

УДК 514.07

В. А. Кіосак, доктор фіз.-мат. наук, професор
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
Одеська державна академія будівництва та архітектури
Кафедра вищої математики
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, 65029, Україна
e-mail: kioskav@ukr.net

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7433-6709>

Н. В. Шарай кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
e-mail: rusnat36@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0003-4007-651X>

ПРО КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ІЗ ЗБЕРЕЖЕННЯМ ТЕНЗОРА ЕНЕРГІЇ-ІМПУЛЬСУ

Вивчаються конформні відображення псевдоріманових просторів із збереженням тензора енергії-імпульсу. Розв'язок задачі зведений до розв'язування системи диференціальних рівнянь першого порядку в коваріантних похідних. Виявлено лакуарність, наявність заборонених інтервалів, у розподілі кількості розв'язків зазначеної системи. Отримано тензорні ознаки та вивчено деякі геометричні властивості псевдоріманових просторів, відмінних від плоских, що допускають максимальну кількість розв'язків цієї системи. Для чотиривимірних просторів ці результати дають повний опис псевдоріманових просторів, що допускають відображення із збереженням тензора енергії-імпульсу.

Дослідження ведуться локально, тензорними методами без обмежень на сигнатуру та знаковизначенність метричного тензору псевдоріманового простору.

MSC: 53B35.

Ключові слова: псевдоріманові простори, конформні відображення, тензор енергії-імпульсу.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2\(44\).342076](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2(44).342076).

Вступ

Серед різних додаткових передумов і обмежень, що використовуються для пошуку розв'язків рівнянь Ейнштейна, особливе місце займає запропонована Фрідманом гіпотеза про конформну відповідність між реальним простором і простором-моделлю. Ця гіпотеза дозволила отримати покладене в основу теорії розширюваного всесвіту, нестационарне рішення [1] - [3].

Робота присвячена вивченню конформних відображень псевдориманових просторів із збереженням тензора енергії-імпульсу. Розв'язок задачі зведено до вивчення системи диференціальних рівнянь. Виявлено лакуарність у розподілі кількості розв'язків зазначеної системи. Отримано тензорні ознаки та вивчено деякі геометричні властивості псевдориманових просторів, відмінних від плоских, що допускають максимальну кількість рішень. Для чотиривимірних просторів ці результати дають повний опис псевдориманових просторів, що допускають конформне відображення із збереженням тензора енергії-імпульсу.

1. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ КОНФОРМНИХ ВІДБРАЖЕНЬ РИМАНОВИХ ПРОСТОРІВ

Нехай V_n ($n > 2$) псевдориманів простір з метричним тензором $g_{ij}(x)$ і $\bar{V}_n$ також псевдориманів простір з метричним тензором $\bar{g}_{ij}(x)$. Конформним відображенням називають взаємнооднозначну відповідність між точками просторів V_n і $\bar{V}_n$ таку, що

$$\bar{g}_{ij}(x) = e^{2\sigma(x)} g_{ij}(x), \quad (1)$$

тут σ - деяка функція.

Якщо σ - постійна, то відображення називають *гомотетією*. Надалі, якщо це не обумовлено окремо, ми обмежимося розглядом відображень, відмінних від гомотетичних.

З (1) отримаємо

$$\bar{g}^{ij} = e^{-2\sigma} g^{ij},$$

де g^{ij} і $\bar{g}^{ij}$ елементи зворотної матриці метричного тензора V_n і $\bar{V}_n$, відповідно.

Мають місце формули ([4] - [6]):

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \delta_i^h \sigma_j + \delta_j^h \sigma_i - \sigma^h g_{ij}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ijk}^h = & R_{ijk}^h + \delta_k^h \sigma_{ij} - \delta_j^h \sigma_{ik} + g^{h\alpha} (\sigma_{\alpha h} g_{ij} - \\ & - \sigma_{\alpha j} g_{ik}) + \Delta_1 \sigma (\delta_k^h g_{ij} - \delta_j^h g_{ik}); \end{aligned}$$

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n-2)\sigma_{ij} + (\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma) g_{ij}; \quad (3)$$

$$\bar{R} = e^{-2\sigma} (R + 2(n-1)\Delta_2 \sigma + (n-1)(n-2)\Delta_1 \sigma). \quad (4)$$

Тут і надалі Γ_{ij}^h — символи Крістоффеля другого роду, R_{ijk}^h — тензор Рімана, R_{ij} — тензор Річчі, що визначається наступним чином —

$$R_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} R_{ij\alpha}^{\alpha};$$

$$R \stackrel{\text{def}}{=} R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} - \text{скалярна кривина}, \quad \sigma_i \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} \equiv \sigma_{,i}, \quad \sigma^h = \sigma_{\alpha} g^{\alpha h},$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{,ij} - \sigma_{,i} \sigma_{,j},$$

$\Delta_1 \sigma$ і $\Delta_2 \sigma$ — перший і другий параметри Бельтрамі, що визначаються як

$$\Delta_1 \sigma = g^{\alpha\beta} \sigma_{,\alpha} \sigma_{,\beta}; \quad \Delta_2 \sigma = g^{\alpha\beta} \sigma_{,\alpha\beta},$$

δ_i^j — символи Кронекера, кома “,” — знак коваріантної похідної за зв’язністю V_n .

Об’єкти конформно відповідного V_n простору $\bar{V}_n$ будемо позначати рискою.

Зауважимо, що, якщо V_n і $\bar{V}_n$ пов’язані конформним відображенням, то від коваріантного диференціювання за зв’язністю V_n можна, використовуючи (2), перейти до коваріантної похідної за зв’язністю $\bar{V}_n$, позначимо її вертикальною рискою “ $\bar{}$ ”, тоді для довільного тензора A_{ij} :

$$A_{ij,k} = A_{ij|k} + 2\sigma_k A_{ij} + \sigma_i A_{jk} + \sigma_j A_{ik} - \sigma^{\alpha} A_{\alpha j} g_{ki} - \sigma^{\alpha} A_{\alpha i} g_{kj}.$$

2. ПРО КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ІЗ ЗБЕРЕЖЕННЯМ ТЕНЗОРА ЕНЕРГІЇ-ІМПУЛЬСУ

Рівняння виду

$$R_{ij} - \frac{R}{2}g_{ij} = T_{ij} \quad (5)$$

називають рівнянням Ейнштейна.

Тут T_{ij} — деякий тензор, який називають *тензором енергії-імпульсу*.

Для $\bar{V}_n$ має місце таке ж рівняння

$$\bar{R}_{ij} - \frac{\bar{R}}{2}\bar{g}_{ij} = \bar{T}_{ij} \quad (6)$$

Віднімаючи з (6) рівняння (5), отримаємо

$$(\bar{R}_{ij} - R_{ij}) - \frac{1}{2}(\bar{R}\bar{g}_{ij} - Rg_{ij}) = \bar{T}_{ij} - T_{ij}$$

Враховуючи (3), (4) і (1), будемо мати

$$\bar{T}_{ij} = T_{ij} + (n-2)(\sigma_{ij} - (\Delta_2\sigma - \frac{n-3}{2}\Delta_1\sigma)g_{ij}). \quad (7)$$

Таким чином, має місце теорема

Теорема 1. *Якщо V_n і $\bar{V}_n$ два конформно відповідних псевдориманових простори, то їх тензори енергії-імпульсу задовольняють співвідношенням (7).*

Конформні відображення псевдориманового простору V_n на $\bar{V}_n$, при якому

$$T_{ij} = \bar{T}_{ij}, \quad (8)$$

називають *конформним відображенням із збереженням тензора енергії-імпульсу*.

З урахуванням (8) рівняння (7) приймуть вигляд

$$\sigma_{ij} = (\Delta_2\sigma + \frac{n-3}{2}\Delta_1\sigma)g_{ij}. \quad (9)$$

Тоді

$$\sigma_{ij} = \frac{\Delta_2\sigma - \Delta_1\sigma}{n}g_{ij}. \quad (10)$$

Конформні відображення, при яких інваріант σ задовольняє умовам (10), називають *конциркулярними відображеннями*. Вони характеризуються тим, що при них геодезичні кола V_n переходять у геодезичні кола $\bar{V}_n$ [7; 8].

Геодезичним колом називається крива, перша кривина якої постійна, а друга — тотожно дорівнює нулю.

Таким чином, має місце теорема:

Теорема 2. *Якщо при конформному відображенні псевдориманових просторів V_n зберігається тензор-енергії імпульса, то при ньому зберігаються і геодезичні кола.*

З іншого боку, вивчаючи (9) і (10), можна переконатися, що, якщо V_n допускає конциркулярні відображення і виконується умова

$$\Delta_2 \sigma = -\frac{n-2}{2} \Delta_1 \sigma, \quad (11)$$

то при цьому відображенні зберігається і тензор енергії – імпульсу.

Введемо в розгляд інваріант S такий, що

$$\sigma = -\ln|S|, \quad (12)$$

тоді (1) приймуть вигляд

$$\bar{g}_{ij}(x) = S^{-2} g_{ij}.$$

Послідовно диференціюючи (12), отримаємо

$$\sigma_{,i} = -\frac{1}{S} S_{,i}$$

$$\sigma_{,ij} = -(S \cdot S_{,ij} - S_{,i} S_{,j}) \cdot S^{-2}$$

$$\sigma_{ij} = -S_{,ij} \cdot S^{-1}$$

Крім того,

$$\Delta_1 \sigma = \Delta_1 S \cdot S^{-2}; \quad \Delta_2 \sigma = (\Delta_1 S - S \Delta_2 S) \cdot S^{-2}.$$

З огляду на це, рівняння (10) набудуть вигляду

$$S_{,ij} = \frac{\Delta_2 S}{n} g_{ij}, \quad (13)$$

а (11) —

$$S \Delta_2 S = \frac{n}{2} \Delta_1 S. \quad (14)$$

Вектор $S_{,i}$, що задовольняє умовам (13), називають конциркулярним, а простори, що допускають такі поля — еквідістантними [5; 9].

Таким чином, нами доведена теорема:

Теорема 3. *Якщо псевдориманівський простір V_n допускає конформні відображення із збереженням тензора енергії-імпульсу, то V_n є еквідістантним простором.*

При $\Delta_2 S \neq 0$ евідістантний простір будемо вважати належним до основного типу, а при $\Delta_2 S \equiv 0$ — до особливого. Якщо вектор $S_{,i}$ ізотропний, тобто $\Delta_1 S = 0$, то еквідістантний простір належить за необхідністю до особливого типу. Еквідістантні простори основного типу характеризуються тим, що в них існує спеціальна система координат, в якій метричний тензор еквідістантного простору може бути представлений у вигляді

$$ds_n^2 = dx^{12} + f(x_1) ds_{n-1}^2(x_2, \dots, x_n). \quad (15)$$

Тут $f(x^1) \neq 0$ — деяка функція, а ds_{n-1}^2 — метрика $(n-1)$ — вимірного псевдориманова простору.

З огляду на теорему 3, можна сформулювати

Теорема 4. *Якщо псевдориманівський простір $V_n (n > 2)$ допускає конформні відображення із збереженням тензора енергії-імпульсу і $\Delta_2 S \neq 0$, то в деякій системі координат його метричний тензор записується у вигляді (15).*

Умови інтегрованості рівнянь (13) мають вигляд

$$S_{,\alpha} R_{ijk}^{\alpha} = \left(\frac{\Delta_2 S}{n} \right)_{,k} g_{ij} - \left(\frac{\Delta_2 S}{n} \right)_{,j} g_{ik}. \quad (16)$$

Множачи останнє на $S^i = S_{,\alpha} g^{\alpha i}$ і, згортаючи по i , переконуємося, що

$$\left(\frac{\Delta_2 S}{n} \right)_{,i} = B S_{,i}, \quad (17)$$

де B — деякий інваріант.

Тоді (16) набуде вигляду

$$S_{,\alpha} R_{ijk}^{\alpha} = B(S_{,k} g_{ij} - S_{,j} g_{ik}). \quad (18)$$

Згортаючи останнє, переконаємося

$$S_{,\alpha} R_k^{\alpha} = B(n-1)S_{,k}. \quad (19)$$

З урахуванням (5)

$$S_{,\alpha} T_k^{\alpha} = (B(n-1) - \frac{R}{2})S_{,k}. \quad (20)$$

Диференціюючи (8), враховуючи (5), (13) і (20), отримаємо

$$\bar{T}_{ij|k} = T_{ij,k} + \frac{1}{S}(2S_{,k}T_{ij} + S_{,i}T_{jk} + S_{,j}T_{ik} - (B(n-1) - \frac{R}{2})(S_{,j}g_{ki} + S_{,j}g_{kj})).$$

Враховуючи бездивергентність тензора енергії-імпульсу, переконаємося, що інваріант B , за необхідності, дорівнює нулю, і, отже, (17) та (18) набувають вигляду

$$(\Delta_2 S)_{,i} = 0 \quad (21)$$

і

$$S_{,\alpha} R_{ijk}^{\alpha} = 0.$$

Таким чином, доведено

Теорема 5. *Якщо псевдориманів простір $V_n(n > 2)$ допускає конформні відображення із збереженням тензора енергії-імпульсу, то в ньому існує розв'язок система рівнянь (13), (21).*

Зазначена система являє собою систему лінійних диференціальних рівнянь у коваріантних похідних типу Коші з коефіцієнтами, однозначно визначеними даним простором V_n . Дослідженню таких систем присвячені роботи [10] - [12]. Враховуючи ці роботи та викладене вище, можемо зробити висновок, що розподіл числа параметрів, від яких залежить загальне рішення системи (13), (21), має лакунарний характер. Максимальне число $(n+1)$ допускають плоскі простори. Не існує псевдориманових просторів $V_n(n > 2)$, відмінних

від плоских, для яких кількість параметрів більше ніж $(n-2)$. Простори, що допускають точно $(n-2)$ істотних параметрів, існують, для них

$$R_{hijk} = e(a_h b_i - a_i b_h)(a_j b_k - a_k b_j),$$

де $e = \pm 1$, a_i, b_i — деякі взаємно ортогональні, неколінеарні вектори.

Позначимо цю множину $V_n(A)$.

Для тензора Річчі та скалярної кривизни отримаємо

$$R_{hijk} = -e(a^\alpha a_\alpha b_i b_j + b^\alpha b_\alpha a_i a_j)(a_j b_k - a_k b_j),$$

$$R = -2e a^\alpha a_\alpha b^\alpha b_\alpha.$$

Тут $a^i = a_\alpha g^{\alpha i}$; $b^i = b_\alpha g^{\alpha i}$ [13].

Умова (22) дозволяє розбити множину $V_n(A)$ залежно від ізотропності або неізотропності векторів a_i і b_i на три класи, що не перетинаються:

$$V_n(A_1) : \quad a^\alpha a_\alpha \neq 0; \quad b^\alpha b_\alpha \neq 0,$$

$$V_n(A_2) : \quad a^\alpha a_\alpha = 0; \quad b^\alpha b_\alpha \neq 0,$$

$$V_n(A_3) : \quad a^\alpha a_\alpha \neq 0; \quad b^\alpha b_\alpha = 0.$$

Для кожного з класів $V_n(A)$ можна вказати тензорну характеристику

$$V_n(A_1) : \quad \frac{R}{2} R_{hijk} = R_{hk} R_{ij} - R_{hj} R_{ik},$$

$$V_n(A_2) : \quad R = 0; \quad R_{ij} = -e b^\alpha b_\alpha a_i a_j;$$

$$b^\alpha b_\alpha R_{hijk} = b_i b_j R_{hk} - b_i b_k R_{hj} +$$

$$+ b_h b_k R_{ij} - b_h b_j R_{ik},$$

$$V_n(A_3) : \quad R_{ij} = 0.$$

Зазначимо, що простори $V_n(A)$ є напівсиметричними, тобто в них

$$R_{hijk,lm} - R_{hijk,ml} = 0. \quad (22)$$

3. ВИСНОВКИ

Таким чином, чотиривимірні псевдориманові простори, що допускають конформні відображення із збереженням тензора енергії-імпульсу, будуть або плоскими, або напівсиметричними, що належать до одного з класів $V_4(A)$, або допускають одне еквідистантне векторне поле. Як впливає з досліджень [14], просторів $V_4(A_3)$ не існує.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Kiosak, V.** On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces / V. Kiosak, O. Savchenko, O. Gudyreva // AIP Conference Proceedings. - 2019. - 2164, 040001. <https://doi.org/10.1063/1.5130793>.
2. **Doikov, D.** On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe / D. Doikov, V. Kiosak // AIP Conference Proceedings. - 2020. - 2302, 040001. <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
3. **Kramer, D.** Exact solutions of the Einstein field equations / D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt, Ed. E Schmutzer // Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1980.
4. **Barden, D.** An Introduction to Differential Manifolds / D. Barden, C. Thomas // University of Cambridge, UK. - 2003. <https://doi.org/10.1142/p285>
5. **Eisenhart, L. P.** Riemannian Geometry / L.P. Eisenhart // Princeton Univ. Press.- 1950, repr. 1997. ISBN: 9780691023533
6. **Rong W.** An Introduction to Differential Geometry and Topology in Mathematical Physics / W. Rong, C. Yue // Zhejiang University, PR China. - 1999. <https://doi.org/10.1142/3871>
7. **Fernandes R. L.** Lectures on Differential Geometry. University of Illinois Urbana-Champaign / R.L. Fernandes // USA. World Scientific. - 2014. <https://doi.org/10.1142/12733>
8. **Yano K.** Conircular geometry, I-IV. Info Proc. Imp. Acad / K. Yano // Tokyo.- 1940. - 16. pp. 195 –200; 354 –360; 442 –448; 505 –511.
9. **Kiosak, V.** Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces / V. Kiosak, L. Kusik, V. Isaiev // Proceedings of the International Geometry Center. - 2022. - 15(2), 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>

10. **Kiosak, V.** Mappings of Spaces with Affine Connection /V. Kiosak, O. Lesechko, O. Savchenko// In: 17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT. Bratislava. - 2018. - pp. 563–569.
11. **Kiosak, V.** On the properties of Ricci solitons /V. Kiosak, A. Savchenko, L. Kusik // AIP Conference Proceedings. - 2022. - 2522, 120006. <https://doi.org/10.1063/5.0100792>
12. **Kiosak V.** Invariant transformations that preserve mappings /V. Kiosak, A. Savchenko, L. Makarenko // AIP Conference Proceedings. - 2022. - 2522, 120003. <https://doi.org/10.1063/5.0100787>
13. **Kiosak, V.** On geodesic mappings of symmetric pairs / V. Kiosak, O. Lesechko, O. Latysh // Proceedings of the International Geometry Center. - 2023.- 15, 230–238. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i3-4.2430>.
14. **Kiosak, V.** There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor /V. Kiosak, V.S. Matveev// Journal of Geometry and Physics. - 2014. - 78, 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.01.002>

Kiosak V. A., Sharai N. V.

ON CONFORMAL MAPPINGS PRESERVING TENSOR OF STRESS-ENERGY

Summary

Conformal mappings of pseudo-Riemannian spaces preserving the energy-momentum tensor are studied. The problem is reduced to solving a system of first-order differential equations in covariant derivatives. Lacunarity and the presence of forbidden intervals in the distribution of the number of solutions of the given system have been identified. Tensorial criteria have been obtained, and certain geometric properties of non-flat pseudo-Riemannian spaces that admit the maximum number of solutions to this system have been investigated. For four-dimensional spaces, these results provide a complete description of pseudo-Riemannian spaces that admit mappings preserving the energy-momentum tensor.

The study is conducted locally, using tensor methods, without restrictions on the signature or definiteness of the metric tensor of the pseudo-Riemannian space.

Key words: pseudo-Riemannian spaces, conformal mappings, tensor of stress-energy

REFERENCES

1. Kiosak, V., Savchenko, O., Gudyreva, O. (2019). On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces. AIP Conference Proceedings, vol.2164, 040001. <https://doi.org/10.1063/1.5130793>.
2. Doikov, D., Kiosak, V. (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. AIP Conference Proceedings, 2302, 040001. <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
3. Kramer, D., Stephani, H., MacCallum, M., Herlt, E., Ed. Schmutzer, E. (1980). Exact solutions of the Einstein field equations. Berlin: Leutscher Verlag der Wissenschaften.
4. Barden, D., Thomas, C. (2003). *An Introduction to Differential Manifolds*. University of Cambridge, UK. <https://doi.org/10.1142/p285>
5. Eisenhart, L. P. (1950, repr. 1997). *Riemannian Geometry*. Princeton Univ. Press. ISBN: 9780691023533
6. Rong W. and Yue C. (1999). An Introduction to Differential Geometry and Topology in Mathematical Physics. Zhejiang University, PR China. <https://doi.org/10.1142/3871>
7. Fernandes R. L. (2014). Lectures on Differential Geometry. University of Illinois Urbana-Champaign, USA. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/12733>

8. Yano K. (1940). Conircular geometry, I-IV. Info Proc. Imp. Acad. Tokyo. 16. pp. 195 – 200; 354 –360; 442 –448; 505 –511.
9. Kiosak, V., Kusik, L., Isaiev, V. (2022). Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. Proceedings of the International Geometry Center, 15(2), 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
10. Kiosak, V., Lesechko, O., Savchenko, O. (2018). Mappings of Spaces with Affine Connection. In: 17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT. Bratislava, pp. 563–569.
11. Kiosak, V., Savchenko, A., Kusik, L. (2022). On the properties of Ricci solitons. AIP Conference Proceedings, 2522, 120006. <https://doi.org/10.1063/5.0100792>
12. Kiosak V., Savchenko A. and Makarenko L. (2022) Invariant transformations that preserve mappings, AIP Conference Proceedings 2522, 120003. <https://doi.org/10.1063/5.0100787>
13. Kiosak, V., Lesechko, O., Latysh, O. (2023). On geodesic mappings of symmetric pairs. Proceedings of the International Geometry Center, vol.15, pp. 230–238. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i3-4.2430>.
14. Kiosak, V., Matveev, V. S. (2014). There exist no 4-dimensional geodesically equivalent metrics with the same stress-energy tensor. Journal of Geometry and Physics, 78, 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.01.002>