

УДК 517.927.2

Р. Г. Грабовська,

Л. Л. Кольцова, *ст. викладач*

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

кафедра математичного аналізу

вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна

e-mail: koltsova.liliya@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0005-1133-676X>

ПРО ПРОДОВЖУВАНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ СИНГУЛЯРНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ НА ПРОМІЖОК НАПЕРЕД ЗАДАНОЇ ДОВЖИНИ

У статті досліджуються сингулярні диференціальні системи, особливі криві та поверхні яких є прямими та площинами. Аналізується питання існування розв'язків, що продовжуються до особливої точки на заданий проміжок, та одержання їх якісних оцінок. Для дослідження використовуються геометричні методи, зокрема концепція кривих і поверхонь без контакту. Основна увага приділена способу вибору таких кривих, форма яких визначається поведінкою інтегральних траєкторій системи. Результати роботи мають значення для теорії сингулярних рівнянь і якісного аналізу динамічних систем.

MSC: 34A09, 34C05, 34C45.

Ключові слова: сингулярні диференціальні системи, особливі криві та поверхні, продовження розв'язків, якісні оцінки, геометричні методи, криві без контакту, поверхні без контакту, інтегральні траєкторії, якісний аналіз.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2\(44\).342074](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2(44).342074).

Вступ

Відомо, що сингулярні диференціальні рівняння та системи в загальному випадку не піддаються точному аналітичному розв'язанню. Однак можна ідентифікувати точки або об'єкти, у яких не виконуються умови теореми Пікара-Коші, що унеможливорює застосування класичних методів розв'язання. Вивчення поведінки розв'язків поблизу таких сингулярностей становить істотну наукову проблему, для розв'язання якої застосовуються якісні методи. Ці методи дозволяють аналізувати властивості розв'язків без необхідності їх явного знаходження, зосереджуючись на геометричній структурі диференціальних рівнянь.

Надійшла 03.08.2024

© **Грабовська Р. Г.**, Кольцова Л. Л., 2024

Серед якісних підходів особливе місце займають геометричні методи, зокрема використання кривих і поверхонь без контакту. Вибір таких кривих і поверхонь є важливим етапом дослідження, оскільки їхня форма суттєво залежить від поведінки інтегральних кривих системи та її загальної структури. Відповідний підбір цих геометричних об'єктів ускладнюється тим, що він вимагає глибокого розуміння динаміки системи, і тому часто розглядається як мистецтво.

У даній роботі досліджуються системи, особливі криві та поверхні яких є прямими та площинами. Основною метою є встановлення існування розв'язків, які можна продовжити до особливої точки на заданий проміжок, та одержання оцінок цих розв'язків. Результати роботи можуть знайти застосування в теорії сингулярних диференціальних рівнянь та якісному аналізу динамічних систем.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Нехай $A_1, A_2, \dots, A_n$ — дискретні множини з $\mathbb{R}$ (скінченні або нескінченні).

Розглядається система сингулярних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} g_k(x) q_k(y_k) y'_k = f_k(x, y_1, \dots, y_n), \\ k = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (1)$$

у якій g_k, q_k і f_k задовольняють наступним умовам:

- (а) $g_k \in \mathbf{C}(0; \ell]$, де ℓ є меншою за мінімальну відстань від нуля до найближчого нуля функцій g_k , або до найближчої точки, у якій хоча б одна з функцій g_k визначена (якщо ж такої точки немає, то ℓ — довільно велике число); $g_k(+0) = 0$, $g_k(x) > 0$;
- (б) $q_k \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R} \setminus A_k)$, $q_k(y_k) > 0$; причому для будь-якого $a_{ki_k} \in A_k$ (i_k — не більше максимальної кількості елементів множини A_k): або $q_k(a_{ki_k}) = 0$, або $q_k(a_{ki_k})$ не визначено;
- (в) $f_k \in \mathbf{C}_{x, y_1, \dots, y_n}^{0,1}(D)$, де $D = [(0; \ell] \times (\mathbb{R} \setminus A_1) \times \dots \times (\mathbb{R} \setminus A_n)]$; причому для будь-якого $a_{ki_k} \in A_k$: або $f_k(x, a_{1i_1}, \dots, a_{ni_n}) \neq 0$, або $f_k(x, a_{1i_1}, \dots, a_{ni_n})$ не визначена.

Крім того, будемо припускати, що серед первісних функцій $\varphi_k(x) = \int \frac{dx}{g_k(x)}$ існують такі, що $\lim_{x \rightarrow +0} \varphi_k(x) = 0$ (очевидно, що $\lim_{x \rightarrow +0} \varphi'_k(x) = +\infty$).

За зроблених припущень для кожної точки області D локально виконуються умови теореми Пікара–Коші. Тому через кожну точку області D проходить єдина неперервна інтегральна крива.

Зауваження 1. Вимога, що накладена на первісні $\varphi_k(x)$, значно звужує клас функцій $g_k(x)$.

Задача. Знайти достатню умову існування розв'язків системи рівнянь (1) на проміжку $(0; \ell]$, причому таких, що

$$\begin{cases} y_k(+0) = c_k, \\ k = \overline{1, n}, \end{cases}$$

де $c_k = \text{const} \notin A_k$ (тут c_k поки не визначені).

Дослідимо поведінку розв'язків системи рівнянь (1), які перетинають поверхні виду:

$$\begin{cases} y_{ki_k}(x) = c_{ki_k}(1 \pm \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)), \\ k = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (2)$$

де $c_k \notin A_k$, $x \in (0; \ell]$.

Введемо в розгляд область $G_{i_1 \dots i_n}$, обмежену поверхнями (2):

$$G_{i_1 \dots i_n} = \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \ell \\ c_{ki_k}(1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \leq y_{ki_k} \leq c_{ki_k}(1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \text{ при } c_{ki_k} > 0 \\ \text{або} \\ c_{ki_k}(1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \leq y_{ki_k} \leq c_{ki_k}(1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \text{ при } c_{ki_k} < 0 \\ k = \overline{1, n} \end{array} \right]$$

Для кожного фіксованого $x' \in (0; \ell]$ у перерізі $G_{i_1 \dots i_n}$ ($x = x'$) отримуємо деяку замкнену область, яка при $x' \rightarrow +0$ стягується в точку $P_{i_1 \dots i_n}(0; c_{1i_1}; \dots; c_{ni_n})$.

Границею області $G_{i_1 \dots i_n}$ є кусочно-гладка поверхня $\partial G_{i_1 \dots i_n} = \bigcup_{k=1}^n \partial G_{i_1 \dots i_n}^{ki_k}$,

де:

$$\partial G_{i_1 \dots i_n}^{ki_k} = \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \ell \\ y_{ki_k} = c_{ki_k} (1 \pm \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \\ c_{mi_m} (1 - \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \leq y_{mi_m} \leq c_{mi_m} (1 + \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \text{ при } c_{mi_m} > 0 \\ \text{або} \\ c_{mi_m} (1 + \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \leq y_{mi_m} \leq c_{mi_m} (1 - \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \text{ при } c_{mi_m} < 0 \\ m \neq k, m = \overline{1, n} \end{array} \right]$$

Оскільки $y_{ki_k} = a_{ki_k} \in A_k$ у просторі $\mathbb{R}^{n+1}$ задають особливі гіперплощини, то поверхні (2) не повинні з ними перетинатися.

Для цього підберемо $\lambda_{ki_k}(\ell) > 0$ настільки малими, щоб виконувались умови:

- $c_{ki_k} (1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) > a_{ki_k}$, якщо $0 \leq a_{ki_k} < c_{ki_k}$ ($c_{ki_k} (1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) > a_{ki_k}$, якщо $a_{ki_k} < c_{ki_k} < 0$);
- $c_{ki_k} (1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) < a_{ki_k}$, якщо $0 < c_{ki_k} < a_{ki_k}$ ($c_{ki_k} (1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) < a_{ki_k}$, якщо $c_{ki_k} < a_{ki_k} \leq 0$).

Оскільки $\varphi'_k(x) > 0$, то звідси випливає, що $\varphi_k(x)$ — зростаюча функція. Тоді, очевидно, $\lambda_{ki_k}(\ell) \rightarrow 0$ або при $\ell \rightarrow +\infty$, або при $\ell \rightarrow \ell_0$, де ℓ_0 — найближча до нуля особлива точка.

Розглянемо скалярний добуток вектора нормалі $\overline{N}_{i_1 \dots i_n}^{ki_k}$, спрямованого назовні відносно області $G_{i_1 \dots i_n}^{ki_k}$, на $g_k(x) q_k(y_{ki_k}) \overline{T}_{i_1 \dots i_n}^{ki_k}$, де $\overline{T}_{i_1 \dots i_n}^{ki_k}$ — вектор поля, визначений системою рівнянь (1) у тій же точці.

Тоді $\overline{N}_{i_1 \dots i_n}^{ki_k} = (\mp \lambda_{ki_k} c_{ki_k} \varphi'_k(x); 0; \dots; 0; 1_{k-\text{те}}; 0; \dots; 0)$.

Оскільки $g_k(x) q_k(y_{ki_k}) > 0$, то добуток $g_k(x) q_k(y_{ki_k}) \overline{T}_{i_1 \dots i_n}^{ki_k}$ не змінює напрямку вектора поля $\overline{T}_{i_1 \dots i_n}^{ki_k}$.

Тоді

$$\begin{aligned}
 & \left(g_k(x) q_k(y_{ki_k}) \overline{T}_{i_1 \dots i_n}^{ki_k}, \overline{N}_{i_1 \dots i_n}^{ki_k} \right) = f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{ki_k}, y_{k+1}, \dots, y_n) \mp \\
 & \mp \lambda_{ki_k} c_{ki_k} \varphi'_k(x) g_k(x) q_k(y_{ki_k}) = f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{ki_k}, y_{k+1}, \dots, y_n) \mp \\
 & \mp \lambda_{ki_k} c_{ki_k} \varphi'_k(x) \cdot \frac{q_k(y_{ki_k})}{\varphi'_k(x)} = f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{ki_k}, y_{k+1}, \dots, y_n) \mp \\
 & \mp \lambda_{ki_k} c_{ki_k} q_k(y_{ki_k}) = q_k(y_{ki_k}) \left[\mp \lambda_{ki_k} c_{ki_k} + \frac{f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{ki_k}, y_{k+1}, \dots, y_n)}{q_k(y_{ki_k})} \right] = \\
 & = q_k \left(c_{ki_k} [1 \pm \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)] \right) \left[\mp \lambda_{ki_k} c_{ki_k} + \frac{f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, c_{ki_k} [1 \pm \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)], y_{k+1}, \dots, y_n)}{q_k(c_{ki_k} [1 \pm \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)])} \right].
 \end{aligned}$$

Нехай для будь-якого $a_{ki_k} \in A_k$ існує

$$\lim_{p_{ki_k} \rightarrow a_{ki_k} + 0} \frac{f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, p_{ki_k}, y_{k+1}, \dots, y_n)}{q_k(p_{ki_k})} = 0 \quad (3)$$

$$\left(\lim_{p_{ki_k} \rightarrow a_{ki_k} - 0} \frac{f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, p_{ki_k}, y_{k+1}, \dots, y_n)}{q_k(p_{ki_k})} = 0 \right) \quad (3')$$

рівномірно відносно $x \in (0; \ell]$ і відносно $y_{si_s} \in \mathbb{R} \setminus A_s$ ($s \neq k$, $s = \overline{1, n}$). Тоді покажемо, що існує таке достатньо мале додатне число $c_{ki_k}^+(\ell)$ ($c_{ki_k}^-(\ell)$), що для будь-якого $c_k \in (a_{ki_k}; a_{ki_k} + c_{ki_k}^+]$ ($c_k \in [a_{ki_k} - c_{ki_k}^-; a_{ki_k})$) виконується умова:

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{sgn} \left[\mp \lambda_{ki_k} c_{ki_k} + \frac{f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, c_{ki_k} [1 \pm \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)], y_{k+1}, \dots, y_n)}{q_k(c_{ki_k} [1 \pm \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)])} \right] = \\
 & = \operatorname{sgn}[\mp \lambda_{ki_k} c_{ki_k}];
 \end{aligned} \quad (4)$$

причому, коли ℓ зростає в області допустимих значень, то $c_{ki_k}^+(\ell) \rightarrow 0$, $c_{ki_k}^-(\ell) \rightarrow 0$.

Геометрично це означає, що поверхні (2) на проміжку $(0; \ell]$ складаються з точок строгого виходу з області $G_{i_1 \dots i_n}$ при зменшенні x .

Скористаємося топологічним принципом Важевського [1].

Тут:

$$\Omega = G_{i_1 \dots i_n} = \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \ell \\ c_{ki_k}(1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \leq y_{ki_k} \leq c_{ki_k}(1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \text{ при } c_{ki_k} > 0 \\ \text{або} \\ c_{ki_k}(1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \leq y_{ki_k} \leq c_{ki_k}(1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \text{ при } c_{ki_k} < 0 \\ k = \overline{1, n} \end{array} \right]$$

$$S = \Omega \cap (x = \ell) = \left[\begin{array}{l} x = \ell \\ c_{ki_k}(1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \leq y_{ki_k} \leq c_{ki_k}(1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \text{ при } c_{ki_k} > 0 \\ \text{або} \\ c_{ki_k}(1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \leq y_{ki_k} \leq c_{ki_k}(1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \text{ при } c_{ki_k} < 0 \\ k = \overline{1, n} \end{array} \right]$$

$$\Omega_{se} = \partial\Omega =$$

$$= \bigcup_{k=1}^n \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \ell \\ y_{ki_k} = c_{ki_k}(1 \pm \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \\ c_{mi_m}(1 - \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \leq y_{mi_m} \leq c_{mi_m}(1 + \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \text{ при } c_{mi_m} > 0 \\ \text{або} \\ c_{mi_m}(1 + \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \leq y_{mi_m} \leq c_{mi_m}(1 - \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \text{ при } c_{mi_m} < 0 \\ m \neq k, m = \overline{1, n} \end{array} \right]$$

Тоді

$$S \cap \Omega_{se} =$$

$$= \bigcup_{k=1}^n \left[\begin{array}{l} x = \ell \\ y_{ki_k} = c_{ki_k}(1 \pm \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \\ c_{mi_m}(1 - \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \leq y_{mi_m} \leq c_{mi_m}(1 + \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \text{ при } c_{mi_m} > 0 \\ \text{або} \\ c_{mi_m}(1 + \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \leq y_{mi_m} \leq c_{mi_m}(1 - \lambda_{mi_m} \varphi_m(x)) \text{ при } c_{mi_m} < 0 \\ m \neq k, m = \overline{1, n} \end{array} \right]$$

Перевіряємо виконання умов принципу Важевського.

1) Спочатку покажемо, що існує неперервне відображення Ω_{se} на $S \cap \Omega_{se}$.

Для цього розглянемо довільну точку $P'(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in \Omega_{se}$. Тоді існує таке $k \in \overline{1, n}$, що

$$\begin{cases} 0 < \bar{x} < \ell, \\ \bar{y}_{ki_k} = c_{ki_k} \left(1 + \theta_k \lambda_{ki_k} \varphi_k(\bar{x}) \right), & |\theta_k| = 1, \theta_k = const, \\ \bar{y}_{mi_m} = c_{mi_m} \left(1 + \eta_m \lambda_{mi_m} \varphi_m(\bar{x}) \right), & |\eta_m| \leq 1, \eta_m = const, \\ m \neq k, m = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Розглянемо наступне неперервне перетворення:

$$\begin{cases} \bar{x} \leq x < \ell, \\ y_{ki_k} = c_{ki_k} \left(1 + \theta_k \lambda_{ki_k} \varphi_k(x) \right), & |\theta_k| = 1, \theta_k = const, \\ y_{mi_m} = c_{mi_m} \left(1 + \eta_m \lambda_{mi_m} \varphi_m(x) \right), & |\eta_m| \leq 1, \eta_m = const, \\ m \neq k, m = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Спрямовуючи $x \rightarrow \ell - 0$, отримаємо, що точка P' , залишаючись на Ω_{se} , неперервно відобразиться в точку

$$P''(\ell; c_{1i_1}(1 + \eta_1 \lambda_{1i_1} \varphi_1(\ell)); \dots; c_{ki_k}(1 + \theta_k \lambda_{ki_k} \varphi_k(\ell)); \dots; c_{ni_n}(1 + \eta_n \lambda_{ni_n} \varphi_n(\ell))),$$

яка належить $S \cap \Omega_{se}$. Отже, в силу неперервності функцій $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1, n}$, існує неперервне відображення Ω_{se} на $S \cap \Omega_{se}$.

2) З топології відомо, що область, гомеоморфну замкненій кулі, не можна неперервно відобразити на свою границю, залишаючи її нерухомою.

У нашому випадку замкнена область S — n -вимірний замкнений «паралелепіпед», тобто область, гомеоморфна замкненій кулі. Тому S не можна неперервно відобразити на свою границю, якою є $S \cap \Omega_{se}$, зберігаючи її нерухомою.

Таким чином, всі умови із принципу Важевського виконуються. Тому існує принаймні одна точка $s \in S$ така, що відповідна їй інтегральна крива при зменшенні x продовжується на проміжку $(0; \ell]$ і залишається всередині області $G_{i_1 \dots i_n}$. Тобто існує принаймні один неперервний розв'язок системи

рівнянь (1), який на проміжку $(0; \ell]$ задовольняє нерівностям:

$$\begin{cases} \vee c_k(1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \leq y_k \leq c_k(1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) & (\text{при } c_{ki_k} > 0), \\ \vee c_k(1 + \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) \leq y_k \leq c_k(1 - \lambda_{ki_k} \varphi_k(x)) & (\text{при } c_{ki_k} < 0), \\ y_k(+0) = c_k, \\ k = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (5)$$

Таким чином, на основі отриманих результатів сформулюємо теорему.

Теорема. Нехай у системі рівнянь (1) функції $f_k(x, y_1, \dots, y_n)$, де $k = \overline{1, n}$, задовольняють умову (3) ((3')). Тоді існують такі достатньо малі додатні числа $c_{ki_k}^+(\ell)$ ($c_{ki_k}^-(\ell)$), що для будь-яких $c_k \in (a_{ki_k}; a_{ki_k} + c_{ki_k}^+]$ ($c_k \in [a_{ki_k} - c_{ki_k}^-; a_{ki_k})$) існує хоча б один розв'язок системи рівнянь (1), який на $(0; \ell]$ задовольняє нерівностям (5).

Зауваження 2. Припустимо, що для множини A_k значення $y_k = +\infty$ ($y_k = -\infty$) не є граничним. Крім того, припустимо, що для елементів множин A_j ($j \neq k, j = \overline{1, n}$) виконано граничне співвідношення (3) ((3')). Тоді існує таке число $m_{i_k}^+ > \max a_{ki_k}$ ($m_{i_k}^- < \min a_{ki_k}$), що в смугі $m_{i_k}^+ \leq y_k < +\infty$ ($-\infty < y_k \leq m_{i_k}^-$) немає елементів з A_k .

Якщо

$$\lim_{p_{ki_k} \rightarrow +\infty} \frac{f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, p_{ki_k}, y_{k+1}, \dots, y_n)}{q_k(p_{ki_k})} = 0 \quad (6)$$

$$\left(\lim_{p_{ki_k} \rightarrow -\infty} \frac{f_k(x, y_1, \dots, y_{k-1}, p_{ki_k}, y_{k+1}, \dots, y_n)}{q_k(p_{ki_k})} = 0 \right) \quad (6')$$

рівномірно відносно $x \in (0; \ell]$ і відносно $y_{si_s} \in \mathbb{R} \setminus A_s$ ($s \neq k, s = \overline{1, n}$), то існують такі достатньо великі за модулем додатні числа $c_{ki_k}^{+\infty}(\ell)$ (від'ємні числа $c_{ki_k}^{-\infty}(\ell)$), що для будь-яких $c_k \in [c_{ki_k}^{+\infty}; +\infty)$ ($c_k \in (-\infty; c_{ki_k}^{-\infty}]$) виконується умова (4).

Не виключено, що для деяких (або всіх) множин A_j значення $y_j = +\infty$ ($y_j = -\infty$) також не є граничним.

Тоді всередині області $G_{i_1 \dots i_n}$ інтегральні криві продовжувані на $(0; \ell]$ і перетинають гіперплощину $x = 0$ у точці $P(0; c_1; \dots; c_n)$.

Зауваження 3. Якщо множини A_k , $k = \overline{1, n}$, містять більше ніж один елемент і граничні співвідношення або (3) ((3')), або (6) ((6')) справедливі, тоді всередині області, де

$$\begin{aligned} c_{ki_k}(1 + \lambda_{ki_k}\varphi_k(x)) < y_k < c_{ki_{k+1}}(1 - \lambda_{ki_{k+1}}\varphi_{k+1}(x)), \quad 0 < c_{ki_k} < c_{(k+1)i_{k+1}} \\ (c_{ki_k}(1 - \lambda_{ki_k}\varphi_k(x)) < y_k < c_{ki_{k+1}}(1 + \lambda_{ki_{k+1}}\varphi_{k+1}(x)), \quad c_{ki_k} < c_{(k+1)i_{k+1}} < 0), \\ k = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

будь-який розв'язок буде визначений на проміжку $(0; \ell]$, але існування граничних цього розв'язку при $x \rightarrow +0$ стверджувати не можна.

Зауваження 4. Якщо множини $A_k = \{-\infty; +\infty\}$, $k = \overline{1, n}$, і граничні співвідношення (6) ((6')) справедливі, то інтегральні криві, що проходять через будь-яку точку області, де $x \in (0; \ell]$, $y_k \in \mathbb{R}$, продовжувані на $(0; \ell]$, причому деякі з них мають скінченну границю при $x \rightarrow +0$, інші ж, взагалі кажучи, можуть її і не мати.

Приклад.

$$\begin{cases} x \ln^2 \frac{1}{x} \cdot y_1^4 \cdot y_1' = \sin^6 y_1 (2 + \sin y_2) + e^{-\frac{1}{y_1^2}}, \\ x^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \sin^2 y_2 \cdot y_2' = e^{-\frac{1}{\sin^4 y_2}} (4 + \operatorname{arctg} y_1). \end{cases}$$

Тут $x = 0$, $x = 1$ — сусідні особливі точки.

$$q_1(y_1) = y_1^4, \quad A_1 = \{-\infty; 0; +\infty\};$$

$$q_2(y_2) = \sin^2 y_2, \quad A_2 = \{\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Досліджується продовжуваність по x розв'язків цієї системи рівнянь на проміжок $(0; 1 - \delta]$, де δ — додатне як завгодно мале число.

Звідси:

$$\varphi_1(x) = \int \frac{dx}{x \ln^2 \frac{1}{x}} = \frac{1}{\ln \frac{1}{x}}, \quad \varphi_2(x) = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{x^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

$$G_{i_1 i_2} = \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq 1 - \delta \\ c_{1i_1} \left(1 \mp \frac{\lambda_{1i_1}}{\ln \frac{1}{x}} \right) \leq y_{ki_k} \leq c_{1i_1} \left(1 \pm \frac{\lambda_{1i_1}}{\ln \frac{1}{x}} \right), \\ c_{2i_2} \left(1 \mp \frac{\lambda_{2i_2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot x^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) \leq y_{2i_2} \leq c_{2i_2} \left(1 \pm \frac{\lambda_{2i_2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot x^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) \end{array} \right],$$

де i_1, i_2 — фіксовані.

У результаті маємо, що яким би малим не було $\delta > 0$, усі точки на границі області $G_{i_1 i_2}$ з відповідними константами

$$\begin{aligned} c_1 &\in (-\infty; -c_{1(-\infty)}^-) \cup [-c_{10}^-; 0) \cup (0; c_{10}^+] \cup (c_{1(+\infty)}^+; +\infty), \\ c_2 &\in \left(\bigcup_{k \geq 0, k \in \mathbb{Z}} \left((\pi k; \pi k + c_{2k}^+] \cup [\pi(k+1) - c_{2k}^-; \pi(k+1)) \right) \right) \cup \\ &\cup \left(\bigcup_{k < 0, k \in \mathbb{Z}} \left((\pi(k+1); \pi(k+1) + c_{2k}^+] \cup [\pi k - c_{2k}^-; \pi k) \right) \right), \end{aligned}$$

є точками строгого виходу при зростанні x . Отже, всередині області $G_{i_1 i_2}$ лежить хоча б одна інтегральна крива, продовжувана на проміжок $(0; 1-\delta]$ і спрямована в точку $P_{i_1 i_2}(0; c_1; c_2)$.

Інтегральні криві, що проходять між областями $G_{0 \pm i_2^+}$ і $G_{\pm \infty i_2^-}$, продовжувані на $(0; 1-\delta]$, але існування границі цих розв'язків при $x \rightarrow +0$ стверджувати не можна.

Висновки

У роботі досліджено сингулярні диференціальні системи з особливими кривими та поверхнями у вигляді прямих і площин. Отримано критерії існування розв'язків, які можна продовжити до особливої точки на заданий проміжок, та доведено їх якісні оцінки. Запропоновано геометричний підхід на основі методу кривих і поверхонь без контакту, який дозволяє аналізувати поведінку інтегральних траєкторій без явного розв'язання системи.

Результати роботи мають теоретичне значення для розвитку теорії сингулярних диференціальних рівнянь і можуть бути застосовані в якісному аналізі динамічних систем. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на узагальнення методу для нелінійних особливих поверхонь та розширення класу аналізованих систем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Hartman P.** Hartman P. Ordinary Differential Equations / P. Hartman. – Baltimore: Johns Hopkins Press, 1964. – P. 278-280.

Grabovska R. G., *Koltsova L. L.*

ON THE CONTINUABILITY OF SOLUTIONS OF A SYSTEM OF FIRST-ORDER SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATIONS TO AN INTERVAL OF PREDETERMINED LENGTH

Summary

The article investigates singular differential systems whose special curves and surfaces are straight lines and planes. The question of the existence of solutions that can be extended to a singular point over a given interval and obtaining their qualitative estimates is analyzed. The study employs geometric methods, particularly the concept of contactless curves and surfaces. The main focus is on the method of selecting such curves, whose shape is determined by the behavior of the system's integral trajectories. The results of the work are significant for the theory of singular equations and the qualitative analysis of dynamical systems.

Keywords: singular differential systems, special curves and surfaces, extension of solutions, qualitative estimates, geometric methods, contactless curves, contactless surfaces, integral trajectories, qualitative analysis.

REFERENCES

1. **Hartman P.** Hartman P. Ordinary Differential Equations / P. Hartman. – Baltimore: Johns Hopkins Press, 1964. – P. 278-280.