015) P. 253.
23. *Robert Guralnick*. Commutators and wreath products // Contemporary Mathematics. Volume 524, 2010.

UDC 539.3

Z. Yu. Zhuravlova

Odessa I.I. Mechnikov National University

NEW APPROACH OF ANALYTICAL INVERSION OF LAPLACE TRANSFORM FOR SOME CASES

Laplace transform is a useful tool for solving of dynamic elasticity problems. However, the problem of analytical inversion of Laplace transform has not yet completely solved. Therefore, it is relevant to consider the new methods that allow to derive the analytical form of the original function by the known transform.

In this paper, the new method of analytical inversion of Laplace transform for the transforms of the certain form containing exponents in the denominator that linearly depend on Laplace transform parameter is proposed. The cases of correlation between the exponential indices are considered. The theorem is proved according to which the transform is expanded into the Taylor series, and the original function is derived by term-by-term application of the inverse Laplace transform. The correctness of the term-by-term application of the inverse Laplace transform is proved. The results derived by the use of the new method are verified by comparing them with the previously known formulas. The originals of Laplace transforms that were not found in the literature are derived.

MSC: 46F12, 30E10, 30G35.

Key words: Laplace transform, analytical inversion, expansion in Taylor series, generalized functions, convolution.

DOI: 10.18524/2519-206x.2019.2(34).190061.

1. INTRODUCTION

Dynamic problems for elastic bodies can be solved with the help of Laplace transform. But the analytical inversion of Laplace transform in many cases is a complex problem. So, instead of Laplace transform, steady-state oscillations are sometimes considered. But, of course, they cannot describe an arbitrary dependence of the time variable.

Some asymptotic schemes are usually used to determine the function's behavior at the points $t = 0$ and $t \rightarrow \infty$ [1], [2]. Numerical methods for inverting Laplace transform are usually applied, but their correctness should be confirmed by at least some asymptotic methods, because the Laplace transform inversion problem is not correct [3]. Some numerical inversion methods of Laplace transform dealing with Laguerre polynomials are used in [4]. These methods are inverted numerically. The Laplace transform inversion problem for some functions can be reduced to the problem of solving the Volterra integral equation of the first or second kind [6], which are usually solved numerically. The relations dispensing contour integration were derived by the change of variables in [5].

In some cases, the original function can be found as the series of residuals of the transform function [1], [6]. But in many cases the analytical finding of all poles of the transform function is impossible.

The approach by which the transform function is expanded into series was proposed in [7]. According to it, the transform function can be expanded not only into power series, but also into series of exponential functions and even into series of arbitrary functions if they satisfy the conditions indicated there. But there were no examples of dealing with generalized functions.

Thus, the problem of analytical inversion of Laplace transform has not yet been completely solved, but its application is extremely important in solving dynamic problems.

2. MAIN RESULTS

The following Laplace transform is considered

$$\frac{1}{c_0 + \sum_{i=1}^N c_i e^{-sA_i}} \quad (1)$$

Here $A_i > 0, i = \overline{1, N}$, $c_i, i = \overline{1, N}, c_0 \neq 0$ are real constants or functions, which do not depend on parameter of Laplace transform s , $N \geq 1$ is natural digit.

Let's consider the case when $A_i = n_i A_m, n_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, N}$ for some fixed number $1 \leq m \leq N$. Then the transform (1) can be rewritten in the following form

$$\frac{1}{c_0 + \sum_{i=1}^N c_i e^{-s n_i A_m}} \quad (2)$$

Denote the single-valued function of the complex variable $s e^{-sA_m}$ as z . Since $\Re s > 0$, then $|e^{-sA_m}| = |z| < 1$. The expression (2) can be rewritten as

$$f(z) = \frac{1}{c_0 + \sum_{k=1}^N c_k z^{n_k}} \quad (3)$$

It is obvious that the function (3) has $\max_{1 \leq k \leq N} n_k = \eta$ singular points $z_i = \alpha_i, i = \overline{1, \eta}$. So, the points $s_i = -\frac{1}{A_m} \ln \alpha_i, i = \overline{1, \eta}$ are singular points for the function (2). Since γ in the formula of the inverse Laplace transform $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(s) e^{st} dt$ is the abscissa in the semi-plane of the Laplace integral's

absolute convergence [7], so $\Re s > \nu > 0$, where $\nu = \max_{1 \leq i \leq \nu} \left\{ -\frac{1}{A_m} \ln \alpha_i \right\}$. Thus, when $\Re s > \nu > 0$ it is fulfilled that $|e^{-sA_m}| = |z| < \vartheta < 1$, where $\vartheta = e^{-\nu A_m \min_{1 \leq i \leq N} n_i}$. So, the function (3) in the domain $|z| < \vartheta < 1$ does not have any singular points.

First the following lemma should be proved.

Lemma. *The function (3) satisfies Cauchy-Riemann conditions in the domain $|z| < \vartheta < 1$ where it has no singular points.*

Proof. Cauchy-Riemann conditions for the function $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ have the following form [8]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (4)$$

First let's present the function (3) in the form $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{c_0 + \sum_{k=1}^N c_k z^{n_k}} = \frac{1}{c_0 + \sum_{k=1}^N c_k (x+iy)^{n_k}} = \frac{1}{c_0 + \sum_{k=1}^N c_k \sum_{l=0}^{n_k} C_{n_k}^l x^{n_k-l} (iy)^l} = \\ &= \frac{1}{c_0 + \sum_{k=1}^N c_k \sum_{l=0}^{[n_k/2]} C_{n_k}^{2l} x^{n_k-2l} (-1)^l y^{2l} + i \sum_{k=1}^N c_k \sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k}^{2l+1} x^{n_k-2l-1} (-1)^l y^{2l+1}} = \\ &= \frac{1}{Re + iIm} = \frac{Re - iIm}{Re^2 + Im^2} \end{aligned}$$

Here

$$\begin{aligned} Re(x, y) &= c_0 + \sum_{k=1}^N c_k \sum_{l=0}^{[n_k/2]} C_{n_k}^{2l} x^{n_k-2l} (-1)^l y^{2l}, \\ Im(x, y) &= \sum_{k=1}^N c_k \sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k}^{2l+1} x^{n_k-2l-1} (-1)^l y^{2l+1}, \end{aligned}$$

$[n_k/2]$, $[(n_k - 1)/2]$ are integer parts of division.

Then $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ where $u(x, y) = \frac{Re}{Re^2 + Im^2}$, $v(x, y) = -\frac{Im}{Re^2 + Im^2}$.

Calculate the partial derivatives $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-Re'_x Re^2 + Re'_x Im^2 - 2Im'_x Re Im}{(Re^2 + Im^2)^2}; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{-Im'_y Re^2 + Im'_y Im^2 + 2Re'_y Re Im}{(Re^2 + Im^2)^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-Re'_y Re^2 + Re'_y Im^2 - 2Im'_y Re Im}{(Re^2 + Im^2)^2}; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{-Im'_x Re^2 + Im'_x Im^2 + 2Re'_x Re Im}{(Re^2 + Im^2)^2}. \end{aligned}$$

Note that Cauchy-Riemann conditions (4) for the function (3) are fulfilled when

$$Re'_x = Im'_y, Re'_y = -Im'_x \tag{5}$$

Calculate $Re'_x, Im'_y, Re'_y, Im'_x$.

$$\begin{aligned} Re'_x &= \frac{\partial Re}{\partial x} = \sum_{k=1}^N c_k \sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k}^{2l} (n_k - 2l)x^{n_k-2l-1}(-1)^l y^{2l}; \\ Re'_y &= \frac{\partial Re}{\partial y} = \sum_{k=1}^N c_k \sum_{l=0}^{[n_k/2]} C_{n_k}^{2l} x^{n_k-2l}(-1)^l (2l)y^{2l-1}; \\ Im'_x &= \frac{\partial Im}{\partial x} = \sum_{k=1}^N c_k \sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k}^{2l+1} (n_k - 2l - 1)x^{n_k-2l-2}(-1)^l y^{2l+1}; \\ Im'_y &= \frac{\partial Im}{\partial y} = \sum_{k=1}^N c_k \sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k}^{2l+1} x^{n_k-2l-1}(-1)^l (2l + 1)y^{2l}. \end{aligned}$$

To check (5) the following differences are calculated:

$$\begin{aligned} Re'_x - Im'_y &= \sum_{k=1}^N c_k \left(\sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k}^{2l} (n_k - 2l)x^{n_k-2l-1}(-1)^l y^{2l} - \sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k}^{2l+1} x^{n_k-2l-1}(-1)^l (2l + 1)y^{2l} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^N c_k \left(\sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} x^{n_k-2l-1}(-1)^l y^{2l} \left(\frac{n_k!}{(2l)!(n_k-2l)!} (n_k - 2l) - \frac{n_k!}{(2l+1)!(n_k-2l-1)!} (2l + 1) \right) \right) = 0; \\ Re'_y + Im'_x &= \sum_{k=1}^N c_k \left(\sum_{l=0}^{[n_k/2]} C_{n_k}^{2l} x^{n_k-2l}(-1)^l (2l)y^{2l-1} + \sum_{l=0}^{[(n_k-1)/2]} C_{n_k}^{2l+1} (n_k - 2l - 1)x^{n_k-2l-2}(-1)^l y^{2l+1} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^N c_k \left(\sum_{l=0}^{[n_k/2]} \frac{n_k!}{(2l)!(n_k-2l)!} (2l)x^{n_k-2l}(-1)^l y^{2l-1} - \sum_{l=0}^{[n_k/2]} \frac{n_k!}{(2l-1)!(n_k-2l+1)!} (n_k - 2l + 1)x^{n_k-2l}(-1)^l y^{2l-1} \right) = 0. \end{aligned}$$

It is derived that conditions (5) and, correspondingly, Cauchy-Riemann conditions (4) for the function $f(z)$ of the form (3) are fulfilled for all $|z| < \vartheta < 1$.

Theorem 1. $L^{-1} \left[\frac{1}{c_0 + \sum_{i=1}^N c_i e^{-s n_i A_m}} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \delta(t - k A_m)$, where the function $f(z)$ has the form (3).

Proof.

By the proved lemma the function (3) satisfies Cauchy-Riemann conditions and, therefore, it is holomorphic and regular [8] for all $|z| < \vartheta < 1$.

According to the theorems [8] the regular function in the circle $K : |z - a| < R$ can be presented by Taylor series $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$, which is convergent everywhere in the circle K .

The circle for the function (3) has the form $K : |z| < \vartheta$. Inside this circle the function is regular. So, the following equality holds

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \quad (6)$$

Power series inside the circle of convergence can be term-by-term integrated and differentiated any number of times, moreover the radius of convergence of the derived series is equal to the radius of convergence of the original series [9].

Thus, the series (6) has the radius of convergence $R = \vartheta$, within which this series can be term-by-term integrated. That is the following is true:

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{1}{c_0 + \sum_{i=1}^N c_i e^{-s n_i A_m}} \right] &= L^{-1} [f(z)] = L^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} e^{-skA_m} e^{st} dt = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-skA_m} e^{st} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} L^{-1} [e^{-skA_m}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \delta(t - kA_m) \end{aligned}$$

Let's prove that the derived series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \delta(t - kA_m) \quad (7)$$

converges in the sense that all series

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \delta(t - kA_m), \varphi(t) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \varphi(kA_m) \quad (8)$$

absolutely converge for all functions $\varphi(t) \in S \cup K^0$, where S is the main space containing all infinitely differentiable functions which when $|x| \rightarrow \infty$ tends to zero with all their derivatives of any order faster than any power of $1/|x|$ [10], K^0 is the main space containing all continuous functions that are zero outside some bounded domain [10]. Obviously, if the absolute convergence of series (8) is proved for all functions from the main spaces S and K^0 , then it will also

take place for the functions from the main spaces $K^m, m > 0$ and K , since $K \subset K^m \subseteq K^0, K \subset S$ [10].

To prove the convergence of the series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} |\varphi(kA_m)| \tag{9}$$

which is real-valued, let's use the following theorem, accordingly to which if, at least starting from some place (say, for $n > N$), the following inequality holds $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, then the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ with positive terms

implies the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ with positive terms [11].

The comparison will be made with the series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} |z_0^k| \tag{10}$$

By Abel's theorem [9] if the power series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converges at the point $z_* \neq 0$, then it absolutely converges in the circle $K_0 : |z| < |z_*|$, and in any smaller circle $K_1 : |z| \leq R_1 < |z_*|$ this series converges uniformly. In this case the point $0 < |z_0| < \vartheta - \varepsilon_0 < \vartheta$ is chosen for some small fixed $\varepsilon_0 > 0$. Then, by Abel's theorem, using the convergence of the series (6), it is derived that the series (10) converges (converges absolutely).

Let's prove that

$$\frac{\frac{|f^{(k+1)}(0)|}{(k+1)!} |\varphi((k+1)A_m)|}{\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} |\varphi(kA_m)|} \leq \frac{\frac{|f^{(k+1)}(0)|}{(k+1)!} |z_0^{k+1}|}{\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} |z_0^k|} \tag{11}$$

for the functions $\varphi(t) \in S$ (it is fair for them that $|\varphi(kA_m)| \neq 0$ for all k).

Obviously, the inequality (11) will take place if the inequality $\frac{|\varphi((k+1)A_m)|}{|\varphi(kA_m)|} \leq |z_0|$ holds or, equivalently, the following inequality holds

$$\frac{|\varphi((k+1)A_m)|}{|z_0|} \leq |\varphi(kA_m)| \tag{12}$$

By definition of the main space S [10] $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^q \varphi(x) = 0$ for all $q = 0, 1, 2, \dots$

For definiteness, the value $q = 1$ is chosen. According to the definition of the limit of the sequence [12] the following holds: for each $\varepsilon > 0$, no matter how small it may be, there exists a number N such that for all $n > N: |n\varphi(n)| < \varepsilon$. Accordingly, the following is true for $k > N - 1$ ($A_m > 0$)

$$|(k+1)A_m \varphi((k+1)A_m)| < \varepsilon \tag{13}$$

When $0 < |z_0| < \vartheta - \varepsilon_0 < \vartheta$, obviously, there will be such number N_0 that for all $k > N_0 - 1$ the following inequality holds

$$\frac{1}{|z_0|} < (k+1)A_m \quad (14)$$

Let's choose such a small digit $\varepsilon_* > 0$ for which

$$|\varphi(kA_m)| \geq \varepsilon_* \quad (15)$$

Obviously, for the function $|\varphi(kA_m)|$ that does not turn to 0, such a digit $\varepsilon_* > 0$ can always be chosen. Let's fix it. For this $\varepsilon_* > 0$ there is some number N_* that for all $k > N_* - 1$ (13) will be true. Let's choose $k > \max\{N_*, N_0\} - 1$ and combine the inequalities (13)-(15):

$$\frac{|\varphi((k+1)A_m)|}{|z_0|} < |(k+1)A_m\varphi((k+1)A_m)| < \varepsilon_* \leq |\varphi(kA_m)|,$$

that is the inequality (12) and therefore (11) takes places. Then, by the theorem, the series (9) is convergent for all functions $\varphi(t) \in S$.

Note that for the functions $\varphi(t) \in K^0$, since they are equal to zero outside some bounded domain, there exists a number N such that $|\varphi(kA_m)| = 0$ for $k > N$. In this case, the convergence of the series (9) can be proved by another theorem, according to which if, at least starting from some place (say, for $n > N$), the inequality $a_n \leq b_n$ holds, then the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ with positive terms implies the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ with positive terms [11]. Then for $k > N$ the following correspondence takes place $0 = \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} |\varphi(kA_m)| \leq \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} |z_0^k|$. Hence the series (9) is convergent for all functions $\varphi(t) \in K^0$. Thus, it is proved that the series (8) converges absolutely for all functions $\varphi(t) \in S \cup K^0$, and the series (7) converges in the sense indicated earlier.

The proved convergence of the series (7) implies the correctness of the term-by-term application of the series (7) to any function from the main spaces $K^m, m \geq 0, K, S$.

Now let's prove that the resulting series (7) is the original for the Laplace transform (2). For this, the Laplace transform is applied to the series (7)

$$L \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \delta(t - kA_m) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} L[\delta(t - kA_m)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} e^{-skA_m}$$

Let's prove that the series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} e^{-skA_m} \quad (16)$$

converges to the known transform (2).

The series (16), taking into account the change of variables $z = e^{-sA}$, can be written as (6), that is, it is an expansion of the function $f(z)$ (3) in Taylor series. According to the theorems [8] and the proved regularity of the function $f(z)$, it is derived that the series (16) converges to the function $f(z)$ (3) with the radius of convergence $R = \vartheta$, which corresponds to the entire range of the variable $|z| < \vartheta$.

The statement of the theorem is proved.

The approbation of the proposed method is done on the known transform. The result of applying of the proposed method to the known transform gave the same result to the previously known result [13]. The detailed verification is given in Appendix A.

Let's consider some examples of application of the proved theorem. Consider the following functions $\frac{1}{(1-e^{-sA})^\alpha}$ and $\frac{1}{(1+e^{-sA})^\alpha}$ when $A > 0$, α is a natural digit.

The Taylor series can be easily constructed for the functions $f(z) = \frac{1}{(1-z)^\alpha}$ and $g(z) = \frac{1}{(1+z)^\alpha}$:

$$f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}{k!} z^k$$

$$g(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}{k!} z^k$$

According to theorem 1

$$L^{-1} \left[\frac{1}{(1 - e^{-sA})^\alpha} \right] = [z = e^{-sA}] = L^{-1} [f(z)]$$

$$= L^{-1} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + k - 1)}{k!} z^k \right] =$$

$$= \delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + k - 1)}{k!} \delta(t - kA)$$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{(1 + e^{-sA})^\alpha} \right] = [z = e^{-sA}] = L^{-1} [g(z)]$$

$$= L^{-1} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + k - 1)}{k!} z^k \right] =$$

$$= \delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha(\alpha + 1)\dots(\alpha + k - 1)}{k!} \delta(t - kA)$$

Finally the following formulas are derived

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{1}{(1-e^{-sA})^\alpha} \right] &= \delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}{k!} \delta(t - kA) \\ L^{-1} \left[\frac{1}{(1+e^{-sA})^\alpha} \right] &= \delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}{k!} \delta(t - kA) \end{aligned} \quad (17)$$

Let's consider the transform that corresponds to the general function of the form (1)

$$x^L(s) = \frac{f^L(s)}{c_0 + K^L(s)} \quad (18)$$

The expression (18) can be rewritten in the following form

$$c_0 x^L(s) + x^L(s) K^L(s) = f^L(s) \quad (19)$$

By the convolution theorem of originals the Volterra integral equation of the second kind [6] is derived from (19)

$$c_0 x(t) + \int_0^t x(\tau) K(t - \tau) d\tau = f(t) \quad (20)$$

For the function of the form (1) $f(t) = \delta(t)$, $K(t) = \sum_{i=1}^N c_i \delta(t - A_i)$. Since these functions are equal to zero when $t < 0$, the equation (20) can be written using convolution as follows [10]

$$\left[c_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^N c_i \delta(t - A_i) \right] * x(t) = \delta(t) \quad (21)$$

That is, finding the original $x(t)$ is reduced to the solving of the convolution equation (21). The solution of the convolution equation of the form $a(x) * y(x) = b(x)$ is uniquely determined by the formula $y(x) = a^{-1}(x) * b(x)$ in the case when the inverse generalized function $a^{-1}(x)$ exists [10]. By the definition, if the generalized function $f(x)$ has its inverse function $f^{-1}(x)$, then [10]

$$f^{-1}(x) * f(x) = f(x) * f^{-1}(x) = \delta(x) \quad (22)$$

From the above the following consequence can be formulated

Consequence. $\left[c_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^N c_i \delta(t - n_i A_m) \right]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \delta(t - k A_m)$, where the function $f(z)$ has the form (3).

The verification of the formulas (17) by the fulfilment of the equality (22) for them is done in Appendix B.

The more general cases when $A_i = n_i A_d + m_i A_q, n_i, m_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, N}$ for some fixed numbers $1 \leq d, q \leq N, d \neq q$ or even when $A_i = \sum_{j=1}^m n_{ij} A_{q_j}, n_{ij} \in \mathbb{N}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, m}$ for some fixed numbers $1 \leq q_j \leq N, j = \overline{1, m}, q_j \neq q_k, j \neq k, j, k = \overline{1, m}$ can be also considered. For these cases the transform (1) can be rewritten in the forms $\frac{1}{c_0 + \sum_{i=1}^N c_i e^{-s(n_i A_d + m_i A_q)}}$ or $\frac{1}{c_0 + \sum_{i=1}^N c_i e^{-s \sum_{j=1}^m n_{ij} A_{q_j}}}$

respectively. So, the following theorems take place.

Theorem 2. $L^{-1} \left[\frac{1}{c_0 + \sum_{i=1}^N c_i e^{-s(n_i A_d + m_i A_q)}} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{k+l} f(0,0)}{\partial z^k \partial \zeta^l} \delta(t - k A_d - l A_q)$, where $f(z, \zeta) = \frac{1}{c_0 + \sum_{k=1}^N c_k z^{n_k} \zeta^{m_k}}$. Here the single-valued functions of the complex variable $s e^{-s A_d}$ and $e^{-s A_q}$ are denoted as z and ζ respectively.

Theorem 3. $L^{-1} \left[\frac{1}{c_0 + \sum_{i=1}^N c_i e^{-s \sum_{j=1}^m n_{ij} A_{q_j}}} \right] = \sum_{k_1, \dots, k_m=0}^{\infty} \frac{1}{k_1! \dots k_m!} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_m} f(0, \dots, 0)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_m^{k_m}} \delta(t - k_1 A_{q_1} - \dots - k_m A_{q_m})$,

where

$$f(z_1, \dots, z_m) = \frac{1}{c_0 + \sum_{k=1}^N c_k \prod_{j=1}^m z_j^{n_{kj}}}$$

Here the single-valued functions of the complex variable $s e^{-s A_{q_j}}$ are denoted as $z_j, j = \overline{1, m}$.

The proof of these theorems is beyond the scope of this article.

Appendix A. Method validation on known originals

Consider the functions $\frac{1}{1 - e^{-sA}}$ and $\frac{1}{1 + e^{-sA}}$ when $A > 0$. From [13] it is known that

$$L^{-1} \left[\frac{1}{1 - e^{-sA}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nA), L^{-1} \left[\frac{1}{1 + e^{-sA}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta(t - nA) \quad (A.1)$$

Let's show that the results derived from theorem 1 are consistent with the known results (A.1).

According to theorem 1

$$\begin{aligned}
L^{-1} \left[\frac{1}{1-e^{-sA}} \right] &= [z = e^{-sA}] = L^{-1} \left[\frac{1}{1-z} \right] = L^{-1} [f(z)] = \\
&= L^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \right] = L^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kA), \\
L^{-1} \left[\frac{1}{1+e^{-sA}} \right] &= [z = e^{-sA}] = L^{-1} \left[\frac{1}{1+z} \right] = L^{-1} [f(z)] = \\
&= L^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \right] = L^{-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \right] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \delta(t - kA)
\end{aligned} \tag{A.2}$$

So, the known results (A.1) are equal to the results derived from theorem 1 (A.2).

Appendix B. Verification of derived formulas using convolution

The fulfillment of the formula (22) for the functions (17) can be verified for any fixed α . Let's prove this for $\alpha = 2$.

According to (17)

$$\begin{aligned}
L^{-1} \left[\frac{1}{(1-e^{-sA})^2} \right] &= \delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\delta(t - kA), \\
L^{-1} \left[\frac{1}{(1+e^{-sA})^2} \right] &= \delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k+1)\delta(t - kA)
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Consider the following convolution

$$\begin{aligned}
&\left([\delta(t) - 2\delta(t - A) + \delta(t - 2A)] * \left[\delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\delta(t - kA) \right], \varphi(t) \right) = \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} [\delta(\xi) - 2\delta(\xi - A) + \delta(\xi - 2A)] \\
&\quad \times \left[\delta(x - \xi) + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\delta(x - \xi - kA) \right] \varphi(x) dx d\xi = \\
&= \int_{\mathbb{R}} [\delta(\xi) - 2\delta(\xi - A) + \delta(\xi - 2A)] \left[\varphi(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\varphi(\xi + kA) \right] d\xi = \\
&= \varphi(0) - 2\varphi(A) + \varphi(2A) + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\varphi(kA) - \\
&\quad - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\varphi((k+1)A) + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\varphi((k+2)A) = \\
&= \varphi(0) - 2\varphi(A) + \varphi(2A) + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\varphi(kA) - \\
&\quad - 2 \sum_{k=2}^{\infty} k\varphi(kA) + \sum_{k=3}^{\infty} (k-1)\varphi(kA) = \\
&= \varphi(0) + \varphi(2A) + \sum_{k=2}^{\infty} (1-k)\varphi(kA) + \sum_{k=3}^{\infty} (k-1)\varphi(kA) = \varphi(0) = (\delta(t), \varphi(t))
\end{aligned}$$

So, it is proved that

$$[\delta(t) - 2\delta(t - A) + \delta(t - 2A)] * \left[\delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\delta(t - kA) \right] = \delta(t).$$

The inequality $\left[\delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\delta(t-kA) \right] * [\delta(t) - 2\delta(t-A) + \delta(t-2A)] = \delta(t)$ is proved similarly. So, the correctness of the first formula in (B.1) is shown.

Consider the following convolution

$$\begin{aligned} & \left([\delta(t) + 2\delta(t-A) + \delta(t-2A)] * \left[\delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k+1)\delta(t-kA) \right], \varphi(t) \right) = \\ & = \iint_{\mathbb{R}^2} [\delta(\xi) + 2\delta(\xi-A) + \delta(\xi-2A)] \times \\ & \quad \times \left[\delta(x-\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k+1)\delta(x-\xi-kA) \right] \varphi(x) dx d\xi = \\ & = \varphi(0) + 2\varphi(A) + \varphi(2A) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k+1)\varphi(kA) + \\ & \quad + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k+1)\varphi((k+1)A) + \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k+1)\varphi((k+2)A) \\ & = \varphi(0) + 2\varphi(A) + \varphi(2A) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k+1)\varphi(kA) - \\ & \quad - 2 \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k k\varphi(kA) + \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k (k-1)\varphi(kA) = \varphi(0) = (\delta(t), \varphi(t)) \end{aligned}$$

So, it is proved that

$$[\delta(t) + 2\delta(t-A) + \delta(t-2A)] * \left[\delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k+1)\delta(t-kA) \right] = \delta(t).$$

The inequality

$$\left[\delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k+1)\delta(t-kA) \right] * [\delta(t) + 2\delta(t-A) + \delta(t-2A)] = \delta(t)$$

is proved similarly. So, the correctness of the second formula in (B.1) is shown.

3. CONCLUSION

1. The new method for the analytical inversion of the Laplace transform for the functions of the certain structure is proposed. The proof of this method is carried out.

2. The results derived by the new method of analytical inversion of Laplace transform are compared with the formulas for the original functions known in literature.

3. Due to the use of the proposed method, the originals of new transforms that are important for use in mechanics are derived.

Журавльова З. Ю.

Новий підхід до аналітичного обернення перетворення Лапласа для деяких випадків

Резюме

Перетворення Лапласу є корисним інструментом для розв'язання динамічних задач теорії пружності. Тим не менш, проблема аналітичного обернення перетворення Лапласу до сих пір повністю не розв'язана. Тому актуальним є розгляд нових методів, за допомогою яких можна отримати аналітичне подання оригіналу за відомою трансформантою.

У даній роботі запропоновано новий метод аналітичного обернення перетворення Лапласу для трансформант певного вигляду, що містять у знаменнику експоненти, які лінійно залежать від параметра перетворення Лапласу. Розглянуто випадки співвідношень між показниками експоненти. Доведено теорему, згідно з якою трансформанта розвивається у ряд Тейлора, і оригінал отримується шляхом почленного застосування оберненого перетворення Лапласу. Коректність почленного застосування оберненого перетворення Лапласу доведена. Проведена перевірка результатів, що отримані з використанням нового методу, з відомими раніше формулами. Отримані оригінали від трансформант Лапласу, які раніше не зустрічались у літературі.

Ключові слова: перетворення Лапласу, аналітичне обернення, розвинення в ряди Тейлора, узагальнені функції, згортка.

Журавлёва З. Ю.

Новый подход к аналитическому обращению преобразования Лапласа для некоторых случаев

Резюме

Преобразование Лапласа является полезным инструментом для решения динамических задач теории упругости. Тем ни менее, проблема аналитического обращения преобразования Лапласа до сих пор полностью не решена. Поэтому актуальным является рассмотрение новых методов, с помощью которых можно получить аналитическое представление оригинала по известной трансформанте.

В данной работе предложен новый метод аналитического обращения преобразования Лапласа для трансформант определённого вида, содержащих в знаменателе экспоненты, линейно зависящие от параметра преобразования Лапласа. Рассмотрены случаи соотношений между показателями экспоненты. Доказана теорема, согласно которой трансформанта раскладывается в ряд Тейлора, и оригинал получается путём почленного применения обратного преобразования Лапласа. Корректность почленного применения обратного преобразования Лапласа доказана. Проведена проверка результатов, полученных с использованием нового метода, с известными ранее формулами. Получены оригиналы от трансформант Лапласа, ранее не встречавшиеся в литературе.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, аналитическое обращение, разложение в ряды Тейлора, обобщённые функции, свёртка.

REFERENCES

1. Schiff, J. L. (1999). *The Laplace transform. Theory and Applications*. New York: Springer-Verlag, 245 p.
2. Tuan, V. K. and Duc, D. T. (2000). Convergence rate of Post-Widder approximate inversion of the Laplace transform. *Vietnam J. Math.*, Vol. 28(1), P. 93–96.
3. Krylov, V. I. and Skoblya, N. S. (1977). *A Handbook of Methods of Approximate Fourier Transformation and Inversion of the Laplace Transform*. Moscow: Mir, 224 p.
4. Boumenir, A. and Al-Shuaibi, A. (2000). On the numerical inversion of the Laplace transform by the use of optimized Legendre polynomials. *Approx. Theory Appl.*, Vol. 16(4), P. 17–32.
5. Berberan-Santos, M. N. (2005). Analytical inversion of the Laplace transform without contour integration: application to luminescence decay laws and other relaxation functions. *Journal of Mathematical Chemistry*, Vol. 38(2), P. 165–173.
6. Guz, A. N. and Kubenko, V. D. (1982). *Teoriya nestazionarnoy aerogidrouprugosti obolochek [Theory of nonstationary aerohydroelasticity of shells]*, Vol. 5. Kyiv: Naukova dumka, 400 p.
7. Doetsch, G. (1974). *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. New York: Springer-Verlag, 326 p.
8. Sidorov, Yu. V., Fedoryuk, M. V. and Shabunin, M. I. (1989). *Lekzii po teorii funkziy kompleksnogo peremennogo [Lectures on functions of complex variable theory]*. Moscow: Nauka, 477 p.
9. Sveshnikov, A. G. and Tikhonov, A. N. (2005). *Teoriya funkziy kompleksnoy peremennoy [Theory of complex variable functions]*. Moscow: Fizmatlit, 336 p.
10. Kec, W. and Teodorescu, P. P. (1978). *Vvedenie v teoriyu obobshchennih funkzii s prilozheniyami v tekhnike [Introduction in theory of generalized functions with applications in technique]*. Moscow: Mir, 520 p.
11. Fikhtengolts, G. M. (2001). *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [A Course of Differential and Integral Calculus]*, Vol. II. Moscow: Fizmatlit, 864 p.
12. Fikhtengolts, G. M. (2001). *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [A Course of Differential and Integral Calculus]*, Vol. I. Moscow: Fizmatlit, 680 p.
13. Abramowitz, M. and Stegun, I. (1979). *Spravochnik po spetsialnim funkziyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami [Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables]*. Moscow: Nauka, 834 p.

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ (скорочений варіант)

Журнал «Дослідження в математиці і механіці» має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень, огляди з актуальних проблем за тематикою видання, а також повідомлення про ювілеї, знаменні дати та події.

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Електронну версію рукопису слід надсилати на e-mail журналу

rmm-journal@onu.edu.ua

або завантажувати через сайт журналу

www.rmm-journal.onu.edu.ua

Вона повинна складатися з

- 1) вихідного \TeX -файла,
- 2) PDF-файла,
- 3) всіх допоміжних файлів (графіки, рисунки, ілюстрації тощо),
- 4) документа з анкетними даними авторів (прізвище, ім'я, по батькові, місце роботи, e-mail, адреса для листування та телефон).

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи \LaTeX відповідно до вимог та з використанням шаблону, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті. Також вимоги можна отримати в редакційній колегії журналу.

Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 25 сторінок.

Структура статті:

- УДК;
- список авторів;
- місце роботи авторів;
- назва статті;
- резюме мовою оригіналу обсягом не менше 100 слів;
- Mathematical Subject Classification (2010);

- список ключових слів мовою оригіналу;
- основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України «Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України» від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується подана стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером у квадратних дужках;
- список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформлюється відповідно до Державного стандарту України ДСТУ 7.1:2006 «Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання» та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008);
- анотації двома іншими мовами, які повинні містити назву, список авторів, резюме обсягом не менше 100 слів та список ключових слів;
- додатково, якщо стаття написана українською або російською мовою, після анотацій подається список літератури у транслітерації, оформлений у відповідності до міжнародного стандарту *Harvard* (зразок та правила оформлення можна знайти в шаблоні статті на сайті).

Усі надіслані статті проходять анонімне рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу «Дослідження в математиці і механіці».

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, зокрема і у співавторстві.

Редакційна колегія журналу
«Дослідження в математиці і механіці»
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2
м. Одеса, 65082

Українською, російською та англійською мовами

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: серія КВ, № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

Затверджено до друку вченою радою
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова
Протокол № 8 від 24 квітня 2018 р.

Відповідальний за випуск *Р. В. Шанін*
Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*
Технічний редактор *М. М. Бушин*

Тираж 100 прим. Зам. № 330(68).

Адреса редколегії:
65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
astro_print@ukr.net

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Дослідження в математиці і механіці. – 2019. – Т. 24, вип. 2(34). –
С. 1–138.