

УДК 517.925

**А. В. Воробйова, аспірант**

*Одеський національний університет імені І. І. Мечникова*

*кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь*

*вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна*

*e-mail: alla.vorobyova@stud.onu.edu.ua*

*ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0009-7664-3399>*

## **АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ШВИДКО ЗМІННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З НЕЛІНІЙНОСТЯМИ БЛИЗЬКИМИ ДО ПРАВИЛЬНО ЗМІННИХ**

Для диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями загального вигляду, що є близькими до правильно змінних, вперше отримано необхідні та достатні умови існування досить широкого класу швидкозмінних розв'язків. Ця робота розширює та узагальнює класичні результати, отримані для рівнянь Емдена-Фаулера, та дозволяє застосувати асимптотичні методи до більш складних моделей. Крім того, отримано точні асимптотичні формули для таких розв'язків та їх похідних першого порядку. Ці формули є важливим інструментом для аналізу якісної поведінки розв'язків у залежності від властивостей коефіцієнтів рівняння. Отримані результати дозволяють прогнозувати поведінку розв'язків у околі особливої точки, що має велике значення для прикладних задач у фізиці, хімії та інших науках.

*MSC: 2000: 34C41, 34A10.*

*Ключові слова: диференціальні рівняння, асимптотичний, швидко змінні розв'язки, правильно змінні нелінійності.*

*DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2\(44\).342073](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2(44).342073).*

### **Вступ**

З розвитком теорії правильно змінних функцій [1] у роботах В.М. Євтухова та численних представників його наукової школи (див., наприклад, [3]–[6]) було розроблено теорію дослідження достатньо широких класів розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями. Залишається відкритою задача дослідження рівнянь більш загального виду, які можуть виникати при розгляді уточнених моделей різноманітних природних явищ. Дану роботу присвячено саме таким

типам рівнянь.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) f(t, y, y'), \quad (1)$$

де  $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ ,  $p : [a, \omega[ \rightarrow ]0, +\infty[ (-\infty < a < \omega \leq +\infty)$  – неперервна функція і  $f : [a, \omega[ \times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow ]0, +\infty[$  є неперервно диференційовною,  $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$ ,  $\Delta_{Y_i}$  має вид або  $[y_i^0, Y_i[*$  або  $]Y_i, y_i^0]$ .

Покладемо

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{то } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{то } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Вважаємо, що функція  $f$  у (1) задовольняє умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(t, v_0, v_1)}{f(t, v_0, v_1)} = \gamma \text{ рівномірно по } (v_0, v_1) \in \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \quad (2)$$

та для кожного  $k \in \{0, 1\}$

$$\lim_{\substack{v_k \rightarrow y_k \\ v_k \in \Delta_{Y_k}}} \frac{v_k \cdot \frac{\partial f}{\partial v_k}(t, v_0, v_1)}{f(t, v_0, v_1)} = \sigma_k \text{ рівномірно по } t \in [a, w[ \text{ та рівномірно по } \quad (3)$$

$v_j \in \Delta_{Y_j}, j \neq k, \sigma_i \in R$ , причому  $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$ .

Функції  $f$ , що задовольняють умови (2) та (3) є близькими до правильно змінних функцій по кожній зі змінних. Прикладом можуть слугувати зокрема функції виду  $|\pi_\omega(t)|^\gamma |y|^{\sigma_0} |y'|^{\sigma_1} \exp(|\ln |\pi_\omega(t) y y'|^\mu|)$ ,  $0 < \mu < 1$ . Важливою особливістю таких функцій є неможливість їх навіть асимптотично зобразити у вигляді добутку функції, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної.

В силу (2) та (3),  $f(t, y, y')$  має вигляд

$$f(t, v_0, v_1) = |\pi_\omega(t)|^\gamma |y|^{\sigma_0} |y'|^{\sigma_1} \cdot \Theta(t, y, y'), \quad (4)$$

де функція  $\Theta$  задовольняє умову

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t}(t, v_0, v_1)}{\Theta(t, v_0, v_1)} = 0 \text{ рівномірно по } (v_0, v_1) \in \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1}, \quad (5)$$

а також для кожного  $k \in \{0, 1\}$

$$\lim_{\substack{v_k \rightarrow y_k \\ v_k \in \Delta Y_k}} \frac{v_k \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v_k}(\Theta, v_0, v_1)}{f(t, v_0, v_1)} = 0 \text{ рівномірно по } t \in [a, w[ \text{ та рівномірно по } \quad (6)$$

$v_j \in \Delta Y_j, j \neq k$ .

Розв'язок  $y$  рівняння (1) будемо називати  $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язком, якщо він заданий на  $[t_0, \omega[ \subset [a, \omega[$  та для кожного  $i \in \{0, 1\}$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \quad (7)$$

Введемо необхідні позначення

$$I_2(t) = \alpha_0 \int_{A_\omega^2}^t p(\tau) d\tau, \quad A_\omega^2 = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau) d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau) d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$J_4(t) = \int_{B_\omega^4}^t |I_2(\tau)|^{\frac{1}{\sigma_0}} d\tau, \quad B_\omega^4 = \begin{cases} b, & \text{якщо } \int_b^\omega |I_2(\tau)|^{\frac{1}{\sigma_0}} d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_b^\omega |I_2(\tau)|^{\frac{1}{\sigma_0}} d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Має місце наступна теорема.

**Теорема.** *Нехай у рівнянні (1)  $\sigma_1 = 1$ . Тоді, для існування у рівняння (1)  $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$ -розв'язків необхідно, а якщо*

$$\sigma_0 I_2(t) < 0, \quad (8)$$

*то і достатньо виконання умов*

$$y_0^0 \alpha_0 > 0, \quad \sigma_0 y_1^0 I_2(t) < 0 \quad \text{при } t \in [a, \omega[, \quad (9)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y_0^0 |J_4(t)|^{-1} = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y_1^0 |J_4(t)|^{-1} = Y_1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{J_4(t) I_2'(t)}{J_4'(t) I_2(t)} = \sigma_0. \quad (10)$$

*Крім того, для кожного такого розв'язку мають місце наступні асимптотичні зображення при  $t \uparrow \omega$*

$$\frac{1}{y'(t) \cdot (\Theta(t, y(t), y'(t)))^{\frac{1}{\sigma_0}}} = -J_4(t) |\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}} [1 + o(1)], \quad (11)$$

$$\frac{y(t)}{y'(t)} = -\frac{J_4(t)}{J_4'(t)} [1 + o(1)]. \quad (12)$$

**Доведення.** *Необхідність.* Нехай  $y : [t_0, \omega[ \rightarrow \mathbb{R} \in P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$  - розв'язком рівняння (1), для якого  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Підставляючи в (1) зображення (4) отримуємо рівність

$$y'' = \alpha_0 p(t) |\pi_\omega(t)|^\gamma |y|^{\sigma_0} |y'| \cdot \Theta(t, y, y'). \quad (13)$$

Розглянемо рівність

$$\begin{aligned} \left( \frac{y'(t)}{|y(t)|^{\sigma_0} |y'(t)| \Theta(t, y(t), y'(t))} \right)' &= \frac{y''(t)}{|y(t)|^{\sigma_0} |y'(t)| \Theta(t, y(t), y'(t))} \\ &\left( -\sigma_0 \frac{|y'(t)|^2}{y''(t) \cdot y(t)} - \frac{y'(t) \cdot \frac{\partial \Theta(t, y(t), y'(t))}{\partial v_1}}{\Theta(t, y(t), y'(t))} - \frac{(y'(t))^2}{y''(t) \cdot y(t)} \cdot \frac{y(t) \cdot \frac{\partial \Theta(t, y(t), y'(t))}{\partial v_0}}{\Theta(t, y(t), y'(t))} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{y'(t)}{\pi_\omega(t) \cdot y''(t)} \cdot \frac{\frac{\partial \Theta(t, y(t), y'(t))}{\partial t} \cdot \pi_\omega(t)}{\Theta(t, y(t), y'(t))} \right) \quad (14) \end{aligned}$$

При  $t \uparrow \omega$  попередню рівність можна записати так:

$$\left( \frac{y'(t)}{|y(t)|^{\sigma_0} |y'(t)| \Theta(t, y(t), y'(t))} \right)' = \alpha_0 p(t) \text{sign} y_1^0(-\sigma_0) [1 + o(1)] \quad (15)$$

Звідси маємо

$$\frac{1}{|y(t)|^{\sigma_0} \cdot \Theta(t, y(t), y'(t))} = -\sigma_0 I_2(t) [1 + o(1)]. \quad (16)$$

Звідси випливає друга з умов (4). Перепишемо (11) у виді, при  $t \uparrow \omega$

$$y(t) = (\Theta(t, y(t), y'(t)))^{-\frac{1}{\sigma_0}} |I_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma_0}} |\sigma_0|^{-\frac{1}{\sigma_0}} [1 + o(1)]. \quad (17)$$

Підставимо (12) у третю з умов (7) і отримаємо при  $t \uparrow \omega$

$$(y'(t))^2 = y''(t) (\Theta(t, y(t), y'(t)))^{-\frac{1}{\sigma_0}} |I_2(t)|^{-\frac{1}{\sigma_0}} |\sigma_0|^{-\frac{1}{\sigma_0}} [1 + o(1)]. \quad (18)$$

Звідси отримаємо при  $t \uparrow \omega$

$$\frac{y''(t)}{(y'(t))^2 \cdot (\Theta(t, y(t), y'(t)))^{\frac{1}{\sigma_0}}} = |I_2(t)|^{\frac{1}{\sigma_0}} |\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}} [1 + o(1)]. \quad (19)$$

Тоді з використанням тверджень 1 і 2 з [7] отримаємо при  $t \uparrow \omega$

$$\frac{1}{y'(t) \cdot (\Theta(t, y(t), y'(t)))^{\frac{1}{\sigma_0}}} = -J_4(t) |\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}} [1 + o(1)], \quad (20)$$

тобто перше з зображень (6).

З (11) і (15) отримаємо при  $t \uparrow \omega$

$$\frac{y(t)}{y'(t)} = -\frac{J_4(t)}{J'_4(t)}[1 + o(1)], \quad (21)$$

звідси має місце друге з зображень (6). Крім того, з урахуванням (6) виконуються перша та друга умови з (5).

Поділивши (14) на (15) отримаємо при  $t \uparrow \omega$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{I_2(t)}{-\sigma_0 I_2(t)}[1 + o(1)].$$

Звідси, з урахуванням (16) і (7) отримаємо третю з умов (5).

*Достатність.* Нехай  $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  та виконуються умови (3)–(5).

Покладемо

$$\begin{cases} \frac{1}{y'(t) \cdot (\Theta(t, y(t), y'(t)))^{\frac{1}{\sigma_0}}} = -J_4(t)|\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}}[1 + z_1(x)], \\ \frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{J'_4(t)}{J_4(t)}[1 + z_2(x)], \end{cases} \quad (22)$$

де

$$x = \beta \ln |J_4(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{якщо } \lim_{t \uparrow \omega} J_4(t) = +\infty, \\ -1 & \text{якщо } \lim_{t \uparrow \omega} J_4(t) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Враховуючи (5), оберемо  $t_0 \in [a, \omega[$  так, щоб при  $t \in [t_0, \omega[$  мала місце нерівність

$$\left| \frac{\pi_\omega(t) \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t}(t, v_0, v_1)}{\Theta(t, v_0, v_1)} \right| < \frac{1}{4}$$

Враховуючи (6), оберемо для кожного  $i \in \{0, 1\}$  значення  $y_i^1 \in \Delta_{Y_i}$  так, щоб

$$\left| \frac{v_i \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v_i}(t, v_0, v_1)}{\Theta(t, v_0, v_1)} \right| < \frac{1}{4} \quad (24)$$

де  $v_i \in \Delta_{Y_i}^1$

$$\Delta_{Y_i}^1 = \begin{cases} [y_i^1, Y_i[, & \text{при } \Delta_{Y_i} = [y_i^0, Y_i[ \\ ]Y_i, y_i^1], & \text{при } \Delta_{Y_i} = ]Y_i, y_i^0]. \end{cases}$$

Покладемо

$$D = \left\{ (z_1, z_2) \in R^2 : |z_i| < \frac{1}{2}, i = 1, 2 \right\}.$$

Розглянемо функцію

$$F(t, y', z_1, z_2) = \frac{-1}{y'(t) \cdot \left( \Theta \left( t, \frac{-y' J_4(t)}{J_4'(t)[1+z_2]}, y' \right) \right)^{\frac{1}{\sigma_0}} J_4(t) |\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}} [1+z_1]} - 1.$$

Оскільки

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(t, y, z_1, z_2) = \frac{\left( 1 - \frac{y' \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v_0} \left( t, \frac{-y' J_4(t)}{J_4'(t)[1+z_2]}, y' \right)}{\Theta \left( t, \frac{-y' J_4(t)}{J_4'(t)[1+z_2]}, y' \right)} - \frac{\frac{-y' J_4(t)}{J_4'(t)[1+z_2]} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v_1} \left( t, \frac{-y' J_4(t)}{J_4'(t)[1+z_2]}, y' \right)}{\Theta \left( t, \frac{-y' J_4(t)}{J_4'(t)[1+z_2]}, y' \right)} \right)}{\left( \Theta \left( t, y, \frac{\lambda_0 y [1+z_2]}{(\lambda_0 - 1) \pi_\omega(t)} \right) \right)^{\frac{1}{\sigma_0}} J_4(t) |\sigma_0|^{\frac{1}{\sigma_0}} [1+z_1]}$$

то за рахунок (24) на множині  $\Delta = [t_0, \omega] \times \Delta_{Y_0}^1 \times \Delta_{Y_1}^1$  за теоремою про неявну функцію рівність

$$F(t, y, z_1, z_2) = 0$$

задає функцію  $y = Y_0(t, z_1, z_2)$ . Покладемо  $Y_1(t, z_1, z_2) = \frac{\lambda_0 Y(t, z_1, z_2)[1+z_2]}{(\lambda_0 - 1) \pi_\omega(t)}$ .

Тоді з (5) випливає, що для  $i = 1, 2$  маємо

$$\lim_{t \rightarrow \omega} Y_i(t, z_1, z_2) = Y_i \quad \text{рівномірно по } (z_1, z_2) \in D. \quad (25)$$

За допомогою (22) зведемо на множині  $\Delta$  рівняння (1) до системи

$$\begin{cases} z_1' = \beta[1+z_1] \left( G_3(t(x)) \cdot [1+z_1]^{-\sigma_0} \cdot [1+z_2]^{-\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_0} \left( K_0(x, z_1, z_2) \cdot G_4(t(x)) - \right. \right. \\ \left. \left. - K_1(x, z_1, z_2)[1+z_2] + K_2(x, z_1, z_2) \cdot G_3(t(x)) \cdot [1+z_1]^{-\sigma_0} \cdot [1+z_2]^{-\sigma_0} \right) + 1 \right); \\ z_2' = \beta[1+z_2] \left( G_3(t(x))[1+z_1]^{-\sigma_0}[1+z_2]^{-\sigma_0} + [1+z_2] \right), \end{cases} \quad (26)$$

де

$$G_3(t) = \frac{-J_4(t)I_2'(t)}{\sigma_0 J_4'(t)I_2(t)}, \quad G_4(t) = \frac{J_4(t)}{\pi_\omega(t)J_4'(t)}$$

$$K_0(x, z_1, z_2) = \frac{\pi_\omega(t(x)) \frac{\partial \Theta}{\partial t}(t(x), Y_0(t(x), z_1, z_2), Y_1(t(x), z_1, z_2))}{\Theta(t(x), Y_0(t(x), z_1, z_2), Y_1(t(x), z_1, z_2))},$$

$$K_1(x, z_1, z_2) = \frac{Y_0(t(x), z_1, z_2) \frac{\partial \Theta}{\partial v_0}(t(x), Y_0(t(x), z_1, z_2), Y_1(t(x), z_1, z_2))}{\Theta(t(x), Y_0(t(x), z_1, z_2), Y_1(t(x), z_1, z_2))},$$

$$K_2(x, z_1, z_2) = \frac{Y_1(t(x), z_1, z_2) \frac{\partial \Theta}{\partial v_1}(t(x), Y_0(t(x), z_1, z_2), Y_1(t(x), z_1, z_2)))}{\Theta(t(x), Y_0(t(x), z_1, z_2), Y_1(t(x), z_1, z_2))}.$$

В силу (5)

$$\lim_{t \uparrow \omega} G_3(t) = -1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} G_4(t) = 0. \quad (27)$$

З урахуванням (25),(5) та (6) маємо для кожного  $i \in \{0, 1, 2\}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} K_i(x, z_1, z_2) = 0 \quad \text{рівномірно по } (z_1, z_2) \in D. \quad (28)$$

Перепишемо систему (26) у вигляді

$$\begin{cases} z'_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + R_1(x, z_1, z_2) + R_2(x, z_1, z_2), \\ z'_2 = A_{21}z_1 + A_{22}z_2 + R_3(x, z_1, z_2) + R_4(x, z_1, z_2), \end{cases}$$

де

$$A_{11}(x) = \beta\sigma_0, \quad A_{12}(x) = \beta\sigma_0, \quad A_{21}(x) = -\beta\sigma_0,$$

$$A_{22}(x) = \beta(-\sigma_0 + 1),$$

$$R_1(x, z_1, z_2) = \beta G_3(t(x)) + \frac{\beta}{\sigma_0} \left( K_0(x, z_1, z_2) \cdot G_4(t(x)) - \right. \\ \left. - K_1(x, z_1, z_2)[1 + z_2] + K_2(x, z_1, z_2) \cdot G_3(t(x)) \cdot [1 + z_1]^{-\sigma_0} \cdot [1 + z_2]^{-\sigma_0} \right) + \beta,$$

$$R_2(x, z_1, z_2) = \beta \left( -[1 + z_1]^{-\sigma_0} [1 + z_2]^{-\sigma_0} + 1 + \sigma_0 z_1 + \sigma_0 z_2 \right),$$

$$R_3(x, z_1, z_2) = \beta [1 + z_2] \left( G_3(t(x)) + 1 \right),$$

$$R_4(x, z_1, z_2) = \beta \left( -[1 + z_1]^{-\sigma_0} [1 + z_2]^{-\sigma_0+1} + 1 + \sigma_0 z_1 - (1 - \sigma_0) z_2 + z_2^2 \right).$$

В силу (27) та (28) для  $i \in \{1, 3\}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R_i(x, z_1, z_2) = 0 \quad \text{рівномірно за } z_1, z_2 : (z_1, z_2) \in D. \quad (29)$$

Крім того, маємо для  $i \in \{2, 4\}$

$$\lim_{|z_1|+|z_2| \rightarrow 0} \frac{R_i(x, z_1, z_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0, \quad \text{рівномірно за } x \in [x_0, +\infty[. \quad (30)$$

Зауважимо, що характеристичне рівняння матриці

$$\begin{pmatrix} \beta\sigma_0 & \beta\sigma_0 \\ -\beta\sigma_0 & \beta(-\sigma_0 + 1) \end{pmatrix}$$

має вид

$$\mu^2 - \beta\mu + \sigma_0^2 = 0 \quad (31)$$

У цього рівняння немає коренів з нульовою дійсною частиною. Отримуємо, що у цих випадках для системи диференціальних рівнянь (26) виконано всі умови теореми з [2]. Відповідно до цієї теореми система (26) має розв'язки  $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $x_1 \geq x_0$ ), які прямують до нуля при  $x \rightarrow +\infty$ . Цим розв'язкам у силу заміни (22), (23) відповідають розв'язки  $y$  рівняння (1), що допускають при  $t \uparrow \omega$  асимптотичні зображення (6), (7).

Теорему доведено.

## Висновки

Для диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями загального вигляду, що є близькими до правильно змінних, було отримано необхідні та достатні умови існування достатньо широкого класу швидкозмінних розв'язків. Крім того, знайдено асимптотичні формули для цих розв'язків та їх похідних першого порядку.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.** *Regular Variation*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 494 р.
2. **Evtukhov V.M., Samoilenko A.M.** Conditions of existence of disappearing in the critical point solutions to rear nonautonomous systems of quasilinear differential equations // Ukrainian Mathematical Journal. – 2010. (пос.)



3. **Євтухов В.М.** Про один клас монотонних розв'язків нелінійного диференціального рівняння  $n$ -го порядку типу Емдена–Фаулера // Повідомл. АН Грузії. – 1992. – Т. 145, №2. – С. 269–273 (рос.)
4. **Євтухов В.М., Білозерова М.О.** Асимптотичні представлення розв'язків суттєво нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку // Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60, №3. – С. 310–331 (рос.)
5. **Євтухов В.М., Кусик Л.І.** Асимптотичні представлення розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку // Дифференц. рівняння. – 2013. – Т. 49, №4. – С. 424–438 (рос.)
6. **Гержановська Г.А.** Асимптотичні представлення швидкозмінних розв'язків суттєво нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Нелінійні коливання. – 2017. – Т. 20, №3. – С. 329–345 (рос.)
7. **Marić V.** Regular variation and differential equations. *Lecture notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 2000. 128 p.

Vorobiova A. V.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF RAPIDLY-VARYING SOLUTIONS TO SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NONLINEARITIES CLOSE TO REGULARLY VARYING

### Summary

For second-order differential equations with general nonlinearities that are close to regularly varying, we have for the first time obtained necessary and sufficient conditions for the existence of a sufficiently wide class of rapidly-varying solutions. This work expands upon and generalizes the classical results obtained for Emden-Fowler equations, allowing for the application of asymptotic methods to more complex models. Furthermore, we have obtained precise asymptotic formulas for these solutions and their first-order derivatives. These formulas are an important tool for analyzing the qualitative behavior of solutions depending on the properties of the equation's coefficients. The results obtained allow for the prediction of the behavior of solutions in the vicinity of a singular point, which is of great importance for applied problems in physics, chemistry, and other sciences.

*Keywords: differential equations, asymptotic, rapidly-varying solutions, regularly varying nonlinearities.*

### REFERENCES

1. **Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.** *Regular Variation*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. 494 p.
2. **Evtukhov V.M., Samoilenko A.M.** Conditions of existence of disappearing in the critical point solutions to rear nonautonomous systems of quasilinear differential equations // Ukrainian Mathematical Journal. – 2010. (In Russian)
3. **Yevtukhov V.M.** Pro odyn klas monotonnih rozv'yazkiv neliniynogo diferentsialnogo rivnyannya  $n$ -go poryadku tipu Emdena–Faulera // Povidoml. AN Gruzii. – 1992. – Vol. 145, No. 2. – P. 269–273 (In Russian)
4. **Yevtukhov V.M., Bilozerova M.O.** Asimptotychni predstavleniya rozv'yazkiv sut-tievo neliniynyh neavtonomnyh diferentsialnyh rivnyan drugogo poryadku // Ukr. mat. zhurn. – 2008. – Vol. 60, No. 3. – P. 310–331 (In Russian)
5. **Yevtukhov V.M., Kusiak L.I.** Asimptotychni predstavleniya rozv'yazkiv diferentsialnyh rivnyan drugogo poryadku // Differents. rivnyannya. – 2013. – Vol. 49, No. 4. – P. 424–438 (In Russian)

6. **Gerzhanovska G.A.** Asimptotychni predstavleniya shvydkozminnyh rozv'yazkiv suttievo neliniynyh diferentsialnyh rivnyan drugogo poryadku // Neliniyni kolivannya. – 2017. – Vol. 20, No. 3. – P. 329–345 (In Russian)
7. **Mari'c V.** Regular variation and differential equations. *Lecture notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 2000. 128 p.