Дослідження в математиці і механіці.– 2017.– Т.22, вип. 1(29).– С. 46–61

УДК 517.5

Н. В. Парфінович
Дніпропетровський національный університет ім. Олеся Гончара

ОЦІНКИ НОРМ ПОХІДНИХ ЗА РІССОМ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Нехай $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_m}$ – оператор Лапласа. Позначимо через $L_s(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leqslant s \leqslant \infty)$ простори вимірних функцій $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ зі скінченою нормою $\|f\|_s$. Нехай F і E – ідеальні решітки на $\mathbb{R}^m$ зі скінченими нормами $\|\cdot\|_F$ і $\|\cdot\|_E$. Через $L^{\Delta}_{F,E}(\mathbb{R}^m)$ позначимо простір функцій $f \in F$ таких, що $\Delta f \in E$. Якщо $F = L_s(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leqslant s \leqslant \infty)$, то будемо використовувати позначення $L^{\Delta}_{s,E}$, або $L^{\Delta}_{s,s}$ якщо, крім цього, $E = L_s(\mathbb{R}^m)$. В роботі отримано нові нерівності типу Колмогорова для норм похідних за Ріссом $D^\alpha f$ функцій $f \in L^{\Delta}_{\infty,E}(\mathbb{R}^m)$. Як наслідок, отримані такі нерівності для функцій $f \in L^{\Delta}_{s,s}(\mathbb{R}^m)$. Розв'язано задачу про наближення необмеженого оператора D^α обмеженими на класі функцій f таких, що $\|\Delta f\|_E \leqslant 1$.
MSC: 26D10, 35A23, 41A17, 41A35, 41A65.
Ключові слова: дробова похідна, нерівності для похідних, наближення необмежених операторів обмеженими, ідеальні решітки .

Вступ. Нерівності типу Ландау—Колмогорова відіграють важливу роль в багатьох галузях математики і її застосувань. На теперішній час відомо багато точних нерівностей такого типу для функцій однієї змінної (див. [1], а також [2]–[4] і монографії [5, 6]). Значно менше точних нерівностей отримано для функцій багатьох змінних (див., напр., [7]– [12]), а також для похідних нецілого порядку (див., напр., [13]– [22], [23, гл. 2] і відповідну бібліографію).

Задача про точні нерівності типу Колмогорова тісно пов'язана із задачею Стєчкіна про наближення необмеженого оператора на класі Q обмеженими (див. [3, 4], а також [5, § 7.1]).

В даній роботі розглядаються вказані задачі для функцій, заданих на $\mathbb{R}^m$, у випадках, коли лапласіани вказаних функцій (або і самі функції також) належать ідеальним решіткам. При цьому оцінюються норми похідних Рісса цих функцій. Представлені в роботі результати є продовженням досліджень, розпочатих в [20]–[22].

Основні результати

1. Означення. Нехай $\mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ — евклідів простір точок $x = (x_1, \dots, x_m)$, $|x| = \big(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2\big)^{1/2}$, $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$ — простір вимірних функцій $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Через $L_s = L_s(\mathbb{R}^m)$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, позначимо простори функцій $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_s = \|f\|_{L_s(\mathbb{R}^m)} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(t)|^s\, dt\right)^{1/s}, & 1 \leqslant s < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}^m\}, & s = \infty, \end{cases}$$

Надійшла 18.04.2017

а через $C = C(\mathbb{R}^m)$ – простір неперервних, обмежених функцій $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ з нормою
$$\|f\|_C = \|f\|_{C(\mathbb{R}^m)} := \sup\{|f(t)| : \ t \in \mathbb{R}^m\}.$$

Нехай
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$$
– оператор Лапласа. Для локально інтегровних на $\mathbb{R}^m$ функцій f і g будемо писати
$$\Delta f = g,$$
якщо для будь-якої фінітної нескінченно диференційовної функції φ
$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \Delta\varphi(x) f(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) g(x)\, dx.$$

Через $L^{\Delta}_{p,s} = L^{\Delta}_{p,s}(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leqslant p,s \leqslant \infty)$позначимо сукупність функцій $f \in L_p$ таких, що $\Delta f \in L_s$. Через $W^{\Delta}_{p,s} = W^{\Delta}_{p,s}(\mathbb{R}^m)$ позначимо клас функцій f із $L^{\Delta}_{p,s}$ таких, що $\|\Delta f\|_s \leqslant 1$.

Похідна Рісса порядку α $(0 < \alpha < 2)$ функції $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ означається рівністю (див. [24, с. 367–368])
$$(D^\alpha f)(x) := \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt,$$
де
$$d_{m,2}(\alpha) = \frac{2^{1-\alpha}\pi^{1+\frac{m}{2}}}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+\alpha}{2}\right)}$$
- нормуючий множник [24, с. 373]. Відзначимо, що похідна Рісса D^α реалізує [24, с. 368] дробовий степеінь $(-\triangle)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа.

Для $h > 0$ зрізаною похідною Рісса порядку $\alpha \in (0,2)$ функції $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ називається
$$(D^\alpha_h f)(x) := \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt$$
(тут і скрізь нижче $B_h = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leqslant h\}$ – куля радіуса h з центром в початку координат).

Лінійний простір $E = \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$ з нормою $\|\cdot\|_E$ називається ідеальною решіткою на $\mathbb{R}^m$ (див. [25, розд. 2, §2]), якщо для кожної функції $f \in E$ і $g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$ таких, що $|g(x)| \leqslant |f(x)|$ майже скрізь на $\mathbb{R}^m$, випливає, що $g \in E$ і $\|g\|_E \leqslant \|f\|_E$.

Множина $A(E) \subset \mathbb{R}^m$ називається носієм ідеальної решітки E, якщо $f(x) = 0$ для всіх $f \in E$ і $x \notin A(E)$.

Через E^1 позначимо асоційований підпростір до E (див. [25, розд. 2, §3]), тобто простір функцій $g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^m)$, такий що supp$g \subset A(E)$ і
$$\|g\|_{E^1} := \sup_{\substack{f \in E \\ \|f\|_E \leqslant 1}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) g(x)\, dx < \infty.$$

Зрозуміло, що E^1 є ідеальною решіткою на $\mathbb{R}^m$ і підпростором в просторі, спряженому до E.

Ідеальні решітки утворюють багато важливих просторів, таких як простір $L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, простір Орліча [26], простір Лоренца [25], простір Марцинкевича [25] та ін.

В подальшому ми будемо також говорити, що ідеальна решітка E є напівінваріантною відносно зсуву, якщо для кожної $f \in E$ і $x \in \mathbb{R}^m$ виконується $f(\cdot + x) \in E$, а також $\|f(\cdot + x)\|_E = \|f\|_E$.

Нехай F і E – ідеальні решітки. Через $L^{\Delta}_{F,E} = L^{\Delta}_{F,E}(\mathbb{R}^m)$ позначимо простір функцій $f \in F$ таких, що $\Delta f \in E$. Через $W^{\Delta}_{F,E}$ позначимо клас функцій f із $L^{\Delta}_{F,E}$, для яких $\|\Delta\|_E \leqslant 1$.

Якщо $F = L_p(\mathbb{R}^m)$, то будемо використовувати позначення $L^{\Delta}_{p,E}$ і $W^{\Delta}_{p,E}$ відповідно.

Нехай X і Y – банахові простори, $A : X \to Y$ – оператор (не обов'язково лінійний) з областю визначення $D_A \subset X$, $Q \subset D_A$ – деяка множина. Через $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X,Y)$ будемо позначати простір лінійних обмежених операторів $S : X \to Y$. Для $N > 0$ покладаємо

$$E_N(A,Q) = \inf_{\substack{S \in \mathcal{L}(X,Y) \\ \|S\| \leqslant N}} \sup_{f \in Q} \|Af - Sf\|_Y. \tag{1}$$

Задача С.Б. Стєчкіна про найкраще наближення оператора A на множині Q лінійними обмеженими операторами полягає в тому, щоб при довільному $N > 0$ знайти величину (1), а також вказати екстремальний оператор, тобто оператор, що реалізує точну нижню межу в правій частині (1). Постановка цієї задачі і її розв'язання для диференціальних операторів малих порядків представлені в [27]. Огляд подальших результатів і відповідні посилання можна знайти в [3, 4].

2. Оцінка норми і відхилення від D^α оператора U^α_h на класі $W^{\Delta}_{\infty,E}$. Нехай $h > 0$. Через $\widetilde{G}_h(x,y)$ будемо позначати функцію Гріна кулі B_h (див., [28, с. 265]), тобто для $x, y \in B_h$, $x \neq y$, у випадку $m \geqslant 3$

$$\tilde{G}_h(x,y) = \frac{1}{\sigma_{m-1}(m-2)} \left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}} - \frac{h^{m-2}|y|^{m-2}}{|x|y|^2 - h^2 y|^{m-2}} \right),$$

і у випадку $m = 2$

$$\widetilde{G}_h(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{h^2 - xy}{h(x-y)} \right|$$

(тут і скрізь нижче σ_{m-1} – площа поверхні одиничної сфери S^{m-1} простору $\mathbb{R}^m$).

Для $\rho > 0$ покладемо

$$G_h(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_{m-1}(m-2)} \left(\frac{1}{\rho^{m-2}} - \frac{1}{h^{m-2}} \right)_+, & m \geqslant 3, \\ \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{h}{\rho} \right)_+, & m = 2, \end{cases}$$

($a_+ := \max\{a,0\}$).

Відзначимо, що для $y \in B_h$, $y \neq 0$,

$$\widetilde{G}_h(0,y) = G_h(|y|).$$

Усередненням функції f в точці x по сфері радіуса h назвемо величину

$$\widetilde{f}(x,h) = \frac{1}{\sigma_{m-1}} \int\limits_{S^{m-1}} f(x+hy)ds_y$$

де ds_y – елемент площі поверхні сфери S^{m-1}.

Відомо (див., напр., [28, с. 289]), що для будь-якої двічі неперервно диференційовної функції f справедливе зображення

$$f(x) = \widetilde{f}(x,h) + \int\limits_{B_h} \widetilde{G}_h(x,y)(-\Delta f(y))\, dy. \tag{2}$$

В [22] показано, що для довільної двічі неперервно диференційовної функції f:

$$f(x) = \widetilde{f}(x,h) + \int\limits_{B_h} G_h(|y|)(-\Delta f(x \pm y))\, dy.$$

Для будь-якої функції $f \in L^{\Delta}_{\infty,E}$ і будь-якої фінітної нескінченно диференційовної функції φ маємо:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) f(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) \left[\widetilde{\varphi}(x,h) + \int\limits_{B_h} G_h(|y|)(-\Delta\varphi(x \mp y))\, dy \right] dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \left[\widetilde{f}(x,h) + \int\limits_{B_h} G_h(|y|)(-\Delta f(x \pm y))\, dy \right] dx.$$

Тобто для $f \in L^{\Delta}_{\infty,E}$ і майже всіх $x \in \mathbb{R}^m$ буде

$$f(x) = \widetilde{f}(x,h) + \int\limits_{B_h} G_h(|y|)(-\Delta f(x \pm y))\, dy. \tag{3}$$

Введемо також функцію

$$F_h(t) = \begin{cases} \int\limits_t^h G_\rho(t) \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}}, & t \in (0,h], \\ 0, & t > h. \end{cases}$$

Неважко бачити, що для функцій $G_h(|y|)$ и $F_h(|y|)$ мають місце співвідношення (див. [22])

$$G_h(|y|) = h^{2-m} G_1(|y|/h)$$

і

$$F_h(|y|) = h^{2-\alpha-m} F_1(|y|/h).$$

Для $t > 0$ покладемо

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{m+\alpha-2}}, & m \geqslant 3 \\ \frac{\ln t}{t^{\alpha}}, & m = 2 \end{cases}$$

Скрізь нижче ми припускаємо, що

$$G(|t|)\chi_{[-1,1]} \in E^1 \tag{4}$$

і

$$\lim_{h\to 0^+} \|G(|t|)\chi_{[-h,h]}\|_{E^1} = 0. \tag{5}$$

Зазначимо, що при виконанні цих умов при будь-якому $c \in \mathbb{R}$ функція $F_h(|y|) - cG_h(|y|)$ належить простору E^1.

Оберемо $c = c_h$ з умови

$$\int\limits_{B_h} (F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy = 0. \tag{6}$$

Як неважко зрозуміти, для будь-якого $h > 0$ буде

$$c_h = h^{-\alpha} c_1. \tag{7}$$

Нехай $h > 0$ і $\widetilde{\psi}_h(\rho)$ – деяка функція однієї змінної з $\mathrm{supp}\widetilde{\psi}_h = [0,h]$, в середньому рівна нулю. Припустимо, що існує функція $\psi_h \in E$ ($\mathrm{supp}\psi_h = B_h$, $\psi_h(y) = \widetilde{\psi}_h(|y|)$, $\|\psi\|_E = 1$) така, що справджується рівність:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} (F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\widetilde{\psi}_h(|y|)\, dy = \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}. \tag{8}$$

Означимо функцію $\widetilde{\varphi}_{h,2}(\rho)$ в такий спосіб. Для $\rho \in (0,h]$ покладемо

$$\widetilde{\varphi}_{h,2}(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^\rho - \int\limits_\rho^h\right)\int\limits_t^h u^{m-1}\widetilde{\psi}_h(u)\, du \frac{dt}{t^{m-1}}, & \rho \in [0,h] \\ \frac{1}{2}\int\limits_0^h\int\limits_t^h u^{m-1}\widetilde{\psi}_h(u)\, du \frac{dt}{t^{m-1}}, & \rho > h. \end{cases} \tag{9}$$

Для $y \in \mathbb{R}^m$ покладемо

$$\varphi_{h,2}(y) = \widetilde{\varphi}_{h,2}(|y|). \tag{10}$$

Враховуючи зображення оператора Лапласа для радіальних функцій

$$\Delta\varphi(\rho) = \varphi''(\rho) + \frac{m-1}{\rho}\varphi'(\rho),$$

неважко перевірити, що $\varphi_{h,2} \in W^{\Delta}_{\infty,E} \cap C(\mathbb{R}^m)$ і $\Delta\varphi_{h,2}(y) = \psi_h(y)$. Крім того,

$$\max_{y\in\mathbb{R}^m} \varphi_{h,2}(y) = -\min_{y\in\mathbb{R}^m} \varphi_{h,2}(y).$$

Для заданого $h > 0$ розглянемо оператор

$$U_h^\alpha f(x) = D_h^\alpha f(x) + \frac{2c_h\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}(f(x) - \widetilde{f}(x,h)), \tag{11}$$

де c_h обрано з умови (6). Так само, як в [22] доводиться твердження

Лема 1. *Нехай $0 < \alpha < 2$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву решітка на $\mathbb{R}^m$, що задовольняє умови (4) і (5), E^1 – асоційований підпростір до E. Тоді при виконанні умов (8)–(10) для довільного $h > 0$*

$$\|U_h^\alpha\| = \frac{4\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}\left(\frac{h^{-\alpha}}{\alpha} + c_h\right) = \frac{\|U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty}{\|\varphi_{h,2}\|_\infty} = h^{-\alpha}\frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}.$$

Тепер для функцій $f \in L^\Delta_{\infty,E}$ ми отримаємо оцінку величини $\|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty$.

В [22] показано, що для довільної фінітної нескінченно диференційовної функції φ і довільного $x \in \mathbb{R}^m$

$$D^\alpha\varphi(x) - U_h^\alpha\varphi(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\int\limits_{B_h}(-\Delta\varphi(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\,dy. \tag{12}$$

Враховуючи (12), легко бачити, що для будь-якої функції $f \in L^\Delta_{\infty,E}$ і довільної фінітної нескінченно диференційовної функції φ

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)(D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x))\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)(D^\alpha\varphi(x) - U_h^\alpha\varphi(x))\,dx.$$

Звідси і із (12) виводимо, що для $f \in L^\Delta_{\infty,E}$ при майже всіх $x \in \mathbb{R}^m$ має місце зображення

$$D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\int\limits_{B_h}(-\Delta f(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\,dy. \tag{13}$$

Використовуючи (13) і нерівність Гельдера, отримаємо, що для майже всіх $x \in \mathbb{R}^m$

$$|D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x)| \leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\|\Delta f\|_E\,\|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}$$

і, значить,

$$\|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty \leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\|\Delta f\|_E\,\|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}. \tag{14}$$

В силу (14) маємо

$$\|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty \leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\,\|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}. \tag{15}$$

Враховуючи, що для функції $\varphi_{h,2}$ зображення (3) має місце в кожній точці $x \in \mathbb{R}^m$, аналогічно (12), встановлюємо, що для $\varphi_{h,2}$ при всіх $x \in \mathbb{R}^m$ справедлива рівність

$$D^\alpha\varphi_{h,2}(x) - U_h^\alpha\varphi_{h,2}(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\int\limits_{B_h}(-\Delta\varphi_{h,2}(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\,dy.$$

Як згортка функцій $\Delta\varphi_{h,2} \in E$ і $F_h(|y|) - c_h G_h(|y|) \in E^1$ функція $D^\alpha \varphi_{h,2} - U_h^\alpha \varphi_{h,2}$ неперервна в будь-якій точці $x \in \mathbb{R}^m$. Функція $U_h^\alpha \varphi_{h,2}(x)$ також буде неперервною в кожній точці $x \in \mathbb{R}^m$. Значить, неперервною буде і $D^\alpha \varphi_{h,2}(x)$.

Враховуючи неперервність функції $D^\alpha \varphi_{h,2} - U_h^\alpha \varphi_{h,2}$ і означення функції ψ_h, отримаємо

$$\|D^\alpha \varphi_{h,2} - U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty \geqslant |D^\alpha \varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha \varphi_{h,2}(0)| =$$

$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left| \int\limits_{B_h} \psi_h(|y|)(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy \right| = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}.$$

Звідси і із (15)отримаємо

$$\|D^\alpha \varphi_{h,2} - U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty = |D^\alpha \varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha \varphi_{h,2}(0)| =$$

$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)\|_{E^1}. \tag{16}$$

Відзначимо, що при виконанні умови (5) $\|D^\alpha \varphi_{h,2} - U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty \to 0$, $h \to 0$. Зіставляючи (14) і (16), бачимо, що справедлива

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми 1. Тоді при виконанні умов (8)–(10) для довільного $h > 0$ і для будь-якої функції $f \in L^\Delta_{\infty,E}$*

$$\|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty \leqslant \|D^\alpha \varphi_{h,2} - U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty \|\Delta f\|_E. \tag{17}$$

Нерівність (17) перетворюється на рівність для $f(t) = \varphi_{h,2}(t)$.

Із лем 1 і 2 випливає

Лема 3. *Нехай виконуються умови леми 1 і для $N > 0$*

$$h_N = \left(\frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty N} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Тоді при виконанні умов (8)–(10) $\|U_{h_N}^\alpha\| = N$ і

$$E_N(D^\alpha, W^\Delta_{\infty,E}) \leqslant \sup_{f \in W^\Delta_{\infty,E}} \|D^\alpha f - U_{h_N}^\alpha f\|_\infty = \|D^\alpha \varphi_{h_N,2} - U_{h_N}^\alpha \varphi_{h_N,2}\|_\infty.$$

3. Нерівності Колмогорова: оцінка рівномірної норми похідної Рісса. Припустимо, що виконуються умови (8)–(10). Із лем 1 і 2 для $f \in L^\Delta_{\infty,E}$ при умовах (4) і (5) випливає, що для будь-якого $h > 0$

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leqslant \|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty + \|U_h^\alpha f\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \|D^\alpha \varphi_{h,2} - U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty \|\Delta f\|_E + \frac{\|U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty}{\|\varphi_{h,2}\|_\infty} \|f\|_\infty. \tag{18}$$

Покажемо, що нерівність (18) перетворюється на рівність для функції $\varphi_{h,2}(y)$. Оскільки функція $D^\alpha \varphi_{h,2}(y)$ неперервна в точці 0, маємо:

$$\|D^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty \geqslant |D^\alpha \varphi_{h,2}(0)| = |D^\alpha \varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha \varphi_{h,2}(0) + U_h^\alpha \varphi_{h,2}(0)|.$$

Оскільки $D^\alpha\varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)$ і $U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)$ одного знаку, можемо написати, використовуючи (16):

$$\|D^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty \geq |D^\alpha\varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)| + |U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)| =$$

$$= \|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty + h^{-\alpha}\frac{\|U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty}{\|\varphi_{h,2}\|_\infty}\|\varphi_{h,2}\|_\infty.$$

Отже, нерівність (18) точна, і нами доведена

Теорема 1. *Нехай $0 < \alpha < 2$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву решітка на $\mathbb{R}^m$, що задовольняє умови (4) і (5), E^1 – асоційований підпростір до E. Тоді, якщо виконуються умови (8)–(10), то для довільної $f \in L^\Delta_{\infty,E}$ і $h > 0$*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leqslant h^{-\alpha}\frac{\|U_1^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}\cdot\|f\|_\infty + \|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty\cdot\|\Delta f\|_E. \tag{19}$$

Нерівність (19) є точною і перетворюється на рівність для функції $\varphi_{h,2}(y)$.

Припустимо тепер, що умови (8)–(10) не виконуються. В цьому випадку оцінку для $\|D^\alpha f\|_\infty$ запишемо у вигляді (див. (14) і (2.6) із [22]):

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leqslant \|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty + \|U_h^\alpha f\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\|F_h(|\cdot|) - c_hG_h(|\cdot|)\|_{E^1}\|\Delta f\|_E + \frac{4\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}h^{-\alpha}(1/\alpha + c_1)\|f\|_\infty =$$

$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}(2h^{-\alpha}\sigma_{m-1}(1/\alpha + c_1)\|f\|_\infty + \|F_h(|\cdot|) - c_hG_h(|\cdot|)\|_{E^1}\|\Delta f\|_E).$$

Для кожного $\varepsilon > 0$ існує функція $\psi_{h,\varepsilon} \in E$, $\|\psi_{h,\varepsilon}\|_E \leqslant 1$, така що

$$\int\limits_{B_h}(F_h(|y|) - c_hG_h(|y|))\psi_{h,\varepsilon}(y)\,dy > \|F_h(|y|) - c_hG_h(|y|)\|_{E^1} - \varepsilon.$$

і

$$\psi_{h,\varepsilon}(y) = \widetilde{\psi}_{h,\varepsilon}(|y|),\ \ y \in \mathbb{R}^m,$$

де $\widetilde{\psi}_{h,\varepsilon}(\rho)$ в середньому дорівнює нулю і $\operatorname{supp}\widetilde{\psi}_{h,\varepsilon}(\cdot) = [0,h]$.

Далі ми означимо $\widetilde{\varphi}_{h,2}(\rho)$ формулою (9) з функцією $\widetilde{\psi}_{h,\varepsilon}$ замість $\widetilde{\psi}_h$ і покладемо:

$$\varphi_{h,\varepsilon,2}(y) = \widetilde{\varphi}_{h,\varepsilon,2}(|y|),\ \ y \in \mathbb{R}^m.$$

Зрозуміло, що $\varphi_{h,\varepsilon,2} \in W^\Delta_{\infty,E}(\mathbb{R}^m)$,

$$\max_{y\in\mathbb{R}^m}\varphi_{h,\varepsilon,2}(y) = -\min_{y\in\mathbb{R}^m}\varphi_{h,\varepsilon,2}(y)$$

і

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}(F_h(|y|) - c_hG_h(|y|))\Delta\varphi_{h,\varepsilon,2}(y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{B_h} (F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) \psi_{h,\varepsilon}(y)\, dy > \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} - \varepsilon.$$

Міркуючи, як і в попередньому випадку, в силу неперервності функції $D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(y)$ в точці 0 маємо:

$$\|D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty \geqslant |D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)| = |D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0) - U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0) + U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)|.$$
$$= |D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0) - U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)| + |U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)| =$$
$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left| \int\limits_{B_h} \psi_{h,\varepsilon}(y)(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy \right| + |U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)| >$$
$$> \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} - \varepsilon + \|U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty =$$
$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} - \varepsilon + \frac{4\sigma_{m-1} h^{-\alpha}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1\right) \|\varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty.$$

Рівність

$$\frac{\|U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty}{\|\varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty} = \frac{4\sigma_{m-1} h^{-\alpha}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1\right)$$

встановлюється аналогічно до відповідної рівності в лемі 1. Отже, можемо сформулювати теорему

Теорема 2. *Нехай $0 < \alpha < 2$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву решітка на $\mathbb{R}^m$, що задовольняє умови (4) і (5), E^1 – асоційований підпростір до E. Тоді для довільних $f \in L^\Delta_{\infty,E}$ і $h > 0$ виконується точна нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{2\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1\right) h^{-\alpha} \cdot \|f\|_\infty + \right.$$
$$\left. + \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} \cdot \|\Delta f\|_E \right). \tag{20}$$

Відзначимо, що у випадку $E = L_s(\mathbb{R}^m)$, $\frac{m}{2} < s < \infty$, результати теорем 1 і 2 отримані в [22].

4. Найкраще наближення оператора D^α обмеженими операторами. Нехай виконуються умови (8) – (10). Покладемо $h_N = \left(\frac{4\sigma_{m-1}\left(\frac{1}{\alpha}+c_1\right)}{d_{m,2}(\alpha) N}\right)^{1/\alpha} = \left(\frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty N}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ для $N > 0$. Із леми 3 випливає, що

$$E_N(D^\alpha, W^\Delta_{\infty,E}) \leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} = \|D^\alpha \varphi_{h_N,2} - U_1^\alpha \varphi_{h_N,2}\|_\infty,$$

а із точності нерівності (19) випливає, що для оператора D^α виконується умова (7.1.12) теореми 7.1.1 із [5] з оператором $T = U^\alpha_{h_N}$ і функцією $f(t) = \varphi_{h_N,2}$. Отже справедлива

Теорема 3. *Нехай $0 < \alpha < 2$, $N > 0$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву решітка на $\mathbb{R}^m$, що задовольняє умови (4) і (5), E^1 – асоційований підпростір до E. Тоді при виконанні умов (8) – (10) справджується рівність:*

$$E_N(D^\alpha, W^\Delta_{\infty,E}) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} = \|D^\alpha \varphi_{h_N,2} - U_1^\alpha \varphi_{h_N,2}\|_\infty.$$

При цьому оператор U_h^α з $h = h_N$ є екстремальним оператором.

5. Нерівності Колмогорова: оцінка норми похідної Рісса в ідеальній структурі. В цьому розділі ми узагальнимо результат теореми 1 із [21].

Для $h > 0$ і функції $f \in L^\Delta_{E,E}$ розглянемо оператор (11). Застосовуючи узагальнену нерівність Мінковського, маємо:

$$\|U_h^\alpha\|_E = \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)}\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{2f(\cdot) - f(\cdot + t) - f(\cdot - t)}{|t|^{m+\alpha}}\,dt + 2c_h\sigma_{m-1}(f(\cdot) - \widetilde{f}(\cdot,h))\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)}\cdot 4\|f\|_E\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h}\frac{dt}{|t|^{m+\alpha}} + c_h\sigma_{m-1}\right\} = \frac{4\|f\|_E\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}\left(\frac{h^{-\alpha}}{\alpha} + c_h\right).$$

Тепер для функції $f \in L^\Delta_{E,E}$ отримаємо оцінку вевеличини $\|D^\alpha f(\cdot) - U_h^\alpha f(\cdot)\|_E$. По-перше покажемо, що для $f \in L^\Delta_{E,E}$ має місце зображення

$$D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\int\limits_{B_h}(-\Delta f(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\,dy. \qquad (21)$$

Дійсно, оскільки $\Delta f \in E$, то використовуючи нерівність Гельдера, з урахуванням умови (4), відзначимо, що

$$\left|\int\limits_{B_h}(-\Delta f)(x+y)(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\,dy\right| \leqslant \|\Delta f\|_E\|F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)\|_{E^1}. \qquad (22)$$

Як в [21], встановлюємо, що для довільної фінітної нескінченно диференційовної функції φ і для $f \in L^\Delta_{E,E}$ має місце зображення

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)(D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x))\,dx =$$

$$= \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)\int\limits_{B_h}(-\Delta f(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\,dy\,dx,$$

звідки з урахуванням (22), маємо (21).

Використовуючи (21) і узагальнену нерівність Мінковського, одержимо оцінку:

$$\|D^\alpha f(\cdot) - U_h^\alpha f(\cdot)\|_E \leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\|\Delta f\|_E\int\limits_{B_h}|F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)|\,dy.$$

Тепер для $\|D^\alpha f\|_E$ можемо написати

$$\|D^\alpha f\|_E \leqslant \|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_E + \|U_h^\alpha f\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\|\Delta f\|_E \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{L_1} + \frac{4\|f\|_E \sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}\left(\frac{h^{-\alpha}}{2} + c_h\right) =$$

$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\left(2\sigma_{m-1}\left(\frac{1}{\alpha} + c_1\right)h^{-\alpha}\cdot\|f\|_E + \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{L_1}\cdot\|\Delta f\|_E\right).$$

Таким чином, нами доведена

Теорема 4. *Нехай $0 < \alpha < 2$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву решітка на $\mathbb{R}^m$, що задовольняє умови (4) і (5), E^1 – асоційований підпростір до E. Тоді для довільних $f \in L^{\Delta}_{E,E}$ і $h > 0$ виконується нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_E \leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\left(2\sigma_{m-1}\left(\frac{1}{\alpha} + c_1\right)h^{-\alpha}\cdot\|f\|_E + \right.$$

$$\left. + \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{L_1}\cdot\|\Delta f\|_E\right).$$

Із теореми 4 одразу випливає

Наслідок 1. *Нехай $m/2 < s < \infty$ і $0 < \alpha < 2 - m/s$ або $s = \infty$ і $0 < \alpha < 2$. Тоді для довільних функції $f \in L^{\Delta}_{s,s}$ і $h > 0$ виконується нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_{L_s} \leqslant \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\left(2\sigma_{m-1}\left(\frac{1}{\alpha} + c_1\right)h^{-\alpha}\cdot\|f\|_{L_s} + \right.$$

$$\left. + \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{L_1}\cdot\|\Delta f\|_{L_s}\right). \tag{23}$$

При $s = \infty$ нерівність є точною.

Відзначимо, що нерівність (23) можна переписати у вигляді

$$\|D^\alpha f\|_{L_s} \leqslant \frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty} h^{-\alpha}\|f\|_{L_s} + \|D^\alpha \varphi_{1,2} - c_1 U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty h^{2-\alpha}\|\Delta f\|_{L_s}. \tag{24}$$

Після мінімізації по h остання нерівність набуває вигляду

$$\|D^\alpha f\|_{L_s} \leqslant \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}}\|\Delta f\|_{L_s}^{\frac{\alpha}{2}}\|f\|_{L_s}^{1-\frac{\alpha}{2}}. \tag{25}$$

В (24) і (25) функція $\varphi_{1,2}$ означена в такий спосіб (див. [21]). Нехай для $\rho \geqslant 0$ і $\delta = \sqrt[m]{2}$

$$\psi(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2m}(\rho^2 - 1/\delta^2 - \sigma G_1(1/\delta) + 1/2), & 0 \leqslant \rho \leqslant 1/\delta \\ \frac{1}{2m}(-\rho^2 - 2\sigma_{m-1}G_1(\rho) + 1/\delta^2 + \sigma_{m-1}G_1(1/\delta) + 1/2), & 1/\delta < \rho \leqslant 1 \\ \psi(1), & \rho > 1. \end{cases}$$

Для $h > 0$ і $x \in \mathbb{R}^m$ покладемо

$$\varphi_{h,2}(x) = h^{-2}\psi(h|x|).$$

Отже, маємо

Наслідок 2. *Нехай $m/2 < s < \infty$ і $0 < \alpha < 2 - m/s$ або $s = \infty$ і $0 < \alpha < 2$. Тоді для довільних функції $f \in L^{\Delta}_{s,s}$ і $h > 0$ виконується нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_s \leqslant \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}} \|\Delta f\|_{L_s}^{\frac{\alpha}{2}} \|f\|_{L_s}^{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

При $s = \infty$ нерівність є точною.

Відзначимо, що у випадку $s = \infty$ результати наслідків 1 і 2 отримані в [21].

Висновки. В роботі отримані нові нерівності типу Колмогорова для норм дробових похідних за Ріссом порядку $0 < \alpha < 2$ функцій багатьох змінних з лапласіаном, обмеженим за нормою в ідеальній структурі.

1. **Колмогоров А. Н.** О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале / А. Н. Колмогоров // Избр. тр.: Математика, механика. М.: Наука. – 1985. –С. 252–263.
2. **Тихомиров В. М.** Неравенства для производных: Комментарии к избранным трудам А. Н. Колмогорова / В. М. Тихомиров, Г. Г. Магарил-Ильяев // М. : Наука, 1985. – С. 387–390.
3. **Арестов В. В.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными / В. В. Арестов, В. Н. Габушин // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 42–63.
4. **Арестов В. В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи / В. В. Арестов // Успехи мат. наук. – 1996. – Т. 51, № 6. – С. 88–124.
5. **Бабенко В. Ф.** Неравенства для производных и их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов. – Киев : Наук. думка, 2003. — 590 с.
6. **Mitrinović D. S.** Inequalities involving functions and their integrals and derivatives / D. S. Mitrinović, J. E. Peĉarić, A. M. Fink. – Dordrecht; Boston; London: Kluver Acad. Publ, 1991. — 587 p.
7. **Коновалов В. Н.** Точные неравенства для норм функций, третьих частных и вторых смешанных производных / В. Н. Коновалов // Мат. заметки. –1978. – Т. 23, вып. 1. – С. 67–78.
8. **Буслаев А. П.** О неравенствах для производных в многомерном случае / А. П. Буслаев, В. М. Тихомиров // Мат. заметки. – 1979. – Т. 25, вып. 1. – С. 59–74.
9. **Тимошин О. А.** Точные неравенства между нормами производных второго и третьего порядков / О. А. Тимошин // Докл. РАН. – 1995. – Т. 344, № 1. – С. 20–22.
10. **Тимофеев В. Г.** Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных / В. Г. Тимофеев // Мат. заметки. – 1985. – Т. 37, вып. 5. – С. 676–689.
11. **Babenko V. F.** Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications / V. F. Babenko, V. A. Kofanov, S. A. Pichugov // Multivariate approximation and splines / Eds. G. Nërberger, J.W. Schmidt, G. Walz. Basel: Birkhuser Verlag. – 1997. – P. 1–12.
12. **Бабенко В. Ф.** О точных неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных / В. Ф. Бабенко // Докл. НАН Украины. – 2000. – № 5. – С. 7–11.

13. **Гейсберг С. П.** Обобщение неравенства Адамара / С. П. Гейсберг // Исследование по некоторым проблемам конструктивной теории функций: сб. науч. тр. ЛОМИ, Ленинград. – 1965. – Т. 50. – С. 42–54.
14. **Arestov V. V.** Inequalities for fractional derivatives on the half-line / V. V. Arestov // Approximation theory: proc. conf. Warsaw: PWN-Pol. Sci. Publ. – 1979. – P. 19–34.
15. **Magaril-Il'jaev G. G.** On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line / G. G. Magaril-Il'jaev, V. M. Tihomirov // Anal. Math. – 1981. – Vol. 7, № 1. – P. 37–47.
16. **Бабенко В. Ф.** Точные оценки для норм дробных производных функций многих переменных, удовлетворяющих условию Гельдера / В. Ф. Бабенко, С. А. Пичугов // Мат. заметки. – 2010. – Т. 87, вып. 1. – С. 26–34.
17. **Бабенко В. Ф.** О неравенствах типа Колмогорова для производных дробного порядка / В. Ф.Бабенко, М. С. Чурилова // Вісн. Дніпропетровського ун-ту. Математика. – 2001. – Т. 6. – С. 16–20.
18. **Babenko V. F.** Kolmogorov type inequalities for hypersingular integrals with homogeneous characteristic / V. F. Babenko, M. S. Churilova // Banach J. Math. – 2007. – Vol. 1. – P. 66–77.
19. **Babenko V. F.** Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions / V. F. Babenko, N. V. Parfinovych, S. A. Pichugov // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, № 3. – С. 301–314.
20. **Бабенко В. Ф.** Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения/ В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Труды УроРАН. – 2011. – Т. 17, № 3 – С. 60–70.
21. **Бабенко В. Ф.** Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных с ограниченным в L_∞ лапласианом и смежные задачи/ В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, С. А. Пичугов// Мат. заметки. – 2014. – Т. 95, вып. 1. – С. 3–17.
22. **Бабенко В. Ф.** Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения/ В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Укр. мат. вісн. – 2012. – Т. 9, № 2 – С. 157–174.
23. **Моторный В. П.** Теория аппроксимации и гармонический анализ /В. П. Моторный, В. Ф. Бабенко, А. А. Довгошей, О. И. Кузнецова. – Киев : Наук. думка, 2010. – 302 с.
24. **Самко С. Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко , А. А. Килбас , О. И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
25. **Крейн С.Г.** Интерполяция линейных операторов/ С.Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М. Семенов. – М., Наука, 1978. – 400 с.
26. **Красносельский М. А.** Выпуклые функции и пространства Орлича/ М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий. – М., Физматгиз, 1958. – 271 с.
27. **Стечкин С. Б.** Наилучшее приближение ограниченных операторов /С. Б. Стечкин // Мат. заметки. —1967. — Т. 1, вып. 2. — С. 137–148.
28. **Курант Р.** Уравнения с частными проозводными / Р. Курант. – М.: Мир, 1964. – 843 с.

Парфинович Н. В.
Оценки норм производных по Риссу функций многих переменных

Резюме

Пусть $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_m}$ – оператор Лапласа. Обозначим через $L_s(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leqslant s \leqslant \infty)$ пространства измеримых функций $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ с конечной нормой $\|f\|_s$. Пусть F і E – идеальные решетки на $\mathbb{R}^m$ с конечными нормами $\|\cdot\|_F$, $\|\cdot\|_E$. Через $L^{\Delta}_{F,E}(\mathbb{R}^m)$ обозначим пространство функций $f \in F$ таких, что $\Delta f \in E$. Если $F = L_s(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leqslant s \leqslant \infty)$, то будем использовать обозначения $L^{\Delta}_{s,E}$, или $L^{\Delta}_{s,s}$ если, кроме этого, $E = L_s(\mathbb{R}^m)$. В работе получены новые неравенства типа Колмогорова для норм производных по Риссу $D^{\alpha} f$ функций $f \in L^{\Delta}_{\infty,E}(\mathbb{R}^m)$. В качестве следствия получены такие неравенства для функций $f \in L^{\Delta}_{s,s}(\mathbb{R}^m)$. Решена задача о приближении неограниченного оператора D^{α} ограниченными на классе функций f таких, что $\|\Delta f\|_E \leqslant 1$.
Ключевые слова: дробная производная, неравенства для производных, приближения неограниченных операторов ограниченными, идеальные решетки .

Parfinovych N. V.
Estimates of the norms of Riesz derivatives of multivariate functions

Summary

Let $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_m}$ be the Laplace operator. We denote by $L_s(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leqslant s \leqslant \infty)$ the spaces of measurable functions $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ with a finite norm $\|f\|_s$. Let F and E be ideal lattices on $\mathbb{R}^m$ with finite norms $\| \cdot \|_F$ and $\| \cdot \|_E$. By $L^{\Delta}_{F,E}(\mathbb{R}^m)$ we denote the space of functions $f \in F$ such that $\Delta f \in E$. If $F = L_s(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leqslant s \leqslant \infty)$, then we use the notation $L^{\Delta}_{s,E}$, or $L^{\Delta}_{s,s}$ if, in addition, $E = L_s(\mathbb{R}^m)$. We obtain new Kolmogorov-type inequalities for the norms of the Riesz derivatives $D^{\alpha} f$ of functions $f \in L^{\Delta}_{\infty,E}(\mathbb{R}^m)$. As a corollary, we obtain inequalities for the functions $f \in L^{\Delta}_{s,s}(\mathbb{R}^m)$. The problem on approximation an unbounded operator D^{α} by bounded ones on a class of functions f such that $\|\Delta f\|_E \leqslant 1$ is solved.
Key words: fractional derivative, inequalities for derivatives, approximation of unbounded operator by bounded, ideal latties.

References

1. Kolmogorov, A. N. (1985). O neravenstvah mezhdu verhnimi granyami posledovatel'nyh proizvodnyh funkcii na beskonechnom intervale [On inequalities between the upper bounds of the successive derivatives of a function on an infinite interval]. *Izbr. tr.: Matematika, mekhanika. M.: Nauka.*, Vol. 52, P. 252–263.
2. Tikhomirov, V. M., Magaril-Il'yaev, G. G. (1985). Neravenstva dlya proizvodnyh: Kommentarii k izbrannym trudam A. N. Kolmogorova [Inequalities for derivatives: Comments on selected works of A. N. Kolmogorov]. M. : Nauka, P. 387–390.
3. Arestov, V. V., Gabushin, V. N. (1995). Nailuchsheye priblizheniye neogranichennykh operatorov ogranichennymi [Best approximation of unbounded operators by bounded ones]. *Izv. vuzov. Matematika*, № 11, P. 42–63.
4. Arestov, V. V.(1996). Priblizheniye neogranichennykh operatorov ogranichennymi i rodstvennyye ekstremal'nyye zadachi [Approximation of unbounded operators by bounded ones and related extremal problems]. *Успехи мат. наук*, V. 51, № 6, P. 88–124.
5. Babenko, V. F., Korneychuk, N. P., Kofanov, V. A., Pichugov, S. A. (2003). *Neravenstva dlya proizvodnykh i ikh prilozheniya [Inequalities for derivatives and their applications].* Kiyev : Nauk. dumka, 590 p.

6. Mitrinović, D. S., Peĉarić, J. E., Fink, A. M. (1991). *Inequalities involving functions and their integrals and derivatives.* Dordrecht; Boston; London: Kluver Acad. Publ, 1991. — 587 p.
7. Konovalov, V. N. (1978). Tochnyye neravenstva dlya norm funktsiy, tret'ikh chastnykh i vtorykh smeshannykh proizvodnykh [Exact inequalities for norms of functions, third partial and second mixed derivatives]. *Mat. zametki*, V. 23, №. 1, P. 67–78.
8. Buslayev, A. P., Tikhomirov, V. M. (1979). O neravenstvah dlya proizvodnykh v mnogomernom sluchaye [On inequalities for derivatives in the multidimensional case]. *Mat. zametki*, V. 25, № 1, P. 59–74.
9. Timoshin, O. A. (1995). Tochnyye neravenstva mezhdu normami proizvodnykh vtorogo i tret'yego poryadkov [Exact inequalities between the norms of the derivatives of second and third orders] *Dokl. RAN*, V. 344, № 1, P. 20–22.
10. Timofeyev, V. G. (1985). Neravenstva tipa Landau dlya funktsiy neskol'kikh peremennykh [Landau type inequalities for functions of several variables]. *Mat. zametki*, V 37, № 5, P. 676–689.
11. Babenko, V. F., Kofanov, V. A., Pichugov, S. A. (1997). Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications. *Multivariate approximation and splines / Eds. G. Nërberger, J.W. Schmidt, G. Walz. Basel: Birkhuser Verlag*, P. 1–12.
12. Babenko, V. F. (2000). O tochnykh neravenstvakh tipa Kolmogorova dlya funktsiy dvukh peremennykh [On exact inequalities of Kolmogorov type for functions of two variables]. *Dokl. NAN Ukrainy*, № 5, P. 7–11.
13. Geysberg, S. P. (1965). Obobshcheniye neravenstva Adamara [A generalization of the Hadamard inequality]. *Issledovaniye po nekotorym problemam konstruktivnoy teorii funktsiy: sb. nauch. tr. LOMI, Leningrad*, V 50, P. 42–54.
14. Arestov, V. V. (1979). Inequalities for fractional derivatives on the half-line.*Approximation theory: proc. conf. Warsaw: PWN-Pol. Sci. Publ*, P. 19–34.
15. Magaril-Il'jaev G. G., Tihomirov, V. M. (1981). On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line. *Anal. Math*, V. 7, № 1, P. 37–47.
16. Babenko, V. F., Pichugov, S. A. (2010). Tochnyye otsenki dlya norm drobnykh proizvodnykh funktsiy mnogikh peremennykh, udovletvoryayushchikh usloviyu Gel'dera [Exact estimates for the norms of fractional derivatives of functions of several variables that satisfy the Holder condition]. *Mat. zametki*, V. 87, № 1, P. 26–34.
17. Babenko, V. F., Churilova, M. S. (2001). O neravenstvakh tipa Kolmogorova dlya proizvodnykh drobnogo poryadka [On the Kolmogorov type inequalities for derivatives of fractional order]. *Visn. Dnipropetrovs'kogo un-tu. Matematyka*, V. 6, P. 16–20.
18. Babenko, V. F., Churilova, M. S. (2007). Kolmogorov type inequalities for hypersingular integrals with homogeneous characteristic. *Banach J. Math*, V. 1, P. 66–77.
19. Babenko, V. F., Parfinovych, N. V., Pichugov, S. A. (2010). Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions. *Ukr. mat. zhurn*, V. 62, № 3, P. 301–314.
20. Babenko, V. F., Parfinovich, N. V. (2011). Neravenstva tipa Kolmogorova dlya norm proizvodnykh Rissa funktsiy mnogikh peremennykh i nekotoryye ikh prilozheniya [Kolmogorov type inequalities for the norms of Riesz derivatives of functions of several variables and some of their applications]. *Trudy Uro RAN*, V. 17, № 3, P. 60–70.
21. Babenko, V. F., Parfinovich, N. V., Pichugov, S. O. (2014). Neravenstva tipa Kolmogorova dlya norm proizvodnykh Rissa funktsiy mnogikh peremennykh s ogranichennym v L_∞ laplasianom i smezhnyye zadachi [Kolmogorov type inequalities for the

norms of Riesz derivatives of functions of several variables with bounded in L_∞ Laplacian and related problems]. *Mat. zametki*, V. 95, №. 1, P. 3–17.

22. Babenko V. F., Parfinovich, N. V. (2012). Neravenstva tipa Kolmogorova dlya norm proizvodnykh Rissa funktsiy mnogikh peremennykh i nekotoryye ikh prilozheniya[Kolmogorov type inequalities for the norms of Riesz derivatives of functions of several variables and some of their applications] *Ukr. mat. visn*, V. 9, № 2, P. 157–174.

23. Motornyy, V. P., Babenko, V. F, Dovgoshey, A. A., Kuznetsova, O. I. (2010). *Teoriya approksimatsii i garmonicheskiy analiz [Approximation theory and harmonic analysis]*. Kiyev : Nauk. dumka, 302 p.

24. Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I. (1987). *Integraly i proizvodnye drobnoho poryadka i nekotorye ih prilozheniya [Fractional integrals and derivatives with some applications]*. Minsk: Nauka i tekhnika, 688 p.

25. Kreyn, S. G., Petunin, YU. I, Semenov, Ye. M. (1978). *Interpolyatsiya lineynykh operatorov [Interpolation of linear operators]*. M., Nauka, 400 p.

26. Krasnosel'skiy M. A., Rutitskiy YA. B. (1958). *Vypuklyye funktsii i prostranstva Orlicha [Convex functions and Orlicz spaces]*. M., Fizmatgiz, 271 p.

27. Stechkin, S. B. (1967). Nailuchsheye priblizheniye ogranichennykh operatorov [the best approximation of bounded operators]. *Mat. zametki*, V. 1, №. 2, P 137–148.

28. Kurant, R. (1964). *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi[Partial differential equations]*. M.: Mir, 843 p.