

УДК 517.764

В. М. Євтухов, доктор фіз.-мат. наук, професор
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
e-mail: evtukhov@onu.edu.ua
ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0000-2458-7887>

АРЕАЛЬНА НЕСКІНЧЕННО МАЛА ДЕФОРМАЦІЯ ПОВЕРХНІ ГАУДІ

Дана стаття присвячена дослідженню нескінченно малих ареальних деформацій поверхні Гауді. Ці поверхні, які були названі на честь відомого каталонського архітектора Антоніо Гауді, використовуються в архітектурі як покрівельні конструкції, елементи декорування тощо. Раніше Velimirovic L. S., Svetkovic M. D. та інші досліджували нескінченно малі згинання поверхні Гауді. У цій статті доведено, що поверхня Гауді допускає довільну ареальну нескінченно малу деформацію, яка описується через дві довільні неперервно диференційовні функції, і наведено явний вираз вектора зміщення у декартових координатах. Окремо розглянуто випадок тангенціальної ареальної деформації з отриманням відповідного вектора зміщення. Крім того, доведено існування дійсної ортогональної сітки ліній стаціонарної довжини на поверхні Гауді та виведено диференціальне рівняння для її побудови.

MSC: 57R30.

Ключові слова: рімановий простір, метричний тензор, об'єкт афінної зв'язності, нескінченно мала деформація, кривина, диференціальні рівняння.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2\(44\).342075](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2(44).342075).

Вступ

З безлічі різних математичних поверхонь виділяють лінійчаті поверхні, які називають поверхнями Гауді. Свою назву вони отримали на честь відомого каталонського архітектора Антоніо Гауді, який використовував схожі форми у своїх проектах. Зараз вони також є популярними як елементи архітектури та покрівельних конструкцій.

Раніше у статтях Velimirovic L.S. та інших авторів [1; 2] були досліджені нескінченно малі згинання поверхні Гауді.

Дана робота присвячена дослідженню ареальних нескінченно малих деформацій поверхонь Гауді. Також в статті досліджується існування сітки ліній стаціонарної довжини при ареальних нескінченно малих деформаціях.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОВЕРХНІ ГАУДІ

Поверхні Гауді описуються рівнянням:

$$z = mx \sin \frac{y}{a},$$

де m, a — деякі параметри. Оскільки при $x = 0$ та $y = \pi a n$, $n \in \mathbb{Z}$, поверхня Гауді вироджується, то будемо розглядати це рівняння за умови $x \neq 0$ та $y \neq \pi a n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Параметризуємо рівняння поверхні Гауді і запишемо його у векторному вигляді:

$$\bar{r} = \left(x, y, mx \sin \frac{y}{a} \right).$$

Наведемо інформацію про диференціально-геометричні характеристики поверхні Гауді [1].

Перша квадратична форма поверхні Гауді має вигляд:

$$I(dx, dy) = dr^2 = \left(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} \right) dx^2 + \left(\frac{m^2 x}{a} \sin \frac{2y}{a} \right) dx dy + \left(1 + \frac{m^2 x^2}{a^2} \cos^2 \frac{y}{a} \right) dy^2.$$

Визначник матриці, яка складена з коефіцієнтів першої квадратичної форми, дорівнює:

$$g = 1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + \frac{m^2 x^2}{a^2} \cos^2 \frac{y}{a}.$$

Друга квадратична форма даної поверхні має вигляд:

$$II(dx, dy) = d^2 \bar{r} \cdot \bar{n} = \frac{2m}{a\sqrt{g}} \cos \frac{y}{a} dx dy - \frac{mx}{a^2\sqrt{g}} \sin \frac{y}{a} dy^2.$$

Гаусова кривина поверхні Гауді:

$$K = -\frac{m^2}{a^2 g^2} \cos^2 \frac{y}{a},$$

очевидно, не додатна при будь-якому значенні параметрів m і a . Це означає, що поверхня Гауді є поверхнею гіперболічного типу.

Вираз для середньої кривини:

$$H = -\frac{mx \sin \frac{y}{a}}{2a^2 g \sqrt{g}} \left(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a} \right).$$

З точки зору ріманової геометрії поверхня Гауді є двовимірним рімановим простором V_2 , метричний тензор якого має компоненти:

$$g_{11} = 1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a}; \quad g_{12} = \frac{m^2 x}{2a} \sin \frac{2y}{a}; \quad g_{22} = 1 + \frac{m^2 x^2}{a^2} \cos^2 \frac{y}{a}.$$

Тоді об'єкт афінної зв'язності Γ_{ij}^h на V_2 задається символами Крістофеля другого роду. В нашому випадку вони мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0; & \Gamma_{11}^2 &= 0; \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{m^2}{ag} \sin \frac{y}{a} \cos \frac{y}{a}; & \Gamma_{12}^2 &= \frac{m^2 x}{a^2 g} \cos^2 \frac{y}{a}; \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{m^2 x}{a^2 g} \sin^2 \frac{y}{a}; & \Gamma_{22}^2 &= -\frac{m^2 x^2}{a^3 g} \sin \frac{y}{a} \cos \frac{y}{a}. \end{aligned}$$

2. ПОНЯТТЯ АРЕАЛЬНОЇ НЕСКІНЧЕННО МАЛОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ПОВЕРХНІ

1°. Спочатку розглянемо поняття про нескінченно малу деформацію поверхні. Нехай S — поверхня, гомеоморфна деякій області G площини xOy :

$$S : \bar{r} = \bar{r}(x, y), \quad \bar{r} \in C^3. \quad (1)$$

Припустимо, що починаючи з деякого моменту, під впливом яких-небудь причин із плином часу вона змінює свою форму. Нехай множина всіх поверхонь S^* , які отримані таким чином, описується рівнянням

$$\bar{r}^* = \bar{r}^*(x, y, t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Поверхню S^* , яку отримують в будь-який момент часу t описаного вище процесу, називають *нескінченно малою деформацією* поверхні S [3].

Якщо в кожній точці (x, y) має місце розклад:

$$\bar{r}^*(x, y, t) = \bar{r}(x, y) + t\bar{u}^{(1)}(x, y) + t^2\bar{u}^{(2)}(x, y) + \dots + t^n\bar{u}^{(n)}(x, y) + \dots,$$

то деформацію називають *аналітичною*, а функції $\bar{u}^{(1)}(x, y)$, $\bar{u}^{(2)}(x, y), \dots$ — *полями зміщення* відповідно першого, другого і т. д. порядків [3].

Нескінченно малою деформацією першого порядку поверхні S називається деформація вигляду

$$\bar{r}^*(x, y, t) = \bar{r}(x, y) + t\bar{u}(x, y), \quad (2)$$

де $t \in [0, 1]$, $\bar{r}^*(x, y, 0) = \bar{r}(x, y)$, властивості якої розглядаються з точністю нескінченно малих першого порядку відносно параметру деформації $t \rightarrow 0$ [3]. При цьому малими величинами t^2 і більш високого порядку нехтуємо.

Векторну функцію $\bar{u}(x, y)$ називають *полем зміщення* нескінченно малої деформації першого порядку [3].

2°. Припустимо, що $R(x, y)$ і $R^*(x, y, t)$ — деяка геометрична величина поверхонь S і S^* відповідно. Нехай, що R^* можна представити так:

$$R^*(x, y, t) = R(x, y) + t\delta R(x, y) + o(t^2).$$

Величину $\delta R(x, y)$ називають *першою варіацією* геометричної величини $R(x, y)$ при нескінченно малій деформації поверхні S [4].

Геометрична величина $R(x, y)$ поверхні S називається *стаціонарною* при нескінченно малій деформації (або *такою, що зберігається*), якщо з точністю до нескінченно малих другого порядку вона збігається з геометричною величиною $R^*(x, y, t)$ поверхні S^* :

$$R^*(x, y, t) = R(x, y) + o(t^2).$$

Тобто, якщо $R(x, y)$ — стаціонарна геометрична величина, то

$$\delta R(x, y) = 0.$$

Нескінченно мала деформація поверхні на кожную геометричну величину цієї поверхні впливає так, що ця величина змінюється однозначно за деякими формулами (законами). Змінювання цієї величини характеризує її варіація. При нескінченно малій деформації варіація геометричної величини визначається однозначно.

3°. Нехай $g_{ij} = \bar{r}_i \bar{r}_j$ — метричний тензор поверхні S , а $g_{ij}^* = \bar{r}_i^* \bar{r}_j^*$ — метричний тензор zdeформованої поверхні S^* . Знайдемо вираз метричного

тензору g_{ij}^* zdeформованої поверхні через похідні радіус-вектора $\bar{r}_i$ і $\bar{r}_j$ недеформованої поверхні:

$$g_{ij}^* = \bar{r}_i \bar{r}_j + t(\bar{r}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i \bar{r}_j) + t^2 \bar{u}_i \bar{u}_j.$$

Тобто

$$g_{ij}^* = g_{ij} + t \delta g_{ij} + o(t^2). \quad (3)$$

Позначимо варіацію метричного тензору через

$$2\epsilon_{ij} = \delta g_{ij} = \bar{r}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i \bar{r}_j. \quad (4)$$

Тензор ϵ_{ij} називають *першим тензором деформації поверхні*.

Розкладемо векторне поле по базису $(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{n})$:

$$\bar{u} = u^\alpha \bar{r}_\alpha + u^o \bar{n}, \quad (5)$$

де $\alpha = 1, 2$. Продиференціюємо коваріантно по x^i :

$$\bar{u}_i = u_{,i}^\alpha \bar{r}_\alpha + u^\alpha \bar{r}_{\alpha,i} + u_{,i}^o \bar{n} + u^o \bar{n}_i.$$

Відповідно до дериваційних формул теорії поверхонь ($\bar{r}_{i,j} = b_{ij} \bar{n}$, $\bar{n}_i = -b_i^\alpha \bar{r}_\alpha$):

$$\bar{u}_i = (u_{,i}^\alpha - u^o b_i^\alpha) \bar{r}_\alpha + (u^\alpha b_{ij} + u_{,i}^o) \bar{n}.$$

Тепер знайдену коваріантну похідну підставимо до (3) та спростимо отриманий вираз, використовуючи властивість вектора нормалі:

$$2\epsilon_{ij} = (u_{,i}^\alpha - u^o b_i^\alpha) g_{\alpha j} + (u_{,j}^\alpha - u^o b_j^\alpha) g_{\alpha i} = u_{i,j} + u_{j,i} - 2u^o b_{ij}. \quad (6)$$

Отже, ми знайшли варіацію метричного тензора.

4°. Тепер знайдемо варіацію елемента площі. Відомо, що елемент площі поверхні S можна визначити за формулою:

$$d\sigma = \sqrt{g} dx^1 dx^2,$$

де $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ — визначник матриці метричних тензорів поверхні S . Тут і далі $x^1 = x$, $x^2 = y$. Тоді елемент площі поверхні S^* визначається так: $d\sigma^* = \sqrt{g^*} dx^1 dx^2$.

Знайдемо варіації дискримінанта першої квадратичної форми поверхні S при загальній нескінченно малій деформації:

$$g^* = g_{11}^* g_{22}^* - g_{12}^{*2} = g + 2t(\epsilon_{22}g_{11} + \epsilon_{11}g_{22}) - 4\epsilon_{12}g_{12}t + o(t^2).$$

Запишемо даний вираз дискримінанта через елементи оберненої до (g_{ij}) матриці:

$$g^* = g + 2gt(\epsilon_{11}g^{11} + \epsilon_{22}g^{22} + 2\epsilon_{12}g^{12}) + o(t^2) = g + 2gg^{ij}\epsilon_{ij}t + o(t^2).$$

Тоді варіація дискримінанта першої квадратичної форми поверхні S виразиться так:

$$\delta g = 2gg^{ij}\epsilon_{ij}.$$

Знайдемо $\sqrt{g^*}$:

$$\sqrt{g^*} = \sqrt{g} + t \cdot \left. \frac{\partial \sqrt{g^*}}{\partial t} \right|_{t=0} + o(t^2) = \sqrt{g} + t\sqrt{g}g^{ij}\epsilon_{ij} + o(t^2).$$

Звідси, варіація кореня з дискримінанта першої квадратичної форми має вигляд:

$$\delta \sqrt{g} = \sqrt{g}g^{ij}\epsilon_{ij}.$$

Нарешті можемо виписати вираз елемента площі поверхні S^* :

$$d\sigma^* = \sqrt{g}dx^1dx^2 + t\sqrt{g}g^{ij}\epsilon_{ij}dx^1dx^2 + o(t^2).$$

Тобто:

$$d\sigma^* = d\sigma + tg^{ij}\epsilon_{ij}d\sigma + o(t^2). \quad (7)$$

А варіація елемента площі виразиться так:

$$\delta d\sigma = g^{ij}\epsilon_{ij}d\sigma. \quad (8)$$

5°. Наведемо основні означення, що стосуються ареальної нескінченно малої деформації, з робіт [5; 6].

Знову розглянемо розклад (5) вектора зміщення через базисні вектори $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ і $\bar{n}$.

Нескінченно малу деформацію першого порядку (2), при якій зберігається елемент площі поверхні S з точністю до нескінченно малих величин другого порядку відносно параметра деформації, називають *ареальною* (*A-деформацією*).

З формули (6) можна отримати умову ареальної нескінченно малої деформації.

Теорема 1. Для того, щоб нескінченно мала деформація вигляду (2) була ареальною, необхідно і достатньо, щоб задовольнялася умова:

$$u_{,\alpha}^\alpha - 2Hu^o = 0, \quad (9)$$

де u^1, u^2, u^o — це компоненти вектора зміщення, $u_{,\alpha}^\alpha$ — коваріантна похідна u^α , H — середня кривина поверхні S .

Перепишемо рівняння (9):

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha u^\beta - 2Hu^o = 0.$$

Виразимо з отриманого рівняння u^o при умові, що $H \neq 0$:

$$u^o = \frac{1}{2H} \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha u^\beta \right).$$

Підставляємо цей вираз у (5):

$$\bar{u} = u^1 \bar{r}_1 + u^2 \bar{r}_2 + \frac{\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha u^\beta}{2H} \bar{n}. \quad (10)$$

Отриманий вираз являє собою вектор зміщення ареальної нескінченно малої деформації довільної поверхні класу C^3 за умови $H \neq 0$.

3. ІСНУВАННЯ АРЕАЛЬНОЇ НЕСКІНЧЕННО МАЛОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ПОВЕРХНІ ГАУДІ

Далі визначимо вектор зміщення при довільній ареальній нескінченно малій деформації поверхні Гауді.

Зауважимо, що диференціальне рівняння (9) для поверхні Гауді у загальному випадку є дуже громіздким. Тому представимо кінцевий вираз для вектора зміщення (10) ареальної нескінченно малої деформації поверхні Гауді:

$$\begin{aligned} \bar{u} = & u^1 \left(1, 0, m \sin \frac{y}{a} \right) + u^2 \left(0, 1, \frac{mx}{a} \cos \frac{y}{a} \right) + \\ & + \frac{\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y} + u^1 \cdot \frac{m^2 x}{a^2 g} \cos^2 \frac{y}{a} + u^2 \cdot \frac{m^2}{ag} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \sin \frac{y}{a} \cos \frac{y}{a}}{2 \left(-\frac{mx \sin \frac{y}{a}}{2a^2 g \sqrt{g}} \left(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a} \right) \right)} \cdot \\ & \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \left(-m \sin \frac{y}{a}, -\frac{mx}{a} \cos \frac{y}{a}, 1 \right). \end{aligned}$$

Позначимо координати вектора зміщення так: $\bar{u} = (A, B, C)$, та випишемо кожну координату отриманого вектора окремо в прямокутній декартовій системі координат:

I координата:

$$\begin{aligned} A = & u^1 \cdot \frac{1 + m^2 + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a}}{1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a}} + \\ & + u^2 \cdot \frac{m^2(a^2 - x^2)}{ax(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a})} \sin \frac{y}{a} \cos \frac{y}{a} + \\ & + \left(\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) \cdot \frac{a^2 g}{x(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a})}; \end{aligned} \quad (11)$$

II координата:

$$\begin{aligned} B = & u^1 \cdot \frac{m^2 x \cos^3 \frac{y}{a}}{a(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a}) \sin \frac{y}{a}} + \\ & + u^2 \cdot \left(1 + \frac{m^2(a^2 - x^2) \cos^2 \frac{y}{a}}{a^3(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a})} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) \cdot \frac{ag \operatorname{ctg} \frac{y}{a}}{1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a}}; \end{aligned} \quad (12)$$

III координата:

$$\begin{aligned} C = & u^1 \cdot \left(m \sin \frac{y}{a} - \frac{m \cos^2 \frac{y}{a}}{\sin \frac{y}{a} (1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a})} \right) + \\ & + u^2 \cdot \left(\frac{mx}{a} \cos \frac{y}{a} - \frac{m(a^2 - x^2) \cos \frac{y}{a}}{ax(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a})} \right) - \\ & - \left(\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) \cdot \frac{a^2 g}{mx(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + 2m^2 \cos^2 \frac{y}{a}) \sin \frac{y}{a}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким чином, нами доведена

Теорема 2. *Поверхня Гауді допускає довільну ареальну нескінченно малу деформацію, яка виражається через дві довільні функції u^1 і u^2 класу C^1 . При цьому прямокутні декартові координати вектора зміщення $\bar{u}$ мають вигляд (11), (12), (13).*

Доведемо ще одну теорему, яка має місце для поверхні Гауді.

Теорема 3. Поверхня Гауді допускає тангенціальну ареальну нескінченно малу деформацію, при якій прямокутні декартові координати вектора зміщення виражаються через одну довільну функцію двох змінних класу C^2 і мають вигляд:

$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot m \sin \frac{y}{a} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{mx}{a} \cos \frac{y}{a} \right).$$

Доведення. Припустимо, що $u^o = 0$, тоді вектор зміщення представляється так: $\bar{u} = u^1 \bar{r}_1 + u^2 \bar{r}_2$. Отже, ареальна нескінченно мала деформація буде тангенціальною і умова (9) набуває вигляду $u_{,\alpha}^\alpha = 0$. Розгорнемо цю умову (тут: $x = x^1, y = x^2$):

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha u^\beta = 0. \quad (14)$$

Підставимо в цю рівність значення символів Крістофеля. Таким чином, рівняння ареальної нескінченно малої деформації поверхні Гауді при $u^o = 0$ набуває вигляду:

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{m^2 x^1}{a^2 g} \cos^2 \frac{x^2}{a} u^1 + \frac{m^2}{ag} \left(1 - \frac{x^{12}}{a^2} \right) \sin \frac{x^2}{a} \cos \frac{x^2}{a} u^2 = 0.$$

Тепер повернемося до рівності (14) і, використовуючи формули Фосса-Вейля, матимемо:

$$\frac{\partial(\sqrt{g}u^\beta)}{\partial x^\beta} = 0, \quad (15)$$

де $\beta = 1, 2$. Покладемо $\psi_1 = -\sqrt{g}u^2$, $\psi_2 = \sqrt{g}u^1$, де ψ_i — деякий коваріантний вектор. Підставивши ці вирази у (15), отримаємо:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x^1} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x^2}.$$

Тоді ψ_i — градієнтний коваріантний вектор, тобто існує функція $\psi(x^1, x^2) \in C^2$ така, що $\frac{\partial \psi}{\partial x^1} = \psi_1$, $\frac{\partial \psi}{\partial x^2} = \psi_2$, через похідні якої виражається контрваріантний вектор u^i , де $i = 1, 2$:

$$u^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x^2}, \quad u^2 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x^1}. \quad (16)$$

Отже, для поверхні Гауді вектор зміщення ареальної нескінченно малої деформації буде мати такий вигляд:

$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot m \sin \frac{y}{a} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{mx}{a} \cos \frac{y}{a} \right). \quad (17)$$

В цій формулі прямокутні декартові координати вектора зміщення для поверхонь Гауді виражені через одну довільну функцію $\psi(x, y) \in C^2$. Це означає, що поверхні Гауді допускають тангенціальні ареальні нескінченно малі деформації.

4. СІТКА ЛІНІЙ СТАЦІОНАРНОЇ ДОВЖИНИ ПРИ А-ДЕФОРМАЦІЇ ПОВЕРХНІ ГАУДІ

Довжина лінії на поверхні визначається з формули для лінійного елемента поверхні S , яка є першою квадратичною формою поверхні:

$$ds^2 = I(dx, dy) = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Для поверхні S^* , відповідно, матимемо:

$$ds^{*2} = g_{\alpha\beta}^* dx^\alpha dx^\beta. \quad (18)$$

Перетворимо (18) за допомогою формули (3) для метричного тензора поверхні S^* :

$$ds^{*2} = ds^2 + 2t\epsilon_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + o(t^2).$$

Отриманий вираз лінійного елемента поверхні S^* можна переписати, використовуючи його варіацію (варіацію першої квадратичної форми) — $\delta I = 2\epsilon_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$:

$$I^* = I + t\delta I + o(t^2).$$

Очевидно, що при А-деформації поверхні в загальному вигляді лінійний елемент змінюється та залежить від точки і напрямку на поверхні. Розглянемо випадок, коли лінійний елемент залишається незмінним, при цьому варіація буде дорівнювати 0. Тоді:

$$\delta I = \epsilon_{11} dx^{12} + 2\epsilon_{12} dx^1 dx^2 + \epsilon_{22} dx^{22} = 0. \quad (19)$$

Отримали диференціальне рівняння, з якого можна знайти рівняння тих кривих, які складають сітку на поверхні, уздовж яких перша квадратична форма залишається стаціонарною при ареальній нескінченно малій деформації з точністю до величин другого порядку і вище. Геометрична властивість цих ліній така: вони не змінюють свою довжину при А-деформації.

Віднесемо поверхню до ортогональної системи координат. Це означає, що в кожній точці на поверхні координатні лінії будуть взаємно перпендикулярні. Тоді $\bar{r}_1 \bar{r}_2 = g_{12} = 0$.

Порахуємо перший тензор деформації поверхні Гауді, яка задана векторно-параметричним рівнянням

$$\bar{r} = (x, y, x \sin y),$$

тобто розглядаємо поверхню Гауді при значеннях параметрів $m = a = 1$. Виберемо функцію $\psi(x, y) = -x$. За такої умови вектор зміщення (17) буде мати вигляд:

$$\bar{u} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{g}}, \frac{x}{\sqrt{g}} \cos y \right).$$

Використаємо формулу для першого тензора $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{r}_i \bar{u}_j + \bar{r}_j \bar{u}_i)$, де $\bar{u}_i = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x^i}$, де $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= g^{-\frac{3}{2}}(1 + \sin^2 y) \sin y \cos y; \\ \epsilon_{12} &= -\frac{x}{2} g^{-\frac{3}{2}}(1 + \sin^2 y) \sin^2 y; \\ \epsilon_{22} &= -g^{-\frac{3}{2}}(1 + x^2) \sin y \cos y. \end{aligned}$$

Отримали, що $\epsilon_{ij} \neq 0$ (так як ми розглядаємо поверхню Гауді за умови $x \neq 0$ і $y \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$), а це означає, що не виконується достатня умова тривіальної А-деформації. Отже, будь-яка нескінченно мала А-деформація поверхні Гауді є заздалегідь нетривіальною.

Тепер підставимо ці вирази ϵ_{ij} у диференціальне рівняння (19):

$$(1 + \sin^2 y) \cos y dx^2 - x(1 + \sin^2 y) \sin y dx dy - (1 + x^2) \cos y dy^2 = 0. \quad (20)$$

Припустивши, що $dy \neq 0$, перепишемо отриману рівність:

$$(1 + \sin^2 y) \cos y \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 - x(1 + \sin^2 y) \sin y \frac{dx}{dy} - (1 + x^2) \cos y = 0. \quad (21)$$

Таким чином, ми отримали алгебраїчне квадратне рівняння відносно напрямку $\frac{dx}{dy}$, розв'язками якого будуть два різних дійсних корені, які знаходяться за формулами:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-\epsilon_{12} + \sqrt{\epsilon_{12}^2 + \frac{g_{11}}{g_{22}} \epsilon_{22}^2}}{\epsilon_{11}}; \quad \frac{\delta x}{\delta y} = \frac{-\epsilon_{12} - \sqrt{\epsilon_{12}^2 + \frac{g_{11}}{g_{22}} \epsilon_{22}^2}}{\epsilon_{11}}.$$

Отже, ми довели теорему, яка була представлена у тезах [7]:

Теорема 4. При ареальній тангенціальній нескінченно малій деформації з полем зміщення (17) ($a = t = 1$, $\psi(x, y) = -x$) на поверхні Гауді існує дійсна ортогональна сітка ліній стаціонарної довжини, диференціальне рівняння якої має вигляд (20).

Висновки

Доведено, що поверхня Гауді допускає довільну ареальну нескінченно малу деформацію, яка виражається через дві довільні неперервно диференційовні функції, та отримано явне представлення вектора зміщення у декартових координатах. Також доведено, що поверхня Гауді допускає тангенціальну ареальну нескінченно малу деформацію, що виражається через одну довільну функцію двох змінних класу C^2 та отримано відповідний вектор зміщення у декартових координатах. Доведено існування дійсної ортогональної сітки ліній стаціонарної довжини на поверхні Гауді та отримано диференціальне рівняння для їх знаходження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Velimirovic L.S.** Analysis of Gaudi surfaces at small deformations / Velimirovic Ljubica S., Cvetkovic Milica D., Ciric Marija S., Vilimirovic Nicola, //Applied Mathematics and Computation – 2012. – №218(13).– С. 6999–7004.
2. **Velimirovic L.S.** Gaudi surfaces and curvature based functional variations / Velimirovic Ljubica S., Cvetkovic Milica D., //Applied Mathematics and Computation – 2014. – №228.– С. 377–383.
3. **Мокрищев К. К.** Введение в теорию бесконечно малых изгибаний поверхностей / Константин Константинович Мокрищев – Ростов: Издательство Ростовского университета, 1963. – 35 с.
4. **Векуа И. Н.** Обобщенные аналитические функции / Илья Нестерович Векуа – М.: Наука, 1988. – 509 с.
5. **Безкоровайна Л. Л.** Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки / Лілія Леонтіївна Безкоровайна – Одеса: АстроПринт, – 1999. – 168 с.
6. **Безкоровайная Л. Л.** Поверхности, образованные действительной и мнимой частями аналитической функции: А-деформации, происходящие независимо или одновременно. / Лілія Леонтіївна Безкоровайна, //Український математичний журнал – 2018. – Т.70. – №4.– С. 447–463.

-
7. **Хомич Ю.** Поверхня Гауді та деформація з заданою варіацією елемента площі / Юлія Хомич, Маргарита Піструїл – тези міжнародної конференції Algebraic and geometric methods of analysis (AGMA), – Одеса, – 2018. –с.93-94.

Evtukhov V. M.

AREAL INFINITELY SMALL DEFORMATION OF THE GAUDI SURFACE

Summary

This article is devoted to the study of infinitesimal areal deformations of the Gaudi surface. These surfaces, which were named after the famous Catalan architect Antonio Gaudi, are used in architecture as roofing structures, decorative elements, etc. Previously, Velimirovic L. S., Cvetkovic M. D., and others studied infinitesimal bendings of the Gaudi surface.

This article proves that the Gaudi surface admits an arbitrary areal infinitesimal deformation, which is described by two arbitrary continuously differentiable functions, and gives an explicit expression for the displacement vector in Cartesian coordinates. The case of tangential areal deformation is considered separately, with the corresponding displacement vector obtained. In addition, the existence of a real orthogonal grid of lines of stationary length on the Gaudi surface is proved and a differential equation for its construction is derived.

Keywords: Riemannian space, metric tensor, affine connection object, infinitesimal deformation, curvature, differential equations.

REFERENCES

1. **Velimirovic L.S., Cvetkovic M. D., Ciric M. S., Vilimirovic N.** (2012). Analysis of Gaudi surfaces at small deformations. *Applied Mathematics and Computation*, №218(13), p. 6999–7004.
2. **Velimirovic L.S., Cvetkovic M. D.** (2014). Gaudi surfaces and curvature based functional variations. *Applied Mathematics and Computation*, №228, p. 377–383.
3. **Mokrishchev, K.K.** (1963). Vvedenie v teoriyu beskonechno malykh izgibaniy poverkhnostey. Rostov: Izdatel'stvo Rostovskogo universiteta, p.35.
4. **Vekua, I.N.** (1988). Obobshchennye analiticheskie funktsii. Moscow: Nauka, p.509.
5. **Bezkorovayna, L.L.** (1999). Areal'ni neskinchenno mali deformatsiyi i vrinovazheni stany pruzhnoyi obolonky. Odesa: AstroPrint, p.168.
6. **Bezkorovayna, L.L.** (2018). Poverkhnosti, obrazovannye deystvitel'noy i mnimoy chastyami analiticheskoy funktsii: A-deformatsii, proikhodyashchie nezavisimo ili odnovenno. *Ukrains'kyi matematychnyi zhurnal*, №70(4), p.447–463.
7. **Khomych, Y., Pistrui, M.** (2018). Poverkhnyia Haudi ta deformatsiia z zadanoj variatsiieyu elementa ploshchi. *Abstracts of the international conference Algebraic and Geometric Methods of Analysis (AGMA)*, Odesa, p. 93–94.