RM&M RM&M RM&M RM&M RM&M

ISSN 2519–206X

ДОСЛІДЖЕННЯ в МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Том 24. Випуск 1(33).

Volume 24. Issue 1(33).

2019

ISSN 2519—206X

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ДОСЛІДЖЕННЯ в МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

Науковий журнал

Виходить 2 рази на рік

Журнал заснований у січні 1997 р.

Том 24. Випуск 1(33). 2019

Одеса
«Астропринт»
2019

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

Відповідальний за випуск — О. П. Огуленко, к. ф.-м. н.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації серія КВ № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

Журнал внесений до переліку наукових фахових видань наказами Міністерства освіти і науки України № 527 від 24.05.2018 р. та № 775 від 16.07.2018 р.

ISSN 2519—206X

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Scientific journal

Published twice a year

Journal founded in January, 1997

Volume 24. Issue 1(33). 2019

Odesa
«Astroprint»
2019

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

The certificate of mass media state registration under the number № 21400—11200ПР issued on June 17, 2015.

The journal was included in the list of scientific specialized publications by the orders of Ministry of education and science of Ukraine №527 issued on May 24, 2018 and № 775 issued on July 16, 2018.

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 517.5

С. Р. Воронкова
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ПРО ЗМІНУ ЗНАКІВ ДОДАНКІВ УЗАГАЛЬНЕНОГО ГАРМОНІЧНОГО РЯДУ

Автор висловлює щиру подяку Кореновському А. О. за постановку задачі та цінні поради під час роботи.

Дана робота пов'язана з аналізом збіжності рядів, модулі доданків яких є доданками узагальненого гармонічного ряду. Розташування знаків доданків у таких рядах визначається послідовністю, поміж сусідніми номерами якої доданки зберігають знак. У межах цієї роботи досліджуються ряди з послідовністю зміни знаків доданків, визначеною довільним раціональним числом. Головним результатом є теорема, яка дає вичерпну відповідь щодо збіжності таких рядів.

MSC: 40A05.
Ключові слова: збіжність, узагальнений гармонічний ряд, номери перемикання знаку
.
DOI: 10.18524/2519–206x.2019.1(33).175541.

Вступ. Розглядається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^{\alpha}}, \tag{1}$$

де $\varepsilon_n = \pm 1,\ 0 < \alpha \le 1$. Покладемо $n_0 = 1$, а для $k \ge 1$ визначимо послідовність n_k номерів перемикання знаку доданків ряду (11), тобто вважаємо, що $\varepsilon_n = (-1)^{k-1}$ при $n_{k-1} \le n < n_k$. Для визначення збіжності ряду (11) в [3] була отримана

Теорема 1. *При $\alpha = 1$ збіжність ряду (11) рівносильна збіжності ряду*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \ln \frac{n_k}{n_{k-1}}, \tag{2}$$

а при $0 < \alpha < 1$ ряд (11) збігається або розбігається одночасно з рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(n_k^{1-\alpha} - n_{k-1}^{1-\alpha} \right). \tag{3}$$

У [3] наведено кілька прикладів застосування теореми 1. Найбільш цікавим виявився випадок степеневого росту номерів перемикання знаків (тобто $n_k = k^{\beta}$), що обумовлює перехід до цілих частин у випадку, коли показник степеня не є натуральним. При довільних β необхідно покласти $n_k = [k^{\beta}]$, де символом $[\cdot]$ позначено цілу частину числа (тобто округлення до найближчого цілого в меншу сторону). За таких n_k доведено, що ряд (11) розбігається при $0 < \alpha \le 1 - \frac{1}{\beta}$ та збігається при $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$ і $\frac{1}{\alpha} < \beta < \frac{1}{1-\alpha}$.

Надійшла 16.04.2019

При $n_k = r \cdot k$ ($r \in \mathbb{N}$) ряд (11) збігається при всіх $0 < \alpha \leq 1$ за узагальненою ознакою Лейбниця [2, с. 302]. Також за ознакою Лейбниця, очевидно, збігаються й ряди (2) та (3). Якщо ж $n_k = r \cdot k$ для $r \in \mathbb{R}, \ r \geq 2$, то ряди (2) та (3) залишаються збіжними. Але, у цьому випадку числа n_k, взагалі кажучи, не є натуральними. Основний результат даної роботи складає наступна теорема, яка містить умову збіжності ряду (11) при $n_k = [r \cdot k]$ у випадку довільного раціонального r.

Теорема 2. *Нехай $n_k = [r \cdot k]$, де $r = m + p/q$ ($m, p, q \in \mathbb{N}, \ p/q$ - правильний нескорочуваний дріб). Тоді для $0 < \alpha \leq 1$ ряд (11):*

1. *розбігаєтьcя при парному q;*
2. *збігаєтьcя при непарному q.*

Основні результати. Наведемо спочатку деякі допоміжні відомості.

Лема 1. *Із збіжності ряду (3) при деякому $\alpha < 1$ випливає збіжність ряду (2).*

Доведення. Твердження леми випливає з теореми 1 застосуванням до ряду (11) ознаки Діріхлє [2, с. 307].

Лема 2. *Нехай p/q – правильний нескорочуваний дріб. Тоді число*

$$z_t = \frac{tp}{q}. \tag{4}$$

не є натуральним при будь-якому натуральному $0 < t < q$ та справедлива рівність

$$[z_t] - [z_{t-1}] = [-z_{t-1}] - [-z_t] \equiv \chi_t, \tag{5}$$

де $\chi_t \in \{0, 1\}$.

Доведення. Припустимо, що $z_t \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що tp ділиться на q. За правилами подільності (враховуючи, що p/q - нескорочуваний дріб) t має ділитися на q. Проте, це неможливо, оскільки $1 \leq t < q$. Отже, прийшли до протиріччя з припущенням, що $z_t \in \mathbb{N}$.

Доведемо рівність (5). Оскільки числа $z_t \notin \mathbb{Z}$ і $0 < z_t - z_{t-1} = \frac{p}{q} < 1$, то можливий лише один з двох наступних випадків:

a) $[z_t] < z_{t-1} < z_t < [z_t] + 1$. У цьому випадку $-[z_t] - 1 < -z_t < -z_{t-1} < -[z_t]$;

$$[z_t] - [z_{t-1}] = [z_t] - [z_t] = 0, \quad [-z_{t-1}] - [-z_t] = -[z_t] - 1 - (-[z_t] - 1) = 0.$$

b) $[z_t] - 1 < z_{t-1} < [z_t] < z_t < [z_t] + 1$. Маємо $-[z_t] - 1 < -z_t < -[z_t] < -z_{t-1}$;

$$[z_t] - [z_{t-1}] = [z_t] - ([z_t] - 1) = 1, \quad [-z_{t-1}] - [-z_t] = -[z_t] - (-[z_t] - 1) = 1.$$

Згідно з цим отримуємо рівність (5) і на цьому завершується доведення леми.

Доведення теореми 2. Згідно з лемою 1 із збіжності ряду (3) випливає збіжність ряду (2). Тому для доведення твердження 1 теореми 2 достатньо довести, що розбігається ряд (2), а для доведення твердження 2, що збігається ряд (3) при будь-якому $0 < \alpha < 1$. Доведення засноване на групуванні доданків та застосуванні теореми Лагранжа [1, с. 226].

1. Нехай $q = 2l$, де $l \in \mathbb{N}$. Будемо вважати, що підсумовування в ряді (2) починається з номера $2l+1$. Для номерів $n_k = [(m+p/(2l))k]$ розглянемо часткові суми $S_{2l(N+1)}$ ($N \in \mathbb{N}$) ряду (2), об'єднуючи доданки в групи довжини $2l$. Маємо

$$S_{2l(N+1)} = \\ = \sum_{s=1}^{N} \sum_{k=2ls+1}^{2ls+2l} (-1)^{k-1} \left(\ln \left(\left[\left(m + \frac{p}{2l} \right) k \right] \right) - \ln \left(\left[\left(m + \frac{p}{2l} \right) (k-1) \right] \right) \right). \quad (6)$$

Для фіксованого s в (6) розглянемо внутрішню суму

$$\sigma_s = \sum_{k=2ls+1}^{2ls+2l} (-1)^{k-1} \left(\ln \left(\left[\left(m + \frac{p}{2l} \right) k \right] \right) - \ln \left(\left[\left(m + \frac{p}{2l} \right) (k-1) \right] \right) \right).$$

Поклавши $k = 2ls + j$, маємо

$$\sigma_s = \sum_{j=1}^{2l} (-1)^{j-1} \left(\ln \left((2lm+p)s + mj + \left[\frac{jp}{2l} \right] \right) - \\ - \ln \left((2lm+p)s + m(j-1) + \left[\frac{(j-1)p}{2l} \right] \right) \right) =$$

$$= \sum_{t=1}^{l} (-1)^{t-1} \left(\left(\ln \left((2lm+p)s + mt + \left[\frac{tp}{2l} \right] \right) - \\ - \ln \left((2lm+p)s + (t-1)m + \left[\frac{(t-1)p}{2l} \right] \right) \right) - \\ - \left(\ln \left((2lm+p)s + (2l-t+1)m + p + \left[-\frac{(t-1)p}{2l} \right] \right) - \\ - \ln \left((2lm+p)s + (2l-t)m + p + \left[-\frac{tp}{2l} \right] \right) \right) \right). \quad (7)$$

З урахуванням позначення (4) перепишемо (7) в наступному вигляді

$$\sigma_s = \sum_{t=1}^{l} (-1)^{t-1} \left(\left(\ln \left((2lm+p)s + mt + [z_t] \right) - \\ - \ln \left((2lm+p)s + (t-1)m + [z_{t-1}] \right) \right) - \\ - \left(\ln \left((2lm+p)s + (2l-t+1)m + p + [-z_{t-1}] \right) - \\ - \ln \left((2lm+p)s + (2l-t)m + p + [-z_t] \right) \right) \right). \quad (8)$$

Застосуємо теорему Лагранжа до функції $\ln x$ на відрізках

$$\Big[\,(2lm+p)s+(t-1)m+[z_{t-1}],(2lm+p)s+mt+[z_t]\,\Big]$$

та

$$\Big[\,(2lm+p)s+(2l-t)m+p+[-z_t],(2lm+p)s+(2l-t+1)m+p+[-z_{t-1}]\,\Big].$$

Згідно з цією теоремою знайдуться такі

$$\xi_{t,s}\in\Big(\,(2lm+p)s+(t-1)m+[z_{t-1}],(2lm+p)s+mt+[z_t]\,\Big)$$

та

$$\eta_{t,s}\in\Big(\,(2lm+p)s+(2l-t)m+p+[-z_t],(2lm+p)s+(2l-t+1)m+p+[-z_{t-1}]\,\Big),$$

що

$$\ln\left((2lm+p)s+mt+[z_t]\right)-\ln\left((2lm+p)s+(t-1)m+[z_{t-1}]\right)=$$
$$=\frac{m+[z_t]-[z_{t-1}]}{\xi_{t,s}}$$

та

$$\ln\left((2lm+p)s+(2l-t+1)m+p+[-z_{t-1}]\right)-$$
$$-\ln\left((2lm+p)s+(2l-t)m+p+[-z_t]\right)=\frac{m+[-z_{t-1}]-[-z_t]}{\eta_{t,s}}.$$

Відмітимо, що

$$0\le\eta_{t,s}-\xi_{t,s}\le 2lm+p. \tag{9}$$

Для $1\le t\le l$ розглянемо окремо $[z_t]-[z_{t-1}]$ та $[-z_{t-1}]-[-z_t]$.

Якщо $t=1$, то

$$[z_1]-[z_0]=\Big[\,\frac{p}{2l}\,\Big]-\Big[\,0\,\Big]=0-0=0,$$

$$[-z_0]-[-z_1]=\Big[\,0\,\Big]-\Big[\,-\frac{p}{2l}\,\Big]=0-(-1)=1,$$

і тому

$$\ln\left((2lm+p)s+m+[z_1]\right)-\ln\left((2lm+p)s+[z_0]\right)=\frac{m}{\xi_{1,s}}$$

та

$$\ln\left((2lm+p)s+2lm+p+[-z_0]\right)-$$
$$-\ln\left((2lm+p)s+(2l-1)m+p+[-z_1]\right)=\frac{m+1}{\eta_{1,s}}.$$

При $t\ge 2$, за лемою 2 виконується (5), тому

$$\ln\left((2lm+p)s+mt+\Big[\,\frac{tp}{2l}\,\Big]\right)-\ln\left((2lm+p)s+(t-1)m+\Big[\,\frac{(t-1)p}{2l}\,\Big]\right)=$$

$$=\frac{m+\chi_t}{\xi_{t,s}}$$

та

$$\ln\left((2lm+p)s+(2l-t+1)m+p+\left[-\frac{(t-1)p}{2l}\right]\right)-$$
$$-\ln\left((2lm+p)s+(2l-t)m+p+\left[-\frac{tp}{2l}\right]\right)=\frac{m+\chi_t}{\eta_{t,s}}.$$

Отже, (8) набуває вигляду

$$\sigma_s=\frac{m}{\xi_{t,s}}-\frac{m+1}{\eta_{t,s}}+\sum_{t=2}^{l}(-1)^{t-1}(m+\chi_t)\left(\frac{1}{\xi_{t,s}}-\frac{1}{\eta_{t,s}}\right)=$$
$$=\sum_{t=1}^{l}\left[(-1)^{t-1}(m+\chi_t)\left(\frac{1}{\xi_{t,s}}-\frac{1}{\eta_{t,s}}\right)\right]-\frac{1}{\eta_{1,s}}, \quad (10)$$

де $\chi_1=0$.

Застосуємо теорему Лагранжа до функції $1/x$ на відрізках $\left[\xi_{t,s},\eta_{t,s}\right]$. В результаті знайдемо таке $\zeta_{t,s}\in\left(\xi_{t,s},\eta_{t,s}\right)$, що

$$-\left(\frac{1}{\xi_{t,s}}-\frac{1}{\eta_{t,s}}\right)=-\left(\frac{\eta_{t,s}-\xi_{t,s}}{\zeta^2_{t,s}}\right),$$

та, відповідно,

$$\sigma_s=\sum_{t=1}^{l}\left[(-1)^t(m+\chi_t)\left(\frac{\eta_{t,s}-\xi_{t,s}}{\zeta^2_{t,s}}\right)\right]-\frac{1}{\eta_{1,s}}=A_s-\frac{1}{\eta_{1,s}}.$$

З урахуванням (9)

$$\frac{\eta_{t,s}-\xi_{t,s}}{\zeta^2_{t,s}}\le\frac{2lm+p}{\zeta^2_{t,s}},$$

що означає збіжність ряду з доданками A_s. Проте, ряд з доданками $\frac{1}{\eta_{1,s}}$ розбігається, адже вони обмежені знизу $\frac{1}{s}$. Тому, остаточно, часткові суми $S_{2l(N+1)}$ ряду (2) не мають границі.

2. Нехай тепер $q=2l+1$, де $l\in\mathbb{N}$. Для номерів $n_k=[(m+p/(2l+1))k]$ розглянемо часткові суми $S_{(2l+1)(N+2)}$ $(N\in\mathbb{N})$ ряду (3). Будемо вважати, що підсумовування в ряді (3) починається з номера $2l+2$. Об'єднуючи доданки в групи довжини $2(2l+1)$, маємо

$$S_{(2l+1)(N+2)}=$$
$$=\sum_{s=1}^{N}\sum_{k=(2l+1)s+1}^{(2l+1)s+4l+2}(-1)^{k-1}\left(\left[\left(m+\frac{p}{2l+1}\right)k\right]^{1-\alpha}-\right.$$
$$\left.-\left[\left(m+\frac{p}{2l+1}\right)(k-1)\right]^{1-\alpha}\right). \quad (11)$$

Для фіксованого s в (11) розглянемо внутрішню суму

$$\sigma_s = \sum_{k=(2l+1)s+1}^{(2l+1)s+4l+2} (-1)^{k-1} \left(\left[\left(m + \frac{p}{2l+1} \right) k \right]^{1-\alpha} - \left[\left(m + \frac{p}{2l+1} \right) (k-1) \right]^{1-\alpha} \right).$$

Поклавши $k = (2l+1)s + j$, бачимо, що

$$\sigma_s = \sum_{j=1}^{4l+2} (-1)^{j-1} \left(\left(((2l+1)m+p)s + mj + \left[\frac{jp}{2l+1} \right] \right)^{1-\alpha} - \right.$$
$$\left. - \left(((2l+1)m+p)s + m(j-1) + \left[\frac{(j-1)p}{2l+1} \right] \right)^{1-\alpha} \right) =$$

$$= \sum_{t=1}^{2l+1} (-1)^{t-1} \left(((2l+1)m+p)s + (t+2l+1)m + p + \left[\frac{tp}{2l+1} \right] \right)^{1-\alpha} -$$
$$- \left(((2l+1)m+p)s + mt + \left[\frac{tp}{2l+1} \right] \right)^{1-\alpha} +$$
$$+ \left(((2l+1)m+p)s + (t+2l)m + p + \left[\frac{(t-1)p}{2l+1} \right] \right)^{1-\alpha} -$$
$$- \left(((2l+1)m+p)s + m(t-1) + \left[\frac{(t-1)p}{2l+1} \right] \right)^{1-\alpha}. \quad (12)$$

Для функції $x^{1-\alpha}$, згідно з теоремою Лагранжа, існують такі

$$\mu_{t,s} \in \left(((2l+1)m+p)s + tm + \left[\frac{tp}{2l+1} \right], \right.$$
$$\left. ((2l+1)m+p)s + (t+2l+1)m + p + \left[\frac{tp}{2l+1} \right] \right),$$

$$\nu_{t,s} \in \left(((2l+1)m+p)s + (t-1)m + \left[\frac{(t-1)p}{2l+1} \right], \right.$$
$$\left. ((2l+1)m+p)s + (t+2l)m + p + \left[\frac{(t-1)p}{2l+1} \right] \right),$$

що

$$\left(((2l+1)m+p)s + (t+2l+1)m + p + \left[\frac{tp}{2l+1} \right] \right)^{1-\alpha} -$$
$$- \left(((2l+1)m+p)s + tm + \left[\frac{tp}{2l+1} \right] \right)^{1-\alpha} = (1-\alpha) \frac{(2l+1)m+p}{\mu_{t,s}^{\alpha}},$$

$$\left(((2l+1)m+p)s+(t+2l)m+p+\left[\frac{(t-1)p}{2l+1}\right]\right)^{1-\alpha}-$$
$$-\left(((2l+1)m+p)s+(t-1)m+\left[\frac{(t-1)p}{2l+1}\right]\right)^{1-\alpha}=(1-\alpha)\frac{(2l+1)m+p}{\nu_{t,s}^{\alpha}}.$$

Відмітимо, що

$$0\le\mu_{t,s}-\nu_{t,s}\le 2(l+1)m+p+2. \tag{13}$$

Далі до функції $x^{-\alpha}$, застосуємо теорему Лагранжа на відрізках $[\,\nu_{t,s},\mu_{t,s}\,]$. Згідно з цією теоремою, знайдуться такі $v_{t,s}\in(\nu_{t,s},\mu_{t,s})$, що

$$-\left(\nu_{t,s}^{-\alpha}-\mu_{t,s}^{-\alpha}\right)=\alpha(\mu_{t,s}-\nu_{t,s})v_{t,s}^{-\alpha-1},$$

$$\sigma_s=\alpha(1-\alpha)\sum_{t=1}^{l}(-1)^t\big((2l+1)m+p\big)\frac{\mu_{t,s}-\nu_{t,s}}{v_{t,s}^{1+\alpha}}.$$

Оскільки справедлива нерівність (13), то

$$\frac{\mu_{t,s}-\nu_{t,s}}{v_{t,s}^{1+\alpha}}\le\frac{2(l+1)m+p+2}{v_{t,s}^{1+\alpha}}.$$

А тому $S_{(2l+1)(N+2)}=\sum\limits_{s=1}^{N}\sigma_s$ збігається. Оскільки часткові суми інших порядків відрізняються від $S_{(2l+1)(N+2)}$ не більш ніж на $2(2l+1)-1$ доданків, кожен з яких прямує до нуля, то ряд (3) збігається.

Висновки. Нам невідомі умови збіжності ряду (11) у випадку $n_k=[r\cdot k]$ при ірраціональному r.

Список літератури

1. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. / Г. М. Фихтенгольц. Т.I. – М.: Физматлит, 1962. – 600 с.

2. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. / Г. М. Фихтенгольц. Т.II. – М.: Физматлит, 1970. – 800 с.

3. **Воронкова С. Р.** Про збіжність узагальненого гармонічного ряду при зміні знаків його доданків. // Дослідження в математиці та механіці. / Воронкова С.Р. – 2018. – Т. 23, вип. 1 (31). – с. 43–51.

Воронкова С. Р.

Об изменении знаков слагаемых обобщенного гармонического ряда

Резюме

Данная работа связана с анализом сходимости рядов, модули слагаемых которых соответствуют слагаемым обобщенного гармонического ряда. Расположение знаков слагаемых в таких рядах определяется последовательностью, между соседними номерами которой слагаемые сохраняют знак. В рамках этой работы исследуются ряды с последовательностью изменения знаков слагаемых, определенной произвольным рациональным числом. Главным результатом является теорема, которая дает исчерпывающий ответ о сходимости таких рядов.

Ключевые слова: сходимость, обобщенный гармонический ряд, номера переключения знака .

Voronkova S. R.

About changing the signs of summands of generalized harmonic series

Summary

This work is connected with the analysis of the convergence of the series, the terms of which do not have a fixed sign, and the absolute values of this terms correspond to the terms of the generalized harmonic series. The arrangement of the signs of the summands is determined by the sequence of numbers, between adjacent numbers of which the summands have already same sign. In the framework of this work, we study series with a sequence of changes in the signs of the terms defined by an arbitrary rational number. The main result is a theorem that gives an exhaustive answer about the convergence of such series.
Key words: convergence, generalized harmonic series, numbers of sign switching.

References

1. Fikhtengolz, G. M. (1962). *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [A Course of Differential and Integral Calculus], Vol. I.* Moscow: Fizmatlit, 600 p.
2. Fikhtengolz, G. M. (1970). *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [A Course of Differential and Integral Calculus], Vol. II.* Moscow: Fizmatlit, 800 p.
3. Voronkova S. R. (2018). *Pro zbijnist uzagalnenogo garmonichnogo ryadu pri zmini znakiv iyogo dodankiv [About convergence of the generalized harmonic series when the signs of its summands are changed]// Doslidjennya v matematici i mehanici [Researches in mathematics and mechanics]* – 2018. – V. 23, issue 1 (31). – p. 43–51.

Дослідження в математиці і механіці. – 2019. – Т. 24, вип. 1(33). – С. 15–24

УДК 512.552

О. В. Зеленський, В. М. Дармосюк, М. В. Касянюк
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Миколаївський національний університет імені В. О. Сухомлинського,
Університет економіки, права та інформаційних технологій "КРОК"м. Київ

МІНІМАЛЬНА МАТРИЦЯ ПОКАЗНИКІВ

У роботі досліджуються мінімальні матриці показників та мінімальні вагові функції допустимого сагайдака. Знайдено обмеження для суми елементів матриці показників з одиничним сагайдаком та обмеження для суми елементів мінімальної матриці показників з сагайдаком, який має петлю в кожній вершині. Показано, що зменшення ваги простого циклу сагайдака, може привести до збільшення суми елементів матриці показників з якої одержується сагайдак. Наведено приклад, що спростовує гіпотезу про те, що для сагайдака з петлею в кожній вершині вагова функція з вагою всіх простих циклів рівною 2 є мінімальною. Доведено, що жорсткий сагайдак одержується з мінімальної матриці показників.
MSC: 16G20, 16G30.
Ключові слова: матриця показників, допустимий сагайдак матриці показників, мінімальна матриця показників .
DOI: 10.18524/2519–206x.2019.1(33).175542.

Вступ. Один із аспектів теорії кілець є вивчення властивостей кілець за допомогою теорії графів. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем [1]. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників, зокрема, сагайдаки таких кілець [1]. Порівняно недавно матриці показників стали окремим об'єктом вивчення. В [4] доводиться нежорсткість допустимого сагайдака, який має хоча б одну петлю. В [5] розглядаються вагові функції які визначають допустимі сагайдаки, з появою яких з'явилося більше можливостей для дослідження допустимих сагайдаків. Опис деяких класів жорстких сагайдаків започатковано в [6]. В [7] знайдено властивості одиничних циклів та одиничних сагайдаків, зокрема знайдено обмеження для елементів матриці показників одиничного сагайдака. В [8] досліджуються цикли допустимих сагайдаків.

Нехай $\mathcal{E}=(\alpha_{ij}) \in M_n(\mathcal{Z})(M_n(\mathcal{Z})$ — це кільце матриць $n \times n$ з цілими елементами).

Означення 1. *[1] Матриця $\mathcal{E}=(\alpha_{ij})$, для якої виконуються наступні умови:*

1) $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_{ik}$ для всіх i, j, $k = 1, \ldots, n$,
2) $\alpha_{ii} = 0$ для всіх $i = 1, \ldots, n$,
називається матрицею показників.
Матриця показників, для якої виконується умова
3) $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geqslant 1$ для всіх $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ $(i \neq j)$
називається зведеною матрицею показників.

Надійшла 22.04.2019

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників. Введемо матриці $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij}) = \mathcal{E} + E_n \quad \in M_n(\mathbb{Z})$, де E_n — одинична матриця, та $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$: $\gamma_{ij} = \min\limits_k \{\beta_{ik} + \beta_{kj}\}$.

Означення 2. *[1] Сагайдаком зведеної матриці показників $Q = Q(\mathcal{E})$ називається сагайдак, матриця суміжності якого задається формулою $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$.*

Теорема 1. *[3] Якщо $\mathcal{E}$ - зведена матриця показників, $Q = Q(\mathcal{E})$ -сагайдак матриці показників, то матриця $[Q]$ є $(0, 1)$ - матрицею суміжності сильно зв'язного сагайдака.*

Означення 3. *[1] Зведені матриці показників $\mathcal{E}_1$ і $\mathcal{E}_2$ називають еквівалентними, якщо одну можна одержати з іншої за допомогою елементарних перетворень двох типів:*

1. Відняти ціле число t від елементів i-го рядка і додати його до елементів i-го стовпця.

2. Поміняти місцями два рядки і два стовпці з такими ж номерами.

Означення 4. *[1] Сагайдак Q називається допустимим, якщо існує зведена матриця показників $\mathcal{E}$, така що $Q(\mathcal{E}) = Q$.*

Теорема 2. *[3] Нехай Q^* - сильно зв'язний простий сагайдак з петлею в кожній вершині. Тоді Q^* - допустимий сагайдак.*

Означення 5. *[5] Сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ називають зваженим, якщо визначена функція ω: $AQ \to R$. Функцію ω називають ваговою, а її значення на стрілці – вагою стрілки.*

Сума ваг всіх стрілок шляху називається вагою шляху.

Якщо $\mathcal{E}$ - зведена матриця показників, $Q = Q(\mathcal{E})$-сагайдак матриці показників, то матриця $[Q]$ є (0, 1) - матрицею суміжності сильно зв'язного сагайдака.

Теорема 3. *[5] Сильно зв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ допустимий тоді й тільки тоді, коли існує вагова функція $\omega : AQ \to N \cup \emptyset$, яка задовольняє такі умови:*

1. Вага стрілки з точки i у точку j менша за вагу шляху з точки i у точку j довжини $l \geq 2$.

2. Вага петлі в точці i менша за вагу будь-якого циклу, що проходить через точку i, довжиною $l \geq 2$.

3. Вага будь-якого циклу більша або дорівнює 1.

4. Вага петлі дорівнює 1.

5. Через кожну точку без петлі проходить цикл довжиною $l \geq 2$, вага якого дорівнює 1.

Зауваження. *Згідно з умовами (4) та (5) через кожну точку допустимого сагайдака проходить цикл ваги 1.*

Означення 6. *[5] Вагову функцію, яка задовольняє всі умови теореми 3, називатимемо допустимою ваговою функцією.*

За сагайдаком Q і допустимою ваговою функцією ω можна побудувати матрицю показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(Z)$ таким чином: якщо сагайдак Q містить стрілку σ_{ij}, то $\alpha_{ij} = \omega(\sigma_{ij})$, у протилежному випадку α_{ij} дорівнює вазі найлегшого шляху із вершини v_i у вершину v_j.

Означення 7. *[6] Допустимий сагайдак Q називають жорстким, якщо існує з точністю до еквівалентності єдина зведена матриця показників $\mathcal{E}$ така, що $Q(\mathcal{E}) = Q$.*

Твердження 1. [7] В допустимому сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$ між вершинами одиничного циклу не існує інших стрілок окрім стрілок цього циклу.

Твердження 2. [7] Допустимий сагайдак Q не може містити двох стрілок σ_{ia} та σ_{ja}, де вершини i, j належать одному одиничному циклу.

Твердження 3. [7] Допустимий сагайдак $Q = (VQ, AQ)$, не може містити стрілки σ_{ai}, σ_{aj}, де вершини i, j належать деякому одиничному циклу.

Означення 8. *Сагайдак зведеної матриці показників називається одиничним, якщо його цикли утворюють сильнозв'язний сагайдак.*

Теорема 4. *[8] Матрицю показників $\mathcal{E}_2$ можна одержати з матриці $\mathcal{E}_1$ за допомогою елементарних перетворень тоді і тільки тоді, коли сагайдак $Q(\mathcal{E}_1)$ ізоморфний сагайдаку $Q(\mathcal{E}_2)$ та вага циклів сагайдака $Q(\mathcal{E}_1)$ дорівнює вазі відповідних циклів сагайдака $Q(\mathcal{E}_2)$.*

Основні результати.

Означення 9. *Для допустимого сагайдака Q виберемо матрицею показників $\mathcal{E}$ з мінімальною сумою елементів, цю суму надалі будемо позначати $F(Q)$, а таку матрицю будемо називати мінімальною матрицею показників для сагайдака Q. Допустиму вагову функцію, яка визначає матрицю $\mathcal{E}$, називатимемо мінімальною ваговою функцією для сагайдака Q.*

Лема 1. *Сума всіх попарних відстаней вершин зв'язного неорієнтованого простого графа G_n, $n \geq 2$ не перевищує $C^3_{n+1} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$, тобто $\sum\limits_{i,j=1}^{n} d(v_i, v_j) \leq C^3_{n+1} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$.*

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції.

1. При $n = 2$ є тільки один зв'язний неорієнтований графа G з матрицею суміжності $[G] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. В графа є тільки одна пара вершин, тому сума дорівнює один: $1 \leq C^3_3 = 1$ нерівність виконується.

2. Припустимо, що нерівність виконується при $n \leq m$, тобто $\sum\limits_{i,j=1, i<j}^{m} d(v_i, v_j)$ $\leq \frac{(m+1)m(m-1)}{6}$ (1)

3. Доведемо, що нерівність виконується при $n = m+1$, тобто для графа G_{m+1}. Знайдемо в графі вершину v_0, після видалення якої, він залишиться зв'язним. Якщо граф містить цикли, то можна взяти довільну вершину цикла, якщо граф не містить циклів, то граф є деревом, тому можна взяти довільний лист дерева. Оскільки граф G зв'язний, то відсортуємо всі верщини у порядку зростання відстаней до v_0. Нехай ми одержимо послівдовність вершин $v_1, v_2, \ldots, v_m$, тоді $d(v_0, v_i) \leq i$, для довільного $i \in 1, ..., m$. Тому $\sum\limits_{i=1}^{n} d(v_0, v_i) \leq 1 + 2 + ... + m = \frac{m(m+1)}{2}$.(2) Сума відстаней між вершинами графа G_{m+1} дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{m} d(v_0, v_i) + \sum\limits_{i,j=1}^{nm} d(v_i, v_j)$ З нерівностей (1) та (2) випливає, що $\sum\limits_{i=1}^{m} d(v_0, v_i) + \sum\limits_{i,j=1}^{nm} d(v_i, v_j) \leq \frac{(m+1)m(m-1)}{6} + \frac{(m+1)m}{2} = \frac{(m+2)(m+1)m}{6} = C_{m+2}^3$ Отже, за принципом математичноъ індукції нерівність виконується для всіх натуральних $n \geq 2$.

Лему доведено.

Теорема 5. *Сума елементів зведеної матриці показників з одиничним сагайдаком Q не перевищує $C_{n+1}^3 = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$.*

Доведення. По сагайдаку Q побудуємо неорієнтований граф G, який складається з тих же вершин, що й сагайдак Q, і в якому дві вершини з'єднані ребром, якщо в сагайдаку Q вони належать одному одиничному циклу. Оскільки сагайдак Q одиничний, то граф G зв'язний. Для графа G під відстанню $d(v_i, v_j)$ між двома вершинами будемо розуміти кількість ребер у найкоротшому маршруті. Нагадаємо, що в матриці показників $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\omega, Q) = (\alpha_{ij})$ α_{ij} дорівнює вазі найлегшого шляху із вершини "i"у вершину "j який може складатися з однієї стрілки. Аналогічно α_{ji} дорівнює вазі найлегшого шляху із вершини "j"у вершину "i". Рівність $d(i,j) = k$, означає, що в сагайдаку Q існує шлях, який починається в вершині "i"проходить через вершину "j"і повертається в вершину "i який проходить по стрілкам k одинчних циклів(можливо не по всім стрілкам), тому вага цього щляху не перевищує k. Отже, $\alpha_{ij} + \alpha_{ji}$ дорівнює вазі найлегшого циклу, який проходить через вершини "i "та "j не перевищує ваги одного з циклів, який не перевищує $d(i,j)$. Тому $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \leq d(i,j)$, звідси випливає, що $\sum\limits_{i,j=1, i<j}^{m} (\alpha_{ij} + \alpha_{ji})$ $\leq \sum\limits_{i,j=1, i<j}^{m} d(i,j) \leq C_{n+1}^3$. Теорему доведено.

Лема 2. $C_n^2 \leq F(Q)$

Доведення. Нехай Q - допустимий сагайдак, $Q = Q(\mathcal{E})$. Для зведеної матриці показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(Z)$: $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geq 1$ для всіх $i \neq j$. Оскільки таких пар елементів матриці показників, які симетричні відносно головної діагоналі є C_n^2, то сума елементів $\mathcal{E}$ не менше ніж $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Отже, $C_n^2 \leq F(Q)$. Лему доведено.

Теорема 6. *Для допустимого сагайдака $Q = Q(\mathcal{E})$, який є простим циклом (або без петель, або з петлею в кожній вершині) сума елементів $\mathcal{E}$ дорівнює pC_n^2 , де p-вага циклу.*

Доведення. Розглянемо сагайдак $Q = (123 \dots n)$, з ваговою функцією $\omega(\sigma_{12}) =$

$$\omega(\sigma_{23} = ... = \omega(\sigma_{n-1,n})) = 0, \omega(\sigma_{n,1}) = p. \ c = (\alpha_{ij}) = \mathcal{E}(\omega, Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ p & p & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ p & p & p & ... & 0 & 0 \\ p & p & p & ... & p & 0 \end{pmatrix},$$

тобто в матриці $\mathcal{E}$ елементи нижче головної діагоналі рівні p, а інші елементи рівні 0, сума елементів $\mathcal{E}$ дорівнює pC_n^2 . За теоремою 4, всі матриці показників з яких одержується сагайдак Q з вагою циклу p еквівалентні між собою, тому їх сума елементів також дорівнює pC_n^2 . Теорему доведено.

Відомо, що для сильнозв'язного сагайдака з петлею в кожній вершині Q є допустима вагова функція ω^* , для якої вага всіх стрілок дорівнює одиниці. Знайдемо оцінку суми елементів матриці показників , яка визначається ваговою функцією ω^*.

Теорема 7. *Для довільного допустимого сагайдака з петлею в кожній вершині Q, та вагової функції $\omega^*(\sigma_{ij}) = 1$, сума елементів матриці показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) = \mathcal{E}(\omega^*, Q)$ не перевищує* $\frac{n^2(n-1)}{2}$

Доведення. Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) = \mathcal{E}(\omega^*, Q)$. Позначимо через $l(i,j)$ -найменшу кількість стрілок, по яким потрібно пройти, щоб в сагайдаку Q з вершини "i"потрапити у вершину "j". Всі вершини крім першої впорядкуємо у порядку зростання числа $l(1, v_i)$, нехай ми одержали послідовність вершин $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ тоді $l(v_0, v_i) \leq i$, для довільного $i = 1, ..., n-1$. (3) Нерівність (3) рівносильна нерівності $\alpha_{ij} \leq j$, для довільного $j = 1, ..., n-1$. Тому сума елементів першого рядка матриці $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ не перевищує $1+2+..+n-1 = \frac{(n-1)n}{2}$, аналогічні нерівності можна довести для інших рядків матриці $\mathcal{E}$, тому сума елементів матриці $\mathcal{E}$ не перевищує $\frac{n^2(n-1)}{2}$.

Наслідок. *Для довільного сильнозв'язного сагайдака з петлею в кожній вершині Q, $F(Q) \leq \frac{n^2(n-1)}{2}$.*

Доведення. Для сагайдака Q, допустима вагова функція $\omega^*(\sigma_{ij}) = 1$ визначає матрицю показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$, сума елементів, якої за теоремою 5 не перевищує $\frac{n^2(n-1)}{2}$. Сума елементів мінімальної матриці показників дорівнює $F(Q)$ і не перевищує суми елементів $\mathcal{E}$, тому $F(Q) \leq \frac{n^2(n-1)}{2}$.

Приклад. *Для $n = 5$. Розглянемо сагайдак Q, який є простий циклом з петлею в кожній вершині.* $[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, вагова функція* $\omega^*(\sigma_{ij}) =$

1 *визначає матрицю показників* $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ *сума елементів якої дорівнює* $50 \leq \frac{5^2 \times 4}{2} = 50$.

Проте, зрозуміло , що $\mathcal{E}$ не є мінімальною матрицею показників для сагайдака Q. Побудуємо мінімальну вагову функцію для сагадака Q. Сагайдак Q містить цикл (12345), вершини якого мають петлі, тому за теоремою 1, вага циклу не менше 2, а тому за теоремою 4 $F(Q) = 2C_n^2 = 20$, $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Оцінка $F(Q) \leq \frac{n^2(n-1)}{2}$ не є точною.

Виникає питання знайти максимум $F(Q)$. Тобто для якого допустимого сагайдака Q з n вершинами $F(Q)$ має найбільше значення.

Твердження 4. Матриця показників з якої одержується жорсткий сагайдак є мінімальної матрицею показників.

Доведення. Нехай $Q = Q(\mathcal{E})$, Q- жорсткий. Припустимо протилежне, що $\mathcal{E}$ не є мінімальною матрицею показників. Тоді існує матриця показників $\mathcal{E}_{min}$, така, що $Q = Q(\mathcal{E}) = Q(\mathcal{E}_{min})$, і сума елементів матриці $\mathcal{E}_{min}$ менше ніж сума елементів матриці $\mathcal{E}$. Оскільки суми елементів матриць різні, то матриці не еквіваленті, тому отримали протиріччя, жорсткий сагайдак не може одержуватися з двох попарно не еквівалентних матриць показників. Отже, $\mathcal{E}$- мінімальна матриця показників.

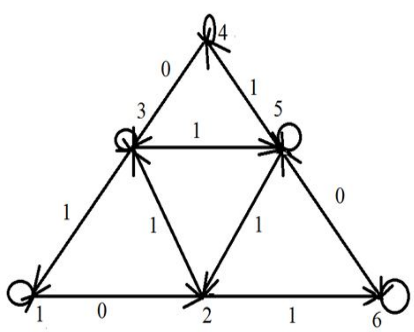
З теореми 4, випливає що матриці показників еквівалентні, тоді і тільки, коли сагайдаки ізоморфні, а вага відповідних циклів рівна. Тобто, якщо для сагадака Q ми знаємо вагу циклів, то всі матриці показників з яких Q одержується еквівалентні між собою. Оскільки еквівалентні матриці мають однакову суму елементів, то знаючи вагу циклів ми однозначно знаємо суму елементів матриць показників з яких він одержується.

Наприклад сагайдак Q з матрицею суміжності $[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, який містить три цикли $(1,2), (2,3), (1,2,3)$. Нехай вага цикла $(1,2)$ дорівнює a, і вага цикла $(2,3)$ дорівнює b. $Q = Q(\mathcal{E})$, де $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & a & a+b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, сума елементів матриці $\mathcal{E}$ дорівнює $2(a+b)$, а інші матриці яких одержується Q еквівалентні до $\mathcal{E}$ тому їх сума елементів дорівнює $2(a+b)$.

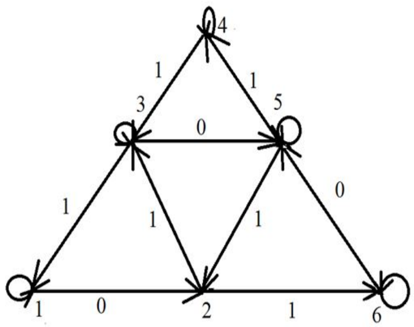
Виникла гіпотеза, що чим менше вага простих циклів, тим менше сума елементів матриці показників, з якої він одержується. Гіпотеза виявилась неправильною.

Твердження 5. Зменшення ваги простого циклу сагайдака, може привести до збільшення суми елементів матриці показників з якої сагайдак одержується.

Доведення. Розглянемо сагайдак Q, з матрицею суміжності $[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
який містить чотири простих цикла $(1, 2.3), (2, 3, 5), (2, 6, 5), (3, 5, 4)$, які відповідно мають вагу. Приклад вагової функції на рисунку.



Матриця показників для цієї вагової функції $\mathcal{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
, сума елементів якої 34. Зменшимо вагу циклу $(2, 3, 5)$ до двох. Тобто побудуємо допустиму вагову функцію, для якої вага всіх простих циклів дорівнює 2. Приклад такої функції на рисунку.



$$\mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, сума елементів якої 42. Доведемо, що $F(Q) = 34$, тобто, що $\mathcal{E}_3$-мінімальна матриця показників. В цьому доведені будемо вважати, що вага стрілки може бути від'ємна. (Оскільки вага будь-якого циклу не менше одиниці то елементарними перетвореннями завжди вагу будь-якої стрілки можна зробити додатною або нулем).

Очевидно, що якщо для допустимої вагової функції можна вагу стрілки зменшити на одиницю, так щоб вагова функція залишилось допустимою, то ця вагова функція і матриця показників, яку вона визначає точно не є мінімальною. Якщо в сагайдаку Q вага циклу (123) більше або дорівнює трьох, то зменшуючи вагу стрілки σ_{12} на одиницю ми прийдемо до матриці показників з меншою сумою. Ми одержали важливе правило, якщо в простому циклі з петлями , хоча б одна стрілка належить тільки цьому простому циклу, то для мінімальної вагової функції його вага має дорівнювати два. Аналогічно для мінімальної вагової функції вага циклів (265) і (354) також дорівнює 2. Для циклу $(2,3,5)$ це правило не діє, тому що в нього кожна стрілка належить, деякому іншому циклу. Варіанти коли вага циклу $(2,3,5)$ дорівнює два або три ми розглянули . Зауважимо, що вага циклу $(1,2,6,5,4,1) = (2,3,5) + (265) + (354) - (2,3,5) = 6 - (2,3,5)$. Тому, якщо вага $(2,3,5)$ більше або дорівнює чотирьох, то вага $(1,2,6,5,4,1)$ менше або дорівнює двох і не буде виконуватися нерівність вага шляху більше ніж вага стрілки. Отже, $F(Q) = 34$. Останній приклад спростував гіпотезу про те, що для сагайдака з петлею в кожній вершині вагова функція з вагою всіх простих циклів рівною 2 є мінімальною.

Висновки. В роботі знайдено оцінки для суми елементів мінімальної матриці показників. Доведено, що жорсткі сагайдаки одержуються тільки з мінімальних матриць показників. Авторами встановлено, що зменшення ваги простого циклу сагайдака, може привести до збільшення суми елементів матриці показників, з якої одержується сагайдак.

1. **Hazewinkel M.** Algebras Rings and Modules, vol. 1/ M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko - Kluwer Academic Publisheers, 2004.- 380 p.
2. **Hazewinkel M.** Algebras Rings and Modules, vol. 2/ M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko - Kluwer Academic Publisheers, 2007.- 400 p.
3. **Kirichenko V. V.** Exponent Matrices and Tiled Order over Discrete Valuation Rings/ V. V. Kirichenko , O. V. Zelenskiy, V. N. Zhuravlev // International Journal of Algebra and Computation. 2005.– Vol. 15, – № 5 - 6. – p. 1-16.
4. **Зеленський О. В.** Жорсткі сагайдаки зведених матриць показників / О. В. Зеленський // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. - 2007. - №3. - С. 27-31.
5. **Журавлев В.Н.** Допустимые колчаны./ В.Н. Журавлев// Фундаментальная и прикладная математика. Том 14, 2008. 7, с. 121-128.
6. **Кириченко В.В.** О жестких колчанах /В.В. Кириченко, В. Н. Журавлёв, И. Н. Цыгановская // Фундаментальная и прикладная математика. Том 12, выпуск 8, 2006. Часть 1. С. 105 - 120.
7. **Журавльов В. М.** Одиничні сагайдаки матриці показників/ В.М. Журавльов, О.В. Зеленський, В.М. Дармосюк // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. - 2012. - №4. - С. 27-31.
8. **Зеленський О. В.** Цикли допустимих сагайдаків / О. В. Зеленський// Математичні студії. Том 42, випуск 1.С. 3-8.

Зеленський А. В., Дармосюк В. Н., Касянюк М.В.
Минимальная матрица показателей

Резюме

В работе исследуются минимальные матрицы показателей и минимальные весовые функции допустимого колчана. Найдено ограничения для суммы элементов матрицы показателей с единичным колчаном и ограничения для суммы элементов минимальной матрицы показателей с колчаном, который имеет петлю в каждой вершине. Показано, что уменьшение веса простого цикла колчана, может привести к увеличению суммы элементов матрицы показателей из которой получается колчан. Приведен пример, опровергающий гипотезу о том, что для колчана с петлей в каждой вершине весовая функция с весом всех простых циклов равным 2 является минимальной. Доказано, что жесткий колчан получается из минимальной матрицы показателей.
Ключевые слова: матрица показателей, допустимый колчан матрицы показателей, минимльная матрица показателей .

Zelenskiy O.V., Darmosiuk V.M., Kasyaniuk M.V.
Minimal exponent matrix

Summary

This paper investigates the minimal exponent matrix and minimal weight functions of the admissible quiver. Found limitations for the sum of the elements of exponent matrix with a single quiver and a limitation for the sum of the elements the minimal exponent matrix with quiver which has a loop in each the top. It is shown that reducing the weight of a simple quiver cycle, can lead to an increase in the sum of elements of the exponent matrix from which you get a quiver. An example is given that refutes the hypothesis that that for

a quiver with a loop in each vertex, the weight function with the weight of all simple cycles equal to 2 is minimal. It is proved that a rigid quiver is obtained from a minimal exponent matrix.
Key words: exponent matrix, admissible quiver, minimal exponent matrix.

References

1. **Hazewinkel M.** Algebras Rings and Modules, vol. 1/ M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko - Kluwer Academic Publisheers, 2004.- 380 p.
2. **Hazewinkel M.** Algebras Rings and Modules, vol. 2/ M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko - Kluwer Academic Publisheers, 2007.- 400 p.
3. **Kirichenko V. V.** Exponent Matrices and Tiled Order over Discrete Valuation Rings/ V. V. Kirichenko , O. V. Zelenskiy, V. N. Zhuravlev // International Journal of Algebra and Computation. 2005.– Vol. 15, – № 5 - 6. – p. 1-16.
4. **Zelenskiy O.V.** Rigid quivers of reduced exponent matrices/ O. V. Zelenskiy// Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics Mathematics - 2007. - №3. - p. 27-31.
5. **Zhuravlev V.N.** Admissible quivers/ V.N. Zhuravlev// Fundamental and Applied Mathematics. -2008. - Vol. 14, no 7.- p. 121-128.
6. **Kirichenko V. V.** On rigid quiver/ V. V. Kirichenko, V. N. Zhuravlev, I. N. Tsyganivska// Fundamental and Applied Mathematics. - 2006.- Vol 12, no 8.- p. 105 - 120.
7. **Zhuravlev V. N.** Unit quivers of exponent matrices/ V. N. Zhuravlev, O. V.Zelenskiy, V. M. Darmosiuk// Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kiev. Series: Physics and Mathematics. - 2012. - №4. - p. 27-31.
8. **Zelenskiy O.V.** Cycles of admissible quivers/O.V.Zelenskiy// Mat. Stud.-2014.-42.-p. 3–8.

УДК 517.9

З. М. Лысенко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

АЛГЕБРЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ТЕПЛИЦЕВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СИМВОЛАМИ

Автор благодарен Н. Л. Василевскому за постановку задачи и полезное обсуждение результатов.

Рассматривается весовое пространство Бергмана $\mathcal{A}_\lambda^2(D_n)$ $(\lambda > -1)$ в области Зигеля D_n, состоящее из аналитических функций пространства $L_2(D_n, d\mu_\lambda)$, где

$$d\mu_\lambda = \frac{c_\lambda}{4}\left(\operatorname{Im} z_n - \left|z'\right|^2\right)^\lambda d\nu(z), \quad c_\lambda = \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\pi^n \Gamma(\lambda+1)},$$

$d\nu(z)$ – стандартная мера Лебега в $\mathbb{C}^n$. Описана структура $\mathcal{A}_\lambda^2(D_n)$. Именно, пространство $\mathcal{A}_\lambda^2(D_n)$ можно рассаматривать (с точностью до изометрического изоморфизма R) в виде прямого интеграла

$$\int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi$$

пространства Фока $F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$, состоящего из аналитических функций пространства $L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_\alpha\right)$ $(\alpha = 2\xi)$, где $d\nu_\alpha(z') = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha|z'|^2} d\nu(z')$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$. Используя оператор R, доказано, что каждый теплицевый оператор T_a со специальным ограниченным символом $a(z) = a\left(\operatorname{Im} z_n - |z'|^2\right)$, действующий в пространстве $\mathcal{A}_\lambda^2(D_n)$, унитарно эквивалентен прямому интегралу от оператора умножения $\gamma_a(\xi)I$, действующему в пространстве Фока $F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$, $\xi \in \mathbb{R}_+$. Функция $\gamma_a(\xi)$ определяется формулой

$$\gamma_a(\xi) = \frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int_{\mathbb{R}_+} a(v)\mathrm{e}^{-2\xi v} v^\lambda \, dv.$$

Отсюда вытекает, что C^*-алгебра, порожденная таким оператором, коммутативна. Показано, что C^*-алгебра, порожденная теплицевыми операторами T_a и T_b, где

$$a = a\left(\operatorname{Im} z_n - \left|z'\right|^2\right) \in L_\infty(\mathbb{R}_+), \quad b = b\left(z'\right) \in L_\infty\left(\mathbb{C}^{n-1}\right),$$

коммутативна тогда и только тогда, когда для каждого $\xi \in \mathbb{R}_+$ алгебра, порожденная теплицевыми операторами $T_b^{2\xi}$, действующими в пространстве $F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$, коммутативна.

MSC: 47B35, 47L80, 47G10, 32A36.
Ключевые слова: пространство Бергмана, область Зигеля, унитарный оператор, сопряженный оператор.
DOI: 10.18524/2519–206x.2019.1(33).175543.

Введение. Пусть D – некоторое многообразие. Пространство Бергмана $\mathcal{A}^2(D)$ состоит из аналитических функций пространства $L_2(D)$. Через B_D обозначим ортогональный проектор (проектор Бергмана) $L_2(D)$ на замкнутое подпространство $\mathcal{A}^2(D)$. Тогда оператор Теплица T_a с символом $a \in L_\infty(D)$, действующий в $\mathcal{A}^2(D)$, определяется следующим образом:

$$T_a: \ \varphi \in \mathcal{A}^2(D) \ \to \ B_d(a\varphi) \in \mathcal{A}^2(D).$$

Получена 11.06.2019

Алгебры, порожденные теплицевыми операторами, изучались многими авторами (см. монографию [1], а также библиографию к ней). Так, в [1] получена полная характеристика коммутативных C^*-алгебр теплицевых операторов в весовых пространтсвах Бергмана для случая единичного круга и верхней полуплоскости. Именно, доказано, что C^*-алгебра, порожденная операторами Теплица в указанных пространствах, коммутативна тогда и только тогда, когда соответствующие символы постоянны на циклах некоторых пучков гиперболических геодезических линий. Этот результат показывает как геометрия базисного многообразия влияет на свойства операторов Теплица на этом многообразии. Во всех случаях изучение алгебр теплицевых операторов, как правило, строится унитарный оператор, который преобразует соответствующий оператор Теплица в конкретный мультипликативный оператор, зависящий от символа. Это влечет не только коммутативность соответствуоей алгебры, но и дает возможность в будущем исследовать ограниченность, компактность, спектральные свойства, инвариантные подпространства изучаемых операторов Теплица.

В данной работе исследуется коммутативность C^*-алгебры теплицывых операторов в весовых пространствах Бергмана над областью Зигеля со специальными символами.

Основные результаты

1. Структура пространства Бергмана в области Зигеля. Пусть $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$, $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $|z|^2 = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2$, где $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Обозначим через D_n область Зигеля в $\mathbb{C}^n$, определяемую следующим образом

$$D_n = \left\{ z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} : \ \operatorname{Im} z_n - |z'|^2 > 0 \right\}. \tag{1}$$

Пусть

$$\mathcal{D} = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

Отображение

$$k : \ (z', u, v) \in \mathcal{D} \ \to \ \left(z', u + \imath v + \imath |z'|^2 \right) \in D_n \tag{2}$$

является диффеоморфизмом между $\mathcal{D}$ и D_n.

Обозначим через $d\nu(z) = dx_1 dy_1 \ldots dx_n dy_n$, где $z_m = x_m + \imath y_m$, $m = \overline{1, n}$, стандартную меру Лебега в $\mathbb{C}^n$. Введем следующее однопараметрическое семейство весовых мер (см., например, [2])

$$d\mu_\lambda(z) = \frac{c_\lambda}{4} \left(\operatorname{Im} z_n - |z'|^2 \right)^\lambda \, d\nu(z),$$

где c_λ – нормализованная константа вида

$$c_\lambda = \frac{\Gamma(n + \lambda + 1)}{\pi^n \Gamma(\lambda + 1)}, \quad \lambda > -1. \tag{3}$$

Обозначим через $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$ весовое пространство Бергмана, состоящее из аналитических функций пространства $L_2(D_n, d\mu_\lambda)$ и, тем самым, являющееся замкнутым подпространством $L_2(D_n, d\mu_\lambda)$. Известно (см., например, [3–5]), что ортогональный проектор

$$B_{D_n, \lambda} : \ L_2(D_n, d\mu_\lambda) \ \to \ \mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$$

можно представить в следующем виде

$$\left(D_{D_n,\lambda} f\right)(z) = \int\limits_{D_n} \frac{f(w)}{\left(\frac{z_n - \overline{w}_n}{2\imath} = z'\overline{w}'\right)}\, d\mu_\lambda(w).$$

Вернемся снова к области

$$\mathcal{D} = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

Введем пространство $L_2\left(\mathcal{D}, d\mu_\lambda\right)$, где мера $d\mu_\lambda$ задается формулой

$$d\mu_\lambda(w) = \eta_\lambda(v) = \frac{c_\lambda}{4} v^\lambda d\nu(z), \quad \lambda > -1,$$

при этом $w = u + \imath v$, а константа c_λ задается формулой (3).

Рассмотрим унитарный оператор сдвига

$$\mathcal{U}_0 : \ L_2\left(D_n, d\mu_\lambda\right) \ \to \ L_2\left(\mathcal{D}, d\eta_\lambda\right),$$

действующий по формуле

$$\left(\mathcal{U}_o f\right)(w) = f[k(w)],$$

где k задано (2).

Тогда образ

$$\mathcal{A}_o = \mathcal{U}_0\left(\mathcal{A}^2_\lambda\left(D_n\right)\right)$$

совпадает (см. [2, формула (2.10)]) с множеством всех функций из $L_2\left(\mathcal{D}, d\mu_\lambda\right)$, удовлетворяющих уравнениям:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} + \imath\frac{\partial}{\partial v}\right)\varphi = 0 \text{ и } \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} - \imath\frac{\partial}{\partial u} z_k\right)\varphi = 0 \ k = \overline{1, n-1}.$$

Следуя [2, раздел 7] введем унитарный оператор

$$\mathcal{U}_1 = I \otimes F \otimes I,$$

действующий в

$$L_2\left(\mathcal{D}, d\eta_\lambda\right) = L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) \otimes L_2\left(\mathbb{R}\right) \otimes L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right),$$

где

$$(F\,f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(u) \mathrm{e}^{-\imath\xi u}\, du$$

– преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$. Тогда образ

$$\mathcal{A}_1(\mathcal{D}) = \mathcal{U}_1\left(\mathcal{A}_0(\mathcal{D})\right)$$

состоит из функций пространства $L_2\left(\mathcal{D}, d\eta_\lambda\right)$, имеющих вид:

$$\varphi\left(z', \xi, v\right) = \chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)\Psi\left(z', \xi\right) \mathrm{e}^{-|\xi| v},$$

где функция Ψ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} + \xi z_k\right) \Psi\left(z', \xi\right) = 0, \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{4}$$

Введем теперь весовое пространство Фока [6,7] (или Сигала – Боргмана [8,9]) в пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$. Для заданного параметра $\alpha \in \mathbb{R}_+$ рассмотрим $L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, dv_\alpha\right)$, где

$$dv_\alpha\left(z'\right) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha\left|z'\right|^2} d\nu\left(z'\right), \quad z' \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

Тогда пространство Фока $F^2_\alpha\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$ – это замкнутое подпространство пространства $L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, dv_\alpha\right)$, состоящее из аналитических функций.

Обозначим через P_α ортогональный проектор:

$$P_\alpha: \ L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, dv_\alpha\right) \ \to \ F^2_\alpha\left(\mathbb{C}^{n-1}\right).$$

Для каждого $\xi \in \mathbb{R}$ введем оператор

$$\left(V_\xi f\right)\left(z'\right) = \left(\frac{2|\xi|}{\pi}\right)^{-\frac{n-1}{2}} \mathrm{e}^{|\xi|\left|z'\right|^2} f\left(z'\right),$$

который отображает унитарно

$$L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) \text{ на } L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_{2|\xi|}\right).$$

Заметим, что $\forall\ \xi \in \mathbb{R}_+$

$$V_\xi\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} + \xi z_k\right) V_\xi^{-1} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}, \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{5}$$

Представим пространство $L_2\left(\mathcal{D}, d\eta_\lambda\right)$ в следующем виде:

$$L_2\left(\mathcal{D}, d\eta_\lambda\right) = L_2(\mathbb{R}) \otimes L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right) \otimes L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) = L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right) \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)\, d\xi.$$

Используя это представление, введем оператор

$$V = I \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} V_\xi\, d\xi,$$

отображающий унитарно

$$L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right) \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)\, d\xi$$

на

$$L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right) \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_{2|\xi|}\right)\, d\xi.$$

Тогда образ

$$\mathcal{A}_V = V\left(\mathcal{A}_1(\mathcal{D})\right)$$

состоит из всех функций вида

$$\varphi\left(z', \xi, v\right) = \chi_{\mathbb{R}_+}(\xi) c(\xi) \mathrm{e}^{-\xi v} \Psi\left(\xi, z'\right), \tag{6}$$

где, согласно (4) и (5), функция Ψ принадлежит

$$\int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi,$$

а $c(\xi)$ – нормализованная функция, определяемая формулой

$$c(\xi) = \left(\frac{4(2\xi)^{\lambda+1}}{c_\lambda \Gamma(\lambda+1)}\right)^{1/2},$$

при этом константа c_λ вычисляется по формуле (3).

Лемма 1. *Унитарный оператор*

$$\mathcal{U} = V \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_0$$

отображает пространство Бергмана $\mathcal{A}_\lambda^2\left(D_n\right)$ на пространство $\mathcal{A}_V$, которое является замкнутым подпространством пространства

$$L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right) \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_{2|\xi|}\right) d\xi$$

и состоит из функций вида

$$\varphi\left(z', \xi, v\right) = \chi_{\mathbb{R}_+}(\xi) c(\xi) \mathrm{e}^{-\xi v} \Psi\left(\xi, z'\right),$$

где

$$\Psi\left(\xi, z'\right) \in \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi.$$

Доказательство. Согласно (6) подпространство $\mathcal{A}_V$ пространства

$$L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right) \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_{2|\xi|}\right) d\xi$$

состоит из всех функций

$$\varphi\left(z', \xi, v\right) = \chi_{\mathbb{R}_+}(\xi) c(\xi) \mathrm{e}^{-\xi v} \Psi\left(\xi, z'\right),$$

где

$$\Psi \in \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)\, d\xi.$$

Покажем, что $\|\varphi\| = \|\Psi\|$:

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2_+} c^2(\xi) \mathrm{e}^{-2\xi v} \|\Psi(\xi,\cdot)\|^2_{F^2_{2\xi}(\mathbb{C}^{n-1})} \frac{c_\lambda}{4} v^\lambda \, d\xi \, dv =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} \|\Psi(\xi,\cdot)\|^2_{F_{2\xi}(\mathbb{C}^{n-1})} \frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \, d\xi \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-2\xi v} v^\lambda \, dv.$$

Вычисляя интеграл Эйлера

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-2\xi v} v^\lambda \, dv = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{(2\xi)^{\lambda+1}}, \tag{7}$$

получаем утверждение леммы.

Введем изометрическое отображение

$$R_0 : \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi \;\to\; L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right) \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_{2|\xi|}\right) d\xi$$

по следующему правилу:

$$R_0 :\; \Psi\left(\xi, z'\right) \;\to\; \chi_{\mathbb{R}_+}(\xi) c(\xi) \mathrm{e}^{-\xi v} \Psi\left(\xi, z'\right),$$

где функция $\Psi\left(\xi, z'\right) = 0 \; \forall\, \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+, \forall\, z' \in \mathbb{C}^{n-1}$. Сопряженный оператор

$$R_0^* :\; L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right) \otimes \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_{2|\xi|}\right) d\xi \;\to\; \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi$$

имеет вид:

$$R_0^* :\; f\left(u, \xi, z'\right) \;\to\; \int_{\mathbb{R}_+} c(\lambda) \mathrm{e}^{-\xi v} \left(P_{2\xi} f\right)\left(v, \xi, z'\right) \frac{c_\lambda}{4} v^\lambda \, dv.$$

Тогда мы имеем

$$R_0^* R_0 = I :\; \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi \;\to\; \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi,$$

$$R_0 R_0^* = P_V :\; L_2\left(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda\right) \otimes \int_{\mathbb{R}} L_2\left(\mathbb{C}^{n-1} dv_{2|\xi|}\right) d\xi \;\to\; A_V,$$

где P_V – ортогональный проектор.

Из леммы 1 непосредственно вытекает следующая

Теорема 1. *Оператор* $R = R_0^*\mathcal{U}$, *где* $\mathcal{U} = V\mathcal{U}_1\mathcal{U}_0$, *отображает* $L_2\left(D_n, d\mu_\lambda\right)$ *на* $\int\limits_{\mathbb{R}}^{\oplus} F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)\,d\xi$ *и сужение*

$$R\,\Big|_{\mathcal{A}_\lambda^2(D_n)}:\ \mathcal{A}_\lambda^2\left(D_n\right)\ \rightarrow\ \int\limits_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)\,d\xi$$

есть изометрический изоморфизм. Сопряженный оператор

$$R^* = \mathcal{U}^* R_0:\ \int\limits_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)\,d\xi\ \rightarrow\ \mathcal{A}_2^2\left(D_n\right)\subset L_2\left(D_n, d\mu_\lambda\right)$$

есть изометрический изоморфизм этих пространств. Более того,

$$R\,R^* = I:\ \int\limits_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F_{2\xi}^{\oplus} F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)\,d\xi\ \rightarrow\ \int\limits_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)\,d\xi,$$

$$R^*\,R = B_{D_n,\lambda}:\ L_2\left(D_n, d\mu_\lambda\right)\ \rightarrow\ \mathcal{A}_\lambda^2\left(D_n\right),$$

где $B_{D_n,\lambda}$ *– проектор Бергмана пространства* $L_2\left(D_n, d\mu_\lambda\right)$ *на пространство* $\mathcal{A}_\lambda^2\left(D_n\right)$.

2. Алгебры, порожденные теплицевыми операторами. Рассмотрим цепочку обратных операторов :

$$U_0^{-1}: L_2(D, d\eta_\lambda) \to L_2(D_n, d\mu_\lambda),$$

где $(U_0^{-1}\varphi)(z) = \varphi[k^{-1}(z)]$;

$$U_1^{-1} = I\otimes F^{-1}\otimes I: L_2(D, d\eta_\lambda) \to L_2(D, d\eta_\lambda),$$

где

$$(F^{-1}f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(u)\mathrm{e}^{i\xi u}du$$

обратное преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$;

$$V^{-1} = I\otimes\int\limits_{\mathbb{R}}^{\oplus} V_\xi^{-1}d\xi : L_2(\mathbb{R}_+, d\eta_\lambda)\otimes\int\limits_{\mathbb{R}}^{\oplus} L_2(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_{2|\xi|})d\xi \rightarrow$$

$$L_2(\mathbb{R}_+, d\eta_\lambda)\otimes\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L_2(\mathbb{C}^{n-1})d\,\xi,$$

где

$$(V_\xi^{-1}\varphi)(z') = \left(\frac{2|\xi|}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{e}^{-|\xi||z'|^2}\varphi(z').$$

Теорема 2. *Пусть символ* $a = a(y_n - |z'|^2) \in L_\infty(\mathbb{R})$. *Тогда теплицевый оператор*

$$T_a = B_{D_{n,\lambda}} aI : A^2_\lambda(D_n) \to A^2_\lambda(D_n)$$

унитарно эквивалентен оператору

$$RT_aR^* = \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} (\gamma_a(\xi)I)\, d\xi,$$

действующему в пространстве $\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} F^2_{2\xi}(\mathbb{C}^{n-1})d\xi$. *Здесь оператор*

$$\gamma_a(\xi)I : F^2_{2\xi}(\mathbb{C}^{n-1}) \to F^2_{2\xi}(\mathbb{C}^{n-1})$$

является оператором умножения на скалярную функцию

$$\gamma_a(\xi) = \frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int_{\mathbb{R}_+} a(v)\mathrm{e}^{-2\xi v} v^\lambda dv, \qquad \xi \in \mathbb{R}_+.$$

Доказательство. На основании теоремы 1 имеем :

$$\begin{aligned} RT_aR^* &= RB_{D_{n,\lambda}} a(y_n - |z'|^2) B_{D_{n,\lambda}} R^* = \\ &= R(R^*R)a(y_n - |z'|^2)(R^*R)R^* = \\ &= (RR^*)Ra(y_n - |z'|^2)R^*(RR^*) = Ra(y_n - |z'|^2)R^* = \\ &= R_0^* V U_1 U_0 a(y_n - |z'|^2) U_0^{-1} U_1^{-1} V^{-1} R_0 = \\ &= R_0^* V U_1 a(v) U_1^{-1} V^{-1} R_0 = R_0^* V a(v) V^{-1} R_0 = R_0^* a(v) R_0. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} R_0^* a(v) R_0 \psi(\xi, z') &= R_0^* \left\{ a(v)\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)(c(\xi))^{1/2}\mathrm{e}^{-\xi v}\psi(\xi, z') \right\} = \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} (c(\xi))^{1/2}\mathrm{e}^{-\xi v} P_{2\xi} \left\{ a(v)\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)(c(\xi))^{1/2}\mathrm{e}^{-\xi v}\psi(\xi, z') \right\} \frac{c_\lambda}{4} v^\lambda dv = \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} c(\xi)\mathrm{e}^{-2\xi v} a(v) \frac{c_\lambda}{4} v^\lambda dv \right\} \psi(\xi, z') = \\ &= \left\{ \frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int_{\mathbb{R}_+} a(v)\mathrm{e}^{-2\xi v} v^\lambda dv \right\} \psi(\xi, z') = \gamma_a(\xi)\psi(\xi, z'), \end{aligned}$$

где $\xi \in \mathbb{R}_+$. Таким образом, $RT_aR^* = \gamma_a(\xi)I$, где $\xi \in \mathbb{R}_+$.

Отсюда

$$RT_aR^* = \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} (\gamma_a(\xi)I)\ d\xi.$$

Теорема доказана.

Через M обозначим C^*-алгебру, порожденную всеми теплицевыми операторами T_a, где $a = a(y_n - |z'|^2) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, а через τ – C^*-алгебру, порожденную скалярными функциями γ_a (см. теорему 2).

Пусть $C_b(\mathbb{R}_+)$ — алгебра всех непрерывных ограниченных функций на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Следствие 1. *C^*-алгебра M коммутативна и изомоморфна C^*-подалгебре τ алгебры $C_b(\mathbb{R}_+)$. Указанный изоморфизм порожден следующим отображением образующих алгебр M и τ :*

$$\nu : T_a \to \gamma_a = \gamma(\xi).$$

Доказательство. По условию существует $K > 0$ такое, что для всех $v \in \mathbb{R}_+$ $|a(v)| \leqslant K$. Отсюда, учитывая (7), получаем

$$|\gamma_a(\xi)| \leqslant \frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} K \int\limits_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-2\xi v} v^\lambda dv = K, \qquad \xi \in \mathbb{R}_+,$$

и, тем самым, следствие доказано.

Рассмотрим теперь символ

$$b = b(z') \in L_\infty(\mathbb{C}^{n-1}).$$

Теплицевы операторы с символом b, действующие в пространстве Фока $F^2_{2\xi}(\mathbb{C}^{n-1})$, будем обозначать через $T^{2\xi}_b$. В то же время, теплицевы операторы с символом b, действующие в пространстве Бергмана $A^2_\lambda(D_n)$, будем по-прежнему обозначать через T_b.

Теорема 3. *Теплицевый оператор T_b, действующий в пространстве $A^2_\lambda(D_n)$, унитарно эквивалентен, действующему в пространстве $\int\limits^{\oplus}_{\mathbb{R}_+} F^2_{2\xi}(\mathbb{C}^{n-1}) d\xi$, прямому интегралу от теплицева оператора $T^{2\xi}_b$, а именно, имеет место представление:*

$$RT_bR^* = \int\limits^{\oplus}_{\mathbb{R}_+} T^{2\xi}_b d\xi \qquad .$$

Доказательство. Оператор T_b унитарно эквивалентен оператору

$$\begin{aligned} RT_bR^* &= RB_{D_n,\lambda} b(z') B_{D_n,\lambda} R^* = R(R^*R) b(z')(R^*R)R^* = \\ &= (RR^*)Rb(z')R^*(RR^*) = Rb(z')R^* = R_0^* V U_1 U_0 b(z') U_0^{-1} U_1^{-1} V^{-1} R_0 = \\ &\qquad R_0^* V b(z') V^{-1} R_0 = R_0^* b(z') R_0. \end{aligned}$$

Далее,

$$
\begin{aligned}
&R_0^* b(z')R_0\psi(\xi,z') = R_0^* b(z')\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)(c(\xi))^{1/2}\mathrm{e}^{-\xi v}\psi(\xi,z') = \\
&\quad = \int\limits_{\mathbb{R}_+} (c(\xi))^{1/2}\mathrm{e}^{-\xi v} P_{2\xi}\left(b(z')\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)(c(\xi))^{1/2}\mathrm{e}^{-\xi v}\psi(\xi,z')\right)\frac{c_\lambda}{4}v^\lambda dv = \\
&\quad\quad = \frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)}\int\limits_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-2\xi v}v^\lambda dv\cdot\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)P_{2\xi}(b\psi)(\xi,z') = \\
&\quad\quad\quad = \chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)P_{2\xi}(b\psi)(\xi,z') = \left(T_b^{2\xi}\psi\right)(\xi,z'), \qquad \xi\in\mathbb{R}_+.
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$
RT_bR^* = \int\limits_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} T_b^{2\xi}d\xi.
$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Для любых символов* $a = a(y_n - |z'|^2) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$ *и* $b = b(z') \in L_\infty(\mathbb{C}^{n-1})$ *имеют место равенства:* $T_{ab} = T_aT_b = T_bT_a$ *и* $RT_{ab}R^* = \int\limits_{\mathbb{R}_+}^{\oplus}\gamma_a(\xi)T_b^{2\xi}d\xi$.

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&RT_{ab}R^* = RB_{D_{n,\lambda}}abB_{D_{n,\lambda}}R^* = R(R^*R)ab(R^*R)R^* = (RR^*)(RabR^*)(RR^*) = \\
&\quad = RabR^* = R_0^*VU_1U_0a(y_n-|z'|^2)b(z')U_0^{-1}U_1^{-1}V^{-1}R_0 = R_0^*a(v)b(z')R_0.
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$
\begin{aligned}
&R_0^*a(v)b(z')R_0\psi(\xi,z') = R_0^*a(v)b(z')\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)\,(c(\xi))^{1/2}\,\mathrm{e}^{-\xi v}\psi(\xi,z') = \\
&\quad = \int\limits_{\mathbb{R}_+}(c(\xi))^{1/2}\mathrm{e}^{-\xi v}P_{2\xi}\left[a(v)b(z')\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)(c(\xi))^{1/2}\mathrm{e}^{-\xi v}\psi(\xi,z')\right]\frac{c_\lambda}{4}v^\lambda dv = \\
&= \left[\frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)}\int\limits_{\mathbb{R}_+}a(v)\mathrm{e}^{-2\xi v}v^\lambda dv\right]\chi_{\mathbb{R}_+}(\xi)P_{2\xi}b(z')\psi(\xi,z') = \gamma_a(\xi)T_b^{2\xi}, \qquad \xi\in\mathbb{R}_+.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
RT_{ab}R^* = \int\limits_{\mathbb{R}_+}\gamma_a(\xi)T_b^{2\xi}d\xi. \tag{8}
$$

С другой стороны, согласно теореме 1, а также теоремам 2 и 3, имеем

$$
RT_aT_bR^* = RT_aB_{D_{n,\lambda}}T_bR^* = RT_a\left(R^*R\right)T_bR^* = \left(RT_aR^*\right)\left(RT_bR^*\right) = \left(\gamma_a(\xi)I\right)T_b^{2\xi},
$$

где $\xi \in \mathbb{R}_+$. Отсюда

$$RT_aT_bR^* = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \gamma_a(\xi)T_b^{2\xi}d\xi. \tag{9}$$

Из (8) и (9), тем самым, вытекает равенство:

$$T_{ab} = T_aT_b$$

Теперь коммутативность теплицевых операторов T_a и T_b следует из равенств: $T_bT_a = T_{ba} = T_{ab} = T_aT_b$. Теорема доказана.

Напомним, что C^* алгебра M, порожденная всеми теплицевыми операторами T_a, где $a = a(y_n - |z'|^2) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, коммутативна (см. следствие 1).

Пусть теперь S — некоторое подпространство пространства $L_\infty(\mathbb{C}^{n-1})$. Обозначим через $M(S)$ унитальную алгебру, порожденную всеми, действующими в пространстве $A_\lambda^2(D_n)$, теплицевыми операторами T_b, где $b = b(z') \in S$. В отличие от алгебры M, алгебра $M(S)$, вообще говоря, не является C^*-алгеброй. $M(S)$ будет C^*-алгеброй, если подпространство S замкнуто относительно комлексного сопряжения.

Пусть $\Phi = \langle T_a, T_b\rangle$ – унитальная алгебра, порожденная всеми операторами T_a и T_b, где $a = a(y_n - |z'|^2) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$ и $b = b(z') \in L_\infty(\mathbb{C}^{n-1})$. Таким образом, алгебра Φ порождена двумя унитальными подалгебрами: M и $M(S)$.

Из следствия 1 и теоремы 4 вытекает

Следствие 2. *Алгебра Φ коммутативна тогда и только тогда, когда для каждого $\xi \in \mathbb{R}_+$ унитальная алгебра, порожденная теплицевыми операторами $T_b^{2\xi}$ с символами $b = b(z') \in S$ и действующими в пространстве Фока $F_{2\xi}^2(\mathbb{C}^{n-1})$, будет коммутативной.*

3. Коммутивность C^*-алгебры теплицевых операторов со специальными символами. Рассмотрим вопрос коммутативности алгебры $\Phi = \langle M, M(S)\rangle$ для некоторых частных случаев алгебры S.

Введем оператор

$$W : L_2(\mathbb{C}^{n-1}) \otimes L_2(\mathbb{R}) \otimes L_2(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda) \to L_2(\mathbb{C}^{n-1}) \otimes L_2(\mathbb{R}) \otimes L_2(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda),$$

действующий по правилу:

$$(W\psi)(z, \xi, v) = (2|\xi|)^{-\frac{n+\lambda}{2}}\ \psi\left(\frac{z}{\sqrt{2|\xi|}}, \xi, \frac{v}{2|\xi|}\right).$$

Непосредственная проверка показывает, что W – унитарный и его сопряженный W^* имеет вид:

$$(W^*)(y, \mu, \nu) = (W^{-1}\varphi)(y, \mu, \nu) = (2|\mu|)^{\frac{n+\lambda}{\lambda}}\varphi(y\sqrt{2|\mu|}, \mu, \nu 2|\mu|).$$

Также рассмотрим оператор

$$Q_0 : l_2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L_2(\mathbb{R}_+) \to L_2(D, \eta_\lambda) = L_2(\mathbb{C}^{n-1}) \otimes L_2(\mathbb{R}) \otimes L_2(\mathbb{R}_+, \eta_\lambda),$$

действие которого происходит следующим образом:

$$Q_0 : \{C_\alpha(\xi)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^{n-1}} \to \chi_+(\xi) \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^{n-1}} C_\alpha(\xi) e_\alpha(z) l_0(v),$$

где

$$e_\alpha(z) = (\pi^{n-1}\alpha!)^{\frac{1}{2}} z^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}} \in L_2(\mathbb{C}^{n-1}),$$

$$l_0(v) = \left(\frac{4}{c_\lambda \Gamma(\lambda+1)}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-\frac{v}{2}} \in L_2(\mathbb{R}_+, \eta).$$

Что же касается функций $C_\alpha(\xi)$, принадлежащих образу оператора Q_0, то они являются продолжением на все $\mathbb{R}$ соответствующих функций из области определения, именно, $C_\alpha(\xi) = 0$, если $\xi \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{R}_+$.

Тогда сопряженный оператор

$$Q_0^* : L_2(D, \eta_\lambda) \to l_2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L_2(\mathbb{R}_+))$$

действует по правилу :

$$Q_0^* : \varphi(z,\xi,v) \to \left\{ \chi_+(\xi) \int\limits_{\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R}_+} \varphi(z,\xi,v)\overline{e_\alpha(z) l_0(v)} \eta_\lambda(v) d\nu(z) dv \right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^{n-1}}.$$

Положим

$$Q = Q_0^* W U_1 U_0 : L_2(D_n, d\mu_\lambda) \to l_2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L_2(\mathbb{R}_+)).$$

Известно [10], что

$$Q|_{A_\lambda^2(D_n)} : A_\lambda^2(D_n) \to l_2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L_2(\mathbb{R}_+))$$

является изометрическим изоморфизмом соответствующих пространств, при этом имеют место равенства:

$$QQ^* = I : l_2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L_2(\mathbb{R}_+)) \to l_2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L_2(\mathbb{R}_+)),$$

$$Q^*Q = B_{D_n,\lambda} : L_2(D_n, d\mu_\lambda) \to A_\lambda^2(D_n).$$

Лемма 2. *Пусть функция $d(\omega) \in L_\infty(D_n)$ имеет следующий вид*

$$d = d(z', y_n - |z'|^2),$$

где $z \in \mathbb{C}^{n-1}$, $y_n = \operatorname{Im}\omega_n$. Тогда для теплицевого оператора T_d, действующего в пространстве $A_\lambda^2(D_n)$, имеет место соотношение:

$$QT_dQ^* = Q_0^* d\left(\frac{z}{\sqrt{2|\xi|}}, \frac{v}{2|\xi|}\right) Q_0.$$

Доказательство. Непосредственно находим:

$$QT_dQ^* = QB_{D_{n,\lambda}}dB_{D_{n,\lambda}}Q^* = Q(Q^*Q)d(Q^*Q)Q^* = (QQ^*)(QdQ^*)(QQ^*) =$$
$$= Qd(z', y_n - |z'|^2)Q^* = Q_0^*WU_1U_0d(z', y_n - |z'|^2)U_0^{-1}U_1^{-1}W^{-1}Q_0 =$$
$$= Q_0^*WU_1d(z', v)U_1^{-1}W^{-1}Q_0 = Q_0^*Wd(z', v)W^{-1}Q_0 = Q_0^*d\left(\frac{z'}{\sqrt{2|\xi|}}, \frac{v}{2|\xi|}\right)Q_0.$$

Лемма доказана.

Докажем теперь аналог теоремы 10.2 в [10] для квазипараболического символа $d = d(r, y_n - |z'|^2) \in L_\infty(D_n)$.

Теорема 5. *Пусть символ*

$$d = d(r, y_n - |z'|^2) \in L_2(D_n).$$

Тогда теплицевый оператор T_d, действующий в пространстве $A^2_\lambda(D_n)$, унитарно эквивалентен оператору умножения $\gamma_d I$, действующему в пространстве $l_2(\mathbb{Z}_+^{n-1}, L_2(\mathbb{R}_+))$, именно,

$$QT_dQ^* = \gamma_d I,$$

где $\gamma_d = \{\gamma_d(\alpha,\xi)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^{n-1}}$, $\xi \in \mathbb{R}_+$, при этом элементы $\gamma_d(\alpha,\xi)$ имеют следующий вид:

$$\gamma_d(\alpha,\xi) = \frac{\chi_+(\xi)}{\alpha!\Gamma(\lambda+1)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} d\left(\sqrt{\frac{r_1}{2\xi}}, \ldots, \sqrt{\frac{r_{n-1}}{2\xi}}, \frac{v}{2\xi}\right) r^\alpha e^{-(v+r_1+\cdots+r_{n-1})}v^\lambda drdv.$$

Доказательство. На основании леммы 2 достаточно показать, что

$$Q_0^*d\left(\frac{r}{\sqrt{2|\xi|}}, \frac{v}{2|\xi|}\right)Q_0 = \gamma_d I.$$

Непосредственно находим:

$$Q_0^*d\left(\frac{r}{\sqrt{2|\xi|}}, \frac{v}{2|\xi|}\right)Q_0\{C_\beta(\xi)\}_{\beta\in\mathbb{Z}_+^{n-1}} =$$
$$= Q_0^*\left[d\left(\frac{r}{\sqrt{2|\xi|}}, \frac{v}{2|\xi|}\right)\chi_+(\xi)\sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^{n-1}} C_\beta(\xi)e_\beta(z)l_0(v)\right] =$$
$$= \left\{\chi_+(\xi)\int\limits_{\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{R}_+} \overline{e_\alpha(z)l_0(v)}\left[\sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^{n-1}}\chi_+(\xi)d\left(\frac{r}{\sqrt{2|\xi|}}, \frac{v}{2|\xi|}\right)C_\beta(\xi)e_\beta(z)l_0(v)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\,\eta_\lambda(v)d\nu(z)dv\right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^{n-1}} =$$

$$= \left\{ C_\alpha(\xi) \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left[\frac{\chi_+(\xi)}{\alpha!\Gamma(\lambda+1)} d\left(\sqrt{\frac{r}{2\xi}}, \frac{v}{2\xi} \right) r^\alpha \mathrm{e}^{-(v+r_1+\cdots+r_{n-1})} v^\lambda \right] drdv \right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n-1}_+} =$$

$$= \{\gamma_d(\alpha,\xi\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n-1}_+} \{C_\alpha(\xi)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^{n-1}_+}.$$

Теорема доказана.

Пусть

$$d_1 = d_1(y_n - |z'|^2) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$$

и

$$d_2 = d_2(r_1, \ldots, r_{n-1}) \in L_\infty(\mathbb{R}^{n-1}_+).$$

Тогда, согласно теореме 5,

$$QT_{d_1}Q^* = \gamma_{d_1}(\xi) I,$$

где

$$\gamma_{d_1}(\xi) = \frac{\chi_+(\xi)}{\Gamma(\lambda+1)} \int\limits_{\mathbb{R}_+} d_1\left(\frac{v}{2|\xi|} \right) \mathrm{e}^{-v} v^\lambda dv$$

и

$$QT_{d_2}Q^* = \widetilde{\gamma_{d_2}}(\alpha,\xi) I,$$

где

$$\widetilde{\gamma_{d_2}}(\alpha,\xi) = \frac{\chi_+(\xi)}{\alpha!} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_+} d_2\left(\sqrt{\frac{r_1}{2\xi}}, \ldots, \sqrt{\frac{r_{n-1}}{2\xi}} \right) r^\alpha \mathrm{e}^{-(r_1+\cdots+r_{n-1})} dr.$$

Отметим также, что

$$\gamma_{d_1}(\xi) \cdot \widetilde{\gamma_{d_2}}(\alpha,\xi) =$$

$$= \frac{\chi_+(\xi)}{\alpha!} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} d_1\left(\frac{v}{2|\xi|} \right) d_2\left(\sqrt{\frac{r_1}{2\xi}}, \ldots, \sqrt{\frac{r_{n-1}}{2\xi}} \right) r^\alpha \mathrm{e}^{-(v+r_1+\cdots+r_{n-1})} v^\lambda dvdr =$$

$$= \gamma_{d_1 d_2}(\alpha,\xi).$$

Отсюда следует, что произведение теплицевых операторов T_{d_1} и T_{d_2} будет снова теплицевым оператором:

$$T_{d_1} T_{d_2} = T_{d_1 d_2}.$$

Из вышесказанного вытекает следующая

Теорема 6. *Пусть*

$$S = \{b = b(r_1, \ldots, r_{n-1}) \in L_\infty(\mathbb{R}^{n-1}_+)\}.$$

Тогда C^*-алгебра $\Phi = \langle M, M(S)\rangle$ коммутативна и является подалгеброй алгебры, порожденной теплицевыми операторами с квазипараболическими символами вида

$$d = d(r_1, \ldots, r_{n-1}, y_n - |z'|^2).$$

Заключение.

1. Пространство Бергмана $\mathcal{A}_\lambda^2(D_n)$ в области Зигеля D_n можно рассматривать (с точностью до изометрического изоморфизма) в виде прямого интеграла

$$\int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi$$

пространства Фока $F_{2\xi}^2\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)\ \left(\subset L_2\left(C^{n-1}, d\nu_{2\xi}\right)\right)$.

2. C^*-алгебра, порожденная теплицевыми операторами

$$T_a = B_{D_n,\lambda} aI :\ \mathcal{A}_\lambda^2(D_n)\ \to\ \mathcal{A}_\lambda^2(D_n)$$

с символами $a = a\left(y_n - |z'|^2\right) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, коммутативна.

3. Коммутативность алгебры, порожденной теплицевыми операторами T_a и T_b, где $a = a\left(y_n - |z'|^2\right) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, $b = b(z') \in L_\infty\left(C^{n-1}\right)$, равносильна коммутативности алгебры, порожденной теплицевыми операторами $T_b^{2\xi}$, действующими в пространстве Фока $F_{2\xi}^2\left(C^{n-1}\right)$, $\xi \in \mathbb{R}_+$.

1. **Vasilevski N.** Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman space / N. Vasilevski // Operator Theory: Advanced and Applications. – 2008. – Vol. 185, 417 p.
2. **Quiroga-Barranco R.** Commutative C^*-algebra of Toeplitz operators on the unit ball, I. Bargmann type transform and spectral representations of Toeplitz operators / R. Quiroda-Barranco, N. Vasilevski // Integral Equations and Operator Theory. – 2007. – Vol. 59, № 3. – P. 379–419.
3. **Bekolle D.** Reproducing properties and L_p-estimates for Bergman projections in Siegel domains of tupe, II / D. Bekolle, Kagou Tomgoua // Studia Math. – 1995. – Vol. 115, № 3. – P. 219–239.
4. **Gindikin S. G.** Analysis on homogeneous domain / S. G. Gindikin // Russian Math. Surv. – 1964. – Vol. 4, № 2. – P. 1–89.
5. **Kornyi A.** H^2 spaces of generalized half-spaces / A. Koryi, E. M. Stein // Studia Math. – 1972. – Vol. 44. – P. 379–388.
6. **Berezin F. A.** Covariant and contravariant symbols of operators / F. A. Berezin // Math. USSR Izvestia. – 1972. – № 6. – P. 1117–1151.
7. **Fock V. A.** Konfigurationstrum und zweite Quatelung / V. A. Fock // Z. Phys. – 1932. – Vol. 75. – P. 622–647.
8. **Bargmann V.** On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral tranform / V. Bargmann // Comm. Pure Appl. Math. – 1961. – № 3. – P. 187–214.
9. **Segal I. E.** Lectures at the Summer Seminar on Appl. Math. / I. E. Segal. – Boulder, Colorado, 1960.
10. **Vasilevski N.** Parabolic Quasi-radial Quasi-homogeneous Symbol and Commutative Algebras of Toeplitz Operators / N. Vasilevski // Operator Theory: Advanced and Applications. – 2009. – Vol. 201. – P. 553–568.

Лисенко З. М.

Алгебри, що породжені теплицевими операторами із спеціальними символами

Резюме

Розглядається ваговий простір Бергмана $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$ $(\lambda > -1)$ в області Зігеля D_n, який складається з аналітичних функцій простору $L_2(D_n, d\mu_\lambda)$, де

$$d\mu_\lambda = \frac{c_\lambda}{4}\left(\operatorname{Im} z_n - \left|z'\right|^2\right)^\lambda d\nu(z), \quad c_\lambda = \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\pi^n \Gamma(\lambda+1)},$$

$d\nu(z)$ – стандартна міра Лебега в $\mathbb{C}^n$. Описана структура $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$. А саме, простір $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$ можна розглядати (з точністю до ізометричного ізоморфізму R) у вигляді прямого інтегралу

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi$$

простору Фока $F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$, який складається з аналітичних функцій простору $L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_\alpha\right)$ $(\alpha = 2\xi)$, де $d\nu_\alpha(z') = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha\left|z'\right|^2} d\nu(z')$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$. Використовуючи оператор R, доведено, що кожний теплицевий оператор T_a із спеціальним обмеженим символом $a(z) = a\left(\operatorname{Im} z_n - |z'|^2\right)$, який діє у просторі $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$, унітарно еквівалентний прямому інтегралу від оператора множення $\gamma_a(\xi)I$, що діє в просторі Фока $F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$, $\xi \in \mathbb{R}_+$. Функція $\gamma_a(\xi)$ означається за формулою

$$\gamma_a(\xi) = \frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int\limits_{\mathbb{R}_+} a(v)\mathrm{e}^{-2\xi v} v^\lambda \, dv.$$

Звідси випливає, що C^*-алгебра, яка породжена такими теплицевими операторами, комутативна. Показано, що C^*-алгебра, яка породжена теплицевими операторами T_a і T_b, де

$$a = a\left(\operatorname{Im} z_n - \left|z'\right|^2\right) \in L_\infty(\mathbb{R}_+), \quad b = b\left(z'\right) \in L_\infty\left(\mathbb{C}^{n-1}\right),$$

комутативна тоді і лише тоді, коли для кожного $\xi \in \mathbb{R}_+$ алгебра, яка породжена теплицевими операторами $T^{2\xi}_b$, що діють у просторі $F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$, комутативна.

Ключові слова: простір Бергмана, область Зігеля, унітарний оператор, спряжений оператор .

Lysenko Z. M.

Algebras generated by Toeplitz operators with special symbols

Summary

We concider the weighted Bergman space $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$ $(\lambda > -1)$ in the Siegel domain D_n, which consist of analytic functions of the space $L_2(D_n, d\mu_\lambda)$, where

$$d\mu_\lambda = \frac{c_\lambda}{4}\left(\operatorname{Im} z_n - \left|z'\right|^2\right)^\lambda d\nu(z), \quad c_\lambda = \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\pi^n \Gamma(\lambda+1)},$$

$d\nu(z)$ – is standard Lebesgue measure in $\mathbb{C}^n$. We discribe the structure of $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$. A jast nemely, we can consider the space $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$ (up to isometric isomorphism R) as a direct integral

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right) d\xi$$

of the Fock space $F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$, which consist of analytic functions of the space $L_2\left(\mathbb{C}^{n-1}, d\nu_\alpha\right)$ $(\alpha = 2\xi)$, where $d\nu_\alpha(z') = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha|z'|^2} d\nu(z')$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$. Using the operator R, we prove that each Toeplitz operator T_a with special bounded symbol $a(z) = a\left(\operatorname{Im} z_n - |z'|^2\right)$, and acting on $\mathcal{A}^2_\lambda(D_n)$, is unitary equivalent to the direct integral of the multiplication operator $\gamma_a(\xi)I$, acting on Fock space $F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$, $\xi \in \mathbb{R}_+$. The function $\gamma_a(\xi)$ is given by formula

$$\gamma_a(\xi) = \frac{(2\xi)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int\limits_{\mathbb{R}_+} a(v)\mathrm{e}^{-2\xi v} v^\lambda \, dv.$$

This implies that the C^*-algebra generated by such operators is commutative. We show that the C^*-algebra generated by Toeplitz operators T_a and T_b, where

$$a = a\left(\operatorname{Im} z_n - \left|z'\right|^2\right) \in L_\infty(\mathbb{R}_+), \quad b = b\left(z'\right) \in L_\infty\left(\mathbb{C}^{n-1}\right),$$

is commutative if and only if for each $\xi \in \mathbb{R}_+$ algebra generated by Toeplitz operator $T^{2\xi}_b$, acting on the space $F^2_{2\xi}\left(\mathbb{C}^{n-1}\right)$, is commutative.
Key words: Bergman spaces, Siegel domain, the unitary operator, the adjoint operator.

References

1. Vasilevski, N. (2008). *Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman space.* Operator Theory: Advanced and Applications. Vol. 185, 417 p.

2. Quiroga-Barranco, R., Vasilevski, N. (2007). Commutative C^*-algebra of Toeplitz operators on the unit ball, I. Bargmann type transform and spectral representations of Toeplitz operators. *Integral Equations and Operator Theory*, Vol. 59, № 3, P. 379–419.

3. Bekolle, D., Kagou Tomgoua (1995). Reproducing properties and L_p-estimates for Bergman projections in Siegel domains of tupe, II. *Studia Math.*, Vol. 115, № 3, P. 219–239.

4. Gindikin, S. G. (1964). Analysis on homogeneous domain. *Russian Math. Surv.*, Vol. 4, № 2, P. 1–89.

5. Kornyi, A., Stein, E. M. (1972). H^2 spaces of generalized half-spaces. *Studia Math.*, Vol. 44, P. 379–388.

6. Berezin, F. A. (1972). Covariant and contravariant symbols of operators. *Math. USSR Izvestia*, № 6, P. 1117–1151.

7. Fock, V. A. (1932). Konfigurationstrum und zweite Quatelung. *Z. Phys.*, Vol. 75, P. 622–647.

8. Bargmann, V. (1961). On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral tranform. *Comm. Pure Appl. Math.*, № 3, P. 187–214.

9. Segal, I. E. (1960). *Lectures at the Summer Seminar on Appl. Math.* Colorado: Boulder.

10. Vasilevski, N. (2009). Parabolic Quasi-radial Quasi-homogeneous Symbol and Commutative Algebras of Toeplitz Operators. *Operator Theory: Advanced and Applications*, Vol. 201, P. 553–568.

Дослідження в математиці і механіці. – 2019. – Т. 24, вип. 1(33). – С. 42–52

УДК 517.9

А. А. Плотніков
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ О. Ф. ФІЛІППОВА

В статті введено поняття диференціального включення зі змінною розмірністю, яке узагальнює звичайне диференціальне включення та систему зі змінною розмірністю диференціальних включень та обґрунтовано можливість їх використання при дослідженні систем керування зі змінною розмірністю. Системи керування зі змінною розмірністю це системи керування декількома об'єктами з послідовним у часі режимом їх роботи. Початковий стан кожного наступного об'єкта залежить від кінцевого стану попереднього об'єкту, що об'єднує їх в єдину систему змінної розмірності. Передбачається, що кожен об'єкт описується системою звичайних диференціальних рівнянь на інтервалі його дії. При цьому довжини інтервалів задані або невідомі. Системи рівнянь можуть мати неоднакову розмірність, можуть також змінюватися розмірність керуючої функції та обмеження на її значення. В роботі дано означення розв'язку такого диференціального включення та наведено їх основні властивості: умови існування розв'язку, компактність та опуклість перерізу множини розв'язків, а також сформульовано та доведено аналог теореми О. Ф. Філіппова.
MSC: 34A60, 49J21, 49K21.
Ключові слова: диференційне включення, існування, рішення, змінна розмірність, керування .
DOI: 10.18524/2519–206x.2019.1(33).175544.

Вступ. На початку 60-х років з'явився цикл робіт T. Wazewski [1, 2] і О.Ф. Філіппова [3], в яких автори розглянули новий вид узагальнення диференціального рівняння - диференціальне включення

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

та встановили зв'язок диференціальних включень з системами керування

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(0) = x_0, \tag{2}$$

де $x \in R^n$, $F : R \times R^n \to conv(R^n)$ – множинно-значне відображення, $u \in U \in conv(R^k)$ – вектор керування, $f : R \times R^n \times R^k \to R^n$. Очевидно, якщо $F(t, x) \equiv \{f(t, x, u) \ : \ u \in U\}$, то замість системи (2) можна розглядати систему (1). Так само можна записати диференціальне включення (1) у вигляді диференціального рівняння, яке містить керування (2). При цьому важливу роль відіграє теорема Б.М. Макарова [4]. Тобто дослідження керовоної системи можливо проводити, як у вигляді системи (2) так і у вигляді системи (1).

На теперішній час теорія диференціальних включень досить добре сформувалася і продовжує інтенсивно розвиватися. Так же як і в теорії диференціальних рівнянь були отримані результати, пов'язані з існуванням, продовженням та обмеженістю розв'язку, неперервної залежності від початкових умов і параметрів та ін. В той же час у диференціального включення з кожної початкової точки

Надійшла 22.04.2019

виходить вже ціле сімейство траєкторій. Ця множинно-значність породжує свої специфічні питання, такі, як замкнутість, опуклість сімейства розв'язків, існування граничних розв'язків, виділення розв'язків із заданими властивостями та багато інших питань [5–7].

На практиці нерідко виникають задачі керування декількома об'єктами з послідовним у часі режимом їх роботи. Початковий стан кожного наступного об'єкта залежить від кінцевого стану попереднього, що об'єднує їх в єдину систему змінної розмірності тому, що кожен об'єкт описується системою звичайних диференціальних рівнянь на інтервалі його дії, які можуть мати неоднакову розмірність. При цьому довжини інтервалів можуть бути задані або невідомі, а також може змінюватися розмірність функції керування і обмеження на її значення, тобто

1) якщо моменти часу зміни фазового простору фіксовані

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i, u_i),\ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),\ i = 0, ..., m, \tag{3}$$

$$x_0(0) = \overline{x_0},\ x_i(\tau_i) = \phi_i(x_{i-1}(\tau_i - 0)),\ i = 1, ..., m, \tag{4}$$

2) якщо моменти часу зміни фазового простору залежать від фазового вектору

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i, u_i),\ t \in [\tau_i(x_{i-1}), \tau_{i+1}(x_i)),\ i = 0, 1, ..., \tag{5}$$

$$x_0(0) = \overline{x_0},\ x_i(\tau_i) = \phi_i(x_{i-1}(\tau_i - 0)),\ i = 1, 2, ..., \tag{6}$$

де $x_i(t) \in R^{n_i}$, $u_i(t) \in U_i \in conv(R^{k_i})$ – керування, $f_i : [\tau_i, \tau_{i+1}) \times R^{n_i} \times R^{k_i} \to R^{n_i}$, $\phi_i : R^{n_{i-1}} \to R^{n_i}$, $\tau_0(x_{-1}) = 0$.

Такі системи розглядаються в математичній теорії оптимального керування і мають різні назви: задача оптимізації зі зміною фазового простору - В.Г. Болтянский [8], І.С. Максимова, В.М. Розова [9], ступеневі системи - В.О. Мєдвєдев, В.М. Розова [10], В.М. Розова [11], Г.К. Захаров [12], Ш.Ф. Магеррамов, К.Б. Мансімов [13], системи зі змінною структурою - М.С. Нікольский [14, 15], Т.А. Тадумадзе, Н.М. Авалішвілі [16], Г.Л. Харатішвілі [17], з поетапно змінною динамікою - В.Р. Барсегян [18], Є.Л. Єрьомін [19], складені системи - В.В. Веліченко, Л.Т. Ащепков [20], системи змінної розмірності - О.Д. Кічмаренко, А.А. Плотніков [21, 22]. У роботах В.Г. Гребеннікова [23], О.М. Кирилова [24], Є.Л. Єрьоміна [19] розглянуто застосування даних систем в економіці, екології, робототехніці, авіабудуванні, електроенергетиці, технічних і хімічних системах тощо. Також до таких систем зводяться керовані процеси виникнення і розвитку об'єктів, диференційованих по моменту створення О.В.Романенко, О.В. Федосеєв [25], керовані гібридні системи P.I. Barton, Ch.K. Lee [26], W.M. Haddad, V.S. Chellaboina, S.G. Nersesov [27].

Зрозуміло, що замість розгляду систем (3),(4) та (5),(6) можна розглядати наступні системи зі змінною розмірністю диференціальних включень

$$\dot{x}_i \in F_i(t, x_i),\ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),\ i = 0, ..., m, \tag{7}$$

$$x_0(0) = \overline{x_0},\ x_i(\tau_i) = \phi_i(x_{i-1}(\tau_i - 0)),\ i = 1, ..., m, \tag{8}$$

та

$$\dot{x}_i \in F_i(t, x_i),\ t \in [\tau_i(x_{i-1}), \tau_{i+1}(x_i)),\ i = 0, 1, ..., \tag{9}$$

$$x_0(0) = \overline{x_0},\ x_i(\tau_i) = \phi_i(x_{i-1}(\tau_i - 0)),\ i = 1, 2, ..., \tag{10}$$

де $F_i(t, x_i) \equiv \{f_i(t, x_i, u_i) \, : \, u_i \in U_i\}$. Систему (7),(8) було розглянуто в роботах [28, 29].

Далі зробимо деякі припущення та введемо необхідні означення, що дасть можливість розглянути новий тип диференціальних включень - диференціальне включення зі змінною розмірністю, яке узагальнює звичайні диференціальні включеня та систему зі змінною розмірністю диференціальних включень (7),(8).

Основні результати. Нехай $\theta > 0$ є довільне дійсне число. Позначимо через Σ_θ множину функцій $n(\cdot) : R_+ \to N$, які відповідають наступним умовам:

1) $n(\cdot)$ – кусково-сталі і кусково-неперервні справа;

2) якщо $n(t-0) - n(t) \neq 0$, то $n(\tau) - n(t) = 0$ для всіх $\tau \in [t,\ t+\theta]$.

Візьмемо довільну функцію $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$.

Очевидна справедливість наступної леми.

Лема 1. *Для будь якої функції $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ піввісь R_+ можна розбити не більше ніж на злічену кількість множин $I_i = [t_i, t_{i+1}),\ i = 0, 1, ...$ таких, що $R_+ = \bigcup_i I_i$ та $I_i \bigcap I_j = \emptyset$, якщо $i \neq j$, де $n(t) - n(t_i) = 0$ для всіх $t \in I_i$.*

Візьмемо довільну функцію $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$. Позначимо через Φ_n множину функцій $\phi(t, x)$, які відповідають функції $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ та таких, що

$$\phi(t, x) = \begin{cases} x, & n(t-0) = n(t), \\ \psi_t(x), & n(t-0) \neq n(t), \end{cases}$$

де $\psi_t : R^{n(t-0)} \to R^{n(t)}$ - неперервна функція.

Наприклад, $\psi_t(x) = M(n(t))x$, де $M(n(t)) = (m_{ij})_{i=1,j=1}^{n(t),n(t-0)}$ матриця розмірності $n(t) \times n(t-0)$, яка належить деякій множині $M = \{(m_{ij})_{i=1,j=1}^{k,l}\}_{k=1,l=1}^{\infty,\infty}$ матриць розмірностей $(k \times l),\ k = 1, 2, ...,\ l = 1, 2, ...$

Візьмемо довільну функцію $\phi(\cdot, \cdot) \in \Phi_n$.

Означення 1. *Функцію $x(\cdot, n, \phi)$ будемо називати функцією зі змінною розмірністю, якщо $x(t, n, \phi) \in R^{n(t)}$ для всіх $t \geq 0$ та $x(t, n, \phi) = \phi(t, x(t-0, n, \phi)$ для всіх $t > 0$.*

Означення 2. *Функція $x(\cdot, n, \phi)$ зі змінною розмірністю називається кусково-неперервною на інтервалі $(t', t'') \subset R_+$, якщо вона неперервна в точках $t \in (t', t'')$, де $n(t) - n(t-0) = 0$ та неперервна справа в точках $t \in (t', t'')$, де $n(t) - n(t-0) \neq 0$.*

Зауваження 1. *Аналогічно можна ввести означення вимірності, диференційованості, інтегрованості та ліпшицевості функції $x(\cdot, n, \phi)$.*

Означення 3. *Множинно-значне відображення $F(\cdot, n)$ будемо називати відображенням зі змінною розмірністю, якщо має місце наступне включення $F(t, n) \subset R^{n(t)}$ для всіх $t \in R_+$.*

Означення 4. *Множинно-значне відображення $F(\cdot, n)$ зі змінною розмірністю називається кусково-неперервним на інтервалі $(t', t'') \subset R_+$, якщо воно неперервне в точках $t \in (t', t'')$, де $n(t) - n(t-0) = 0$, та неперервне справа в точках $t \in (t', t'')$, де $n(t) - n(t-0) \neq 0$.*

Тепер розглянемо наступне диференціальне включення зі змінною розмірністю

$$\dot{x} \in F(t, x, n),\ x(0, n, \phi) = x_0, \tag{11}$$

де $t \in R_+$ – час; $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$; $\phi(\cdot, \cdot) \in \Phi_n$; $x(t, n, \phi)$ - фазовий вектор; $F(t, x, n) : R_+ \times R^{n(t)} \to conv(R^{n(t)})$ - множинно-значне відображення зі змінною розмірністю, $x_0 \in R^{n(0)}$.

Зауваження 2. *Якщо $n(t) \equiv n$, то система (11) буде звичайним диференціальним включенням.*

Припущення 1.*Нехай функція $n(\cdot)$ обмежена сталою $\overline{n} > 0$ для всіх $t \geq 0$.*

Зауваження 3. *Припущення 1 не дає зростання розмірності на нескінченності до нескінченності (ця умова може бути не обов'язковою, якщо система (11) розглядається на скінченному проміжку.)*

Позначимо через $Q_i = \{\, (t, x)\ :\ t \in I_i,\, x \in R^{n(t)}\}$, де $I_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ відповідають лемі 1.

Означення 5. *Кусково-неперервна функція $x(\cdot, n, \phi)$ називається розв'язком системи (11) на відрізку $[0, T]$, якщо*

1) $\dot{x}(t, n, \phi) \in F(t, x(t, n, \phi), n)$ для майже всіх $t \in (0, T)$,

2) $x(0, n, \phi) = x_0$;

3) $x(t, n, \phi) = \phi(t, x(t-0, n, \phi))$ для всіх $t \in (0, T]$.

Теорема 1. *[30] Якщо для $\theta > 0$ відображення $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$, $\phi(\cdot) \in \Phi_n$ та виконуються умови:*

a) $F(\cdot, x, n)$ - кусково-неперервне по t на R_+;

b) $F(t, \cdot, n)$ - ліпшицеве зі сталою L по x на Q_i, $i = 0, 1, ...$;

c) існує така стала $K > 0$, що $h_{n(t)}(F(t, x, n), \{0\}_{n(t)}) \leq K$ для всіх $(t, x) \in Q_i$, $i = 0, 1, ...$, де $h_{n(t)}(A, B)$ – метріка Хаусдорфа у просторі $comp(R^{n(t)})$.

Тоді на деякому проміжку $[0, T]$ система (11) має розв'язок $x(\cdot, n, \phi)$.

Зауваження 4. *Очевидно, якщо на кожному проміжку $I_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, m}$, виконується умова $F(t, x, n) \equiv F_i(t, x)$, то розв'язок системи (11) на проміжку $[0, T]$ буде розв'язоком системи (7),(8) на проміжку $[0, T]$ та навпаки.*

Позначимо через $X(t, n, \phi)$ переріз множини розв'язків системи (11) в момент часу $t \geq 0$.

Теорема 2. *[30] Якщо для $\theta > 0$ і відображення $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$, $\phi(\cdot) \in \Phi_n$ та*

a) $F(\cdot, x, n)$ - кусково-неперервне по t на $[0, T]$;

b) $F(t, \cdot, n)$ - ліпшицеве зі сталою L по x на Q_i, $i = 0, 1, ..., m$;

c) існує така стала $K > 0$, що $h_{n(t)}(F(t, x, n), \{0\}_{n(t)}) \leq K$ для всіх $(t, x) \in Q_i$, $i = 0, 1, ..., m$.

Тоді $X(t, n, \phi) \in comp(R^{n(t)})$ для всіх $t \in [0, T]$, де m таке, що $\bigcup\limits_{i=0}^{m} I_i = [0, T]$.

Тепер сформулюємо і доведемо аналог теореми О.Ф. Філіппова.

Теорема 3. *Якщо для $\theta > 0$ і відображення $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$, $\phi(\cdot) \in \Phi_n$ та*

a) $F(\cdot, x, n)$ - кусково-неперервне по t на $[0, T]$;

b) $F(t, \cdot, n)$ - ліпшицеве зі сталою L по x на Q_i, $i = 0, 1, ..., m$;

c) існує така стала $K > 0$, що $h_{n(t)}(F(t, x, n), \{0\}_{n(t)}) \leq K$ для всіх $(t, x) \in Q_i$, $i = 0, 1, ..., m$.

d) існує стала $\mu > 0$ така, що для всіх τ_i та будь яких $x_1, x_2 \in Q_{i-1}$

$$\|\phi(\tau_i, x_1) - \phi(\tau_i, x_2)\|_{R^{n(\tau_i)}} \leq \mu \|x_1 - x_2\|_{R^{n(\tau_i - 0)}};$$

e) $y(\cdot, n, \phi)$ - кусково-неперервна функція на $[0, T]$ така, що

$$dist_{n(t)}(\dot{y}(t, n, \phi), F(t, y(t, n, \phi), n)) \leq \rho(t)$$

майже для всіх $t \in [0, T]$, де $\rho(\cdot)$ – сумовна функція на $[0, T]$, $dist_{n(t)}(a, B) = \min\limits_{b \in B} \|a - b\|_{R^{n(t)}}$, $a \in R^{n(t)}$, $B \in conv(R^{n(t)})$, $\|a - b\|_{R^{n(t)}}$ – евклідова метрика у просторі $R^{n(t)}$;

f) $\|y(0, n, \phi) - x_0\|_{R^{n(0)}} \leq \delta$.

Тоді існує розв'язок системи (11) такий, що

$$\|x(t, n, \phi) - y(t, n, \phi)\|_{R^{n(t)}} \leq \lambda(t) \delta e^{Lt} + \lambda(t) e(t) \int_0^t e^{L(t-s)} \rho(s) ds,$$

де $\lambda(t) = \begin{cases} 1, & \mu \in (0, 1] \\ \mu^{i(t)}, & \mu > 1 \end{cases}$, $e(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau_1] \\ e^{L(t-\tau_1)}, & t \in (\tau_1, T] \end{cases}$, *$i(t)$ - кількість точок τ_i на проміжку $[0, t]$.*

Доведення. Згідно теореми 1 розв'язок системи (11) існує на деякому проміжку $[0, T]$. Тоді згідно леми 1 існує деяке $m \geq 0$ та $I_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, m}$, які задовольняють умовам леми 1. Тоді згідно теореми О.Ф. Філіппова [5–7] на кожному проміжку $I_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, m}$ маємо

$$\|x(t, n, \phi) - y(t, n, \phi)\|_{R^{n(\tau_i)}} \leq$$

$$\leq \|x(\tau_i, n, \phi) - y(\tau_i, n, \phi)\|_{R^{n(\tau_i)}} e^{L(t-\tau_i)} + \int_{\tau_i}^t e^{L(t-s)} \rho(s) ds,$$

для всіх $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$.

Оцінимо $\|x(\tau_1, n, \phi) - y(\tau_1, n, \phi)\|_{R^{n(\tau_1)}}$.

Оскільки для всіх $t \in [0, \tau_1)$

$$\|x(t, n, \phi) - y(t, n, \phi)\|_{R^{n(0)}} \leq \delta e^{Lt} + \int_0^t e^{L(t-s)} \rho(s) ds,$$

то

$$\|x(\tau_1, n, \phi) - y(\tau_1, n, \phi)\|_{R^{n(\tau_1)}} =$$

$$= \|\phi(\tau_1, x(\tau_1 - 0, n, \phi)) - \phi(\tau_1, y(\tau_1 - 0, n, \phi))\|_{R^{n(\tau_1)}} \leq$$

$$\leq \mu \left\| x(\tau_1 - 0, n, \phi) - y(\tau_1 - 0, n, \phi) \right\|_{R^{n(0)}} \leq \delta e^{L\tau_1} + \int_0^{\tau_1} e^{L(\tau_1 - s)} \rho(s) ds.$$

Тоді для всіх $t \in [\tau_1, \tau_2)$ маємо:

$$\| x(t, n, \phi) - y(t, n, \phi) \|_{R^{n(\tau_1)}} \leq$$

$$\leq \mu \delta e^{L\tau_1} e^{L(t-\tau_1)} + \mu e^{L(t-\tau_1)} \int_0^{\tau_1} e^{L(\tau_1 - s)} \rho(s) ds + \int_{\tau_1}^{t} e^{L(t-s)} \rho(s) ds \leq$$

$$\leq \lambda(t) \delta e^{Lt} + \lambda(t) e^{L(t-\tau_1)} \left(\int_0^{\tau_1} e^{L(\tau_1 - s)} \rho(s) ds + \int_{\tau_1}^{t} e^{L(t-s)} \rho(s) ds \right) =$$

$$= \lambda(t) \delta e^{Lt} + \lambda(t) e^{L(t-\tau_1)} \int_0^{t} e^{L(t-s)} \rho(s) ds.$$

Отже, для $t = \tau_2$ отримаємо

$$\| x(\tau_2, n, \phi) - y(\tau_2, n, \phi) \|_{R^{n(\tau_2)}} =$$

$$= \| \phi(\tau_2, x(\tau_2 - 0, n, \phi)) - \phi(\tau_2, y(\tau_2 - 0, n, \phi)) \|_{R^{n(\tau_2)}} \leq$$

$$\leq \mu \| x(\tau_2 - 0, n, \phi) - y(\tau_2 - 0, n, \phi) \|_{R^{n(\tau_1)}} \leq$$

$$\leq \mu \lambda(\tau_1) \delta e^{L\tau_2} + \mu \lambda(\tau_1) e^{L(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^{\tau_2} e^{L(\tau_2 - s)} \rho(s) ds \leq$$

$$\leq \lambda(\tau_2) \delta e^{L\tau_2} + \lambda(\tau_2) e^{L(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^{\tau_2} e^{L(\tau_2 - s)} \rho(s) ds.$$

Тоді для всіх $t \in [\tau_2, \tau_3)$ маємо:

$$\| x(t, n, \phi) - y(t, n, \phi) \|_{R^{n(\tau_2)}} \leq$$

$$\leq \lambda(t) \delta e^{L\tau_2} e^{L(t-\tau_2)} + \lambda(t) e^{L(t-\tau_2)} e^{L(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^{\tau_2} e^{L(\tau_2 - s)} \rho(s) ds + \int_{\tau_2}^{t} e^{L(t-s)} \rho(s) ds \leq$$

$$= \lambda(t) \delta e^{Lt} + \lambda(t) e^{L(t-\tau_1)} \int_0^{t} e^{L(t-s)} \rho(s) ds.$$

Далі, використовуючи метод математичної індукції, одержимо, що для всіх $t \in [0, T]$:

$$\| x(t, n, \phi) - y(t, n, \phi) \|_{R^{n(t)}} \leq \lambda(t) \delta e^{Lt} + \lambda(t) e(t) \int_0^{t} e^{L(t-s)} \rho(s) ds.$$

Теорему доведено.

Зауваження 5. *Якщо на проміжку $[0, T]$ система (11) має постійну розмірність, то $\lambda(t) = e(t) = 1$ і таким чином отримаємо оцінку з теореми О.Ф. Філіппова для звичайних диференціальних включень.*

Висновки. В статті введено диференціальне включення зі змінною розмірністю, яке узагальнює систему зі змінною розмірністю диференціальних включень (7),(8) та звичайне диференціальне включення. Дано означення розв'язку та наведено їх основні властивості: умови існування розв'язку, компактність та опуклість перерізу множини розв'язків, а також доведено аналог теореми О. Ф. Філіппова.

1. **Wazewski T.** Systemes de comande et equations au contingent / T. Wazewski // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math., astron. et phys. – 1961. – Vol.9, № 3. – P. 151 – 155.
2. **Wazewski T.** Sur une condition equvalente l'equation an contingent / T. Wazewski // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser.sci. math., astr. et phys. – 1961. – Vol.9, № 12. – P. 865 – 867.
3. **Филиппов А.Ф.** О некоторых вопросах теории оптимального регулирования / А. Ф. Филиппов // Вестник МГУ, сер. Матем., мех. – 1959. – №2. – С. 25–32.
4. **Гелиг А.Х.** Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия / А.Х. Гелиг, Г.А. Леонов, В.А. Якубович // М.: Наука. – 1978. – 400 с.
5. **Aubin J.-P.** Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory / J.-P. Aubin, A. Cellina // Berlin: Springer-Verlag. – 1984 – 341 p.
6. **Плотников В.А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В.А. Плотников, А.В. Плотников, А.Н. Витюк // Одесса: Астропринт. – 1999. – 356 с.
7. **Половинкин Е. С.** Многозначный анализ и дифференциальные включения / Е.С. Половинкин // М.: Физматлит. – 2014. – 597 с.
8. **Болтянский В. Г.** Задача оптимизации со сменой фазового пространства / В. Г. Болтянский // Дифференц. уравн. – 1983. – Т. 19, №3. – С. 519–521.
9. **Максимова И. С.** Условия управляемости в задаче со сменой фазового пространства / И. С. Максимова, В. Н. Розова // Вестник ТГУ. – 2011. – Т. 16, вып. 4. – С. 1118–1119.
10. **Медведев В. А.** Оптимальное управление ступенчатыми системами / В. А. Медведев, В. Н. Розова // Автоматика и телемеханика. – 1972. – Т.3. – С. 15-23.
11. **Розова В. Н.** Оптимальное управление ступенчатыми системами / В. Н. Розова // Вестник Российского Университета Дружбы Народов. Серия: Физико-Математические Науки. – 2006. – №1. – С. 27–32.
12. **Захаров Г. К.** Оптимизация ступенчатых систем управления / Г. К. Захаров // Автоматика и телемехан. – 1981. – № 8. – С. 5–9.
13. **Магеррамов Ш. Ф.** Оптимизация одного класса дискретных ступенчатых систем управления / Ш. Ф. Магеррамов, К. Б. Мансимов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2001. – Т. 41, № 3. – С. 360–366.
14. **Никольский М. С.** Линейные дифференциальные игры с переменной структурой / М. С. Никольский // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 276, № 4. – С. 791–794.
15. **Никольский М. С.** Об одной вариационной задаче с переменной структурой / М. С. Никольский // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. – 1987. – № 1. – С. 36–41.
16. **Тадумадзе Т. А.** Регулярные возмущения в оптимальных задачах с переменной структурой / Т. А. Тадумадзе, Н. М. Авалишвили // Оптимальные задачи в системах с переменной структурой. – 1985. – Тбилиси. – С. 100–154.
17. **Харатишвили Г. Л.** Полиатомические оптимальные системы / Г. Л. Харатишвили // Оптимальные задачи в системах с переменной структурой. Тбилиси. – 1985. – С. 3–47.
18. **Барсегян В. Р.** О задаче оптимального управления поэтапно меняющимися линейными системами с фазовыми ограничениями в промежуточные моменты времени / В. Р. Барсегян // Ученые записки ЕГУ. – 2002. – №1. – С.118–119.

19. **Еремин Е. Л.** Адаптивное управление динамическим объектом на множестве состояний функционирования / Е. Л. Еремин // Адаптивное и робастное управление. – 2012. – №4(34). – С. 107–118.
20. **Ащепков Л. Т.** Оптимальное управление. Курс лекций / Л. Т. Ащепков, В. В. Величенко // Владивосток: Изд-во Дальневост. Ун-та. – 1989. – 116 с.
21. **Кічмаренко О.Д.** Системи лінійних керованих диференційних рівнянь зі змінною розмірністю / О.Д. Кічмаренко, А.А. Плотніков // Дослідження в математиці і механіці. - 2018. - Т. 23. - N 1(31) - С. 52–67.
22. **Kichmarenko O. D.** The Averaging of Control Linear Differential Equations with Variable Dimension on Finite Interval / O. D. Kichmarenko, A. A. Plotnikov // International Journal of Sensing, Computing and Control. – 2015. – Vol. 5, №1. – P. 25–35.
23. **Гребенников В. Г.** Оптимальный выбор траектории развития и принцип непрерывности планирования / В. Г. Гребенников // В сб.: Методологические проблемы анализа долгосрочных социально-экономических процессов. Труды ВНИИСИ. – 1979. – вып. 9. – С. 3–15.
24. **Кириллов А. Н.** Метод динамической декомпозиции в моделировании систем управления со структурными изменениями / А. Н. Кириллов // Моделирование систем и процессов. – 2009. – № 1. – С. 20–24.
25. **Романенко А. В.** Оптимальное управление экономическими системами с возрастной структурой / А. В. Романенко, А. В. Федосеев // Журнал вычислит. мат. и матем. физики. – 1993. – Т.33, №8. – С. 1155–1165.
26. **Barton P. I.** Modeling, simulation, sensitivity analysis, and optimization of hybrid systems / P. I. Barton, Ch. K. Lee // ACM Trans. on Model. and Comput. Simul. – 2002. – Vol. 12, №4. – P. 256–289.
27. **Haddad W. M.** Impulsive and hybrid dynamical systems / W. M. Haddad, V. S. Chellaboina, S. G. Nersesov // Princeton: Princeton University Press. – 2008.
28. **Плотников А. А.** Пошаговое усреднение линейных дифференциальных включений переменной размерности на конечном интервале / А. А. Плотников // Нелінійні коливання. – 2017. – Т. 20, №2. – С. 211–227.
29. **Kichmarenko O. D.** The Averaging of Linear Differential Inclusions with Variable Dimension on Finite Interval /O. D. Kichmarenko, A. A. Plotnikov // International Journal of Nonlinear Science. – 2015. – Vol. 20, №2. – P. 67–78.
30. **Кичмаренко О. Д.** Нелинейные дифференциальные включения с переменной размерностью / О.Д. Кичмаренко, А.А. Плотников // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2013. – Т.18, вип. 2(18). – С. 29–34

Плотников А. А.
Обобщение теоремы А. Ф. Филиппова

Резюме

В статье введено понятие дифференциального включения с переменной размерностью, которое обобщает обычное дифференциальное включение и систему с переменной размерностью дифференциальных включений и обоснована возможность их использования при исследовании систем управления с переменной размерностью. Системы управления с переменной размерностью это системы управления несколькими объектами с последовательным во времени режимом их работы. Исходное состояние каждого следующего объекта зависит от конечного состояния предыдущего объекта, что объединяет их в единую систему переменного размерности. Предполагается, что каждый объект описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений на интервале его действия. При этом длины интервалов заданные или неизвестны. Системы уравнений могут иметь неодинаковую размерность, могут также меняться размерность управляющей функции и ограничения на ее значение. В работе дано определение развязку такого дифференциального включения и приведены их основные свойства: условия существования решения, компактность и выпуклость сечения множества решений, а также сформулированы и доказано аналог теоремы А. Ф. Филиппова.
Ключевые слова: дифференциальное включение, существование, решение, переменная размерность, управление .

Plotnikov A. A.
Generalization of Filippov's theorem

Summary

The article introduces the concept of differential inclusion with variable dimension, that generalizes the ordinary differential inclusion and system with variable dimension of differential inclusions, and the possibility of its use in the study of variable-dimensional control systems is substantiated. Variable dimensional control systems are the systems for managing of multiple objects with a consistent mode of operation. The initial state of each next object depends on the final state of the previous object, that unites them into a single system of variable dimension. It is assumed that each object is described by a system of ordinary differential equations on the interval of its action. At the same time, intervals are given or unknown. Equation systems may have different dimensions, and the dimension of the control function and the limit on its value may also change. In the paper, the definition of the solution of such differential inclusion and its main properties (the conditions for the existence of the solution, the compactness and convexity of the section of the set of solutions) are given, and also an analogue of Filippov's theorem is proved.
Key words: differential inclusion, existence, solution, variable dimension, control.

References

1. Wazewski, T. (1961). Systemes de comande et equations au contingent. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math., astron. et phys.*, Vol.9, № 3. – P. 151 – 155.
2. Wazewski, T. (1961). Sur une condition equvalente l'equation an contingent. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser.sci. math., astr. et phys.*, Vol.9, № 12. – P. 865 – 867.
3. Filippov, A. F. (1959). Nekotorie voprosi teorii optimal'nogo regulirovaniya [On some questions in the theory of optimal regulation]. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat. Meh. Astr. Fiz. Him.*, №2. – P. 25–32.

4. Gelig, A. H., Leonov, G. A., Jakubovic, V. A. (1978). *Ustoichivost' nelineinih sistem s needinstvennim sostoyaniem ravnovesiya [The stability of nonlinear systems with a nonunique equilibrium state]*, Nauka, Moscow, – 400 p.
5. Aubin, J.-P. (1984). *Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory.* Berlin: Springer-Verlag. – 341 p.
6. Plotnikov, V. A., Plotnikov, A. V., Vityuk, A. N. (1999). *Differentsial'nyye uravneniya s mnogoznachnoy pravoy chast'yu: Asimptoticheskiye metody [Differential equations with a multivalued right-hand side: Asymptotic methods].* AstroPrint, Odessa. – 356 p.
7. Polovinkin, E. S. (2014). Mnogoznachnyy analiz i differentsial'nyye vklyucheniya [Multivalued analysis and differential inclusions]. Fizmatlit, Moscow . – 597 p.
8. Boltyanskii, V. G. (1983). Zadacha optimizacii so smenoi fazovogo prostranstva [The problem of optimization with change of phase space]. *Differentsial'nye Uravneniya*, Vol. 19 , №3. – P. 518–521.
9. Maksimova, I. S., Rozova, V. N. (2011). Uslobiya upravlyaemosti v zadache so smenoi fazovogo prostranstva [Controllability conditions in the problem with the change of phase space]. *Vestnik TGU*, Vol. 16, №4. – P. 1118–1119.
10. Medvedev, V. A., Rozova, V. N. (1972). Optimal'noe upravlenie stypenchatimi sistemami [Optimal control step system]. *Avtomatika i telemehanika*, Vol. 3. – P. 15–23.
11. Rozova, V. N. (1972). Optimal'noe upravlenie stypenchatimi sistemami [Optimal control step system]. Vestnik Rossiiskogo Universiteta Druzhbi Narodov. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki, №1. – P. 27–32.
12. Zakharov, G. K. (1981). Optimizaciya stupenchatih sistem upravleniya [Optimization of step control systems]. *Avtomatika i telemehanika*, Vol. 8. – P. 5–9.
13. Magerramov, Sh. F., Mansimov, K. B. (2001). Optimization of a class of discrete step control systems. *Comput. Math. Math. Phys.*, Vol. 41 , №3. – P. 334–339.
14. Nikol'skii, M. S. (1984). Lineinie differencial'nie igri s peremenoi strukturoi [Linear differential games with variable structure]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 276, №4. – P. 791–794.
15. Nikol'skii, M. S. (1987). Ob odnoi variacionnoi zadache s peremennoi strukturoi [A variational problem with a variable structure]. *Vestnik Moskov. Univ.*, Ser. XV Vychisl. Mat. Kibernet., №1. – P. 36–41.
16. Tadumadze, T. A., Avalishvili, N. M. (1985). Regulyarnie vozmuscheniya v optimal'nih zadachah s peremennoi strukturoi [Regular perturbations in optimal problems with variable structure]. *Optimal control in systems with variable structure.* – P. 100–154.
17. Haratishvili, G. L. (1985). Poliatomicheskie optimal'nie sistemi [Polyatomic optimal systems]. *Optimal control in systems with variable structure.* – P. 3–47.
18. Barsegyan, V. R. (2002). O zadache optimal'nogo upravleniya poetapno menyayuschimisya lineinimi sistemami s fazovimi ogranicheniyami v promezhutochnie momenti vremeni [On the problem of optimal control of gradually varying linear systems with phase constraints at intermediate instants of time]. *Uchenie zapiski EGU*, №1. – P. 118–119.
19. Eremin, E. L. (2012). Adaptivnoe upravlenie dinamicheskim ob'ektom na mnozhestve sostoyanii funkcionirovaniya [Adaptive control of a dynamic object in the set operation states]. *Adaptive and robust control*, №4(34). – P. 107–118.
20. Aschepkov, L. T., Velichenko, V. V. (1989). *Optimal'noe upravlenie. Kurs lekcii [Optimal control. Lecture course].* Vladivostok: Izdat. Dal'nevostochnogo universiteta, 116 p.

21. Kichmarenko, O. D., Plotnikov, A. A. (2018). Systemy liniynykh kerovanykh dyferentsial'nykh rivnyan' zi zminnoyu rozmirnistyu [Systems of linear controlled differential equations with variable dimension]. *Visnik Od. nac. un-tu. Mat. i mekh.*, Vol. 23, №1(31) – P. 52–67.

22. Kichmarenko, O. D., Plotnikov, A. A. (2015). The Averaging of Control Linear Differential Equations with Variable Dimension on Finite Interval. *International Journal of Sensing, Computing and Control*, Vol. 5, №1. – P. 25–35.

23. Grebennikov, V. G. (1979). Optimal'nii vibor traektorii razvitiya i princip neprerivnosti planirovaniya [Optimal choice of the development trajectory and the principle of continuity of planning]. *In: Methodological problems of analysis of long-term socio-economic processes. Proceedings of VNIISI*, №9. – P. 3–15.

24. Kirilov, A. N. (2009). Metod dinamicheskoi dekompozicii v modelirovanii sistem upravleniya so strukturnimi szmeneniyami [The method of dynamic decomposition in the modeling of control systems with structural changes]. *Modeling of systems and processes*, № 1. – P. 20–24.

25. Romanenko, A. V., Fedoseev, A. V. (1993). Optimal'noe upravlenie ekonomicheskimi sistemami [Optimum management of economic systems with age structure]. *Zhurnal computes. mat. i math. physics*, Vol.33, №8. – P. 1155–1165.

26. Barton, P. I., Lee, Ch.K. (2002). Modeling, simulation, sensitivity analysis, and optimization of hybrid systems. *ACM Trans. on Model. and Comput. Simul.*, Vol. 12, №4. – P. 256–289.

27. Haddad, W. M., Nersesov, S.G. (2008). *Impulsive and hybrid dynamical systems*. Princeton: Princeton University Press.

28. Plotnikov, A.A. (2018). Step-By-Step Averaging of Linear Differential Inclusions of Variable Dimension on a Finite Interval. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 231, № 6. – P. 760–779.

29. Kichmarenko, O.D., Plotnikov, A.A. (2015). The Averaging of Linear Differential Inclusions with Variable Dimension on Finite Interval. *International Journal of Nonlinear Science*, Vol. 20, №2. – P. 67–78.

30. Kichmarenko, O. D., Plotnikov, A. A. (2013). Nelineinie differencial'nie vklucheniya s peremennoi razmernost'yu [Nonlinear differential inclusions with variable dimension], *Visnik Od. nac. un-tu. Mat. i mekh.*, Vol. 18, №2(18). – P. 29–34.

Дослідження в математиці і механіці. – 2019. – Т. 24, вип. 1(33). – С. 53–58

УДК 517.5

Р. В. Шанин
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОБРАТНОЕ НЕРАВЕНСТВО ГЕЛЬДЕРА

Пусть $r \neq 0$ и E измеримое множество, $|E| > 0$. Для неотрицательной функции $f \in L^r(E)$ средним порядка r называется величина $M_r(f, E) := (|E|^{-1} \int_E f^r(x)\,dx)^{1/r}$. В работе изучается класс $RH'_{1,2,1}(R_0)$ функций f, удовлетворяющих обратному неравенству Гельдера, $\langle f\rangle = \sup_{R \subset R_0}[M_2(f,R) - M(f,R)] < +\infty$. Получена оценка скорости убывания равноизмеримых перестановок функций из этого класса и построен пример, показывающий, что полученная оценка асимптотически точная. Этот результат является аналогом хорошо известной теоремы Джона–Ниренберга о пространствах BMO. Также получены оценки равноизмеримых перестановок функций из $RH'_{1,2,1}$ с заданной скорость убывания к нулю разности средних.
MSC: 42B35, 46E30.
Ключевые слова: обратное неравенство Гельдера, равноизмермая перестановка функции.
DOI: 10.18524/2519–206x.2019.1(33).175545.

Введение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ — произвольное измеримое множество, $0 < |E| < +\infty$, и пусть $r \neq 0$. Напомним, что для неотрицательной функции f число

$$M_r(f, E) := \left(\frac{1}{|E|}\int_E f^r(x)\,dx\right)^{1/r}$$

называется средним r-ого порядка функции f на множестве E. Если $r = 1$, то индекс будем опускать. Соотношение между степенными средними

$$M_r(f, E) \leq M_s(f, E),$$

где $r < s$, $rs \neq 0$, является простым следствием неравенства Гельдера и справедливо для всех функций. Обратные к нему, в том или ином смысле, соотношения возникают в разных разделах анализа. Так, при исследовании весовых пространств, как правило, возникают так называемые классы весовых функций Макенхаупта [4], а в теории квазиконформных отображений — классы Геринга [1].

Пусть зафиксирован сегмент $R_0 = [a_1, b_1; \ldots; a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$. Следуя обозначениям работы [5], для $r < s$, $rs \neq 0$, обозначим через $RH'_{r,s,k}(R_0)$ класс всех функций $f \in (L^s \cap L^r)(R_0)$, удовлетворяющих обратному неравенству Гельдера

$$\langle f\rangle = \langle f\rangle_{RH'_{r,s,k}(R_0)} := \sup_{R \subset R_0} \operatorname{sign} k \cdot [M_s^k(f,R) - M_r^k(f,R)] < +\infty,$$

где верхняя грань берется по всем сегментам $R \subset R_0$, а в случае $k < 0$ по таким сегментам, для которых $M_r(f,R) \neq 0$. Класс $RH'_{1,2,2}$ совпадает с подмножеством неотрицательных функций из пространства BMO функций с ограниченным средним колебанием впервые введенных в работе [3]. В работах [5, 6] были

Получена 10.06.2019

получены оценки равноизмеримых перестановок функций из классов $RH'_{r,s,k}$. Подобного сорта оценки играют важную роль при изучении различных функциональных пространств. В частности, в этой работе мы получаем основной результат благодаря полученным ранее оценкам перестановок.

В данной работе получена оценка скорости убывания равноизмеримых перестановок функций для класса $RH'_{1,2,1}$ (следствие 2) и изучены свойства функций, разности средних которых при стремлении к 0 мер сегментов убывают из заданной скоростью (теорема 2 и следствие 1).

Основные результаты

1. Определения и вспомогательные результаты. Для функции $f \in L^2(R_0)$ обозначим

$$\nu_f(t) := \sup_{|R|\le t} \big(M_2(f,R) - M(f,R)\big)^{1/2},$$

где верхняя грань берется по всем сегментам $R \subseteq R_0$ с мерой $|R| \le t$.

Пусть $r \neq 0$. Для функции $\varphi \in L^r([\alpha,\beta])$ обозначим $M_r\varphi(t) := M_r(\varphi,[\alpha,t])$, где $t \in (\alpha,\beta]$ и для функции $\varphi \in L^2([\alpha,\beta])$ обозначим

$$\bar{\nu}_\varphi(t) := \sup_{\tau\in[\alpha,t]} \big(M_2 f(\tau) - M f(\tau)\big)^{1/2}, \quad t \in (\alpha,\beta].$$

Легко видеть, что функции ν и $\bar{\nu}$ не убывают и, если ν ограничена, то функция $f \in RH'_{1,2,1}(R_0)$.

Напомним определение равноизмеримой перестановки функции (см., например, [2, с. 276]). Равноизмеримой невозрастающей непрерывной справа перестановкой функции f, измеримой на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{R}^d$ называется

$$f^*(t) := \sup\{y > 0 \colon |\{x \in E \colon |f(x)| > y\}| > t\}, \quad 0 < t < |E|.$$

Следующая лемма— это переформулированная в частном случае лемма 8 из [6].

Лемма 1. [6] *Пусть сегмент $R_0 \subset \mathbb{R}^d$, функция $f \in L^2(R_0)$. Тогда для любого интервала $J = (0,\delta) \subseteq (0,|R_0|)$ найдется такой набор дизъюнктивных сегментов $R_n \subset R_0$, $n \ge 1$, что $|R_n| \le \delta$ и $M(f,R_n) = M(f^*,J)$ для всех $n \ge 1$ и*

$$M_2(f^*,J) \le \sup_{n\ge1} M_2(f,R_n).$$

Из этой леммы вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть сегмент $R_0 \subset \mathbb{R}^d$, функция $f \in L^2(R_0)$. Тогда*

$$\bar{\nu}_{f^*}(t) \le \nu_f(t), \quad t \in (0,|R_0|]$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\nu(f,t) < \infty$. Зафиксируем произвольное τ, $0 < \tau \le t$. Тогда, по лемме 1, для интервала $J = (0,\tau) \subseteq$

$(0,|R_0|)$ найдется такой набор дизъюнктивных сегментов $R_n \subset R_0$, что $|R_n| \le \tau$ и $M(f,R_n) = M(f^*,J)$ для всех $n \ge 1$ и

$$\begin{aligned}M_2 f^*(\tau) - M f^*(\tau) &= M_2(f^*,J) - M(f^*,J)\\ &\le \sup_{n\ge 1}(M_2(f,R_n) - M(f,R_n)) \le \nu_f^2(t).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\bar{\nu}_{f^*}^2(t) = \sup_{\tau\in[0,t]} (M_2 f^*(\tau) - M f^*(\tau)) \le \nu_f^2(t).$$

Теорема доказана.

Следующая лемма позволяет оценивать скорость изменения $M\varphi(t)$ для невозрастающей функции. На применении этой леммы базируется доказательство основного результата этой работы.

Лемма 2. *Пусть невозрастающая функция $\varphi \in L([0,\beta])$ и пусть $a > 1$. Тогда*

$$0 \le M\varphi(t/a) - M\varphi(t) \le \frac{a}{2}\big(M_2^2\varphi(t) - M^2\varphi(t)\big)^{1/2}.$$

Доказательство. Зафиксируем $t \in (0,\beta]$ и обозначим

$$a_t = \max\{x \in [0,\beta] \colon \varphi(x) > M\varphi(t)\}.$$

Тогда, применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned}M\varphi(t/a) - M\varphi(t) &= \frac{1}{t/a}\int_0^{t/a}(\varphi(x) - M\varphi(t))\,dx \le \frac{a}{t}\int_0^{a_t}(\varphi(x) - M\varphi(t))\,dx\\ &= \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{t}\int_0^t |\varphi(x) - M\varphi\,(t)\,|\,dx\\ &\le \frac{a}{2}\left(\frac{1}{t}\int_0^t(\varphi(x) - M\varphi\,(t))^2\,dx\right)^{1/2} = \frac{a}{2}\big(M_2^2\varphi(t) - M^2\varphi(t)\big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

2. Основной результат.

Теорема 2. *Пусть неотрицательная, невозрастающая функция φ задана на отрезке $[0,\beta]$. Тогда, если $\bar{\nu}_\varphi(\beta) < \infty$, то*

$$M^{1/2}\varphi(t) - M^{1/2}\varphi(\beta) \le \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}\int_t^\beta \frac{\bar{\nu}_\varphi(\tau)}{\tau}\,d\tau, \quad t \in (0,\beta/2] \tag{1}$$

и

$$M^{1/2}\varphi(t) - M^{1/2}\varphi(\beta) \le \bar{\nu}_\varphi(\beta), \quad t \in (\beta/2,\beta]. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $M^{1/2}\varphi(t) \le \bar\nu_\varphi(t)$ для некоторого $t \in (0,\beta]$. Если $t \in (0,\beta/2]$, то, учитывая, что функция $\bar\nu_\varphi(t)$ не убывает, получаем

$$\begin{aligned} M^{1/2}\varphi(t) - M^{1/2}\varphi(\beta) &\le M^{1/2}\varphi(t) \le \bar\nu_\varphi(t) \\ &\le \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}\bar\nu_\varphi(t)\int_t^\beta \frac{d\tau}{\tau} \le \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}\int_t^\beta \frac{\bar\nu_\varphi(\tau)}{\tau}d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (1) выполнено. Если $t \in (\beta/2,\beta]$, то

$$M^{1/2}\varphi(t) - M^{1/2}\varphi(\beta) \le M^{1/2}\varphi(t) \le \bar\nu_\varphi(t) \le \bar\nu_\varphi(\beta)$$

и неравенство (2) выполнено.

Пусть $M^{1/2}\varphi(t) > \bar\nu_\varphi(t)$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \big(M_2\varphi(t) + M\varphi(t)\big)^{1/2} &= \big(M_2\varphi(t) - M\varphi(t) + 2M\varphi(t)\big)^{1/2} \\ &\le \big(\bar\nu_\varphi^2(t) + 2M\varphi(t)\big)^{1/2} < \sqrt{3}M^{1/2}\varphi(t). \end{aligned}$$

Применяя лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} M^{1/2}\varphi(t/2) - M^{1/2}\varphi(t) &= \frac{M\varphi(t/2) - M\varphi(t)}{M^{1/2}\varphi(t/2) + M^{1/2}\varphi(t)} \le \frac{\big(M_2^2\varphi(t) - M^2\varphi(t)\big)^{1/2}}{M^{1/2}\varphi(t/2) + M^{1/2}\varphi(t)} \\ &= \frac{\big(M_2\varphi(t) - M\varphi(t)\big)^{1/2}\big(M_2\varphi(t) + M\varphi(t)\big)^{1/2}}{M^{1/2}\varphi(t/2) + M^{1/2}\varphi(t)} \\ &\le \frac{\big(M_2\varphi(t) + M\varphi(t)\big)^{1/2}}{M^{1/2}\varphi(t/2) + M^{1/2}\varphi(t)}\bar\nu_\varphi(t) \le \frac{\sqrt{3}}{2}\bar\nu_\varphi(t). \end{aligned}$$

Если $t \in (\beta/2,\beta]$, то, учитывая, что $M^{1/2}\varphi(t)$ не возрастает, получаем

$$M^{1/2}\varphi(t) - M^{1/2}\varphi(\beta) \le M^{1/2}\varphi(\beta/2) - M^{1/2}\varphi(\beta) \le \bar\nu_\varphi(\beta).$$

Таким образом, неравенство (2) выполнено. Пусть $t \in (0,\beta/2]$. Тогда существует такое натуральное k, что $\beta\, 2^{-k-1} \le t \le \beta\, 2^{-k}$. Следовательно, учитывая, что $M\varphi(t)$ не возрастает, мы имеем

$$\begin{aligned} M^{1/2}\varphi(t) - M^{1/2}\varphi(\beta) &\le M^{1/2}\varphi\left(\frac{\beta}{2^{k+1}}\right) - M^{1/2}\varphi(\beta) \\ &= \sum_{i=0}^{k}\left(M^{1/2}\varphi\left(\frac{\beta}{2^{i+1}}\right) - M^{1/2}\varphi\left(\frac{\beta}{2^i}\right)\right) \\ &\le \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{i=0}^{k}\bar\nu_\varphi\left(\frac{\beta}{2^i}\right) \le \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\bar\nu_\varphi(\beta) + \sum_{i=1}^{k}\bar\nu_\varphi\left(\frac{\beta}{2^{i-1}}\right)\right) \\ &\le \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}\int_{\frac{\beta}{2^k}}^{\beta}\frac{\bar\nu_\varphi(\tau)}{\tau}\,d\tau \le \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}\int_t^\beta \frac{\bar\nu_\varphi(\tau)}{\tau}\,d\tau. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть сегмент $R_0 \subset \mathbb{R}^d$ и пусть функция $f \in L^2(R_0)$. Тогда*

$$M^{1/2}f^*(t) - M^{1/2}f^*(\beta) \leq \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}\int_t^\beta \frac{\nu_f(\tau)}{\tau}\,d\tau, \quad t \in (0, |R_0|/2]. \tag{3}$$

Доказательство. Утверждение этого следствия следует из теорем 1 и 2, если в теореме 2 положить $\varphi = f^*$.

Следствие 2. *Пусть сегмент $R_0 \subset \mathbb{R}^d$ и пусть функция $f \in RH_{1,2,1}(R_0)$. Тогда*

$$M^{1/2}f^*(t) - M^{1/2}f^*(\beta) \leq \frac{\sqrt{3}}{\ln 2}\langle f\rangle \ln\frac{\beta}{t}, \quad t \in (0, |R_0|/2] \tag{4}$$

и эта оценка является точной по порядку.

Доказательство. Неравенство (4) легко получается, если применить неравенство $\nu_f(t) \leq \langle f\rangle$ к (3). Осталось показать, что полученная скорость $\ln^2\frac{\beta}{t}$ является точной. Для этого покажем, что функция $f(t) = \ln^2\frac{1}{t} \in RH_{1,2,1}([0,1])$. Имеем,

$$\sup_{0<t\leq 1}(M_2 f(t) - Mf(t)) = \sup_{0<t\leq 1}\left(\left(\frac{1}{t}\int_0^t \ln^4\frac{1}{x}\,dx\right)^{1/2} - \frac{1}{t}\int_0^t \ln^2\frac{1}{x}\,dx\right) =$$

$$= \sup_{0<t\leq 1}\left(\sqrt{\ln^4\frac{1}{t} + 4\ln^3\frac{1}{t} + 12\ln^2\frac{1}{t} + 24\ln\frac{1}{t} + 24} - \left(\ln^2\frac{1}{t} + 2\ln\frac{1}{t} + 2\right)\right) =$$

$$= \sup_{0<t\leq 1}\frac{4\ln^2\frac{1}{t} + 16\ln\frac{1}{t} + 20}{\sqrt{\ln^4\frac{1}{t} + 4\ln^3\frac{1}{t} + 12\ln^2\frac{1}{t} + 24\ln\frac{1}{t} + 24} + \left(\ln^2\frac{1}{t} + 2\ln\frac{1}{t} + 2\right)} < +\infty.$$

Следствие доказано.

Заключение. В работе получена оценка скорости убывания равноизмеримых перестановок функций из класса $RH'_{1,2,1}$ и построен пример, показывающий, что полученная оценка асимптотически точная. Этот результат является аналогом хорошо известной теоремы Джона–Ниренберга о пространствах BMO. Также получены оценки равноизмеримых перестановок функций из $RH'_{1,2,1}$, разности средних которых при стремлении к 0 мер сегментов убывают из заданной скоростью.

1. **Gehring F. W.** The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasicinformal mapping / F. W. Gehring // Acta Math. — 1973. — Vol. 130, № 1. — P. 265–277.
2. **Hardy G. H.** Inequalities / G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya. — Cambridge University Press., Cambridge, 1934. — 314 p.
3. **John F.** On functions of bounded mean oscillation / F. John, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. — 1961. — Vol. 14, Issue 3. — P. 415–426.
4. **Muckenhoupt B.** Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function / B. Muckenhoupt // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 165. — P. 207–226.

5. **Shanin R.** Equimeasurable rearrangements of functions satisfying the reverse Hölder or the reverse Jensen inequality / R. Shanin // Ricerche di Matematica. — 2015. — V. 64. — P. 217–228.
6. **Shanin R. V.** Estimation of equimeasurable rearrangements in the anisotropic case / R. V. Shanin // Ukrainian Mathematical Journal. — 2018. — Vol. 70, № 7. — P. 1115–1126.

Шанін Р. В.
Обернена нерівнівність Гельдера

Резюме

Нехай $r \neq 0$ і E вимірна множина, $|E| > 0$. Для невід'ємної функції $f \in L^r(E)$ середнім інтегральним порядку r називається величина $M_r(f, E) := (|E|^{-1} \int_E f^r(x)\,dx)^{1/r}$. В роботі вивчається клас $RH'_{1,2,1}(R_0)$ функцій f, що задовольняють обернену нерівність Гельдера, $\langle f \rangle = \sup_{R \subset R_0}[M_2(f, R) - M(f, R)] < +\infty$. Отримана оцінка швидкості спадання рівновимірних перестановок функцій із цього класі і побудовано приклад, що демонструє, що отримана оцінка є асимптотично точною. Цей результат є аналогом добре відомої теореми Джона–Ніренберга в просторі BMO. Також в роботі отримані оцінки рівновимірних перестановок функцій із $RH'_{1,2,1}$ з заданою швидкість спадання до нуля різниці середніх інтегральних.
Ключові слова: обернена нерівність Гельдера, рівновимірна перестановка функції.

Shanin R. V.
Reverse Hölder inequality

Summary

Let $r \neq 0$ and let E be a measurable set with $|E| > 0$. For a non-negative function $f \in L^r(E)$ the mean of the order r is defined by the equality $M_r(f, E) := (|E|^{-1} \int_E f^r(x)\,dx)^{1/r}$. In the paper we study the class $RH'_{1,2,1}(R_0)$ of functions f satisfying the reverse Hölder inequality $\langle f \rangle = \sup_{R \subset R_0}[M_2(f, R) - M(f, R)] < +\infty$. We obtain a estimate of decrease rate of equimeasurable rearrangements of functions of this class and we give an example which show that the estimate is asymptotically exact. This result is analogous to well-known theorem of F. John and L. Nirenberg in the space of BMO. Also we obtain estimates of equimeasurable rearrangements of functions of $RH'_{1,2,1}$ with given decreasing rate to 0 of difference of means.
Key words: reverse Hölder inequality, equimeasurable rearrangement.

References

1. Gehring F. W. (1973) The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasicinformal mapping. *Acta Math.*, Vol. 130, № 1, P. 265–277.
2. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. (1934) *Inequalities.* Cambridge: Cambridge University Press., 314 p.
3. John F. (1961) On functions of bounded mean oscillation. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 14, № 3, P. 415–426.
4. Muckenhoupt B. (1972) Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 165, P. 207–226.
5. Shanin R. (2015) Equimeasurable rearrangements of functions satisfying the reverse Hölder or the reverse Jensen inequality. *Ricerche di Matematica*, V. 64, P. 217–228.
6. Shanin R. V. (2018) Estimation of equimeasurable rearrangements in the anisotropic case. *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 70, № 7, P. 1115–1126.

Дослідження в математиці і механіці. – 2019. – Т. 24, вип. 1(33). – С. 59–64

UDC 517.926

S. A. Shchogolev
Odesa I. I. Mechnikov National University

ПРО ПІДВИЩЕННЯ ПОРЯДКУ МАЛИЗНИ ШВИДКИХ ЗМІННИХ В ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

Доведено теорему про підвищення порядку мализни швидких змінніх в лінійних системах диферецiальних рiвнянь.
MSC: 34A30, 34C25.
Ключові слова: лінійні диференціальні системи, лінійні перетворення.
DOI: 10.18524/2519–206x.2019.1(33).175546.

Вступ. Одною з важливих проблем теорії звичайних диференціальних рівнянь є проблема зведення системи, що досліджується, до більш простого вигляду. У випадку лінійноі системи диференціальних рівнянь це може бути задача зведення даної системи до системи зі сталими коефіцієнтами (проблема звідності), або до системи з трикутною, зокрема, діагональною матрицею коефіцієнтів, жордановою матрицею коєфіцієнтів тощо. Особливий інтерес являють системи з періодичними коефіцієнтами [1,2]. Якщо в коефіцієнтах такої системи коливні доданки в певному сенсі малі порівняно з неколивними, то природно розглянути задачу при півищення мализни коливних доданків [3]. В даній праці ця задача розглядається для лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь, коефіцієнти якої мають вигляд $f(t,\theta)\mu(\theta)$, де $f(t,\theta)$ – 2π-періодична по θ і в певному розумінні повільно змінна відносно t, а $\mu(\theta)$ – неперервна мала функція змінної θ.

Позначення. Нехай

$$G = \{t, \varepsilon : t \in [t_0, +\infty), \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+\}.$$

Означення. Скажемо, що функція $f(t,\varepsilon)$ належить до класу $S(m)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, якщо:

1) $f : G \to \mathbb{C}$,
2) $f(t,\varepsilon) \in C^m(G)$ за t,
3) $d^k f(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k f_k(t,\varepsilon)$ $(0 \le k \le m)$,

$$\|f\|_{S(m)} \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{m} \sup_G |f_k(t,\varepsilon)| < +\infty.$$

Під повільно змінною функцією розуміємо функцію з класу $S(m)$.

Основні результати

1. Постановка задачі. Розглядається наступна система диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = \left(A_0(t,\varepsilon) + \sum_{s=1}^{r} A_s(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))(\mu(\theta(t,\varepsilon)))^s \right) x, \qquad (1)$$

Надійшла 16.04.2019

$x = \mathrm{colon}(\mathrm{x_1}, ..., \mathrm{x_n})$, $A_0(t, \varepsilon)$ – $(N \times N)$-матриця, елементи якої належать до класу $S(m)$. Функція $\theta(t, \varepsilon)$ має вигляд:

$$\theta(t, \varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau, \varepsilon) d\tau, \qquad (2)$$

$\varphi \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(t, \varepsilon) \in S(m)$, $\inf\limits_G \varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0 > 0$. Елементи матриць $A_s(t, \varepsilon, \theta)$ належать до класу $S(m)$ відносно t, ε, неперервні та 2π-періодичні за $\theta \in [0, +\infty)$. Функція $\mu(\theta)$ неперервна на $[0, +\infty)$.

При малій функції $\mu(\theta)$ система (1) близька до системи з повільно змінними коефіцієнтами:

$$\frac{dx_0}{dt} = A_0(t, \varepsilon) x_0. \qquad (3)$$

Доданки, що залежать від θ, в системі (1) мають порядок $O(\mu)$. Вивчається задача про зведення системи (1) до такого вигляду, де доданки, що залежать від θ, мають порядок або $O(\mu^{r+1})$ або $O(\varepsilon)$. Якщо параметр ε достатньо малий, то перетворена система буде ближчою до системи з повільно змінними коефіцієнтами, ніж система (1).

У роботах [4,5] аналогічна задача розглядалася для випадку періодичних за t (тобто $\theta(t) = t$) матриць A_s, сталої матриці A_0 та функції $\mu(t)$ експоненціального або степеневого типу.

У випадку, коли елементи матриць $A_s(t, \varepsilon, \theta)$ зображувані абсолютно та рівномірно збіжними рядами Фур'є вигляду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t, \varepsilon) \exp(in\theta(t, \varepsilon)), \qquad (4)$$

де $f_n(t, \varepsilon) \in S(m)$, а $\mu(\theta) = \mu^* = \mathrm{const}$, відповідна задача розглядалася автором у роботах [6,7]. У цьому випадку було показано, що елементи перетворюючої матриці також зображувані у вигляді рядів (4).

У даній роботі функція $\mu(\theta)$ є довільною неперервною функцією.

2. Основний результат.

Теорема. *Нехай система (1) задовольняє наступні умови:*

1) *власні значення* $\lambda_j(t, \varepsilon)$ $(j = \overline{1, N})$ *матриці* $A_0(t, \varepsilon)$ *такі, що*

$$\lambda_j(t, \varepsilon) - \lambda_k(t, \varepsilon) = i n_{jk} \varphi(t, \varepsilon), \ n_{jk} \in \mathbb{Z},$$

де функцію $\varphi(t, \varepsilon)$ *визначено умовою (2);*

2) *існує матриця* $L(t, \varepsilon)$, *елементи якої належать до класу* $S(m)$, *така, що* $\inf\limits_G |\det L(t, \varepsilon)| > 0$, *и*

$$L^{-1}(t, \varepsilon) A_0(t, \varepsilon) L(t, \varepsilon) = \Lambda(t, \varepsilon) = \mathrm{diag}[\lambda_1(\mathrm{t}, \varepsilon), ..., \lambda_\mathrm{N}(\mathrm{t}, \varepsilon)];$$

3) *функція* $\mu(\theta)$ *така, що*

$$\mu(\theta) \in \mathbb{R}, \ \sup_{[0, +\infty)} \mu(\theta) \leq \mu_0 < +\infty, \ \int\limits_0^{+\infty} \mu^k(\theta) d\theta \leq \mu_0 < +\infty \ (k = \overline{1.r}).$$

Тоді для достатньо малих значень μ_0 існує перетворення вигляду

$$x = \Phi(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon))y, \tag{5}$$

де елементи матриці $\Phi(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon))$ обмежені на $G \times [t_0, +\infty)$, що приводить систему (1) до вигляду:

$$\frac{dy}{dx} = (\Lambda(t, \varepsilon) + \varepsilon V(t, \varepsilon, \theta) + W(t, \varepsilon, \theta))\, y, \tag{6}$$

де елементи матриць $V(t, \varepsilon, \theta)$ та $W(t, \varepsilon, \theta)$ обмежені при $G \times [t_0, +\infty)$, причому елементи матриці $W(t, \varepsilon, \theta)$ мають порядок μ_0^{r+1}.

Доведення. Здійснивши в системі (1) підстановку

$$x = L(t, \varepsilon)x^{(1)}, \tag{7}$$

де $x^{(1)}$ – новий невідомий N-вимірний вектор, зведемо систему (1) до вигляду:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = \left(\Lambda(t, \varepsilon) + \varepsilon H(t, \varepsilon) + \sum_{s=1}^{r} B_s(t, \varepsilon, \theta)(\mu(\theta))^s\right) x^{(1)}, \tag{8}$$

де

$$H(t, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} L^{-1}(t, \varepsilon)\frac{dL(t, \varepsilon)}{dt},\ B_s(t, \varepsilon, \theta) = L^{-1}(t, \varepsilon)A_s(t, \varepsilon, \theta)L(t, \varepsilon). \tag{9}$$

Елементи матриці $H(t, \varepsilon)$ належать до класу $S(m-1)$.

Перетворення, яке приводить систему (8) до вигляду (6), будемо шукати у вигляді:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = \left(E + \sum_{s+1}^{r} Q_s(t, \varepsilon, \theta)\right) y, \tag{10}$$

де матриці $Q_s(t, \varepsilon, \theta)$ $(s = \overline{1, r})$ визначаються з наступного ланцюжка диференціальних рівнянь:

$$\varphi(t, \varepsilon)\frac{\partial Q_1}{\partial \theta} = \Lambda(t, \varepsilon)Q_1 - Q_1\Lambda(t, \varepsilon) + B_1(t, \varepsilon, \theta)\mu(\theta), \tag{11}$$

$$\varphi(t, \varepsilon)\frac{\partial Q_2}{\partial \theta} = \Lambda(t, \varepsilon)Q_2 - Q_2\Lambda(t, \varepsilon) + B_2(t, \varepsilon, \theta)(\mu(\theta))^2 + B_1(t, \varepsilon, \theta)Q_1 t, \varepsilon, \theta)\mu(\theta), \tag{12}$$

$$\ldots$$

$$\varphi(t, \varepsilon)\frac{\partial Q_r}{\partial \theta} = \Lambda(t, \varepsilon)Q_r - Q_r\Lambda(t, \varepsilon) + B_r(t, \varepsilon, \theta)(\mu(\theta))^r + \\ + \sum_{s=1}^{r-1} B_s(t, \varepsilon, \theta)Q_{r-s}(t, \varepsilon, \theta)(\mu(\theta))^s. \tag{13}$$

Матриці $V(t, \varepsilon, \theta)$, $W(t, \varepsilon, \theta)$ визначимо з рівнянь:

$$\left(E + \sum_{s=1}^{r} Q_s(t, \varepsilon, \theta)\right) V = H(t, \varepsilon)\left(E + \sum_{s=1}^{r} Q_s(t, \varepsilon, \theta)\right) - \frac{1}{\varepsilon}\sum_{s=1}^{r} \frac{\partial Q_s(t, \varepsilon, \theta)}{dt}, \tag{14}$$

$$\left(E+\sum_{s=1}^{r}Q_s(t,\varepsilon,\theta)\right)W=\sum_{j=1}^{r}\sum_{s=j}^{r}B_s(t,\varepsilon,\theta)Q_{r+j-s}(t,\varepsilon,\theta)(\mu(\theta))^s. \qquad (15)$$

Розглянемо рівняння (11). Нехай $Q_s=(q_{jk}^{(s)})_{j,k=\overline{1,N}}$, $B_s=(b_{jk}^{(s)})_{j,k=\overline{1,N}}$, $s=\overline{1,r}$. Тоді з урахуванням умови 1) теореми, рівняння (11) еквівалентно сукупності скалярних рівнянь:

$$\frac{\partial q_{jk}^{(1)}}{\partial\theta}=in_{jk}q_{jk}^{(1)}+\frac{1}{\varphi(t,\varepsilon)}\ \mu(\theta)b_{jk}^{(1)}(t,\varepsilon,\theta),\ j,k=\overline{1,N}. \qquad (16)$$

Для кожного з рівнянь (16) розглянемо такий його розв'язок:

$$q_{jk}^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)=\frac{1}{\varphi(t,\varepsilon)}\ e^{in_{jk}\theta}\int_0^{\theta}\mu(\vartheta)b_{jk}^{(1)}(t,\varepsilon,\vartheta)e^{-in_{jk}\vartheta}d\vartheta,\ (j,k=\overline{1,N}). \qquad (17)$$

З того, що елементи матриць $A_s(t,\varepsilon,\theta)$ в системі (1) належать до класу $S(m)$ відносно t,ε, і неперервні та 2π-періодичні за $\theta\in[0,+\infty)$, і з рівності (9) випливає, що аналогічні властивості мають і елементи матриць $B_s(t,\varepsilon,\theta)$, отже

$$\sup_{G\times[0,+\infty)}|b_{jk}^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)|=c_{jk}^{(1)}<+\infty,\ j,k=\overline{1,N}.$$

З (17) та умови 3) теореми тоді маємо:

$$\sup_{G\times[0,+\infty)}\left|q_{jk}^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\right|\le\frac{1}{\varphi_0}\ \mu_0\ c_{jk}^{(1)},\ j,k=\overline{1,N}. \qquad (18)$$

Тепер розглянемо рівняння (12), і візьмемо такий його розв'язок:

$$q_{jk}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)=$$

$$=\frac{1}{\varphi(t,\varepsilon)}\ e^{in_{jk}\theta}\int_0^{\theta}\left(\mu(\vartheta)^2b_{jk}^{(2)}(t,\varepsilon,\vartheta)+\mu(\vartheta)\sum_{l=1}^{N}b_{jl}^{(1)}(t,\varepsilon,\vartheta)q_{lk}^{(1)}(t,\varepsilon,\vartheta)\right)e^{-in_{jk}\vartheta}d\vartheta,$$

$$j,k=\overline{1,N}.$$

Маємо, аналогічно попередньому:

$$\sup_{G\times[0,+\infty)}\left|b_{jk}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)\right|=c_{jk}^{(2)}<+\infty,\ j,k=\overline{1,N}.$$

Тоді

$$\sup_{G\times[0,+\infty)}\left|q_{jk}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)\right|\le\frac{\mu_0^2}{\varphi_0}\ c_{jk}^{(2)}+\frac{\mu_0^2}{\varphi_0^2}\sum_{l=1}^{N}c_{jl}^{(1)}c_{lk}^{(1)},\ j,k=\overline{1,N}$$

тобто $q_{jk}^{(2)}$ обмежені при $t\in G\times[0,+\infty)$.

І нарешті для $q_{jk}^{(r)}(t,\varepsilon,\theta)$ визначимо:

$$q_{jk}^{(r)}(t,\varepsilon,\theta) = \frac{1}{\varphi(t,\varepsilon)}\ e^{in_{jk}\theta}\times$$

$$\times\int\limits_0^\theta \left((\mu(\vartheta))^r b_{jk}^{(r)}(t,\varepsilon,\vartheta) + \sum_{s=1}^{r-1} (\mu(\vartheta))^s \sum_{l=1}^{N} b_{jl}^{(s)}(t,\varepsilon,\vartheta) q_{lk}^{(r-k)}(t,\varepsilon,\vartheta) \right) e^{-in_{jk}\vartheta} d\vartheta,$$

$$j,k = \overline{1,N}.$$

Всі функції $q_{jk}^{(s)}(t,\varepsilon,\theta)$ $(j,k = \overline{1,N},\ s = \overline{1,r-1})$ обмежені при $t \in G \times [t_0,+\infty)$. Всі функції $b_{jk}^{(s)}(t,\varepsilon,\theta)$ $(j,k = \overline{1,N},\ s = \overline{1,r})$ також обмежені при $t \in G \times [t_0,+\infty)$. Отже, умова 3) теореми гарантує існування обмежених розв'язків $q_{jk}^{(r)}(t,\varepsilon,\theta)$ $(j,k = \overline{1,N})$, причому ці розв'язки мають порядок μ_0^r. А при малих μ_0 ця ж умова гарантує невиродженість перетворення (10). Матриця $V(t,\varepsilon,\theta)$ однозначно визначається з рівняння (14), а матриця $W(t,\varepsilon,\theta)$ однозначно визначається з рівняння (15), причому, як нескладно бачити, порядок елементів матриці $W(t,\varepsilon,\theta)$ не нижче, ніж μ_0^{r+1}.

Теорему доведено.

Висновки. Доведено теорему про підвищення мализни швидких змінніх в лінійних системах диференціальних рівнянь.

1. **Якубович В. А., Старжинский В. М.**, 1972, Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. М., Наука, 720 с.
2. **Штокало И. З.** 1960, Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. К., Изд-во АН УССР, 76 с.
3. **Стрижак Т. Г.** 1984, Асимптотический метод нормализации. К., Вища школа, 280 с.
4. **Коняев Ю. А., Маслов Д. А.** 2017, Анализ неавтономных систем дифференциальных уравнений с экспоненциально-периодической матрицей. Известия вузов. Математика, № 10, с. 62–69.
5. **Коняев Ю. А., Мартыненко Ю. Г., Панфилов Н. Г.** 2004, Асимптотический аналог теорем о приводоимости некоторых классов неавтономных линейных систем. Дифференц. уравн., Т. 40, № 3. с. 330–333.
6. **Shchogolev, S. A.** 2014, On a reduction of a linear homogeneous differential system with oscillating coefficients to a system with slowly-varying coefficients. Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh., V.19, Is. 1(21). – P. 81–91.
7. **Shchogolev, S. A.** 2014, On a reduction of a linear homogeneous differential system with oscillating coefficients to a system with slowly-varying coefficients in resonance case. Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh., V.19, Is. 3(23). – P. 48–56.

Щёголев С. А.

О повышении порядка малости быстрых переменных в линейных дифференциальных системах

Резюме

Доказана теорема о повышении порядка малости быстрых переменных в линейных системах диффереציальных уравнений.
Ключевые слова: линейные дифференциальные системы, линейные преобразования.

Shchogolev S. A.

On increasing the order of smallness of fast variables in linear differential systems

Summary

A theorem on increasing the order of smallness of fast variables in linear systems of differential equations are proved.
Key words: linear differential systems, linear transformation.

1. **Yakubovich, V. A., and Starzhinskiy, V. M.** 1972, *Lineynyie differentsialnyie uravneniya s periodicheskimi koefficientami i ih prilozheniya* [The linear differential equations with periodic coefficients and their applications], M.: Nauka, 720 p.
2. **Shtokalo, I. Z.** 1960, *Lineynyie differentsialnyie uravneniya s peremennymi koefficientami* [The linear differential equations with variable coefficients], K.: Izd-vo AN USSR, 76 p.
3. **Strizhak, T. G.** 1984, *Asimptoticheskij metod normalizcii* [Asymptotic Normalization Method], K.: Vishcha shkola, 280 p.
4. **Konyaev, Yu. A. and Maslov, D. A.** 2017, *Analys neavtonomnuch sistem differentsialnuih uravneniy s eksponencialno periodicheskoy matricey* [Analysis of nonautonomous systems of differential equations with exponentially periodic matrix], *Izvestia vuzov. Mathematica*, №10, c. 62—69.
5. **Konyaev, Yu. A. and Martynenko, Yu. G. and Panfilov, N. G.** 2004, *Asimptoticheskyi analog teorem o privodimosti nekotoryh klassov neavtonomnyh lineynuh sistem* [Asymptotic analogue of theorems on the reducibility of certain classes of nonautonomous linear systems], *Differehtsialnye uravnenia*, T. 40, № 3, p. 330—333.
6. **Shchogolev, S. A.** 2014, *On a reduction of a linear homogeneous differential system with oscillating coefficients to a system with slowly-varying coefficients*, *Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh.*, V.19, Is. 1(21). – P. 81–91.
7. **Shchogolev, S. A.** 2014, *On a reduction of a linear homogeneous differential system with oscillating coefficients to a system with slowly-varying coefficients in resonance case*, *Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh.*, V.19, Is. 3(23). – P. 48–56.

Researches in Mathematics and Mechanics. – 2019. – V. 24, Is. 1(33). – P. 65–73

UDC 532.3

K. D. Mysov
Odesa I. I. Mechnikov National University,
Faculty of Mathematics, Physics and Information Technologies

TORSION PROBLEM FOR AN ELASTIC TWICE-TRUNCATED CONE

The problem of an elastic twice-truncated cone wave field estimation is investigated in case of steady state torsional oscillations. The G. Ya. Popov integral transform with regard to an angular coordinate is applied. Thus reducing the original problem to one-dimensional boundary value problem in the transform's domain. The Green's function is build for one-dimensional boundary value problem. With it's help the solution of one-dimensional problem is constructed in an explicit form. The G. Ya. Popov inverse transformation helped to derive the solution in original domain in form of an infinite sum. With it's help dependence of the eigenfrequencies from the cone's geometric parameters is investigated. Stress field was found with the use of asymptotic procedure. Comparison plots are build for different opening angles.
MSC: 74G70, 74H99, 74J10.
Key words: twice-truncated cone, steady state torsional oscillations, G. Ya. Popov integral transform, eigenfriquencies, wave field, Green's function.
DOI: 10.18524/2519–206x.2019.1(33).175547.

Introduction. An important problem widely common in engineering practice is to determine the dynamic stress state of a cone under the impact of a non-stationary load. A particularly important point is the ability to calculate the eigenfrequencies required to evaluate the dynamic stability of the constructions. It is possible to do with help of the initial boundary value problems apparatus of mathematical physics. The solving of the initial boundary value problems for cone-shaped elastic bodies is not a new problem, however, there are many unresolved issues. In [1], the three-dimensional Green's function for a transverse-isotropic thermoelastic cone with a stable heat source on the vertex is derived. In [2] the problem of equilibrium for a semi-infinite transverse-isotropic three-dimensional elastic cone under the antisymmetric force at its vertex, is considered. In [3], the solution of the problem for a half-infinite elastic cone is constructed under the concentrated force applied at it's vertex at a certain distance from it. In [4] the problem of deriving the displacement and the stress fields of a semi-infinite isotropic elastic cone under mixed boundary conditions on the surface of the cone is considered. In [5] one found a solution in quadratures for the linear problem of the dynamic theory of elasticity with respect to the deformation of an infinite elastic homogeneous isotropic space caused by the rotation of an absolutely rigid circular cone with an uneven lateral surface. In [6], problems were solved on the stress-strain state of an elastic cone of variable thickness in a three-dimensional formulation using both analytical methods and numerical approaches. In [7] an axisymmetric problem of tensile of a cone under the action of concentrated load is considered in view of large deformations. The exact solution of the torsion problem of an elastic conically-layered cone is obtained in [8]. In [9] the

Received 31.03.2019

solution for semi-infinite elastic cone with help of Papkovycha-Neybera functions is derived and analyzed stress distribution in the length of their attenuation. In [10] a numerical method for constructing eigenfunctions for arbitrary conical bodies with smooth and non-smooth lateral surfaces is considered. In [11] the method of distribution of variables yields an effective solution of various boundary thermoelasticity problems for a hollow endless cone. The dynamic problem of instability of a surface of a finite circular anisotropic cone with an arbitrary aperture in the form of a hexagonal single crystal is considered in [12]. In [13], a study was made of the stress intensity factor near a spherical crack inside a semi-infinite cone under a compression load applied to the vertex of a cone. The question of steady-state oscillations of an elastic infinite cone under the action of a concentrated oscillating force added at the vertex of a cone is solved in [14]. The problem of torsion of an elastic cone, weakened by a spherical crack under the action of the shock moment, added to the vertex, is considered in [15].

Problem statement for finite cones adds some complexity when studying the similar problems. For example, in [16] the influence of wave propagation in an elastic truncated cone is experimentally investigated. The problem of determining the non-stationary wave field of an elastic truncated cone, taking into account its own weight, is investigated in [17]. In [18] the stressed state of the inhomogeneous thin truncated hollow cone is investigated. In [19] obtained an exact solution of the problem of torsion of a truncated hollow cone. In [20] an exact solution of the torsion problem of an elastic truncated layered cone is found in static formulation.

Much less often, similar problems are considered for a twice-truncated elastic cones. This is explained by the mathematical difficulties caused by the geometry of the problem. A thick-walled twice-truncated cone from two-dimensional, functionally graded materials exposed to the combined load is considered at [21]. In [22] the stress state of a twice-truncated cone resting on a rigid base of the lateral surface under a uniform load applied at a larger base is investigated. An axisymmetric problem for a twice-truncated anisotropic cone is solved in [23] with the help of the straight lines method for three-dimensional elasticity equations. The general solution for axisymmetric boundary value prob-lems for a twice-truncated cone is derived in [24]. More complicated, an axially mixed problem for a twice-truncated hollow cone under its own weight was con-sidered in [25]. Significantly less problems are confirmed with an investigation of the dynamic field of conical bodies. An axisymmetric dynamic problem for a twice truncated dynamic cone first was considered at [26], but a lot of unresolved questions connected with eigenvalues investigation still remain.

Main Results

1. Statement of the problem. The twice truncated elastic cone is considered in the spherical coordinate system $a < r < b, -\psi \leq \theta \leq \psi, -\pi \leq \varphi < \pi$.

The problem is stated in case of steady-state oscillations, thus for all mechanical characteristic representation $\bar{f}(r,\theta,\varphi,t) = e^{i\omega t} f(r,\theta,\varphi)$ take place, where ω is the steady state frequency, factor $e^{i\omega t}$ will be omitted in next formulas.

The cone surface $a < r < b, \theta = \psi, -\pi \leq \varphi < \pi$ is loaded

$$\tau_{\theta\varphi}\big|_{\theta=\psi} = F(r), \tag{1}$$

where $F(r) = 1/r^2$ is given load.

The upper spherical face of the cone $r = b, -\psi \le \theta \le \psi, -\pi \le \varphi < \pi$ is fixed

$$w|_{r=b} = 0, \tag{2}$$

where $w(r,\theta) = u_\varphi(r,\theta)$ the only nonzero displacement in this problem statement.
The bottom spherical face of the cone $r = a, -\psi \le \theta \le \psi, -\pi \le \varphi < \pi$ is free from stress

$$\tau_{r\varphi}|_{r=a} = 0. \tag{3}$$

One need find the displacement to satisfy the boundary conditions (1)-(3) and the torsion equation

$$(r^2 w')' + \frac{(\sin\theta w^\bullet)^\bullet}{\sin\theta} - \frac{w}{\sin^2\theta} = -r^2 q^2 w, \tag{4}$$

where $w^\bullet = \frac{\partial w(r,\theta)}{\partial\theta}$, $w' = \frac{\partial w(r,\theta)}{\partial r}$, $q = \frac{\omega}{c}$ is the wave number and $c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ is the shear wave speed, ρ is density and G is the shear modulus.

Fig. 1. Geometry of the problem

2. Deriving the basis solutions of a one dimension boundary problem. The integral G. Ya. Popov transform [27] is applied to problem (1)-(4)

$$w_k(r) = \int_0^\psi \sin\theta P^1_{\nu_k}(\cos\theta) w(r,\theta) d\theta \tag{5}$$

with inverse transform formula

$$w(r,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^1_{\nu_k}(\cos\theta) w_k(r)}{\left\|P^1_{\nu_k}(\cos\theta)\right\|^2}, \tag{6}$$

where $P^1_{\nu_k}(\cos\theta)$ ia associated Legendre's function of the first kind, ν_k are the roots of the transcendental equation

$$\left.\frac{\partial P^1_{\nu_k}(\cos\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\psi} - ctg\omega\, P^1_{\nu_k}(\cos\psi) = 0 \tag{7}$$

Thus, a one-dimensional boundary value problem is received in the transform's domain:

$$\begin{array}{l}
\left(r^2 {w'}_k\right)' - \nu_k\left(\nu_k+1\right)w_k - r^2q^2w_k = -rF(r)\sin\psi P_{\nu_k}^1(\cos\theta) \\
w_k\big|_{r=b} = 0 \\
\tau_{kr\varphi}\big|_{r=a} = \left(w'_k - r^{-1}w_k\right)\big|_{r=a} = 0
\end{array} \tag{8}$$

It's basis solution system $\{\Psi_{0k}(r), \Psi_{1k}(r)\}$ [28] has next form

$$\begin{array}{l}
\Psi_{0k}(r) = \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}} W_{\tilde{\nu}_k}(qr, qb)\,\Delta_k^{-1} \\
\Psi_{1k}(r) = \left(\frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{3}{2}a^{-1}W_{\tilde{\nu}_k}(qa, qr)\,\Delta_k^{-1} + W_{\tilde{\nu}_k}^1(qa, qr)\right)\Delta_k^{-1} \\
\Delta_k = -\frac{3}{2}a^{-1}W_{\tilde{\nu}_k}(qa, qb) + W_{\tilde{\nu}_k}^1(qa, qb)
\end{array}, \tag{9}$$

where

$$\begin{array}{l}
W_k(x, y) = J_k(x)\,Y_k(y) - J_k(y)\,Y_k(x) \\
W_k^1(x, y) = {J'}_k(x)\,Y_k(y) - J_k(y)\,{Y'}_k(x)
\end{array}, \tag{10}$$

where $J_k(x)$ and $Y_k(x)$ are Bessel's functions of the first and second kind respectively.

The solution of boundary value problem (8) is constructed in form

$$w_k(r) = \int_a^b R(\xi)\,G_k(r, \xi)\,d\xi, \tag{11}$$

where $R(\xi)$ is a right part of differential equation in (8) and $G_k(r, \xi)$ is Green's function [28].

3. Green's function deriving. Green's function is constructed in next form

$$G_k(r, \xi) = \begin{cases} a_0(\xi)\,\Psi_{0k}(r) + a_1(\xi)\Psi_{1k}(r), a < r < \xi \\ b_0(\xi)\,\Psi_{0k}(r) + b_1(\xi)\Psi_{1k}(r), \xi < r < b \end{cases} \tag{12}$$

where $a_i(\xi)$, $b_i(\xi)$ $i = 0, 1$ are unknown constants found from four defining properties of Green's function.

$$\begin{array}{l}
a_0(\xi) \equiv 0,\ \ b_1(\xi) \equiv 0 \\
a_1(\xi) = \xi^{-2}\frac{\Psi_{0k}(\xi)}{\delta(\xi)} \\
b_0(\xi) = \xi^{-2}\frac{\Psi_{1k}(\xi)}{\delta(\xi)} \\
\delta(\xi) = {\Psi'}_{0k}(\xi)\,\Psi_{0k}(\xi) - \Psi_{0k}(\xi)\,{\Psi'}_{1k}(\xi)
\end{array} \tag{13}$$

Thus, Green's function become

$$G_k(r, \xi) = \xi^{-2}\begin{cases} \frac{\Psi_{0k}(\xi)\Psi_{1k}(r)}{\delta(\xi)}, a < r < \xi \\ \frac{\Psi_{1k}(\xi)\Psi_{0k}(r)}{\delta(\xi)}, \xi < r < b \end{cases}. \tag{14}$$

Considering basis solutions (9) one can obtain next form of green function

$$G_k(r,\xi) = -\frac{\pi q}{2\xi r}\begin{cases} \frac{F_k(\xi,r)}{\Delta_k}, a < r < \xi \\ \frac{F_k(r,\xi)}{\Delta_k}, \xi < r < b \end{cases}, \tag{15}$$

where Δ_k is known from (9) and

$$F_k(\xi,r) = W_{\tilde{\nu}_k}(q\xi, qb) \times \left(-\frac{3}{2}a^{-1}W_{\tilde{\nu}_k}(qa, qr) + W^1_{\tilde{\nu}_k}(qa, qr)\right) \tag{16}$$

4. The final calculation formulas construction. G. Ya. Popov inverse integral transform is applied to (11). Thus, solution can be written in next form

$$w_k(r,\theta) = \sin\psi \frac{\pi q}{2\sqrt{r}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^1_{\nu_k}(\cos\theta) P^1_{\nu_k}(\cos\psi)}{\left\| P^1_{\nu_k}(\cos\theta)\right\|^2} \int_a^b \xi^{\frac{3}{2}} \bar{G}(r,\xi)\, d\xi, \tag{17}$$

where

$$\bar{G}_k(r,\xi) = \begin{cases} \frac{F_k(\xi,r)}{\Delta_k}, a < r < \xi \\ \frac{F_k(r,\xi)}{\Delta_k}, \xi < r < b \end{cases}. \tag{18}$$

Next is shown asymptotic procedure which is used to find behavior of sum in (17).

Let $f_k(k)$ be the function for which $F_k(x)$ it's asymptotic form when k is big enough. An infinite sum can be represented in form of two addends $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{N} f_k(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k(x)$, where N is big enough. In second addend function can be replaced with it's asymptotic representation. Thus sum can be rewritten in next form

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x) + \sum_{k=1}^{N} (f_k(x) - F_k(x)) + f_0(x) \tag{19}$$

After applying this procedure to displacement one can differentiate them to receive unknown stress.

5. Numeric results discussion. From the point of view of mechanical applications, one of the most important goals is to find the eigenfrequencies. The solving of the transcendental equation is required

$$D(\omega) = \prod_{k=0}^{N} \left(\left(\frac{c\tilde{\nu}_k}{a} - \frac{3\omega}{2a} \right) W_{\tilde{\nu}_k}\left(\omega\frac{a}{c}, \omega\frac{b}{c}\right) - \omega \widetilde{W}^1_{\tilde{\nu}_k}\left(\omega\frac{a}{c}, \omega\frac{b}{c}\right)\right), \tag{20}$$

where

$$\widetilde{W}^1_k(x,y) = J_{k+1}(x) Y_k(y) - J_k(y) Y_{k+1}(x). \tag{21}$$

The following input parameters were selected for the calculation: $N = 5$, $G = 45.5 \cdot 10^10\, g/cm/s^2$, $\rho = 8.92\, g/cm^3$, $a = 10\, cm$, $b = 3a$, $c = 2.26 \cdot 10^5\, cm/s$.

For three different cone angles $\psi = 15°, 45°, 75°$ the first five eigenfrequencies are shown in Table 1.

ψ	Ω_i				
15°	1.534381498	3.287793796	5.213091256	7.179694419	9.160953572
45°	1.534381498	3.287793796	4.633579360	5.213091256	6.196233245
75°	1.534381498	3.204860521	3.287793796	4.578468556	4.589225785

Table 1. Eigenfrequencies dependence from cone's opening angle

Here $\Omega_i = \dfrac{2\omega_i l}{\pi c}$ and $l = b - a$.

In Table 2 one can see how changing the cone size influences the values of first eigenfrequencies ($\psi = 45°$).

b	1.5a	2a	3a	10a
Ω_1	1.202871561	1.321210018	1.534381498	2.139666391

Table 2. Eigenfrequencies dependence from cone's linear size

In Fig. 2 one can see values $\tau_\psi = \frac{\tau_{r\varphi}(b,\theta)}{G}$ where $0 \le \theta \le \psi$ and $w_\psi = w(r,\psi)$ where $a < r < b$ for the two cone angles $\psi = 45°$ and $\psi = 75°$.

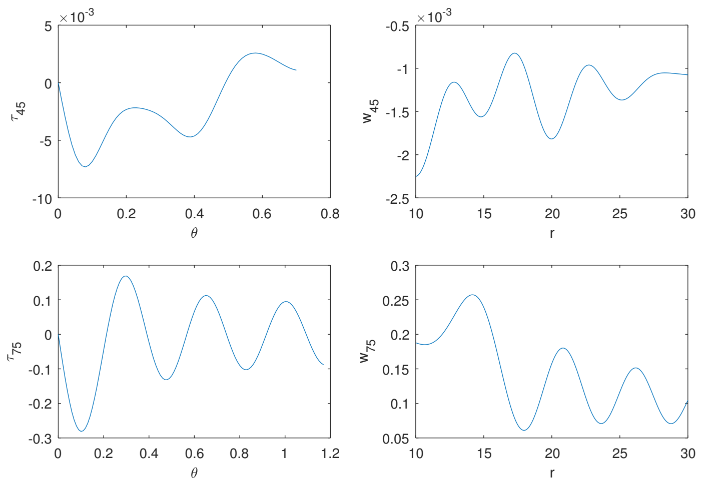


Fig. 2. The values of stress and displacement for opening angles 45° and 75°.

Conclusion. The explicit formulae for stress and displacement fields of an elastic twice truncated cone under dynamic torsion are derived in this paper. The dependencies of the eigenfrequencies on cones geometric parameters was stated. Comparison of eigenfrequencies was made to the results in [26]. In case when load is applied on the lateral surface, the first eigenfrequencies are lower than ones when load is applied through an overlay to bottom face. The proposed approach can be used in case when an elastic twice-truncated cone is weakened by a spherical crack.

Мисов К. Д.

Проблема кручення еластичного двічи-усіченного конуса

Резюме

Досліджено задачу визначення хвильового поля пружного двічі-зрізаного конуса у випадку встановлених коливань. Застосовується інтегральне перетворення Г. Я. Попова, відносно кутової координати. Таким чином, вихідна задача зводиться до одновимірної крайової задачі в області трансформант. Функція Гріна побудована для одновимірної крайової задачі. З її допомогою розв'язок одновимірної проблеми побудовано точно. Обернене перетворення Г. Я. Попова допомогло отримати розв'язок в оригінальному просторі у формі нескінченної суми. З його допомогою досліджена залежність власних частот від геометричних показників конуса. Поле напружень було знайдено за допомогою асимптотичної процедури. Графіки порівняння побудовані для різних кутів отвору.
Ключові слова: двічи-зрізаний конус, встановленні коливання, інтегральне перетворення Г. Я. Попова, власні частоти, хвильове поле, функція Гріна .

Мысов К. Д.

Проблема кручения эластичного дважды-усеченного конуса

Резюме

Исследована задача определения волнового поля упругого дважды-усеченного конуса в случае установившихся колебаний. Применяется интегральное преобразование Г. Я. Попова относительно угловой координаты. Таким образом исходная задача сводиться к одномерной краевой задаче в области трансформант. Функция Грина построена для одномерной краевой задаче. С ее помощью решение одномерной краевой задачи построено точно. Обратное преобразование Г. Я. Попова помогло получить решение в пространстве оригиналов в форме бесконечной суммы. С его помощью исследована зависимость собственных частот от геометрических показателей конуса. Поле напряжений было построено с помощью асимптотической процедуры. Графики сравнений построены для разных углов раствора.
Ключевые слова: дважды-усеченный конус, установившиеся колебания, интегральное преобразование Г. Я. Попова, собственные частоты, волновое поле, функция Грина .

References

1. Yong-Tie Xu, Li-Li Zhang. (2012). *3D Green's function for a transversely isotropic thermoelastic cone. Elsevier. Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, P. 5891–5900.
2. William, T. Chen. (1965). *Stresses in a transversely isotropic elastic cone under an asymmetric force at its vertex. ZAMP*, Vol. 16, P. 337–344.
3. Bhargava, R. D., Gupta S. C. (1968). *Stresses in an elastic cone due to an axial force at a point on the axis. Acta Mechanica*, Vol. 6, P. 255–274.
4. Roger, D. low, Harry, J. Weiss. (1962). *On a mixed boundary value problem for an infinite elastic cone. ZAMP*, Vol. 13, P.232–242.
5. Sabodash, P. F. (1989). *Elastic transverse waves initiated in an infinite medium by rotation of a circular cone. Soviet Applied Mechanics*, Vol. 25, P. 797–801.
6. Vasilenko, A. T., Pankratova N. D. (1987). *Solution of problems on the elastic equilibrium of an anisotropic inhomogeneous cone. Soviet Applied Mechanics*, Vol. 23, P. 1141–1147.

7. Gao, Y. C., Chen, S. H. (2000). *Asymptotic analysis and finite element calculation of a rubber cone under tension. Acta Mechanica*, Vol. 141, P. 149–159.
8. Popov, G., Vaisfel'd, N. (2014). *The torsion of the conical layered elastic cone. Acta Mechanica*, Vol. 225, P.67–76.
9. Thompson, T. R. (1970). *End effects in a truncated semi-infinite cone. Quart. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 23, P. 185–196.
10. Korepanova, T. O., Matveenko, V. P., Sevodina, N. V. (2013). *Numerical analysis of stress singularity at singular point of three-dimensional elastic bodies. Acta mechanica*, Vol. 224, P. 2045–2063.
11. Khomosuridze, N. G. (2003). *The thermoelastic equilibrium of the conical bodies. Appl. Maths Mechs*, Vol. 67, P. 111–120.
12. Rossikhin, Y. A., Shitikova, M. V. (2004). *The influence of the initial stresses on the dynamic instability of an anisotropic cone. Kluwer academic publisher*, Vol. 163, P.257–270.
13. Popov, G., Vaysfel'd, N. (2009). *The stress concentration in the neighborhood of the spherical crack inside the infinite elastic cone. Modern Analysis and Applications*, Vol. 191, P. 173–186.
14. Popov, G., Vaysfel'd, N. (2011). *The steady-state oscillations of the elastic infinite cone loaded at vertex by a concentrated force. Acta Mechanica*, Vol. 221, P. 261–270.
15. Vaysfel'd, N. D. (2002). *Nonstationary problem of torsion for an elastic cone with spherical crack. Materials Science*, Vol. 38, P. 698–708.
16. Kenner, V. H., Goldsmith, W. (1968). *Elastic waves in truncated cone. Experimental Mechanics*, Vol. 8, P. 442–449.
17. Kebli, B., Popov, G. Ya., Vaysfel'd N. D. (2011). *Dynamics of a truncated elastic cone. International Applied Mechanics*, Vol. 46, P. 1284–1291.
18. Akhmedov, N. K., Mekhtiyev, M. F. (1993). *Analysis of a three-dimensional problem of the theory of elasticity for an inhomogeneous truncated hollow cone. Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 57, P. 871–877.
19. Popov, G. Ya. (2012). *Torsion of an infinite truncated hollow elastic cone. Doklady Physics*, Vol. 57, P. 492–496.
20. Popov, G. Ya., Vaisfel'd N. D. (2014). *Torsion of a truncated conically layered elastic cone. Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 203, P. 135–148.
21. Kamran, A., Manouchehr, S., Mehdi, A. (2011). *Elastic solution of a two dimensional functionally graded thick truncated cone with finite length under hydrostatic combined loads. Acta Mechanica*, Vol. 217, P. 119–134.
22. Savchenko, V. I., Shokot'ko, S. G., Uspenskii, A. A. (1977) *Study of the stress-strain state of truncated elastic cones. Strength of Materials*, Vol. 9, P. 817–821.
23. Uspemskii, A. A. (1977). *State of stress of an anisotropic cone under an axisymmetric load. Soviet Applied Mechanics*, Vol. 13, P. 436–440.
24. Popov, G. Ya. (2005). *On the axisymmetrical problems of elasticity for the truncated hollow cone. Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 69, P. 417–426.
25. Vaisfel'd, N. D., Popov, G. Ya., Reut, A. V. (2014). *Axisymmetric problem of stressed state for a twice truncated cone. Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 201, P. 229–244.
26. Mysov, K., Vaysfeld, N. (2018). *Steady state torsion of twice truncated elastic cone. Young Scientist* Vol. 10, P. 118–121.

27. Popov, G. Ya. (2003). *New transforms for the resolving equations in elastic theory and new integral transforms, with applications to boundary-value problems of mechanics. International Applied Mechanics*, Vol. 39(12), P. 1400–1424.

28. Popov, G. Ya., Abdimanapov, S.A., Efimov, V.V. (1999). *Green's functions and matrix of one-dimensional boundary value problems.* Almati: Rauan, 113 p.

UDC 517.9

A. Ogulenko
Tel Aviv University, Faculty of Exact Sciences

AVERAGING METHOD FOR DYNAMIC SYSTEMS ON TIME SCALES WITH PERIODICITY

This paper aims to improve existing results about using averaging method for analysis of dynamic systems on time scales. We obtain a more accurate estimate for proximity between solutions of original and averaged systems regarding Δ–periodic and Δ-quasiperiodic systems, which are introduced for the first time. To illustrate the application of the averaging theorem for such kind of system we considered an example and conducted numerical modelling. Obtained results extend an application area for previously developed numerically–asymptotic method of solution for optimal control problems on time scales.
MSC: 34N05, 34C29.
Key words: time scale, dynamic system, averaging method, periodic in shifts, Δ-periodic in shifts, Δ-quasiperiodic in shifts.
DOI: 10.18524/2519–206x.2019.1(33).175548.

Introduction. A systematic theory of averaging method for ordinary differential equations began from the works of [7]. Further it was developing by [2] and the others. Since then, there have been many works establishing the averaging method for various types of dynamic systems: differential equations with discontinuous and multi-valued right-hand side, with Hukuhara derivative, with delay etc. The review of these results one can find in [11].

On the other hand, the theory of dynamic equations on time scales was introduced by [5] in order to unify continuous and discrete calculus. In detail, the description of time scale analysis can be found in the [3, 4].

As far as we know the averaging method in connection with the systems on time scales was first examined by [12]. In particular, there were studied conditions of proximity between solutions of the original system on time scale and some generalized differential equation. From the practical point of view, the interpretation of the last equation's solution in terms of given application is somewhat unclear.

Previously we established the scheme of full averaging for dynamic systems on time scales ([9]) and in our approach the averaged system has the same time nature as the original one. Recently we also established the analogous result for partially averaged systems, [8]. On the base of this scheme, it was developed the numerically–asymptotic method of solution for optimal control problems on time scales ([6, 10]).

Auxiliary arguments. We now present some basic information about time scales according to [4]. A time scale is defined as a nonempty closed subset of the set of real numbers and usually denoted by $\mathbb{T}$. The properties of the time scale are determined by the following three functions: 1) the forward-jump operator $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$; 2) the backward-jump operator $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ (in this

Received 13.01.2019

case, we set $\inf \varnothing = \sup \mathbb{T}$ and $\sup \varnothing = \inf \mathbb{T}$); 3) the granularity function $\mu(t) = \sigma(t) - t$.

The behaviour of the forward- and backward-jump operators at a given point of the time scale specifies the type of this point. If $t < \sigma(t)$, then t is called right–scattered, if $t = \sigma(t)$ — right–dense. Also, point will be called left–scattered when $\rho(t) < t$ and left–dense when $\rho(t) = t$. Finally, point is called dense if it is right-dense and left–dense at the same time and isolated if it is both right–scattered and left-scattered.

Important role in time scales calculus has the set $\mathbb{T}^\kappa$ which is derived from the time scale $\mathbb{T}$ as follows: if $\mathbb{T}$ has a left–scattered maximum m, then $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} - \{m\}$. Otherwise, $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$. In what follows, we set $[a, b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a \leqslant t \leqslant b\}$.

Definition 1 ([4]). *Let $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ and $t \in \mathbb{T}^\kappa$. The number $f^\Delta(t)$ is called Δ-derivative of function f at the point t, if $\forall \varepsilon > 0$ there exists a neighborhood U of the point t (i. e., $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}, \delta < 0$) such that*

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leqslant \varepsilon|\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U.$$

Definition 2 ([4]). *If $f^\Delta(t)$ exists $\forall t \in \mathbb{T}^\kappa$, then $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ is called Δ-differentiable on $\mathbb{T}^\kappa$. The function $f^\Delta(t) : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}$ is called the delta-derivative of a function f on $\mathbb{T}^\kappa$.*

If f is differentiable with respect to t, then $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^\Delta(t)$.

Definition 3 ([4]). *The function $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ is called rd-continuous if it is continuous at the right-dense points and has finite left limits at the left-dense points. The set of these functions is denoted by $C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}; \mathbb{R})$.*

The indefinite integral on the time scale takes the form $\int f(t)\Delta t = F(t) + C$, where C is integration constant and $F(t)$ is the preprimitive for $f(t)$. If the relation $F^\Delta(t) = f(t)$ where $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ is an rd-continuous function, is true for all $t \in \mathbb{T}^\kappa$ then $F(t)$ is called the primitive of the function $f(t)$. If $t_0 \in \mathbb{T}$ then $F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\Delta s$ for all t. The definite Δ-integral on time scale interval is defined by Newton–Leibniz formula.

Definition 4 ([4]). *A function $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ is called regressive (positive regressive) if*

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0, \quad (1 + \mu(t)p(t) > 0), \qquad t \in \mathbb{T}^\kappa.$$

The set of regressive (positive regressive) and rd-continuous functions is denoted by $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T})$ ($\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^+(\mathbb{T})$).

A function p from the class $\mathcal{R}$ can be associated with a function $e_p(t, t_0)$ which is the unique solution of Cauchy problem

$$y^\Delta = p(t)y, \quad y(t_0) = 1.$$

The function $e_p(t, t_0)$ is an analog, by its properties, of the exponential function defined on $\mathbb{R}$.

In what follows we heavily use the next result.

Theorem 1 (Substitution rule, [4], theorem 1.98). *Assume $\nu : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ is strictly increasing and $\tilde{\mathbb{T}} = \nu(\mathbb{T})$ is a time scale. If $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ is an rd-continuous function and ν is differentiable with rd-continuous derivative, then for $a, b \in \mathbb{T}$,*

$$\int\limits_a^b g(s)\nu^{\Delta}(s)\,\Delta s = \int\limits_{\nu(a)}^{\nu(b)} g\left(\nu^{-1}(s)\right)\,\tilde{\Delta} s. \tag{1}$$

Various kinds of periodicity on time scale was presented and studied by [1]. The basic framework is as follows. For arbitrary non-empty susbet $\mathbb{T}^*$ of the time scale $\mathbb{T}$ including a fixed number t_0 the operators $\delta_{\pm} : [t_0, +\infty) \times \mathbb{T}^* \to \mathbb{T}^*$ are introduced. The operators δ_+ and δ_- associated with the initial point $t_0 \in \mathbb{T}^*$ are said to be forward and backward shift operators on the set $\mathbb{T}^*$, respectively. The first argument in $\delta_{\pm}(s,t)$ is called the shift size. The values $\delta_+(s,t)$ and $\delta_-(s,t)$ indicate translation of the point $t \in \mathbb{T}^*$ to the right and left by s units, respectively.

Definition 5 ([1]). *Let $\mathbb{T}$ be a time scale with the shift operators $\delta_{\pm}$ associated with the initial point $t_0 \in \mathbb{T}^*$. The time scale $\mathbb{T}$ is said to be periodic in shifts $\delta\pm$ if there exists a $p \in (t_0, \infty)_{\mathbb{T}^*}$ such that $(p,t) \in D_{\mp}$ for all $t \in \mathbb{T}^*$. Furthermore, if*

$$P = \inf\left\{p \in (t_0,\infty)_{\mathbb{T}^*} : (p,t) \in D_{\mp} \text{ for all } t \in \mathbb{T}^*\right\} \neq t_0,$$

then P is called the period of the time scale $\mathbb{T}$.

Definition 6 ([1]). *Let $\mathbb{T}$ be a time scale that is periodic in shifts $\delta_{\pm}$ with the period P. We say that a real valued function f defined on $\mathbb{T}^*$ is periodic in shifts $\delta_{\pm}$ if there exists a $T \in [P,\infty)_{\mathbb{T}^*}$ such that $(T,t) \in D_{\pm}$ and $f(\delta_{\pm}(T,t)) = f(t)$ for all $t \in \mathbb{T}^*$. The smallest such a number $T \in [P,\infty)_{\mathbb{T}^*}$ is called the period of f.*

Definition 7 ([1]). *Let $\mathbb{T}$ be a time scale that is periodic in shifts $\delta_{\pm}$ with the period P. We say that a real valued function f defined on $\mathbb{T}^*$ is Δ-periodic in shifts $\delta_{\pm}$ if there exists a $T \in [P,\infty)_{\mathbb{T}^*}$ such that $(T,t) \in D_{\pm}$ for all $t \in \mathbb{T}^*$, the shifts $\delta_{\pm}(T,t)$ are Δ-differentiable with rd-continuous derivative with respect to second argument and*

$$f(\delta_{\pm}(T,t))\delta_{\pm}^{\Delta}(T,t) = f(t)$$

for all $t \in \mathbb{T}^*$ The smallest such a number $T \in [P,\infty)_{\mathbb{T}^*}$ is called the period of f.

It was shown in [1] that the following propositions about periodicity in shifts are true.

Proposition 1 ([1]). *If $\delta_+(s,\cdot)$ is Δ-differentiable in its second argument, then $\delta_+^{\Delta}(s,\cdot) > 0$.*

Proposition 2 ([1]). *Let $\mathbb{T}$ be a time scale that is periodic in shifts $\delta_{\pm}$ with the period P and f a Δ-periodic in shifts $\delta_{\pm}$ with the period $T \in [P,\infty)_{\mathbb{T}^*}$. Suppose that $f \in C_{rd}(\mathbb{T})$, then*

$$\int\limits_{t_0}^{t} f(s)\Delta s = \int\limits_{\delta_{\pm}^T(t_0)}^{\delta_{\pm}^T(t)} f(s)\Delta s.$$

Main Results. Let $\mathbb{T}$ be an unbounded above time scale that is periodic in shifts $\delta_\pm$ with period $P \in (t_0, +\infty)_{\mathbb{T}^*}$. For simplicity we denote by $\delta_\pm^T(t)$ the shift operators with period T and by $\delta_{\pm T}^{(i)}(t)$ or $\delta^{(i)}(t)$ the i-th power of shift operator composition, dropping argument sometimes.

Consider on $\mathbb{T}$ the following dynamic system:

$$x^\Delta = \varepsilon X(t,x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Here $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $X(t,x)$ is n-dimensional vector–function such that every component is Δ-periodic in shifts $\delta_\pm(T,t)$ function, $T \in [P, +\infty)_{\mathbb{T}^*}$.

In correspondence to this original system, we put another dynamic system on the same time scale as follows:

$$\xi^\Delta = \varepsilon \widetilde{X}(t,\xi), \quad \xi(t_0) = x_0, \tag{3}$$

where

$$\widetilde{X}(t,x) = \left\{ \widetilde{X}_i(x) = \frac{1}{\delta^{(i+1)}(t_0) - \delta^{(i)}(t_0)} \int\limits_{\delta^{(i)}(t_0)}^{\delta^{(i+1)}(t_0)} X(t,x)\Delta t, \right. \\ \left. \delta^{(i)}(t_0) \leqslant t < \delta^{(i+1)}(t_0), \quad i = 0,1,2,\ldots \right\}. \tag{4}$$

The last system (4) we call partially averaged system corresponding to the original one.

Taking into account Δ-periodical properties of the function $X(t,x)$, it is easy to see, that

$$\widetilde{X}_i(\xi) = \frac{\int\limits_{\delta^{(i)}(t_0)}^{\delta^{(i+1)}(t_0)} X(t,\xi)\Delta t}{\delta^{(i+1)}(t_0) - \delta^{(i)}(t_0)} = \frac{\int\limits_{\delta^{(i-1)}(t_0)}^{\delta^{(i)}(t_0)} X(t,\xi)\Delta t}{\delta^{(i+1)}(t_0) - \delta^{(i)}(t_0)} = \cdots = \frac{\int\limits_{t_0}^{\delta_+^T(t_0)} X(t,\xi)\Delta t}{\delta^{(i+1)}(t_0) - \delta^{(i)}(t_0)},$$

that is,

$$\widetilde{X}_i(\xi) = \frac{\delta_+^T(t_0) - t_0}{\delta^{(i+1)}(t_0) - \delta^{(i)}(t_0)} \widetilde{X}_0(\xi), \qquad i = 0,1,2,\ldots.$$

We now prove that under general conditions there exists proximity between solutions of systems (2) and (3).

Theorem 2. *Let $Q = \Big\{ t \in \mathbb{T}, x \in D \Big\}$, $x(t)$ and $\xi(t)$ denote solutions of the Cauchy problems* (2) *and* (3) *respectively. Now suppose the following conditions hold in Q:*

1) *every component of vector–function $X(t,x)$ is Δ-periodic in shifts $\delta_\pm(T,t)$ function, $T \in [P, +\infty)_{\mathbb{T}^*}$.*
2) *the function $X(t,x)$ is rd-continuous with respect to t and regressive. Moreover, $X(t,x)$ satisfies conditions of existence and uniqueness of solution for Cauchy problem such that*

$$\forall (t,x) \in Q \quad \|X(t,x)\| \leqslant M, M > 0,$$

$X(t,x)$ is Lipschitz continuous with respect to x with constant $\lambda > 0$, i. e.

$$\|X(t,x_1) - X(t,x_2)\| \leqslant \lambda \|x_1 - x_2\| \qquad \forall (t,x_1),(t,x_2) \in Q\ ;$$

3) there exists a constant $K > 0$ such that the following holds for all $i \geqslant 1$:

$$\delta^{(i+1)}(t_0) - \delta^{(i)}(t_0) \leqslant K;$$

4) the solution $\xi(t)$ of averaged system (3) with initial value $\xi(t_0) = x_0 \in D' \subset D$ is well defined for all $t \in \mathbb{T}^\kappa$ and with its ρ-neighbourhood lies in D.

Then for any $L > 0$ there exists $\varepsilon_0(L) > 0$ such that for $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ and $t \in \left[t_0, t_0 + L\varepsilon^{-1}\right] \cap \mathbb{T}$ the following estimate holds:

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant C\varepsilon. \tag{5}$$

Proof. It is easy to see that $\widetilde{X}(t,x)$ is bounded and Lipschitz continuous with respect to the second argument. It directly follows from the way of construction (4). So, we have for any fixed $t \in \mathbb{T}$

$$\left\|\widetilde{X}(t,x') - \widetilde{X}(t,x'')\right\| \leqslant \lambda \|x' - x''\|.$$

Therefore, conditions 1) and 2) imply the existence and uniqueness of solutions for both original system and averaged one. Moreover, these solutions can be continued until $x(t) \in D$ (accordingly, $\xi(t) \in D$).

Let us write both original and partially averaged systems in integral form:

$$x(t) = x_0 + \varepsilon \int_{t_0}^{t} X(s,x(s))\Delta s, \qquad \xi(t) = x_0 + \varepsilon \int_{t_0}^{t} \widetilde{X}(s,\xi(s))\Delta s.$$

In the same way as we did establishing the scheme of full averaging for dynamic systems on time scales in [9], let us estimate the norm of difference between solutions:

$$\begin{aligned} \|x(t) - \xi(t)\| &= \left\| \varepsilon \int_{t_0}^{t} \left[X(s,x(s)) - \widetilde{X}(s,\xi(s)) \right] \Delta s \right\| \leqslant \\ &\leqslant \lambda\varepsilon \int_{t_0}^{t} \|x(s) - \xi(s)\| \Delta s + \varepsilon \left\| \int_{t_0}^{t} \left[X(s,\xi(s)) - \widetilde{X}(s,\xi(s)) \right] \Delta s \right\|. \end{aligned}$$

We will estimate the last summand on the time scale interval $\left[t_0, t_0 + L\varepsilon^{-1}\right] \cap \mathbb{T}$.

By $\varphi(t,\xi)$ denote the last integrand:

$$\varphi(t,\xi) = X(t,\xi(s)) - \widetilde{X}(t,\xi(s)).$$

Consider time interval $\left[\delta^{(i)}(t_0), \delta^{(i+1)}(t_0)\right]$. By construction, on this interval $\widetilde{X}(t,\xi) = \widetilde{X}_i(\xi)$ and

$$\int_{\delta^{(i)}(t_0)}^{\delta^{(i+1)}(t_0)} \varphi(s,\xi_i)\Delta s = 0,$$

where $\xi_i = \xi\left(\delta^{(i)}(t_0)\right) = const.$

Further,

$$\left\|\int_{t_0}^{t}\varphi(s,\xi(s))\Delta s\right\| \leqslant \left\|\int_{t_0}^{\delta_+^{(N)}(t_0)}\varphi(s,\xi(s))\Delta s\right\| + \left\|\int_{\delta^{(N)}(t_0)}^{t}\varphi(s,\xi(s))\Delta s\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\sum_{i=0}^{N-1}\int_{\delta^{(i)}(t_0)}^{\delta^{(i+1)}(t_0)}[\varphi(s,\xi)-\varphi(s,\xi_i)]\Delta s\right\| + \int_{\delta^{(N)}(t_0)}^{t}\|\varphi(s,\xi(s))\|\,\Delta s \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{N-1}\int_{\delta^{(i)}(t_0)}^{\delta^{(i+1)}(t_0)}\|\varphi(s,\xi)-\varphi(s,\xi_i)\|\,\Delta s + 2M\left(t-\delta^{(N)}(t_0)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{N-1}2\lambda\int_{\delta^{(i)}(t_0)}^{\delta^{(i+1)}(t_0)}\|\xi(s)-\xi_i\|\,\Delta s + 2M\left(\delta^{(N+1)}(t_0)-\delta^{(N)}(t_0)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{N-1}2\lambda\cdot\varepsilon M\left(\delta^{(i+1)}(t_0)-\delta^{(i)}(t_0)\right) + 2MK \leqslant$$

$$\leqslant 2\lambda\cdot\varepsilon M\sum_{i=0}^{N-1}\left(\delta^{(i+1)}(t_0)-\delta^{(i)}(t_0)\right) + 2MK =$$

$$= 2\lambda\cdot\varepsilon M\left(\delta^{(N)}(t_0)-t_0\right) + 2MK =$$

$$= 2\lambda\cdot\varepsilon M\cdot\frac{L}{\varepsilon} + 2MK = 2M\left(\lambda L + K\right).$$

Thus we have

$$\begin{aligned}\|x(t)-\xi(t)\| &\leqslant \lambda\varepsilon\int_{t_0}^{t}\|x(s)-\xi(s)\|\,\Delta s + \varepsilon\left\|\int_{t_0}^{t}\varphi(s,\xi(s))\Delta s\right\| \leqslant\\ &\leqslant \lambda\varepsilon\int_{t_0}^{t}\|x(s)-\xi(s)\|\,\Delta s + \varepsilon\cdot 2M\left(\lambda L + K\right).\end{aligned}$$

Taking into account Gronwall's inequality and properties of the exponential function on time scale ([3]), we obtain as we did before

$$\|x(t)-\xi(t)\| \leqslant \varepsilon\cdot 2M\left(\lambda L+K\right)\cdot e_{\lambda\varepsilon}(t,t_0) < \varepsilon\cdot 2M\left(\lambda L+K\right)\cdot e^{\lambda L},$$

that is,

$$\|x(t)-\xi(t)\| < C\varepsilon,$$

where $C = 2M\left(\lambda L+K\right)\cdot e^{\lambda L}$ and this concludes the proof. ∎

It is clear that trivial time scales $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, and $h\mathbb{Z}$ are periodic in shifts $\delta_{\pm}(T,t) = T \pm t$ for various periods T. Also, any periodic in shifts $\delta_{\pm}(T,t)$ function is Δ-periodic in such cases. Moreover, condition 3) of the last theorem is trivially satisfied. Thus proved theorem is the closest analogue of the averaging theorem for ordinary differential equations with a periodic right-hand side.

At the same time to find a good example of periodic in shifts non-trivial time scales appears to be a hard problem. Finding Δ-periodic functions defined on such time scales is a yet harder problem. For example, consider some non-trivial time scale with a condensation point. By definition, a Δ-periodic function has to compensate decreasing length of the integration interval by increasing magnitude. Hence function needs to be unbounded as time tends to condensation point and we cannot apply averaging theorem.

Example 1. *Let* $\mathbb{T} = \left\{ t_n = 1 - \dfrac{1}{q^n}, n \in \mathbb{N}_0, q > 1 \right\} \cup \{1\}$. *This is a time scale with condensation point* $t = 1$, *forward jump operator* $\sigma(t) = \frac{q-1+t}{q}$, *and graininess* $\mu(t) = \dfrac{q-1}{q}(1-t)$. *Forward shift can be defined as follows:*

$$\delta_{+}(T,t) = \frac{q^T + t - 1}{q^T}.$$

It is easy to compute $\delta_{+}^{\Delta}(T,t) = q^{-T}$. *We found out a simple function* $f(t) = \dfrac{1}{1-t}$ *such that* $f\left(\delta_{+}(T,t)\right)\delta_{+}^{\Delta}(T,t) = f(t)$, *i. e. the function* $f(t)$ *is* Δ*-periodic in shifts. However* $f(t)$ *is unbounded above as* $t \to 1$.

Analyzing the example, we found one more possibility to obtain a more accurate estimate for proximity between solutions of the original and averaged systems.

Definition 8. *Let* $\mathbb{T}$ *be a periodic in shift* $\delta_{+}(P,t)$ *time scale with a period* P. *A function* $f(t)$ *is called geometric* Δ*-quasiperiodic function with period* $T > P$ *and factor* γ *if the following condition holds:*

$$f\left(\delta_{+}(T,t)\right)\delta_{+}^{\Delta}(T,t) = \gamma f(t). \tag{6}$$

Using substitution rule (1) we can easily prove the important property of geometric Δ-quasiperiodic function.

Lemma 1. *Let* $\mathbb{T}$ *be a time scale that is periodic in shift* δ_{+} *with the period* P *and* f *a geometric* Δ*-quasiperiodic in shift* δ_{+} *with the period* $T \in [P,\infty)_{\mathbb{T}^*}$. *Suppose that* $f \in C_{rd}(\mathbb{T})$, *then*

$$\int\limits_{t_0}^{t} f(s)\Delta s = \gamma \int\limits_{\delta_{+}^{T}(t_0)}^{\delta_{+}^{T}(t)} f(s)\Delta s.$$

Proof. Substituting $\nu(s) = \delta_{+}(T,s)$ and $g(s) = f\left(\delta_{+}(T,t)\right)$ in (1) and taking (6) into account we obtain the statement of lemma by direct calculation.

Now suppose $X(t,x)$ in (2) is geometric Δ-quasiperiodic with period T and factor γ for any fixed x. Consider dynamic system

$$\xi^{\Delta} = \varepsilon \widehat{X}(t,\xi), \quad \xi(t_0) = x_0, \tag{7}$$

where

$$\widehat{X}(t,x) = \left\{ \widehat{X}_i(x) = \frac{\gamma^i}{\delta^{(i+1)}(t_0) - \delta^{(i)}(t_0)} \int\limits_{t_0}^{\delta_+(T,t_0)} X(t,x)\Delta t, \right. \\ \left. \delta^{(i)}(t_0) \leqslant t < \delta^{(i+1)}(t_0), \quad i = 0,1,2,\dots \right\}. \tag{8}$$

We can prove now that there exists proximity between solutions of systems (2) and (7) when $X(t,x)$ is a geometric Δ-quasiperiodic function.

Theorem 3. *Suppose the conditions 2)–4) of Theorem 2 hold in Q, and besides this, every component of vector–function $X(t,x)$ is geometric Δ-quasiperiodic function with period T and factor γ for any fixed x.*

Then for any $L > 0$ there exists $\varepsilon_0(L) > 0$ such that for $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ and $t \in \left[t_0, t_0 + L\varepsilon^{-1}\right] \cap \mathbb{T}$ the following estimate holds:

$$\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant C\varepsilon, \tag{9}$$

where $x(t)$ and $\xi(t)$ denote solutions of the Cauchy problems (2) *and* (7) *respectively.*

Proof. From quasiperiodical properties of the function $X(t,x)$, it follows easily that

$$\int\limits_{\delta^{(i)}(t_0)}^{\delta^{(i+1)}(t_0)} \varphi(s,\xi_i)\Delta s = 0, \qquad i = 0,1,\dots,$$

where $\varphi(t,\xi) = X(t,\xi(s)) - \widehat{X}(t,\xi(s))$ and $\xi_i = \xi\left(\delta^{(i)}(t_0)\right) = const$. Thus the argumentation of previous proof can be repeated almost literally. For brevity, we omit the details.

Example 2. *Let us use time scale from previous example. Consider dynamic system*

$$x^{\Delta} = \varepsilon(-1)^{-\frac{\ln(1-t)}{\ln q}}x, \quad x(0) = 1, \quad t \in \mathbb{T},$$

that is, $X(t,x) = (-1)^{-\frac{\ln(1-t)}{\ln q}}x$. We get

$$\begin{aligned} X\left(\delta_+(T,t),x\right)\delta_+^{\Delta}(T,t) &= x \cdot (-1)^{-\frac{\ln\left(1-\frac{q^T+t-1}{q^T}\right)}{\ln q}} \cdot \frac{1}{q^T} = \\ &= x \cdot (-1)^{-\frac{\ln(1-t)-\ln q^T}{\ln q}} \cdot \frac{1}{q^T} = \\ &= x \cdot (-1)^{-\frac{\ln(1-t)}{\ln q}} \cdot (-1)^T \cdot \frac{1}{q^T} = \\ &= X(t,x) \cdot (-1)^T \cdot \frac{1}{q^T}. \end{aligned}$$

This implies that $X(t,x)$ is geometric Δ-quasiperiodic with period $T=2$ and factor $\gamma = q^{-T} = q^{-2}$.

Further, $\delta^{(i+1)}(0) - \delta^{(i)}(0) = \dfrac{q^T-1}{q^{T(i+1)}} \leqslant \dfrac{q^T-1}{q^T}$. *Thus we have*

$$\widehat{X}_i(x) = \frac{\left(q^{-T}\right)^i}{\delta^{(i+1)}(0)-\delta^{(i)}(0)} \int\limits_0^{\delta_+(T,0)} X(t,x)\Delta t =$$

$$= \frac{q^2}{q^2-1} \int\limits_0^{1-\frac{1}{q^2}} X(t,x)\Delta t =$$

$$= \frac{q^2}{q^2-1} \cdot x \cdot \frac{q-1}{q^2} = x \cdot \frac{1}{q+1}.$$

Hence we have two systems on the same time scale:

$$\begin{cases} x^\Delta = \varepsilon \cdot (-1)^{-\frac{\ln(1-t)}{\ln q}} x, \\ x(0) = 1, \end{cases} \qquad \textit{and} \qquad \begin{cases} \xi^\Delta = \varepsilon \cdot \dfrac{\xi}{q+1}, \\ \xi(0) = 1. \end{cases}$$

It is not too hard to find exact solution of the linear equation

$$y^\Delta = py, \quad y(0) = y_0, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Indeed, all $t \neq 1$ are isolated points and thus $y(\sigma(t)) = y(t) + \mu(t) y^\Delta(t)$. Starting from $t=0$ we get $y\left(\sigma^k(0)\right) = y_0 \prod\limits_{i=0}^{k-1}\left[1 + p\mu\left(\sigma^i(0)\right)\right]$. This yields that

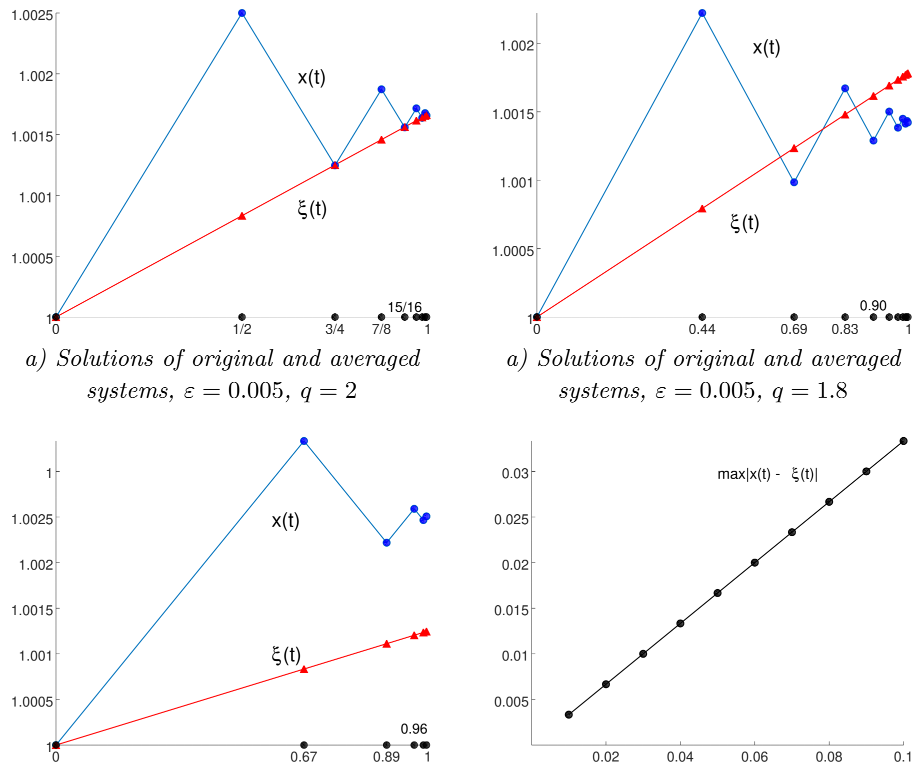
$$y(t) = y_0 \prod_{i=0}^{k-1} \left[1 + \frac{p(q-1)}{q^{i+1}}\right], \quad k = -\frac{\ln(1-t)}{\ln q}, \quad t \neq 1.$$

Actually $y(t) = e_p(t,0)$, i. e. exponential function on time scale $\mathbb{T}$.

In the same way, we obtain exact solutions of original and averaged systems:

$$x(t) = \prod_{i=0}^{k-1} \left[1 + \varepsilon \cdot \frac{(-1)^i(q-1)}{q^{i+1}}\right],$$
$$\xi(t) = \prod_{i=0}^{k-1} \left[1 + \varepsilon \cdot \frac{q-1}{q^{i+1}(q+1)}\right].$$

It seems to be impossible to find a precise analytical estimate of difference $|x(t)-\xi(t)|$ in terms of ε. Instead we conducted numerical modelling and found empirical dependence between proximity of solutions and small parameter ε. The results of modelling are presented in Figure 1.



a) Solutions of original and averaged systems, $\varepsilon = 0.005$, $q = 2$

a) Solutions of original and averaged systems, $\varepsilon = 0.005$, $q = 1.8$

a) Solutions of original and averaged systems, $\varepsilon = 0.005$, $q = 3$

d) Absolute difference between solutons in regard to ε

Fig. 1. Numerical modelling of averaging method for quasiperiodic system on time scale $\mathbb{T} = \left\{ t_n = 1 - \dfrac{1}{q^n}, n \in \mathbb{N}_0, q > 1 \right\} \cup \{1\}$

Conclusion. The aim of this paper is to develop our previous results for the averaging method on time scales. Following [1] we considered Δ–periodic systems and obtained a more accurate estimate for proximity between solutions of original and averaged systems. Moreover, the same result was obtained for dynamic systems with a quasiperiodic right-hand side, which are introduced for the first time. To illustrate the application of the averaging theorem for such kind of system we considered an example and conducted numerical modelling. Obtained results can be used to improve previously developed numerically–asymptotic method of solution for optimal control problems on time scales.

Огуленко О. П.

Метод усереднення для динамічних систем на часових шкалах з періодичністю

Резюме

Метою цієї статті є розвиток методу усереднення для аналіза динамічних систем на часових шкалах. Отримана більш точна оцінка близькості розв'язків вихідної та усередненної систем для Δ-періодичного та Δ-квазіперіодичного випадків, причому остіннній тип систем уводиться вперше. Для іллюстрації застосування теореми усереднення ми побудували та чисельно дослідили низку прикладів. Отримані результати розширяють сферу застосування розробленого раніше чисельно–асимптотичного методу розв'язання задач оптимального керування на часових шкалах.

Ключові слова: часова шкала, динамічна система, метод усереднення, периодична відносно зсувів, Δ-періодична відносно зсувів, Δ-квазіперіодична відносно зсувів .

Огуленко А. П.

Метод усреднения для динамических систем на временных шкалах с периодичностью

Резюме

Целью этой статьи является развитие метода усреднения для анализа динамических систем на временных шкалах. Получена более точная оценка близости решений исходной и усредненной систем для Δ-периодического и Δ-квазипериодического случая, причем последний тип систем вводится впервые. Для иллюстрации применения теоремы усреднения мы построен и численно исследован ряд примеров. Полученные результаты расширяют сферу применения ранее разработанного численно–асимптотического метода решения задач оптимального управления на временных шкалах.

Ключевые слова: временная шкала, динамическая система, метод усреднения, периодическая относительно смещений, Δ-периодическая относительно смещений, Δ-квазипериодическая относительно смещений .

References

1. Adivar, M. (2013). A new periodicity concept for time scales. *Mathematica Slovaca*, vol. 63, 4, 817–828.
2. Bogolyubov, N. N., Mitropolskii, Y. A. (1961). *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations.* Gordon & Breach, Delhi.
3. Bohner, M., Peterson, A. (2002). *Advances in Dynamic Equations on Time Scales.* Springer Science & Business Media.
4. Bohner, M., Peterson, A. (2012). *Dynamic equations on time scales: An introduction with applications.* Springer Science & Business Media.
5. Hilger, S. (1988) *Ein maßkettenkalkül mit anwendung auf zentrumsmannigfaltigkeiten.* Ph.D. thesis, Universität Würzburg.
6. Kichmarenko, O. D., Ogulenko, A. P. (2017). Averaging of multicriteria control problems of systems on time scales. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, vol. 56, 1, 33–43.
7. Krylov, N. M., Bogolyubov, N. N. (1947). *Introduction to Nonlinear Mechanics.* Princeton Univ. Press, Princeton.

8. Ogulenko, A. P. (2017). Partial averaging of the systems on time scales. *Researches in mathematics and mechanics*, vol. 22, 1(29), 32–45.
9. Ogulenko, A. P., Kichmarenko, O. D. (2012). A scheme of full averaging on time scales. *Visn. Odes. Nat. Univ. Mat. Mekh.*, vol. 17, 4(16), 67–77.
10. Ogulenko, A. P., Kichmarenko, O. D. (2016). Averaging of the problem of optimal control on time scales. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 212, 3, 290–304.
11. Plotnikov, V. A. (1992). *Method of Averaging in the Problems of Control*. Lybid, Kiev, Odessa.
12. Slavík, A. (2012). Averaging dynamic equations on time scales. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 388, 2, 996–1012.

UDC 517.9

R. M. Tatsij, O. Yu. Chmyr, O. O. Karabyn
Lviv State University of Life Safety

THE TOTAL FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF HYPERBOLIC TYPE WITH PIECEWISE CONSTANT COEFFICIENTS AND δ-SINGULARITIES

For the first time a new formal solving scheme of the general first boundary value problem for a hyperbolic type equation with piecewise constant coefficients and δ-singularities was proposed and justified. In the basis of the solving scheme is a concept of quasi-derivatives, a modern theory of systems of linear differential equations, the classical Fourier method and a reduction method. The advantage of this method is a possibility to examine a problem on each breakdown segment and then to combine obtained solutions on the basis of matrix calculation. Such an approach allows the use of software tools for solving the problem.
MSC: 34B05.
Key words: quasi-differential equation, the boundary value problem, the Cauchy matrix, the Dirac function, the eigenvalues problem, the method of Fourier and the method of eigenfunctions.
DOI: 10.18524/2519–206x.2019.1(33).175549.

Introduction. Methods for solving nonstationary boundary value problems can be divided into direct methods which basis includes the separation of variables method, method of sources (Green's function method), method of integral transforms, approximate methods and numerical methods.

The scheme proposed in this article belongs to the direct methods for solving boundary value problems. In the basis of this scheme is the concept of quasi-derivatives [10] that lets to bypass the problem of multiplication of generalized functions.

First of all a mixed problem for the heat equation with piecewise continuous coefficients by the general boundary conditions of the first kind [11] was solved.

The general boundary value problems for hyperbolic equation with piecewise continuous on spatial variable coefficients and right parts was considered in [7].

This article examines the general first boundary value problem for a hyperbolic type equation with piecewise constant coefficients and δ - singularities. With the use of the reduction method solving of such a problem is reduced to finding a solution of the stationary inhomogeneous boundary value problem with the initial boundary conditions and the mixed problem with the zero boundary conditions for an inhomogeneous equation.

Main Results

1. Main designations, formulation of the problem and supporting statements. Let I be an open interval of the real axis $\mathbb{R}$, $[x_0; x_n] \subset I$ – segment of the real axis; $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} \ldots < x_{n-1} < x_n = l$ – arbitrary partition of the segment $[x_0; x_n]$ of the real axis Ox into n parts.

Received XX.XX.XXXX

Let's declare the main designations:
θ_i – characteristic function of the interval $[x_i; x_{i+1})$, that is

$$\theta_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}), \end{cases} \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Remark 1. Let a_{1i}, a_{2i}, $i = \overline{0, n-1}$ be real numbers. If $a_1 = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_{1i}\theta_i$, $a_2 = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_{2i}\theta_i$, then $a_1 \cdot a_2 = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_{1i} \cdot a_{2i}\theta_i$. In particular, if $a = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i\theta_i$, then $\frac{1}{a} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i^{-1}\theta_i$.

Let's declare $BV_{loc}^{+}(I)$ as a class of continuous from the right functions, locally bounded on I variation [2].

Let m_i, $i = \overline{0, n-1}$, M_i, $i = \overline{1, n-1}$, λ_i, $i = \overline{0, n-1}$ be positive real numbers, g_i, $i = \overline{0, n-1}$, s_i, $i = \overline{1, n-1}$ – real numbers and $\delta_i = \delta_i(x - x_i) - \delta$ - Dirac's function with a carrier at the point $x = x_i \in I$. Let's define
$m(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i\theta_i + \sum\limits_{i=1}^{n-1} M_i\delta(x - x_i)$; $\lambda(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i\theta_i$;
$f(x) = g(x) + s(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} g_i\theta_i + \sum\limits_{i=1}^{n-1} s_i\delta_i(x - x_i)$.

Note that if $M(x)$ is an antiderivative for $m(x)$, then $m(x) \stackrel{def}{=} M'(x)$. We assume here, that the function $M(x)$ is extended arbitrarily (for example, zero) on the interval $I/[x_0; x_n]$.

Let's examine the general first boundary value problem for a hyperbolic type equation

$$m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x), \quad x \in (x_0; x_n), \quad t \in (0; +\infty), \tag{1}$$

with the boundary conditions

$$\begin{cases} u(x_0, t) = \psi_0(t), \\ u(x_n, t) = \psi_n(t), \end{cases} \quad t \in [0; +\infty) \tag{2}$$

and the initial conditions

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x), \end{cases} \quad x \in [x_0; x_n], \tag{3}$$

where $\psi_0(t)$, $\psi_n(t) \in C^2(0; +\infty)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ are piecewise continuous on $(x_0; x_n)$.

The method of reduction for finding a solution of the problem is described in detail in [1, 12] for example. In accordance with this method we can find a solution to the problem as a sum of two functions

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t). \tag{4}$$

Let's choose one of the functions for example $w(x,t)$ in a particular method, then the $v(x,t)$ function will be defined clearly.

2. Building the function $w(x,t)$. Let's define a function $w(x,t)$ as a solution of a boundary value problem

$$\left(\lambda(x){w_x}'\right)_x{}' = -f(x) \tag{5}$$

$$\begin{cases} w(x_0,t) = \psi_0(t), \\ w(x_n,t) = \psi_n(t), \end{cases} \quad t \in [0;+\infty). \tag{6}$$

Note that a variable t is considered as a parameter here.

In the basis of the solving method of the problem (5), (6) is the concept of quasi-derivatives [9].

Let's introduce the vectors $\overline{W} = \begin{pmatrix} w \\ w^{[1]} \end{pmatrix}$, where $w^{[1]} = \lambda {w_x}'$, $\overline{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g(x) \end{pmatrix}$, $\overline{S}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -s_i \end{pmatrix}$, $\overline{S} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \overline{S}_i \cdot \delta_i$. Using these definitions, the quasi-differential equation (5) simplifies to the equivalent system of differential equations of the first order

$$\overline{W}_x{}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \overline{W} + \overline{G} + \overline{S}. \tag{7}$$

As a solution of the system (7) we take a vector function $\overline{W}(x,t)$ that belongs to the $BV^+_{loc}(I)$ class by the x variable and fulfills the system (7) in a generalized sense [9].

Boundary conditions (6) can be written down in vector form

$$P \cdot \overline{W}(x_0,t) + Q \cdot \overline{W}(x_n,t) = \overline{\Gamma}\,(t)\,, \tag{8}$$

where $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{\Gamma}\,(t) = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_n(t) \end{pmatrix}$.

Let $w_i(x,t)$, $w_i^{[1]}(x,t)$ and $g_i(x)$ be defined on the interval $[x_i; x_{i+1})$. Let's define

$$w(x,t) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i(x,t)\theta_i. \tag{9}$$

On the $[x_i; x_{i+1})$ interval the system (7) is represented as

$$\begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}_x' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -s_i \end{pmatrix}, \tag{10}$$

where $s_0 \overset{def}{=} 0$.

Let's examine a homogeneous system that corresponds to the system (10)

$$\begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}'_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ w_i^{[1]} \end{pmatrix}.$$

The Cauchy matrix $B_i(x,s)$ of such a system is represented as

$$B_i(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & b_i(x,s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

where $b_i(x,s) = \int\limits_s^x \frac{1}{\lambda_i} dz = \frac{x-s}{\lambda_i}$.

Let's define (for an arbitrary $k \geq i$)

$$B(x_k, x_i) \overset{def}{=} B_{k-1}(x_k, x_{k-1}) \cdot B_{k-2}(x_{k-1}, x_{k-2}) \cdot \ldots \cdot B_i(x_{i+1}, x_i). \tag{12}$$

The structure (11) of the matrices $B_i\,(x,s)$ allows us to define the structure of the matrix (12)

$$B(x_k, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{m=i}^{k-1} \frac{x_{m+1}-x_m}{\lambda_m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

besides that $B(x_k, x_k) \overset{def}{=} E$, where E is an identity matrix.

The solution of the system (10) on the interval $[x_i; x_{i+1})$ is

$$\overline{W}_i(x,t) = B_i(x,x_i) \cdot \overline{P}_i + \int\limits_{x_i}^{x} B_i(x,s) \cdot \overline{G}_i(s)\, ds =$$

$$= B_i(x,x_i) \cdot \overline{P}_i + \begin{pmatrix} -g_i \frac{(x-x_i)^2}{2\lambda_i} \\ -g_i(x-x_i) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

where $\overline{P}_i$ is a yet unknown vector [11].

Similarly on the interval $[x_{i-1}; x_i)$

$$\overline{W}_{i-1}(x,t) = B_{i-1}(x,x_{i-1}) \cdot \overline{P}_{i-1} + \int\limits_{x_{i-1}}^{x} B_{i-1}(x,s) \cdot \overline{G}_{i-1}(s)\, ds =$$

$$= B_{i-1}(x,x_{i-1}) \cdot \overline{P}_{i-1} + \begin{pmatrix} -g_{i-1} \frac{(x-x_{i-1})^2}{2\lambda_{i-1}} \\ -g_{i-1}(x-x_{i-1}) \end{pmatrix}.$$

At the point $x = x_i$ the conjugation condition has to be fulfilled that is $\overline{W}_i(x_i,t) = \overline{W}_{i-1}(x_i,t) + \overline{S}_i$ [13]. As a result we get a recurrence relation

$$\overline{P}_i = B_{i-1}(x_i,x_{i-1}) \cdot \overline{P}_{i-1} + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} B_{i-1}(x_i,s) \cdot \overline{G}_{i-1}(s)\, ds + \overline{S}_i. \tag{14}$$

By the method of mathematical induction from (14) the following is received

$$\overline{P}_i = B(x_i, x_0) \cdot \overline{P}_0 + \sum_{k=0}^{i} B(x_i, x_k)\overline{Z}_k, \tag{15}$$

where $\overline{Z}_k = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} B_{k-1}(x_k, s) \cdot \overline{G}_{k-1}(s)\, ds + \overline{S}_k = \begin{pmatrix} -g_{k-1}\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2\lambda_{k-1}} \\ -g_{k-1}(x_k - x_{k-1}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -s_k \end{pmatrix}$, $k = \overline{1, n-1}$, note that $\overline{Z}_0 \stackrel{def}{=} \overline{0}$, $\overline{S}_n \stackrel{def}{=} \overline{0}$; $\overline{P}_0$ is the initial (unknown) vector.

In order to find $\overline{P}_0$ the boundary conditions (8) should be used, where we define $\overline{W}(x_0, t) \stackrel{def}{=} \overline{P}_0$,

$\overline{W}(x_n, t) \stackrel{def}{=} \overline{W}_{n-1}(x_n, t) = B_{n-1}(x_n, x_{n-1})\overline{P}_{n-1} + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} B_{n-1}(x_n, s) \cdot \overline{G}_{n-1}(s)\, ds =$

$= B_{n-1}(x_n, x_{n-1})B(x_{n-1}, x_0)\overline{P}_0 + B_{n-1}(x_n, x_{n-1}) \sum\limits_{k=1}^{n-1} B(x_{n-1}, x_k)\overline{Z}_k +$

$+ \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} B_{n-1}(x_n, s) \cdot \overline{G}_{n-1}(s)\, ds = B(x_n, x_0)\overline{P}_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} B(x_n, x_k)\overline{Z}_k.$

Then $[P + QB(x_n, x_0)]\overline{P}_0 + Q \sum\limits_{k=1}^{n} B(x_n, x_k)\overline{Z}_k = \overline{\Gamma}$, and as a result

$$\overline{P}_0 = [P + Q \cdot B(x_n, x_0)]^{-1} \cdot \left(\overline{\Gamma} - Q \sum_{k=1}^{n} B(x_n, x_k)\overline{Z}_k \right). \tag{16}$$

Let's evaluate

$$[P + Q \cdot B(x_n, x_0)]^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{m=0}^{n-1} b_m(x_{m+1}, x_m) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} =$$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sigma_n} & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix}$, where $\sigma_n = \sum\limits_{m=0}^{n-1} b_m(x_{m+1}, x_m) = \sum\limits_{m=0}^{n-1} \frac{x_{m+1} - x_m}{\lambda_m}$, $\sigma_0 \stackrel{def}{=} 0$;

$$\overline{\Gamma} - Q \sum_{k=1}^{n} B(x_n, x_k)\overline{Z}_k = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_n(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n} B(x_n, x_k) \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} B_{k-1}(x_k, s) \cdot \overline{G}_{k-1}(s)\, ds + \overline{S}_k \right). \tag{17}$$

Let's write down the right side part (17) in a matrix form

$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} B_{k-1}(x_k, s) \cdot \overline{G}_{k-1}(s)\, ds + \overline{S}_k = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \begin{pmatrix} 1 & b_{k-1}(x_k, s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -g_{k-1} \end{pmatrix} ds +$

$+ \begin{pmatrix} 0 \\ -s_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} b_{k-1}(x_k, s) \cdot g_{k-1}\, ds \\ -\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} g_{k-1}\, ds - s_k \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} I_{k-1}(x_k) \\ I_{k-1}^{[1]}(x_k) - s_k \end{pmatrix} = \overline{Z}_k;$

$$\sum_{k=1}^{n} B(x_n,x_k)\begin{pmatrix} I_{k-1}(x_k) \\ I_{k-1}^{[1]}(x_k)-s_k \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1},x_m) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} I_{k-1}(x_k) \\ I_{k-1}^{[1]}(x_k)-s_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n}\left(I_{k-1}(x_k)+(I_{k-1}^{[1]}(x_k)-s_k)\cdot\sum\limits_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1},x_m)\right) \\ \sum\limits_{k=1}^{n}\left(I_{k-1}^{[1]}(x_k)-s_k\right) \end{pmatrix}.$$

Thus, we receive

$$\overline{\Gamma} - Q\sum_{k=1}^{n} B(x_n,x_k)\overline{Z}_k = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_n(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n}\left(I_{k-1}(x_k)+(I_{k-1}^{[1]}(x_k)-s_k)\cdot\sum\limits_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1},x_m)\right) \\ \sum\limits_{k=1}^{n}\left(I_{k-1}^{[1]}(x_k)-s_k\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_n(t) - \sum\limits_{k=1}^{n}\left(I_{k-1}(x_k)+(I_{k-1}^{[1]}(x_k)-s_k)\cdot\sum\limits_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1},x_m)\right) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Let's substitute (18) to (16)

$$\overline{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sigma_n} & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_n(t) - \sum\limits_{k=1}^{n}\left(I_{k-1}(x_k)+(I_{k-1}^{[1]}(x_k)-s_k)\cdot\sum\limits_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1},x_m)\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \frac{\psi_n(t)-\psi_0(t)}{\sigma_n} - \frac{1}{\sigma_n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(I_{k-1}(x_k)+(I_{k-1}^{[1]}(x_k)-s_k)\cdot\sum\limits_{m=k}^{n-1} b_m(x_{m+1},x_m)\right) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Based on the formulas (13), (15), (19), after performed transformations an image of the vector function $\overline{W}_i(x,t)$ on the interval $[x_i;x_{i+1})$ is received

$$\overline{W}_i(x,t) = B_i(x,x_i)\cdot\left(B(x_i,x_0)\cdot\overline{P}_0 + \sum_{k=1}^{i} B(x_i,x_k)\overline{Z}_k\right) + \int\limits_{x_i}^{x} B_i(x,s)\cdot\overline{G}_i(s)\,ds =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & b_i(x,x_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \sigma_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\overline{P}_0 + \begin{pmatrix} 1 & b_i(x,x_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\sum_{k=1}^{i}\begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{m=k}^{i-1} b_m(x_{m+1},x_m) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\overline{Z}_k +$$

$$+\int\limits_{x_i}^{x}\begin{pmatrix}1 & b_i(x,s)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\overline{G}_i(s)\,ds=\begin{pmatrix}1 & b_i(x,x_i)+\sigma_i\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\overline{P}_0+$$

$$+\begin{pmatrix}1 & b_i(x,x_i)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{i}\left(I_{k-1}(x_k)+(I_{k-1}^{[1]}(x_k)-s_k)\sum\limits_{m=k}^{i-1}b_m(x_{m+1},x_m)\right)\\ \sum\limits_{k=1}^{i}\left(I_{k-1}^{[1]}(x_k)-s_k\right)\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-\int\limits_{x_i}^{x}b_i(x,s)\cdot g_i\,ds\\ -\int\limits_{x_i}^{x}g_i ds\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & b_i(x,x_i)+\sigma_i\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\overline{P}_0+$$

$$+\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{i}\left(I_{k-1}(x_k)+(I_{k-1}^{[1]}(x_k)-s_k)\sum\limits_{m=k}^{i-1}b_m(x_{m+1},x_m)\right)\\ \sum\limits_{k=1}^{i}\left(I_{k-1}^{[1]}(x_k)-s_k\right)+I_i^{[1]}(x)\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}b_i(x,x_i)\sum\limits_{k=1}^{i}\left(I_{k-1}^{[1]}(x_k)-s_k\right)+I_i(x)\\ 0\end{pmatrix}. \tag{20}$$

The first coordinate of the vector $\overline{W}_i(x,t)$ in (20) is indeed the searched function $w_i(x,t)$. Therefore

$$w_i(x,t)=\psi_0(t)+(b_i(x,x_i)+\sigma_i)\cdot\frac{\psi_n(t)-\psi_0(t)}{\sigma_n}-\frac{1}{\sigma_n}\left(b_i(x,x_i)+\sigma_i\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{n}\left(I_{k-1}(x_k)+(I_{k-1}^{[1]}(x_k)-s_k)\sum_{m=k}^{n-1}b_m(x_{m+1},x_m)\right)\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{i}\left(I_{k-1}(x_k)+(I_{k-1}^{[1]}(x_k)-s_k)\sum_{m=k}^{i-1}b_m(x_{m+1},x_m)\right)+$$

$$+b_i(x,x_i)\sum_{k=1}^{i}\left(I_{k-1}^{[1]}(x_k)-s_k\right)+I_i(x). \tag{21}$$

By substituting the expression (21) into (9), the solution on the whole interval $[x_0;x_n]$ is received.

3. Building the function $v(x,t)$.

Let's write down a mixed problem for the function $v(x,t)$. Substituting (4) into (1) and considering that the function $w(x,t)$ fulfills (5), an inhomogeneous equation is received

$$m(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-m(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\quad x\in(x_0;x_n),\quad t\in(0;+\infty). \tag{22}$$

Let's substitute (4) into the initial conditions (3). Initial conditions for the function $v(x,t)$ are received

$$\begin{cases} v(x,0) = \Phi_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \Phi_1(x), \end{cases} \qquad x \in [x_0; x_n], \tag{23}$$

where $\Phi_0(x) \stackrel{def}{=} \varphi_0(x) - w(x,0)$, $\Phi_1(x) \stackrel{def}{=} \varphi_1(x) - \frac{\partial w}{\partial t}(x,0)$.

Since the function $w(x,t)$ fulfills the boundary conditions (6), then from (4) the boundary conditions for the function $v(x,t)$ will be the following

$$\begin{cases} v(x_0,t) = 0, \\ v(x_n,t) = 0, \end{cases} \qquad t \in [0; +\infty). \tag{24}$$

Therefore under the condition that the solution $w(x,t)$ of the problem (5), (6) is known, the function $v(x,t)$ is the solution of the mixed problem (22)-(24).

4. The Fourier method and the eigenvalue problem.

4.1. Expansion by eigenfunctions.

Let's examine the corresponding homogeneous equation for the equation (22)

$$m(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{25}$$

Now let's find its nontrivial solutions

$$v(x,t) = \sin(\omega t + \varepsilon) \cdot X(x), \tag{26}$$

where ω is a parameter, ε is a constant, $X(x)$ is a yet unknown function [1], that fulfill the boundary conditions (24).

Let's substitute (26) into the equation (25). Quasi-differential equation is received

$$(\lambda(x)X'(x))' + \omega^2 m(x)X(x) = 0. \tag{27}$$

Let's substitute (26) into the conditions (24). The following boundary conditions are received

$$\begin{aligned} X(x_0) &= 0, \\ X(x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{28}$$

As a solution of the equation (27) consider an absolutely continuous on the interval $[x_0; x_n]$ function $X(x)$ that fulfills it in a generalized sense [9].

The problem (27), (28) is the eigenvalue problem. The properties of the eigenvalues ω_k and the eigenfunctions of the problem (27), (28) are described in detail in [8]. In particular, it is established that all eigenvalues $\omega_k > 0$ [5]; eigenfunctions $X_k(x,\omega_k)$ are orthogonal with the weight $m(x) = dM(x)$:

$$\int_{x_0}^{x_n} X_i(x,\omega_i) \cdot X_j(x,\omega_j)\ dM(x) = 0, \quad i \neq j$$

$$\|X_k\|^2 = \int_{x_0}^{x_n} X_k^2(x, \omega_k)\ dM(x). \tag{29}$$

If $F(x)$ is an absolutely continuous function that has different analytical expressions on each of the intervals $[x_i; x_{i+1})$, that is the function allows the image

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(x) \cdot \theta_i \tag{30}$$

on the interval $[x_0; x_n]$, then its expansion by the eigenfunctions $X_k(x, \omega_k)$ is the following

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cdot X_k(x, \omega_k),$$

where the Fourier coefficients F_k are computed by the formulas

$$F_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \cdot \int_{x_0}^{x_n} F(x) \cdot X_k(x, \omega_k)\ dM(x). \tag{31}$$

Integration of the function $F(x)$ is performed as the Riemann-Stieltjes integral with respect to the $m(x)$,

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x)\ dM(x) \overset{def}{=} \sum_{i=0}^{n-1} m_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} F_i(x)\ dx + \sum_{i=1}^{n-1} M_i \cdot F_i(x_i).$$

Functions of the type (30) are integrated the following way [9]: if

$$F_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} F_{1i}(x) \cdot \theta_i, \qquad F_2(x) = \sum_{i=0}^{n-1} F_{2i}(x) \cdot \theta_i,$$

then

$$\int_{x_0}^{x_n} F_1(x) \cdot F_2(x)\ dM(x) = \sum_{i=0}^{n-1} m_{1i} \cdot m_{2i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} F_{1i}(x) \cdot F_{2i}(x)\ dx +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} M_{1i} \cdot M_{2i} \cdot F_{1i}(x_i) \cdot F_{2i}(x_i), \tag{32}$$

$$\|F_k\|^2 = \int_{x_0}^{x_n} F_k^2(x)\ dM(x) = \sum_{i=0}^{n-1} m_{ki}^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} F_{ki}^2(x) dx +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} M_{ki}^2 \cdot F_{ki}^2(x_i), \quad k \geq 1 \quad . \tag{33}$$

The expression (32) is the dot product of the functions $F_1(x)$ and $F_2(x)$. The expression (33) is the norm square of the function $F_k(x)$.

Let's define

$$X_k(x,\omega_k)=\sum_{i=0}^{n-1}X_{ki}(x,\omega_k)\cdot\theta_i. \tag{34}$$

Then for the Fourier coefficients F_k and for the $X_k(x)$ from the (31) and (29) the following is received

$$F_k=\frac{1}{\|X_k\|^2}\left(\sum_{i=0}^{n-1}m_i\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}F_i(x)\cdot X_{ki}(x,\omega_k)dx+\sum_{i=1}^{n-1}M_i\cdot F_i(x_i)\cdot X_{ki}(x_i,\omega_k)\right),$$

$$\|X_k\|^2=\sum_{i=0}^{n-1}m_{ki}^2\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}X_{ki}^2(x,\omega_k)dx+\sum_{i=1}^{n-1}M_{ki}^2\cdot X_{ki}^2(x_i,\omega_k).$$

4.2. Constructional approach to building eigenfunctions.

Let's introduce a quasi-derivative $X^{[1]}\overset{def}{=}\lambda X'$, a vector $\overline{X}=\begin{pmatrix}X\\ X^{[1]}\end{pmatrix}$ and matrices $A_k=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\lambda_k}\\ -m_k\ \omega^2 & 0\end{pmatrix}$, $C_k=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -M_k\ \omega^2 & 0\end{pmatrix}$. Now let's reduce a quasi-differential equation (27) to the system of the first order differential equations

$$\overline{X}\,'=\left(\sum_{k=0}^{n-1}A_k\theta_k+\sum_{k=1}^{n-1}C_k\delta(x-x_k)\right)\cdot\overline{X}. \tag{35}$$

Similarly to the paragraph 2.2, the solution of the system (35) is considered to be a vector function $\overline{X}(x,\omega)\in BV_{loc}^{+}(I)$ that fulfills it in a sense of the theory of generalized functions.

Let's write down the corresponding system on the interval $[x_i,x_{i+1})$ in a following way

$$\overline{X}_i{}'=(A_i+C_i\delta_i)\cdot\overline{X}_i,\quad i=\overline{0,n-1}.$$

It is known [9] that the jump of the system's solution at the point $x=x_i$ is $\Delta X_i(x_i)=C_i\ X_{i-1}(x_i)$.

This gives an opportunity to reduce the problem to the equivalent problem of the system of impulsive differential equations [6]

$$\overline{X}\,'=\sum_{k=0}^{n-1}A_k\theta_k\cdot\overline{X}, \tag{36}$$

$$\overline{X}_i(x_i)-\overline{X}_{i-1}(x_i)=C_i\ \overline{X}_{i-1}(x_i)$$

and the following boundary conditions

$$P\overline{X}(x_0)+Q\overline{X}(x_n)=\overline{0}. \tag{37}$$

The system is examined in detail in [9]. Let's note the main properties of the system:

• this system is proper (namely, it is clearly defined in a sense of the theory of generalized functions), because the following condition is valid

$$C_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M_k\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

• the fundamental matrix (analog of the Cauchy matrix on the whole interval $[x_0; x_n]$) has the following structure

$$\widetilde{B}(x, x_0, \omega) \overset{def}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{B}_i(x, x_i, \omega) \cdot \widetilde{B}(x_i, x_0, \omega) \cdot \theta_i, \tag{38}$$

where $\widetilde{B}(x_i, x_0, \omega) \overset{def}{=} \prod_{j=0}^{i} \widetilde{C}_j \cdot \widetilde{B}_{i-j}(x_{i-j+1}, x_{i-j}, \omega)$, $\widetilde{C}_i = (E + C_i)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\widetilde{B}(x_i, x_i, \omega) \overset{def}{=} E$.

With a direct verification let's ascertain that the Cauchy matrix $\widetilde{B}_i(x, s, \omega)$ of the system (36) on the interval $[x_i; x_{i+1})$ is the following

$\widetilde{B}_i(x, s, \omega) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i(x-s) & \frac{\sin\alpha_i(x-s)}{\lambda_i\alpha_i} \\ -\lambda_i\alpha_i \sin\alpha_i(x-s) & \cos\alpha_i(x-s) \end{pmatrix}$, where $\alpha_i = \omega\sqrt{\frac{m_i}{\lambda_i}}$.

Let's define

$$\widetilde{B}(x_n, x_0, \omega) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix}. \tag{39}$$

The nontrivial solution $\overline{X}(x, \omega)$ of the system (35) can be found as $\overline{X}(x, \omega) = \widetilde{B}(x, x_0, \omega) \cdot \overline{C}$, where $\overline{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ is some nonzero vector.

The vector function $\overline{X}(x, \omega)$ has to fulfill the boundary conditions (37). That is

$$\left[P \cdot \widetilde{B}(x_0, x_0, \omega) + Q \cdot \widetilde{B}(x_n, x_0, \omega)\right] \cdot \overline{C} = \overline{0},$$

taking into consideration that $\widetilde{B}(x_0, x_0, \omega) = E$, the following equation is received

$$\left[P + Q \cdot \widetilde{B}(x_n, x_0, \omega)\right] \cdot \overline{C} = \overline{0}. \tag{40}$$

In order for the nonzero vector $\overline{C}$ to exist the validity of the following condition is necessary and sufficient

$$\det\left[P + Q \cdot \widetilde{B}(x_n, x_0, \omega)\right] = 0. \tag{41}$$

Let's concretize the left part of the characteristic equation (41), taking into consideration the matrices P, Q and (39)

$$\det\left[P + Q \cdot \widetilde{B}(x_n, x_0, \omega)\right] = \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \det \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \end{pmatrix} \right] = b_{12}(\omega).$$

Let's make the following proposition.

Remark 2. *Characteristic equation of the eigenvalue problem is the following*

$$b_{12}(\omega) = 0. \tag{42}$$

As known [8], the roots ω_k of the characteristic equation (42), that are also eigenvalues of the problem (27), (28), are positive and different.

In order to find the nonzero vector $\overline{C}$ let's substitute ω_k with ω into the equation (40). Then the following vectorial equality is received

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_{11}(\omega_k) & b_{12}(\omega_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

that is equivalent to the system of equations

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ b_{11}(\omega_k) \cdot C_1 + b_{12}(\omega_k) \cdot C_2 = 0. \end{cases} \tag{43}$$

Since the determinant of this system $b_{12}(\omega) = 0$, then the system (43) has the following solutions $C_1 = 0$, $C_2 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. By introducing, for example $C_2 = 1$, $\overline{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ is received. Note, that the vector $\overline{C}$ doesn't depend on ω_k. Let $\overline{X}_k(x, \omega_k)$ be a nontrivial eigenvector that corresponds to the value of ω_k.

Remark 3. *The eigenvectors of the system of differential equations (35) with boundary conditions (37) have the following structure*

$$\overline{X}_k(x, \omega_k) = \widetilde{B}(x, x_0, \omega_k) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Cosequence 1. *The eigenfunctions $X_k(x, \omega_k)$ as the first coordinates of the eigenvectors $\overline{X}_k(x, \omega_k)$ can be written down as*

$$X_k(x, \omega_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \widetilde{B}(x, x_0, \omega_k) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{44}$$

In particular, since the $X_k(x, \omega_k)$ is (34), then from (38) and (44) follows that

$$X_{ki}(x, \omega_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \widetilde{B}_i(x, x_i, \omega_k) \cdot \widetilde{B}(x_i, x_0, \omega_k) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{45}$$

5. Building a solution to the mixed problem (22) - (24). In order to solve the problem (22) - (24) let's apply the eigenfunctions method [12], what means that the problem's solution can be found in a following form

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x,\omega_k), \tag{46}$$

where $T_k(t)$ are unknown functions that will be later defined.

Since $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ is in the right side of equation (22) let's expand it into the Fourier series by the eigenfunctions $X_k(x,\omega_k)$ of the boundary problem (27), (28)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \cdot X_k(x,\omega_k). \tag{47}$$

Substituting (46) into the equation (22) and considering (47), the following equation is received

$$m(x) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} T_k{}''(t) \cdot X_k(x,\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot \big(\lambda(x) X_k{}'(x,\omega_k)\big)' -$$

$$- m(x) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \cdot X_k(x,\omega_k).$$

Considering that the eigenfunctions $X_k(x,\omega_k)$ satisfy the equation (27), we get an equality

$$m(x) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} T_k{}''(t) \cdot X_k(x,\omega_k) = -m(x) \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 \cdot X_k(x,\omega_k) T_k(t) -$$

$$- m(x) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \cdot X_k(x,\omega_k),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big[T_k{}''(t) + \omega_k^2 \cdot T_k(t) + w_k(t)\big] \cdot m(x) \cdot X_k(x,\omega_k) = 0. \tag{48}$$

Let's multiply the right and left parts (48) by $X_j(x,\omega_j)$ and integrate by the variable x on the interval $[x_0; x_n)$. Considering the eigenfunctions' orthogonality we get each of the differential equations

$$T_k{}''(t) + \omega_k^2 \cdot T_k(t) = -w_k(t), \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{49}$$

The general solution of each of the differential equations (49) is

$$T_k(t) = a_k \cos \omega_k t + d_k \sin \omega_k t - \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \sin \omega_k (t-s) \cdot w_k(s)\, ds, \tag{50}$$

where a_k, d_k are unknown constants [3].

Let's declare $I(t) = \frac{1}{\omega_k} \int\limits_0^t \sin \omega_k (t-s) \cdot w_k(s)\ ds$. Note that $I(0) = 0$, ${I'}_t(0) = 0$ [4].

In order to find the constants a_k, d_k let's expand the right parts of the initial conditions (23) into the Fourier series by the eigenfunctions $X_k(x, \omega_k)$

$$\Phi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{0k} \cdot X_k(x, \omega_k), \tag{51}$$

$$\Phi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{1k} \cdot X_k(x, \omega_k), \tag{52}$$

where Φ_{0k}, Φ_{1k} are the corresponding Fourier coefficients.

From (50) follows that

$$T_k(0) = a_k, \tag{53}$$

$$T_k{}'(t) = -a_k \omega_k \sin \omega_k t + d_k \omega_k \cos \omega_k t - I_t{}'(t),$$

so

$$T_k{}'(0) = d_k \omega_k. \tag{54}$$

Taking into account (46), (51) and the first condition in (23) the following is received: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(0) \cdot X_k(x, \omega_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Phi_{0k} \cdot X_k(x, \omega_k)$. Now using (53) we receive

$$T_k(0) = a_k = \Phi_{0k}.$$

Analogically from (46), (52) and the second condition in (23) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k{}'(0) \cdot X_k(x, \omega_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Phi_{1k} \cdot X_k(x, \omega_k)$ is received. Using (54) we find

$$T_k{}'(0) = d_k \omega_k = \Phi_{1k} \text{ or } d_k = \frac{\Phi_{1k}}{\omega_k}.$$

Thus, finally a solution of the mixed problem (22) - (24) is received in a form of the series

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Phi_{0k} \cos \omega_k t + \frac{\Phi_{1k}}{\omega_k} \sin \omega_k t - \frac{1}{\omega_k} \int\limits_0^t \sin \omega_k (t-s) \cdot w_k(s)\ ds \right] X_k(x, \omega_k).$$

Considering (34) and that $v(x,t) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} v_i(x,t) \cdot \theta_i$, where $v_i(x,t)$ are defined on the interval $[x_i; x_{i+1})$, we receive

$$v_i(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Phi_{0k} \cos \omega_k t + \frac{\Phi_{1k}}{\omega_k} \sin \omega_k t - \frac{1}{\omega_k} \int\limits_0^t \sin \omega_k (t-s) \cdot w_k(s)\ ds \right] \times$$
$$\times X_{ki}(x, \omega_k), \tag{55}$$

where the functions $X_{ki}(x, \omega_k)$ are computed by the formula (45).

Considering (21), (55) the solution of the problem (1)-(3) is received

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{n-1} [w_i(x,t) + v_i(x,t)] \cdot \theta_i.$$

Conclusion. The expansion by the eigenfunctions theorem is adapted for the case of differential equations with piecewise constant (by the spatial variable) coefficients.

Explicit formulas for finding the solution and its quasi-derivatives for any partial interval of the main interval that are valid for arbitrary finite numbers of the first type break points of the earlier referred coefficients are received.

This scheme of problem examination was considered in a case of rectangular Cartesian coordinate system. However, it remains valid in a case of any curvilinear orthogonal coordinates. The advantage of this method is a possibility to examine the problem on each breakdown segment and then using the matrix calculation to write down an analytical expression of the solution. Such an approach allows the use of software tools for solving the problem.

The received results have a direct application to applied problems.

1. **V.Ya. Arsenin**, Methods of Mathematical Physics. – Nauka, Moscow, 1974.
2. **A. Halanay and D. Veksler**, Qualitative Theory of Pulse Systems. – Mir, Moscow, 1971.
3. **P.I. Kaleniuk, J.K. Rudavsky, R.M. Tatsij, I.F. Kliinik, V.M. Kolesnik, P.P. Kostrobij, I.Ya. Oleksiv**, Differential Equations. – Lviv Polytechnic Publisher, Lviv, 2014.
4. **V.S. Martynenko**, Operational Calculus. – Vyshcha Shkola, Kiev, 1973.
5. **V.V. Mazurenko**, On the reduction of discrete- continuous boundary value problem for the generalized scheme Atkinson. – Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, Vol. 8 (2001), 19–22.
6. **A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk**, Impulse Differential Equations. – Vyshcha Shkola, Kiev, 1987.
7. **R.M. Tatsij, O.Yu. Chmyr, O.O. Karabyn**, The total boundary value problems for hiperbolic equation with piecewise continuous coeffitients and right parts. – Researches in mathematics and mechanics, Vol. 22 (2017), No. 2(30), 55–70.
8. **R.M. Tatsij, V.V. Mazurenko**, Discrete-continuous boundary problems for the quasi-differential equations of even order. – Mathematical Methods and Physico-Mechanical Fields, Vol. 44 (2001), No. 1, 43–53.
9. **R.M. Tatsij, M.F. Stasjuk, V.V. Mazurenko, O.O. Vlasij**, Generalized Quasi-differential Equations. – Kolo, Drogobych, 2011.
10. **R.M. Tatsij, M.F. Stasjuk, O.O. Vlasij**, Discrete-continuous boundary problems for the quasi-differential equations of second order. – Bulletin of the University "Lviv Polytechnic", series "Physics and mathematics", Vol. 718 (2011), 61–69.

11. **R.M. Tatsij, O.O. Vlasij, M.F. Stasjuk**, General first boundary value problem for the heat equation with piecewise variable coefficients. – Bulletin of the University "Lviv Polytechnic", series "Physics and mathematics", Vol. 804 (2014), 64–69.

12. **A.N. Tikhonov, A.A. Samarskii**, Equations of Mathematicai Physics. – Nauka, Moscow, 1977.

13. **O.O. Vlasij, M.F. Stasjuk, R.M. Tatsij**, The structure of generalized solutions of systems with piecewise variable coefficients. – Bulletin of the University "Lviv Polytechnic", series "Physics and mathematics", Vol. 660 (2009), 34–38.

Тацій Р. М., Чмир О. Ю., Карабин О. О.
Перша дискретно–неперервна крайова задача для рівняння гіперболічного типу з кусково - сталими коефіцієнтами та δ-особливостями

Резюме

Вперше запропоновано та обґрунтовано нову формальну схему розв'язування загальної першої крайової задачі для рівняння гіперболічного типу з кусково–сталими коефіцієнтами та δ-особливостями. В основу схеми розв'язування покладено концепцію квазіпохідних, сучасну теорію систем лінійних диференціальних рівнянь, а також класичний метод Фур'є та метод редукції. Перевагою методу є можливість розглянути задачу на кожному відрізку розбиття, а потім за допомогою матричного числення записати аналітичний вираз розв'язку. Такий підхід дозволяє застосовувати програмні засоби до процесу вирішення задачі та графічної ілюстрації розв'язку.
Ключові слова: квазідиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Коші, функція Дірака, задача на власні значення, метод Фур'є та метод власних функцій .

Таций Р.М., Чмырь О.Ю., Карабин О.О.
Первая дискретно–непрерывная краевая задача для уравнения гиперболического типа с кусочно–постоянными коэффициентами и δ–особенностями

Резюме

Впервые предложена и обоснована новая формальная схема решения общей первой краевой задачи для уравнения гиперболического типа с кусочно–постоянными коэффициентами и δ-особенностями. В основе схемы решения лежит концепция квазипроизводных, современная теория систем линейных дифференциальных уравнений, а также классический метод Фурье и метод редукции. Преимуществом метода является возможность рассмотреть задачу на каждом отрезке разбиения, а затем на основании матричного исчисления объединить полученные решения. Такой подход позволяет применить программные средства к процессу разрешения задачи и графической иллюстрации решения.
Ключевые слова: квазидифференциальное уравнение, краевая задача, матрица Коши, функция Дирака, задача на собственные значения, метод Фурье и метод собственных функций .

References

1. Arsenin, V. Ya. (1974). Metody matematicheskoyu phiziki [Methods of Mathematical Physics]. Moscow: Nauka, 432 p.

2. Halanay, A. and Veksler, D. (1971). Yakisna teoriya impulsnykh system [Qualitative Theory of Pulse Systems]. Moscow: Mir, 315 p.

3. Kaleniuk, P. I., Rudavsky, J. K., Tatsij, R. M., Kliinik, I. F., Kostrobij, P. P., Oleksiv, I. Ya. (2014). Dyferentsialni rivnyannya [Differential Equations]. Lviv: Polytechnic Publisher, 380 p.

4. Martynenko, V. S. (1973). Operatsionnoye ischislyeniye [The operational calculus]. Kyiv: Vyshcha shkola, 359 p.

5. Mazurenko, V. V. (2001). Pro zvidnist dyskretno-neperervnoyi krayovoyi zadachi do uzagalnenoyi skhemy Atkinsona [On the reduction of discrete- continuous boundary value problem for the generalized scheme Atkinson]. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, Vol. 8. – P. 19–22.

6. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. (1987). Impulsni dyferentsiayni rivnyannya [Impulse Differential Equations]. Kyiv: Vyshcha shkola, 472 p.

7. Tatsij R.M. , Chmyr O.Yu., Karabyn O.O. (2017) Zagalni krayovi zadachi dlya hiperbolichnogo rivnyannya iz kuskovo-neperervnymy koefitsiyentamy ta pravymy chastynamy [The total boundary value problems for hiperbolic equation with piecewise continuous coeffitients and right parts]. *Researches in mathematics and mechanics*, Vol. 22, No. 2(30). – P. 55–70.

8. Tatsij R.M., Mazurenko, V. V. (2001). Dyskretno-neperervni krayovi zadachi dlya kvazidyferentsialnykh rivnyan dovilnogo poryadku [Discrete-continuous boundary problems for the quasi-differential equations of even order]. *Reports of the Mathematical Methods and Physico-Mechanical Fields*, Vol. 44, No. 1. – P. 43–53.

9. Tatsij, R. M., Stasjuk, M. F., Mazurenko, V. V., Vlasij, O. O. (2011). Uzagalneni kvazidyferentsialni rivnyannya [Generalized quasi-differential equations]. Drogobych: Kolo, 297 p.

10. Tatsij, R. M., Vlasij, O. O., Stasjuk, M. F. (2011). Dyskretno-neperervni krayovi zadachi dlya kvazi-dyferentsialnykh rivnyan drugogo poryadku [Discrete-continuous boundary problems for the quasi-differential equations of second order]. *Bulletin of the University "Lviv Polytechnic", series "Physics and mathematics"*, Vol. 718. – P. 61–69.

11. Tatsij, R. M., Vlasij, O. O., Stasjuk, M. F. (2014). Zagalna persha krayova zadacha dlya rivnyannya teploprovidnosti z kuskovo-zminnymy koefitsiyentamy [General first boundary value problem for the heat equation with piecewise variable coefficients]. *Bulletin of the University "Lviv Polytechnic", series "Physics and mathematics"*, Vol. 804. – P. 64–69.

12. Tikhonov, A. N., Samarskii, A. A. (1977). Uravneniya matematicheskoyu phiziki [Equations of Mathematicai Physics]. Moscow: Nauka, 735 p.

13. Vlasij, O. O., Stasjuk, M. F., Tatsij, R. M., (2009). Struktura rozvyazkiv uzagalnenykh system z kuskovo-zminnymy koefitsiyentamy [The structure of generalized solutions of systems with piecewise variable coefficients]. *Bulletin of the University "Lviv Polytechnic", series "Physics and mathematics"*, Vol. 660. – P. 34–38.

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ
(скорочений варіант)

Журнал «Дослідження в математиці і механіці» має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень, огляди з актуальних проблем за тематикою видання, а також повідомлення про ювілеї, знаменні дати та події.

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Електронну версію рукопису слід надсилати на e-mail журналу

rmm-journal@onu.edu.ua

або завантажувати через сайт журналу

www.rmm-journal.onu.edu.ua

Вона повинна складатися з

1) вихідного TEX-файла,
2) PDF-файла,
3) всіх допоміжних файлів (графіки, рисунки, ілюстрації тощо),
4) документа з анкетними даними авторів (прізвище, ім'я, по батькові, місце роботи, e-mail, адреса для листування та телефон).

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LATEX відповідно до вимог та з використанням шаблону, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті. Також вимоги можна отримати в редакційній колегії журналу.

Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 25 сторінок.

Структура статті:

— УДК;
— список авторів;
— місце роботи авторів;
— назва статті;
— резюме мовою оригіналу обсягом не менш як 100 слів;
— Mathematical Subject Classification (2010);
— список ключових слів мовою оригіналу;
— основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України «Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України» від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано

розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується подана стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером у квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформлюється відповідно до державного стандарту України ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 «Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання» та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008);

— анотації двома іншими мовами, які повинні містити назву, список авторів, резюме обсягом не менш як 100 слів та список ключових слів;

— додатково, якщо стаття написана українською або російською мовами, після анотацій подається список літератури у транслітерації, оформлений у відповідності до міжнародного стандарту *Harvard* (зразок та правила оформлення можна знайти в шаблоні статті на сайті).

Усі надіслані статті проходять анонімне рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу «Дослідження в математиці і механіці».

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, зокрема і у співавторстві.

Редакційна колегія журналу
«Дослідження в математиці і механіці»
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2
м. Одеса, 65082

Українською, російською та англійською мовами

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації: серія КВ, № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

Затверджено до друку вченою радою
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова
Протокол № 8 від 24 квітня 2018 р.

Відповідальний за випуск *О. П. Огуленко*
Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*
Технічний редактор *М. М. Бушин*

Тираж 100 прим. Зам. № 330(68).

Адреса редколегії:
65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
astro_print@ukr.net
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Дослідження в математиці і механіці. – 2019. – Т. 24, вип. 1(33). – С. 1–105.