УДК 517.928

О. Д. Кичмаренко, А. А. Плотников
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ПОШАГОВОЕ УСРЕДНЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ПЕРЕМЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Теория дифференциальных включений начала свое развитие в начале тридцатых годов 20-го века с публикаций А. Маршо и С. Заремба. Однако бурное развитие данной теории началось с 60-х годов прошлого века благодаря работам Т. Важевского и А.Ф. Филиппова, которые обосновали ее тесную связь с теорией оптимального управленния и дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Математическое обоснование метода усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений берет начало с фундаментальной работы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. В 70-е годы В.А. Плотниковым была обоснована возможность применение различных схем метода усреднения для дифференциальных включений. В данной статье обосновывается возможность применения пошаговой схемы усреднения при исследовании линейных дифференциальных включений с переменной размерностью.

MSC: 34C29, 34A60.
Ключевые слова: дифференциальное включение, усреднение, линейная система .

Введение. Теория дифференциальных включений начала свое развитие в начале тридцатых годов 20-го века с публикаций А. Маршо и С. Заремба. Однако бурное развитие данной теории началось с 60-х годов прошлого века благодаря работам Т. Важевского и А.Ф. Филиппова, которые обосновали ее тесную связь с теорией оптимального управленния и дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Основные результаты теории дифференциальных включений изложены в работах [1–4] и ссылки в них.

Математическое обоснование метода усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений берет начало с фундаментальной работы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [5]. Большую роль в разработке метода усреднения для различных классов динамических систем сыграли работы Ю. А. Митропольского, В. И. Арнольда, В. М. Волосова, Н. Н. Моисеева, Н. А. Перестюка, В. А. Плотникова, А. М. Самойленко, А. Н. Филатова, О. П. Филатова, М. М. Хапаева, Т. Dontchev, M. Kisieliwicz, J. A. Sanders и др. (см. [2, 3, 6, 7] и ссылки в них).

В данной статье мы рассмотрим дифференциальные включения с переменной размерностью. Такие дифференциальные включения относятся к импульсным дифференциальным включениям [3]. Однако в отличие от ранее рассматриваемых импульсных дифференциальных включений, в данном случае в моменты импульсных воздействий меняется размерность системы, а сам импульс "связывает" разноразмерные решения в эти моменты времени. Также к таким системам сводятся, например, управляемые процессы возникновения и развития объектов, дифференцированных по моменту создания [8–10] и управляемые системы переменной размерности [11–13].

В этой статье обоснована возможность применения пошаговой схемы усреднения для исследования таких линеных систем.

Получена 11.04.2017

Основные результаты

1. Основные определения и обозначения. Пусть $\theta > 0$ произвольное действительное число, N - множество натуральных чисел, а $N_0 = N \bigcup 0$.

Обозначим через Σ_θ множество функций $n(\cdot) : R_+ \to N$, которые удовлетворяют следующим условиям

1) $n(\cdot)$ - кусочно-постоянные и кусочно-непрерывные справа;

2) если $n(t-0) - n(t) \neq 0$, то $n(\tau) - n(t) = 0$ для всех $\tau \in [t,t+\theta]$.

Очевидна справедливость следующей леммы:

Лемма 1. *Для любой функции $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ полупрямую R_+ можно разбить не более чем на счетное число множеств $I_i = [t_i,t_{i+1})$, $i = 0,1,...$ таких, что $R_+ = \bigcup_i I_i$ и $I_i \bigcap I_j = \emptyset$, если $i \neq j$, где $n(t) - n(t_i) = 0$ для всех $t \in I_i$.*

Обозначим через Φ_n множество функций $\varphi(t,x)$, соответствующих функции $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ таких, что

$$\varphi(t,x) = \begin{cases} x, & n(t-0) = n(t), \\ \psi(x), & n(t-0) \neq n(t), \end{cases}$$

где $\psi : R^{n(t-0)} \to R^{n(t)}$ - непрерывная функция.

Например, $\psi(x) = M(n(t),n(t-0))x$, где $M(n(t),n(t-0)) = (m_{ij})_{i=1,j=1}^{n(t),n(t-0)}$ матрица размерности $n(t) \times n(t-0)$ принадлежащая некоторому множеству $M = \{(m_{ij})_{i=1,j=1}^{k,l}\}_{k=1,l=1}^{\infty,\infty}$ матриц размерностей $(k \times l)$, $k = 1,2,...,l = 1,2,...$.

Возьмем произвольную функцию $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ и $\varphi(\cdot,\cdot) \in \Phi_n$.

Определение 1. *Функцию $x(\cdot,n)$ назовем функцией с переменной размерностью, если $x(t,n) \in R^{n(t)}$ для всех $t \geqslant 0$.*

Определение 2. *Будем говорить, что функция с переменной размерностью $x(\cdot,n)$ непрерывна на интервале $(t',t'') \subset R_+$, если она непрерывна в точках $t \in (t',t'')$, где $n(t) - n(t-0) = 0$ и непрерывна справа в точках $t \in (t',t'')$, где $n(t) - n(t-0) \neq 0$.*

Определение 3. *Будем говорить, что функция с переменной размерностью $x(\cdot,n)$ абсолютно непрерывна на сегменте $[t',t''] \subset R_+$, если она непрерывна на (t',t'') и абсолютно непрерывна на любом сегменте $[\tau',\tau''] \subset [t',t'']$, где $n(t) - n(t-0) = 0$ для всех $t \in [\tau',\tau'']$.*

Замечание 1. *Аналогично, можно ввести определение измеримости (дифференцируемости, интегрируемости, липшицевости и др.) функции $x(\cdot,n)$.*

Определение 4. *Многозначное отображение $F(\cdot,n)$ назовем отображением с переменной размерностью, если множество $F(t,n) \subset R^{n(t)}$ для всех $t \in R_+$.*

Определение 5. *Будем говорить, что многозначное отображение с переменной размерностью $F(\cdot,n)$ непрерывно на интервале $(t',t'') \subset R_+$, если оно непрерывно в точках $t \in (t',t'')$, где $n(t) - n(t-0) = 0$ и непрерывно справа в точках $t \in (t',t'')$, где $n(t) - n(t-0) \neq 0$.*

Рассмотрим следующую систему с переменной размерностью

$$\dot{x}(t,n,\varphi) \in A(t,n)x(t,n,\varphi) + F(t,n), \;\; x(0,n,\varphi) = x_0, \tag{1}$$

где $t \in R_+$ - время; $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$; $\varphi(\cdot,\cdot) \in \Phi_n$; $x(t,n,\varphi)$ - фазовый вектор; $A(t,n) : R_+ \to R^{n(t)\times n(t)}$ - матрично-значная функция с переменной размерностью; $F(t,n) : R_+ \to comp(R^{n(t)})$ - многозначное отображение с переменной размерностью.

Определение 6. *Абсолютно непрерывная функция с переменной размерностью $x(\cdot,n,\varphi)$ называется решением системы (1) на отрезке $[0,T]$, если*

1) $\dot{x}(t,n,\varphi) \in A(t,n)x(t,n,\varphi) + F(t,n)$ *для почти всех* $t \in (0,T)$,

2) $x(0,n,\varphi) = x_0$,

3) $x(t,n,\varphi) = \varphi(t,x(t-0,n,\varphi))$ *для всех* $t \in (0,T]$.

Замечание 2. *Если $n(t) \equiv n$, то система (1) будет обычным линейным дифференциальным включением.*

Предположение 1. Пусть функция $n(\cdot)$ ограничена постоянной $\overline{n} \geqslant 1$ для всех $t \geqslant 0$.

Предположение 2. Пусть справедливы следующие условия:

a) $A(\cdot,n)$ - измерима по t на R_+;

b) $F(\cdot,n)$ - измеримо по t на R_+;

c) существует такая постоянная $\kappa > 0$, что для всех $t \in R_+$

$$\|A(t,n)\|_{n(t)} \leqslant \kappa, \quad h_{n(t)}(F(t,n),\{0\}_{n(t)}) \leqslant \kappa$$

где $\{0\}_{n(t)}$ - нулевой вектор в пространстве $R^{n(t)}$, $\|x-y\|_{R^{n(t)}}$ - евклидова метрика в пространстве $R^{n(t)}$, $\|A(t,n)\|_{n(t)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n(t)}\sum_{j=1}^{n(t)} a_{ij}^2(t,n)}$, а $h_{n(t)}(A,B)$ - метрика Хаусдорфа в пространстве $comp(R^{n(t)})$.

Теорема 1. [11] *Если $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$, $\varphi(\cdot,\cdot) \in \Phi_n$, $A(\cdot,n)$ и $F(\cdot,n)$ удовлетворяют условиям предположений 1 и 2, то на любом отрезке $[0,T]$ у системы (1) существует решение $x(\cdot,n,\varphi)$.*

Обозначим через $X(t,n,\varphi)$ сечение множества решений системы (1) в момент времени $t \in [0,T]$.

Теорема 2. [11] *Если $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$, $\varphi(\cdot,\cdot) \in \Phi_n$, $A(\cdot,n)$ и $F(\cdot,n)$ удовлетворяют условиям предположений 1 и 2, то $X(t,n,M) \in conv(R^{n(t)})$ для всех $t \in [0,T]$.*

2. Метод пошагового усреднения. Пусть $G_i = \{(t,x) : t \in I_i, x \in M_i \subset R^{n(t)}\}$, где I_i соответствуют лемме, M_i - выпуклые множества, а $G = \bigcup_i G_i$.

Теперь рассмотрим следующую систему с малым параметром

$$\dot{x}(t,n,\varphi) \in \varepsilon[A(t,n)x(t,n,\varphi) + F(t,n)], \quad x(0,n,\varphi) = x_0, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $t \in R_+$ - время; $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$; $\varphi(\cdot,\cdot) \in \Phi_n$; $x(t,n,\varphi)$ - фазовый вектор; $A(t,n) : R_+ \to R^{n(t)\times n(t)}$ - матрично-значная функция с переменной размерностью; $F(t,n) : R_+ \to comp(R^{n(t)})$ - многозначное отображение с переменной размерностью.

Возьмем некоторое $\omega > 0$. Обозначим через Γ множество точек пространства R_+ таких, что $\gamma_i = i\omega$, $i = 0,1,...$, а через Υ множество точек τ_i таких, что $n(\tau_i - 0) - n(\tau_i + 0) \neq 0$.

Обозначим через Ξ множество точек $t_i, i = 0,1,...$ таких, что $\Xi = \Gamma \bigcup \Upsilon$.

Очевидно, что $t_{i+1} - t_i \leqslant \omega$ для всех $i = 0,1,...$.

Поставим в соответствие системе (2) следующую усредненную систему

$$\dot{y}(t,n,\varphi) \in \varepsilon[\bar{A}(t,n)y(t,n,\varphi) + \bar{F}(t,n)], \quad y(0,n,\varphi) = x_0, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} \overline{A}(t,n) &= \{A_i(n) : A_i(n) = \tfrac{1}{t_{i+1}-t_i}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(s,n)ds,\ t \in [t_i,t_{i+1}),\ i = 0,1,...\},\\ \overline{F}(t,n) &= \{F_i(n) : F_i(n) = \tfrac{1}{t_{i+1}-t_i}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(s,n)ds,\ t \in [t_i,t_{i+1}),\ i = 0,1,...\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть в области G выполняются следующие условия:*

1) *функция $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$ ограничена константой $\overline{n} > 0$ для всех $t \geqslant 0$;*

2) *$A(\cdot,n)$ - измерима по t на R_+;*

3) *$F(\cdot,n)$ - измеримо по t на R_+;*

4) *существует такая постоянная $\kappa > 0$, что для всех $t \in R_+$*

$$\|A(t,n)\|_{n(t)} \leqslant \kappa, \quad h_{n(t)}(F(t,n),\{0\}_{n(t)}) \leqslant \kappa$$

5) *существует $\mu \in (0,1)$ такое, что для всех $\tau_i \in \Upsilon$ и любых $x,x_1,x_2 \in M_{i-1}$*

$$\|\varphi(\tau_i,x)\|_{R^{n(\tau_i)}} \leqslant \mu\|x\|_{R^{n(\tau_i-0)}},\ \|\varphi(\tau_i,x_1)-\varphi(\tau_i,x_2)\|_{R^{n(\tau_i)}} \leqslant \mu\|x_1-x_2\|_{R^{n(\tau_i-0)}};$$

6) *для всех $x_0 \in M_0' \subset M_0$ и $t > 0$ решения системы (2) с некоторой ρ-окрестностью принадлежат области G.*

Тогда для любого $L > 0$ существуют $\varepsilon_0(L) > 0$ и $C(L) > 0$ такие, что для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ и $t \in [0,L\varepsilon^{-1}]$ справедливы следующие утверждения:

1) *для любого решения $x(\cdot)$ системы (2) существует решение $y(\cdot)$ системы (3) такое, что*
$$\|x(t) - y(t)\|_{R^{n(t)}} < C\varepsilon; \tag{5}$$

2) *для любого решения $y(\cdot)$ системы (3) существует решение $x(\cdot)$ системы (2) такое, что выполняется неравенство (5).*

Доказательство. Очевидно, что из условий 2)-4) теоремы следует, что отображения $\bar{A}(\cdot,n)$ и $\overline{F}(\cdot,n)$ кусочно-постоянные и равномерно ограниченны константой $\kappa > 0$.

Теперь докажем выполнение первого утверждения. Обозначим через $\Xi_\varepsilon = [0,L\varepsilon^{-1}]\bigcap \Xi$ и $\Upsilon_\varepsilon = [0,L\varepsilon^{-1}]\bigcap \Upsilon$. Очевидно, что множества Ξ_ε и Υ_ε конечны и будем считать, что они содержат $k+1 \leqslant \left[\frac{L}{\varepsilon\omega}\right]+1$ элементов $t_0,t_1,...,t_k$ и $l \leqslant \left[\frac{L}{\varepsilon\theta}\right]$ элементов $\tau_1,...,\tau_l$, соответственно. Так же обозначим через $t_{k+1} = L\varepsilon^{-1}$.

Возьмем любое решение $x(\cdot,n,\varphi)$ системы (2). Тогда

$$x(t,n,\varphi) = x(t_i,n,\varphi) + \varepsilon \int\limits_{t_i}^{t} [A(s,n)x(s,n,\varphi) + f(s,n)]\, ds \tag{6}$$

для всех $t \in [t_i,t_{i+1})$, если $t_{i+1} \in \Upsilon$ и $t \in [t_i,t_{i+1}]$, если $t_{i+1} \notin \Upsilon$, $i = 0,1,...,k$, где $f(\cdot,n)$ - измеримая вектор-функция такая, что $f(t,n) \in F(t,n)$ почти для всех $t \in [0,L\varepsilon^{-1}]$. А так же $x(0,n,\varphi) = x_0$ и $x(t_i,n,\varphi) = \varphi(t_i,x(t_i-0,n,\varphi))$ для всех $t_i \in \Xi_\varepsilon \bigcap \Upsilon$.

Теперь рассмотрим функцию

$$y(t,n,\varphi) = y(t_i,n,\varphi) + \varepsilon \int\limits_{t_i}^{t} \left[\bar{A}(s,n)y(s,n,\varphi) + \bar{f}(s,n)\right] ds, \tag{7}$$

для всех $t \in [t_i,t_{i+1})$, если $t_{i+1} \in \Upsilon$ и $t \in [t_i,t_{i+1}]$, если $t_{i+1} /\in \Upsilon$, $i = 0,1,...,k$, где $\bar{f}(\cdot,n)$ - измеримая вектор-функция такая, что

$$\bar{f}(t,n) = \{f_i(n) \,:\, f_i(n) = \frac{1}{t_{i+1}-t_i} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(s,n)ds,\, t \in [t_i,t_{i+1}),\, i = 0,1,...\}$$

Очевидно, что $\bar{f}(t,n) \in \bar{F}(t,n)$ для всех $t \in [0,L\varepsilon^{-1}]$. А так же $y(0,n,\varphi) = x_0$ и $y(t_i,n,\varphi) = \varphi(t_i,y(t_i-0,n,\varphi))$ для всех $t_i \in \Xi_\varepsilon \bigcap \Upsilon$.

Возьмем произвольное $t \in (0,L\varepsilon^{-1})$. Тогда возможны следующие случаи:

1) $t \in (0,\tau_1)$, где $\tau_1 \in \Upsilon_\varepsilon$;
2) $t \in (\tau_j,\tau_{j+1})$, где $\tau_j,\tau_{j+1} \in \Upsilon_\varepsilon$, $j \in \{1,...,l-1\}$;
3) $t \in (\tau_l,t_{k+1})$, где $\tau_l \in \Upsilon_\varepsilon$;
4) $t = \tau_r$, где $\tau_r \in \Upsilon_\varepsilon, r \in \{1,...,l\}$.

Рассмотрим первый случай. Предположим, что $[0,\tau_1]\bigcap \Xi_\varepsilon = \{t_0,...,t_m\}$ и $t \in (t_{j-1},t_j)$, $j = 1,...,m$, где $t_0 = 0, t_m = \tau_1$. Из (10) и (7), имеем

$$\|x(t,n,\varphi)\| \leqslant M, \quad \|y(t,n,\varphi)\| \leqslant M, \tag{8}$$

где $M = (\|x_0\| + \kappa L)e^{\kappa L}$.

Теперь оценим разность

$$\|x(t,n,\varphi) - y(t,n,\varphi)\|_{R^{n(0)}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| x(t_{j-1},n,\varphi) + \varepsilon \int_{t_{j-1}}^{t} A(s,n)x(s,n,\varphi) + f(s,n)ds - \right.$$

$$\left. - y(t_{j-1},n,\varphi) - \varepsilon \int_{t_{j-1}}^{t} \bar{A}(s,n)y(s,n,\varphi) - \bar{f}(s,n)ds \right\|_{R^{n(0)}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| x(0,n,\varphi) + \varepsilon \sum_{i=1}^{j-1} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} A(s,n)x(s,n,\varphi) + f(s,n)ds \right) + \right.$$

$$+ \varepsilon \int_{t_{j-1}}^{t} A(s,n)x(s,n,\varphi) + f(s,n)ds -$$

$$- y(0,n,\varphi) - \varepsilon \sum_{i=1}^{j-1} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{A}(s,n)y(s,n,\varphi) + \bar{f}(s,n)ds \right) -$$

$$\left. - \varepsilon \int_{t_{j-1}}^{t} \bar{A}(s,n)y(s,n,\varphi) + \bar{f}(s,n)ds \right\|_{R^{n(0)}} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{j-1} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(s,n)x(s,n,\varphi)ds - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{A}(s,n)x(s,n,\varphi)ds \right\|_{R^{n(0)}} +$$

$$+ \varepsilon \left\| \int_{t_{j-1}}^{t} A(s,n)x(s,n,\varphi)ds - \int_{t_{j-1}}^{t} \bar{A}(s,n)x(s,n,\varphi)ds \right\|_{R^{n(0)}} +$$

$$+ \varepsilon \left\| \int_{0}^{t} [\bar{A}(s,n)x(s,n,\varphi) - \bar{A}(s,n)y(s,n,\varphi)]ds \right\|_{R^{n(0)}} +$$

$$+ \varepsilon \left\| \int_{t_{j-1}}^{t} [f(s,n) - \bar{f}(s,n)]ds \right\|_{R^{n(0)}}$$

Оценим каждое из слагаемых:

$$\left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(s,n)x(s,n,\varphi)ds - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{A}(s,n)x(s,n,\varphi)ds \right\|_{R^{n(0)}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(s,n)x(s,n,\varphi)ds - \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(s,n)x(t_{i-1},n,\varphi)ds \right\|_{R^{n(0)}} +$$

$$+ \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{A}(s,n)x(t_{i-1},n,\varphi)ds - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{A}(s,n)x(s,n,\varphi)ds \right\|_{R^{n(0)}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(s,n)[x(t_{i-1},n,\varphi) + \varepsilon \int_{t_{i-1}}^{s} A(\tau,n)x(\tau,n,\varphi) + f(\tau,n)d\tau]ds - \right.$$

$$\left. - \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(s,n)x(t_{i-1},n,\varphi)ds \right\|_{R^{n(0)}} + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{A}(s,n)x(t_{i-1},n,\varphi)ds - \right.$$

$$-\int_{t_{i-1}}^{t_i}\bar{A}(s,n)[x(t_{i-1},n,\varphi)+\varepsilon\int_{t_{i-1}}^{s}A(\tau,n)x(\tau,n,\varphi)+f(\tau,n)d\tau]ds\Bigg\|_{R^{n(0)}}\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i}A(s,n)\int_{t_{i-1}}^{s}A(\iota,n)x(\iota,n,\varphi)+f(\iota,n)d\iota]ds\right\|_{R^{n(0)}}+$$

$$+\varepsilon\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\bar{A}(s,n)\int_{t_{i-1}}^{s}A(\iota,n)x(\iota,n,\varphi)+f(\iota,n)d\iota]ds\right\|_{R^{n(0)}}\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon\int_{t_{i-1}}^{t_i}\kappa\int_{t_{i-1}}^{s}(\kappa M+\kappa)d\iota ds\leqslant\varepsilon\kappa(\kappa M+\kappa)\omega^2,$$

$$\left\|\int_{t_{j-1}}^{t}A(s,n)x(s,n,\varphi)ds-\int_{t_{j-1}}^{t}\bar{A}(s,n)x(s,n,\varphi)ds\right\|_{R^{n(0)}}\leqslant$$

$$\leq\int_{t_{j-1}}^{t}\left\|A(s,n)-\bar{A}(s,n)\right\|_{R^{n(0)}}\ \|x(s,n,\varphi)\|_{R^{n(0)}}\,ds\leqslant$$

$$\leqslant 2\kappa(\|x_0\|_{R^{n(0)}}+\varepsilon\kappa\tau_1)e^{\varepsilon k\tau_1}\int_{t_{j-1}}^{t}ds\leqslant 2\kappa M\omega,$$

$$\left\|\int_0^t[\bar{A}(s,n)x(s,n,\varphi)-\bar{A}(s,n)y(s,n,\varphi)]ds\right\|_{R^{n(0)}}\leqslant$$

$$\leqslant\kappa\int_0^t\|x(s,n,\varphi)-y(s,n,\varphi)\|_{R^{n(0)}}\,ds,$$

$$\left\|\int_{t_{j-1}}^{t}[f(s,n)-\bar{f}(s,n)]ds\right\|_{R^{n(0)}}\leq\int_{t_{j-1}}^{t}\left[\|f(s,n)\|_{R^{n(0)}}+\left\|\bar{f}(s,n)\right\|_{R^{n(0)}}\right]ds\leqslant 2\kappa\omega.$$

Тогда

$$\|x(t,n,\varphi)-y(t,n,\varphi)\|_{R^{n(0)}}\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon(j-1)\varepsilon\kappa(\kappa M+\kappa)\omega^2+\varepsilon 2\kappa\omega(M+1)+\varepsilon\kappa\int_0^t\|x(s,n,\varphi)-y(s,n,\varphi)\|_{R^{n(0)}}\,ds$$

Следовательно, для всех $t\in[0,\tau_1)$ имеем

$$\|x(t,n,\varphi)-y(t,n,\varphi)\|_{R^{n(0)}}\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\kappa\omega\,\|x_0\|_{R^{n(0)}}\,(L\kappa+2)e^{2\kappa L}+\varepsilon\omega\kappa(\kappa Le^{\kappa L}+1)(L\kappa+2)e^{\kappa L}\tag{9}$$

Если $t=\tau_1$, то из (8) и (9) имеем

$$\|x(\tau_1,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_1)}}\leqslant\mu(\|x_0\|_{R^{n(0)}}+\kappa L)e^{\kappa L},\ \|y(\tau_1,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_1)}}\leqslant\mu(\|x_0\|_{R^{n(0)}}+\kappa L)e^{\kappa L},$$

$$\|x(\tau_1,n,\varphi)-y(\tau_1,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_1)}}=$$

$$=\|\varphi(\tau_1,x(\tau_1-0,n,\varphi))-\varphi(\tau_1,y(\tau_1-0,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_1)}}\leqslant$$

$$\leqslant\mu\,\|x(\tau_1-0,n,\varphi)-y(\tau_1-0,n,\varphi)\|_{R^{n(0)}}\leqslant$$

$$\leqslant\mu\varepsilon\kappa\omega\{(\|x_0\|_{R^{n(0)}}+\kappa L)e^{\kappa L}+1\}(L\kappa+2)e^{\kappa L}.\tag{10}$$

Теперь, аналогично, рассмотрим случай, когда $t \in [\tau_1,\tau_2)$ и получим

$$\|x(t,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_1)}} \leqslant \mu \|x_0\|_{R^{n(0)}} e^{\kappa L} + (\mu+1)\kappa L\, e^{\kappa L},$$

$$\|y(t,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_1)}} \leqslant \mu \|x_0\|_{R^{n(0)}} e^{\kappa L} + (\mu+1)\kappa L\, e^{\kappa L},$$

$$\|x(t,n,\varphi) - y(t,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_1)}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon\mu\kappa\omega \|x_0\|_{R^{n(0)}} e^{2\kappa L}(L\kappa+2) + \varepsilon(\mu+1)\omega\kappa(\kappa L e^{\kappa L}+1)(L\kappa+2)e^{\kappa L}$$

Далее рассмотрим второй случай, когда $t \in (\tau_j,\tau_{j+1})$, где $\tau_j,\tau_{j+1} \in \Upsilon_\varepsilon$, $j \in \{1,...,l-1\}$. Тогда проведя аналогичные оценки и используя метод математической индукции получим:

$$\|x(t,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_j)}} \leqslant \mu^j \|x_0\|_{R^{n(0)}} e^{\kappa L} + (\mu^j+...+\mu+1)\kappa L\, e^{\kappa L},$$

$$\|y(t,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_j)}} \leqslant \mu^j \|x_0\|_{R^{n(0)}} e^{\kappa L} + (\mu^j+...+\mu+1)\kappa L\, e^{\kappa L}.$$

$$\|x(t,n,\varphi) - y(t,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_j)}} \leqslant$$

$$\leqslant j\varepsilon\mu^j\kappa\omega \|x_0\|_{R^{n(0)}} e^{2\kappa L}(L\kappa+2) + \varepsilon(\mu^j+...+\mu+1)\omega\kappa L(\kappa L e^{\kappa L}+1)(L\kappa+2)e^{\kappa L}$$

Следовательно, если $t \in (\tau_l,t_{k+1})$, то

$$\|x(t,n,\varphi) - y(t,n,\varphi)\|_{R^{n(\tau_l)}} \leqslant \varepsilon l\mu^l\kappa\omega \|x_0\|_{R^{n(0)}} e^{2\kappa L}(L\kappa+2)+$$

$$+\varepsilon(\mu^l+...+\mu+1)\omega\kappa L(\kappa L e^{\kappa L}+1)(L\kappa+2)e^{\kappa L}, \tag{11}$$

то есть для всех $t \in [0,L\varepsilon^{-1})$,

$$\|x(t,n,\varphi) - y(t,n,\varphi)\|_{R^{n(t)}} \leqslant C\varepsilon,$$

где $C = \gamma(\mu)\kappa\omega \|x_0\|_{R^{n(0)}} e^{2\kappa L}(L\kappa+2)+(1-\mu)^{-1}\omega\kappa L(\kappa L e^{\kappa L}+1)(L\kappa+2)e^{\kappa L}$, $\gamma(\mu) = \max\{1,\mu,2\mu^2,...\}$. Тем самым первое утверждение теоремы доказано. Аналогично доказывается второе утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание 3. *Если в условии 3) теоремы $\mu \geqslant 1$, то утверждения теоремы остаются справедливыми, если множество Υ конечно.*

Заключение. Очевидно, что данная теорема обосновывает возможность применения пошагового усреднения для исследования линейных управляемых систем с переменной размерностью

$$\dot{x}(t,n,\varphi) = \varepsilon[A(t,n)x(t,n,\varphi) + B(t,n)u(t)], \quad x(0,n,\varphi) = x_0, \tag{12}$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $t \in R_+$ - время; $n(\cdot) \in \Sigma_\theta$; $\varphi(\cdot,\cdot) \in \Phi_n$; $x(t,n,\varphi)$ - фазовый вектор; $A(t,n) : R_+ \to R^{n(t)\times n(t)}, B(t,n) : R_+ \to R^{n(t)\times m}$ - матричнозначные функцим с переменной размерностью; $u(t) \in U \in conv(R^m)$ - вектор управления.

1. **Aubin J.-P.** Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory / J.-P. Aubin, A. Cellina. – Springer-Verlag, 1984.
2. **Плотников В.А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В.А. Плотников, А.В. Плотников, А.Н. Витюк. – Одесса: АстроПринт, 1999, 355 с.
3. **Perestyuk N.A.** Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities / N.A. Perestyuk, V.A. Plotnikov, A.M. Samoilenko, N.V. Skripnik. – de Gruyter Stud. Math. Vol. 40, Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH& Co, 2011, 309 p.
4. **Половинкин Е.С.** Многозначный анализ и дифференциальные включения / Е.С. Половинкин. – М.: Физматлит, 2014, 597 с.
5. **Крылов Н. М.** Введение в нелинейную механику / Н. М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. – Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
6. **Klymchuk S.** Overview of V.A. Plotnikov's research on averaging of differential inclusions / S. Klymchuk, A. Plotnikov, N. Skripnik. // Phys. D. – 2012. – V. 241, №22. – P. 1932–1947.
7. **Gama R.** Stability and optimality of solutions to differential inclusions via averaging method / R. Gama, G. Smirnov. // Set-Valued Var. Anal. – 2014. – V. 22, №2. – P. 349–374.
8. **Романенко А.В.** Оптимальное управление экономическими системами с возрастной структурой / А. В. Романенко, А. В. Федосеев. // Журнал вычислит. мат. и матем. физики. - 1993. - Т.33, №8. - С. 1155–1165.
9. **Федосеев А.В.** Исследование методами оптимального управления одной модели разработки группы месторождений полезного ископаемого с ограниченными запасами / А. В. Федосеев // Методы системного анализа и пробл. рационального использования ресурсов. М.:ВЦ АН СССР. - 1977. - С. 117–134.
10. **Хачатуров В.Р.** Имитационное моделирова-ние и задачи оптимального управления при долгосрочном планировании производства многолетних сельскохозяйственных культур / В. Р. Хачатуров, Р. Босолейль, А. В. Федосеев. – М.: ВЦ АН СССР, 1985.
11. **Кичмаренко О.Д.** Нелинейные дифференциальные включения с переменной размерностью и их свойства / О.Д. Кичмаренко, А.А. Плотников // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2013. – Т. 18, вип. 2(18). – С. 29–34.
12. **Kichmarenko O.D.** The Averaging of Control Linear Differential Equations with Variable Dimension on Finite Interval / O. D. Kichmarenko, A. A. Plotnikov. // International Journal of Sensing, Computing and Control. – 2015. – V. 5, N 1. – P. 25–35.
13. **Плотников А.А.** Пошаговое усреднение дифференциальных включений переменной размерности на конечном интервале / А.А. Плотников // Математичні Студії – 2016. – Т. 46, № 1. – С. 81–88.

Кічмаренко О. Д., Плотніков А. А.

Покрокове усереднення лінійних диференціальних включень змінної розмірності

Резюме

Теорія диференціальних включень почала свій розвиток на початку тридцятих років 20-го століття з публікацій А. Маршо і С. Заремба. Однак бурхливий розвиток даної теорії почалося з 60-х років минулого століття завдяки роботам Т. Важевського і О.Ф. Філіппова, які обґрунтували її тісний зв'язок з теорією оптимального керування та диференціальними рівняннями з розривної правої частиною. Математичне обгрунтування методу усереднення для звичайних диференціальних рівнянь бере початок з фундаментальної роботи М. М. Крилова і М. М. Боголюбова. У 70-ті роки В.О. Плотніковим була обґрунтована можливість застосування різних схем методу усереднення для диференціальних включень. У даній статті обґрунтовується можливість застосування покрокової схеми усереднення при дослідженні лінійних диференціальних включень зі змінною розмірністю.

Ключові слова: диференціальне включення, усереднення, лінійна система .

Kichmarenko O. D., Plotnikov A. A.

Step average linear differential inclusions of variable dimension

Summary

The theory of differential inclusions began its development in the early thirties of the 20th century with the publication A. Marsh and S. Zaremba. However, the rapid development of this theory began with the 60s of the last century thanks to the work of T. Wazewski and A.F. Filippov, which justified its close relationship with the theory of optimal control and differential equations with discontinuous right-hand side. Mathematical justification of the averaging method for ordinary differential equations stems from the fundamental work of N.M. Krylov and N.N. Bogolyubov. In the 70s, V.A. Plotnikov was justified by the possibility of the application of various schemes of the averaging method for differential inclusions. In this article The possibility of the use of turn-averaging scheme in the study of linear differential inclusions with variable dimension.

Key words: differential inclusion, averaging, linear system.

References

1. Aubin, J.-P. and Cellina, A. (1984). *Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory.* – Springer-Verlag.
2. Plotnikov, V.A., Plotnikov, A.V. and Vityuk, A.N. (1999). *Differential equations with multivalued right-hand side. Asymptotic methods.* Odessa: AstroPrint, 355 p.
3. Perestyuk, N.A., Plotnikov, V.A., Samoilenko, A.M. and Skripnik, N.V. (2011). *Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities.* de Gruyter Stud. Math. Vol. 40, Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH& Co, 309 p.
4. Polovinkin, E.S. (2014) *Multivalued analysis and differential inclusions.* Moscow: Fizmatlit, 597 p.
5. Krylov, N.M. and Bogoliubov, N.N. (1947). *Introduction to nonlinear mechanics.* Princeton University Press, Princeton.

6. Klymchuk, S., Plotnikov, A. and Skripnik, N. (2012). Overview of V.A. Plotnikov's research on averaging of differential inclusions, *Phys. D.* Vol. 241, №22, pp. 1932–1947.
7. Gama, R. and Smirnov, G. (2014). Stability and optimality of solutions to differential inclusions via averaging method, *Set-Valued Var. Anal.* Vol. 22, №2, pp. 349–374.
8. Romanenko, A.V. and Fedoseev, A.V. (1993). Optimal control of economic systems with a growth structure, *Comput. Math. Math. Phys.* Vol. 33, № 8, pp. 1017–1026.
9. Fedoseev, A.V. (1977). Research methods of optimum control of one model of working out of group of deposits of a mineral with the limited stores, *Methods of the system analysis and problems of rational use of resources.* Moskva: Vychislitel'nyj Tsentr AN SSSR, pp. 117–134.
10. Khachaturov, V.R., Bosolejl, R.and Fedoseev, A.V. (1985). *Simulation modelling and optimum control problems at long-term planning of manufacture of long-term agricultural crops.* Vychislitel'nyj Tsentr AN SSSR, Moskva.
11. Kichmarenko, O.D. and Plotnikov, A.A. (2013). Nonlinear differential switching variable dimension and their properties, *Bulletin of the Odessa National University. Series Mathematics & Mechanics.* Vol. 18, № 2, P. 29–34.
12. Kichmarenko, O.D. and Plotnikov, A.A. (2015). The Averaging of Control Linear Differential Equations with Variable Dimension on Finite Interval, *International Journal of Sensing, Computing and Control*, Vol. 5, № 1, pp. 25–35.
13. Plotnikov, A.A. (2016). Step averaging differential inclusions with variable dimension on a finite interval, *Mat. Stud.*, Vol. 46, № 1, pp. 81–88.