

УДК 514.07

Н. В. Вашпанова, кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Одеська державна академія будівництва та архітектури

кафедра вищої математики

вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, 65029, Україна

e-mail: vasha_nina @ukr.net

ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8639-8368>

С. М. Покась, кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна

e-mail: pokas@onu.edu.ua

ДЕЯКІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕННЯ ДЛЯ ПРОСТОРІВ АФІННОЇ ЗВ'ЯЗНОСТІ

Ідея вивчення геометричних об'єктів в околі довільної точки з точністю того чи іншого порядку частково застосовувалася в геометрії і призводила до глибшого вивчення цих об'єктів. В теорії кривих у диференціальному околі першого порядку виникає інваріантний вектор до дотичної. Це дозволяє ввести поняття довжини дуги кривої та вибрати її як параметр. У диференціальному околі другого порядку будується вектор головної нормалі та кривина кривої. При розгляді диференціального околу третього порядку отримуємо скрут кривої. В роботі досліджуються простори афінної зв'язності без скруту. Розроблені методи побудови наближених геометричних об'єктів та вивчені їх властивості відносно аналогічних об'єктів в заданому просторі афінної зв'язності. Дослідження ведуться в спеціальній системі координат. Отримані результати застосовані для вивчення рухів в просторах афінної зв'язності. Знайдено вид вектора Кілінга в наближених просторах афінної зв'язності.

MSC: 53B35.

Ключові слова: простір афінної зв'язності, рімановий простір, тензор Рімана, тензор Річчі, похідна Лі.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2\(44\).342072](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.2(44).342072).

Вступ

Подібно тому, як досліджувалися ріманові простори другого наближення $\tilde{V}_n$ для ріманова простору V_n , в роботі побудовано наближення $\tilde{A}_n$ для простору афінної зв'язності A_n . Обчислені деякі геометричні об'єкти простору A_n : тензори кривини, Річчі, Вейля, проективні параметри Томаса і знайдено умови, коли $\tilde{A}_n$ є проективно-пласким простором афінної зв'язності, у вигляді рівномірно і абсолютно збіжного степеневого ряду, отримано вектор зміщення нескінченно малих рухів в $\tilde{A}_n$. Дослідження ведуться локально тензорними методами [1, 2].

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Наближення першого порядку для афіннозв'язного простору A_n та його геометричні об'єкти.

Розглянемо афіннозв'язний простір A_n , віднесений до координат $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ з об'єктом зв'язності $\Gamma_{ij}^h(x)$ і довільну точку $M_0(x_0^n)$ цього простору. Побудуємо новий простір $\tilde{A}_n$, віднесений до координат $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$, зі своїм об'єктом зв'язності $\tilde{\Gamma}_{ij}^h(y)$, який має вигляд

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^h = -\frac{1}{3}R_{0(ij)l}^h y^l, \quad (1.1)$$

де $R_{0ijl}^h = R_{ijl}^h(M_0)$ - компоненти тензора кривини простору A_n в точці M_0 , круглі дужки позначають симетрування без ділення за вміщеними у них індексами. Простір $\tilde{A}_n$ будемо називати наближенням першого порядку для афіннозв'язного простору A_n [15, 16].

Якщо в A_n перейти до канонічної системи координат з початком в точці M_0 та розкласти об'єкт зв'язності $\Gamma_{ij}^h(x)$ в ряд Тейлора в околі даної точки, то побачимо, що простір $\tilde{A}_n$ реалізує наближення першого порядку для A_n і тому відображає його геометричні властивості з деяким ступенем точності. Неважко обчислити наступні геометричні об'єкти простору $\tilde{A}_n$ [5, 8].

Тензор кривини

$$\tilde{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \frac{1}{9} \left(R_{(ik)l_1}^\alpha R_{(\alpha j)l_2}^h - R_{(ij)l_1}^\alpha R_{(\alpha k)l_2}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2}. \quad (1.2)$$

Тензор Річчі

$$\tilde{R}_{ij} = R_{ij} + \frac{1}{9} \left(R_{il_1} R_{jl_2} + R_{(ij)l_1}^\alpha R_{\alpha l_2} \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2}. \quad (1.3)$$

Проективні параметри Томаса

$$\tilde{T}_{ij}^h = -\frac{1}{3} \left[R_{(ij)l}^h + \frac{1}{n+1} \left(R_{il} \delta_j^h + R_{jl} \delta_i^h \right) \right] \Big|_0 y^l \quad (1.4)$$

Тензор проктивної кривини (тензор Вейля)

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{ijk}^h = & W_{ijk}^h + \frac{1}{9} \left[R_{(ik)l_1}^\alpha R_{(\alpha j)l_2}^h - R_{(ij)l_1}^\alpha R_{(\alpha k)l_2}^h - \frac{1}{n-1} \times \right. \\ & \times \left. \left[\left(R_{il_1} R_{jl_2} + R_{(ij)l_1}^\alpha R_{\alpha l_2} \right) \delta_k^h - \left(R_{il_1} R_{kl_2} + R_{(ik)l_1}^\alpha R_{\alpha l_2} \right) \delta_j^h \right] \right] \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Перевіримо чи є простір $\tilde{A}_n$ проективно плоским.

Означення 1. Простір афінної зв'язності $\tilde{A}_n$ називається проективно плоским (проективно евклідовим), якщо він допускає нетривіальне геодезичне відображення на плоский простір A_n .

Відома наступна теорема [17]:

Теорема 1. Простір афінної зв'язності $\tilde{A}_n$ є проективно плоским тоді і тільки тоді, коли його тензор Вейля тотожно дорівнює нулю.

Оскільки у співвідношенні $\tilde{W}_{ijk}^h = 0$, тоді кожний зведений коефіцієнт правої частини дорівнює нулю, значить

$$W_{ijk}^h = 0 \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ R_{(ik)l_1}^\alpha R_{(\alpha j)l_2}^h + R_{(ik)l_2}^\alpha R_{(\alpha j)l_1}^h - R_{(ij)l_1}^\alpha R_{(\alpha k)l_2}^h - R_{(ij)l_2}^\alpha R_{(\alpha k)l_1}^h - \right. \\ & - \frac{1}{n-1} \times \left[\left(R_{il_1} R_{jl_2} + R_{il_2} R_{jl_1} + R_{(ij)l_1}^\alpha R_{\alpha l_2} + R_{(ij)l_2}^\alpha R_{\alpha l_1} \right) \delta_k^h - \right. \\ & \left. \left. - \left(R_{il_1} R_{kl_2} + R_{il_2} R_{kl_1} + R_{(ik)l_1}^\alpha R_{\alpha l_2} + R_{(ik)l_2}^\alpha R_{\alpha l_1} \right) \delta_j^h \right] \right\} \Big|_0 = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Але якщо $\tilde{W}_{ijk}^h = 0$, то й $W_{ijk}^h = 0$, тому з (1.5) виходить, що

$$R_{ijk}^h = \frac{1}{n-1} \left(R_{ij} \delta_k^h - R_{ik} \delta_j^h \right) \quad (1.8)$$

Підставимо це в співвідношення (1.7).

$$\begin{aligned}
 R_{(ij)k}^h &= \frac{1}{n-1} \left(2R_{ij}\delta_k^h - R_{ik}\delta_j^h - R_{jk}\delta_i^h \right) \\
 R_{(ik)l_1}^\alpha R_{(\alpha j)l_2}^h &= \frac{1}{(n-1)^2} \left(2R_{ik}\delta_{l_1}^\alpha - R_{il_1}\delta_k^\alpha - R_{kl_1}\delta_i^\alpha \right) \times \\
 &\times \left(2R_{\alpha j}\delta_{l_2}^h - R_{\alpha l_2}\delta_j^h - R_{jl_2}\delta_\alpha^h \right) = \frac{1}{(n-1)^2} \left[2R_{ik} \left(2R_{jl_1}\delta_{l_2}^h - R_{l_1l_2}\delta_j^h - R_{jl_2}\delta_{l_1}^h \right) - \right. \\
 &\left. - R_{il_1} \left(2R_{kj}\delta_{l_2}^h - R_{kl_2}\delta_j^h - R_{jl_2}\delta_k^h \right) - R_{kl_1} \left(2R_{ij}\delta_{l_2}^h - R_{il_2}\delta_j^h - R_{jl_2}\delta_i^h \right) \right]
 \end{aligned}$$

Тому (1.7) набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \frac{1}{(n-1)^2} \left[2R_{ik} \left(2R_{jl_1}\delta_{l_2}^h - R_{l_1l_2}\delta_j^h - R_{jl_2}\delta_{l_1}^h \right) - R_{il_1} \left(2R_{kj}\delta_{l_2}^h - R_{kl_2}\delta_j^h - R_{jl_2}\delta_k^h \right) - \right. \right. \\
 &- R_{kl_1} \left(2R_{ij}\delta_{l_2}^h - R_{il_2}\delta_j^h - R_{jl_2}\delta_i^h \right) \left. \right] + \frac{1}{(n-1)^2} \left[2R_{ik} \left(2R_{l_2j}\delta_{l_1}^h - R_{l_2l_1}\delta_j^h - R_{jl_1}\delta_{l_2}^h \right) - \right. \\
 &- R_{il_2} \left(2R_{kj}\delta_{l_1}^h - R_{kl_1}\delta_j^h - R_{jl_1}\delta_k^h \right) - R_{kl_2} \left(2R_{ij}\delta_{l_1}^h - R_{il_1}\delta_j^h - R_{jl_1}\delta_i^h \right) \left. \right] - \frac{1}{(n-1)^2} \times \\
 &\times \left[2R_{ij} \left(2R_{l_1k}\delta_{l_2}^h - R_{l_1l_2}\delta_k^h - R_{kl_2}\delta_{l_1}^h \right) - R_{il_1} \left(2R_{jk}\delta_{l_2}^h - R_{jl_2}\delta_k^h - R_{kl_2}\delta_j^h \right) - R_{jl_1} \times \right. \\
 &\times \left(2R_{ik}\delta_{l_2}^h - R_{il_2}\delta_k^h - R_{kl_2}\delta_i^h \right) \left. \right] - \frac{1}{(n-1)^2} \left[2R_{ij} \left(2R_{l_2k}\delta_{l_1}^h - R_{l_2l_1}\delta_k^h - R_{kl_1}\delta_{l_2}^h \right) - \right. \\
 &- R_{il_2} \left(2R_{jk}\delta_{l_1}^h - R_{jl_1}\delta_k^h - R_{kl_1}\delta_j^h \right) - R_{jl_2} \left(2R_{ik}\delta_{l_1}^h - R_{il_1}\delta_k^h - R_{kl_1}\delta_i^h \right) \left. \right] - \\
 &- \frac{1}{n-1} \left[\left(R_{il_1}R_{jl_2} + R_{il_2}R_{jl_1} + \frac{1}{n-1} (2R_{ij}R_{l_1l_2} - R_{il_1}R_{jl_2} - R_{jl_1}R_{il_2} + \right. \right. \\
 &+ 2R_{ij}R_{l_2l_1} - R_{il_2}R_{jl_1} - R_{jl_2}R_{il_1})) \delta_k^h - \left(R_{il_1}R_{kl_2} + R_{il_2}R_{kl_1} + \frac{1}{n-1} \times \right. \\
 &\times (2R_{ik}R_{l_1l_2} - R_{il_1}R_{kl_2} - R_{kl_1}R_{il_2} + 2R_{ik}R_{l_2l_1} - R_{il_2}R_{kl_1} - R_{kl_2}R_{il_1}) \delta_j^h \left. \right] \left. \right\} \Big|_0 = 0
 \end{aligned}$$

Зведемо подібні у попередньому співвідношенні:

$$\left\{ \frac{1}{(n-1)^2} \left[2R_{ik} \left(-2R_{.l_1l_2} \delta_j^h + R_{jl_2} \delta_{.l_1}^h + R_{jl_1} \delta_{l_2}^h \right) - R_{kl_1} \left(2R_{ij} \delta_{l_2}^h - R_{il_2} \delta_j^h - R_{jl_2} \delta_i^h \right) - \right. \right. \\ \left. - R_{kl_2} \left(2R_{ij} \delta_{.l_1}^h - R_{il_1} \delta_j^h - R_{jl_1} \delta_i^h \right) - 2R_{ij} \left(-2R_{.l_1l_2} \delta_k^h + R_{kl_2} \delta_{.l_1}^h + R_{kl_1} \delta_{l_2}^h \right) + \right. \\ \left. + R_{jl_1} \left(2R_{ik} \delta_{l_2}^h - R_{il_2} \delta_k^h - R_{kl_2} \delta_i^h \right) + R_{jl_2} \left(2R_{ik} \delta_{.l_1}^h - R_{il_1} \delta_k^h - R_{kl_1} \delta_i^h \right) \right] - \\ \left. - \frac{1}{n-1} \left[(R_{il_1} R_{jl_2} + R_{il_2} R_{jl_1}) \delta_k^h - (R_{il_1} R_{kl_2} + R_{il_2} R_{kl_1}) \delta_j^h \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{(n-1)^2} \left[(4R_{ij} R_{.l_1l_2} - 2R_{il_1} R_{jl_2} - 2R_{jl_1} R_{il_2}) \delta_k^h - \right. \right. \\ \left. \left. - (4R_{ik} R_{.l_1l_2} - 2R_{il_1} R_{kl_2} - 2R_{kl_1} R_{il_2}) \delta_j^h \right] \right\} \Big|_0 = 0.$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо:

$$\left\{ \frac{1}{(n-1)^2} \left[-4R_{ik} R_{.l_1l_2} \delta_j^h + 4R_{ik} R_{.l_1l_2} \delta_j^h - R_{kl_1} R_{il_2} \delta_j^h - R_{il_1} R_{kl_2} \delta_j^h + 4R_{ij} R_{.l_1l_2} \delta_k^h - \right. \right. \\ \left. - 4R_{ij} R_{.l_1l_2} \delta_k^h + R_{jl_1} R_{il_2} \delta_k^h + R_{il_1} R_{jl_2} \delta_k^h + 4R_{ik} R_{jl_2} \delta_{.l_1}^h + R_{kl_1} R_{jl_2} \delta_i^h - R_{kl_1} R_{jl_2} \delta_i^h + \right. \\ \left. 4R_{ik} R_{jl_1} \delta_{l_2}^h - 4R_{ij} R_{kl_1} \delta_{l_2}^h - 4R_{ij} R_{kl_2} \delta_{.l_1}^h + R_{kl_2} R_{jl_1} \delta_i^h - R_{kl_2} R_{jl_1} \delta_i^h \right] - \\ \left. - \frac{1}{n-1} \left[(R_{il_1} R_{jl_2} + R_{il_2} R_{jl_1}) \delta_k^h - (R_{il_1} R_{kl_2} + R_{il_2} R_{kl_1}) \delta_j^h \right] \right\} \Big|_0 = 0.$$

Далі

$$\left\{ \frac{1}{(n-1)^2} \left[4(R_{ik} R_{jl_2} - R_{ij} R_{kl_2}) \delta_{.l_1}^h + 4(R_{ik} R_{jl_1} - R_{ij} R_{kl_1}) \delta_{l_2}^h - \right. \right. \\ \left. (R_{kl_1} R_{il_2} + R_{il_1} R_{kl_2}) \delta_j^h + (R_{jl_1} R_{il_2} + R_{il_1} R_{jl_2}) \delta_k^h \right] - (n-1) \times \\ \left. \times \left[(R_{il_1} R_{jl_2} + R_{il_2} R_{jl_1}) \delta_k^h - (R_{il_1} R_{kl_2} + R_{il_2} R_{kl_1}) \delta_j^h \right] \right\} \Big|_0 = 0.$$

Таким чином, одержимо:

$$\left\{ \frac{1}{(n-1)^2} \left[4R_{ik} \left(R_{jl_2} \delta_{.l_1}^h + R_{jl_1} \delta_{l_2}^h \right) - 4R_{ij} \left(R_{kl_2} \delta_{.l_1}^h + R_{kl_1} \delta_{l_2}^h \right) - (1-n+1) \times \right. \right. \\ \left. \times (R_{kl_1} R_{il_2} + R_{il_1} R_{kl_2}) \delta_j^h + (R_{il_1} R_{jl_2} + R_{il_2} R_{jl_1}) \delta_k^h (1-n+1) \right] \right\} \Big|_0 = 0$$

Оскільки розмірність простору n не може дорівнювати нулю, то отримаємо

наступне співвідношення:

$$\left\{ 4 \left[R_{ik} \left(R_{jl_2} \delta_{l_1}^h + R_{jl_1} \delta_{l_2}^h \right) - R_{ij} \left(R_{kl_2} \delta_{l_1}^h + R_{kl_1} \delta_{l_2}^h \right) \right] + \right. \\ \left. + (n-2) \left((R_{kl_1} R_{il_2} + R_{il_1} R_{kl_2}) \delta_j^h - (R_{jl_1} R_{il_2} + R_{il_1} R_{jl_2}) \delta_k^h \right) \right\} \Big|_0 = 0 \quad (1.9)$$

Просумуємо (1.9) за індексами h та k :

$$\left\{ 4 \left[R_{i\alpha} \left(R_{jl_2} \delta_{l_1}^\alpha + R_{jl_1} \delta_{l_2}^\alpha \right) - R_{ij} \left(R_{\alpha l_2} \delta_{l_1}^\alpha + R_{\alpha l_1} \delta_{l_2}^\alpha \right) \right] + \right. \\ \left. (n-2) \left((R_{\alpha l_1} R_{il_2} + R_{il_1} R_{\alpha l_2}) \delta_j^\alpha - (R_{jl_1} R_{il_2} + R_{il_1} R_{jl_2}) \delta_\alpha^\alpha \right) \right\} \Big|_0 = 0$$

Тоді:

$$\left\{ 4 (R_{il_1} R_{jl_2} + R_{il_2} R_{jl_1} - R_{ij} R_{l_1 l_2} - R_{ij} R_{l_1 l_2}) + \right. \\ \left. + (n-2) (R_{jl_1} R_{il_2} + R_{il_1} R_{jl_2} - n R_{jl_1} R_{il_2} - n R_{il_1} R_{jl_2}) \right\} \Big|_0 = 0$$

Звідси випливає, що

$$\left\{ R_{il_1} R_{jl_2} (4 + n - 2 - n^2 + 2n) + \right. \\ \left. + R_{il_2} R_{jl_1} (4 + n - 2 - n^2 + 2n) - 8 R_{ij} R_{l_1 l_2} \right\} \Big|_0 = 0$$

Помноживши попереднє співвідношення на -1 , отримаємо

$$\left\{ (n^2 - 3n - 2) (R_{il_1} R_{jl_2} + R_{il_2} R_{jl_1}) + 8 R_{ij} R_{l_1 l_2} \right\} \Big|_0 = 0. \quad (1.10)$$

Наразі просумуємо (1.9) за індекссами h і l_1 :

$$\left\{ 4 \left[R_{ik} \left(R_{jl_2} \delta_\alpha^\alpha + R_{j\alpha} \delta_{l_2}^\alpha \right) - R_{ij} \left(R_{kl_2} \delta_\alpha^\alpha + R_{k\alpha} \delta_{l_2}^\alpha \right) \right] + \right. \\ \left. (n-2) \left((R_{k\alpha} R_{il_2} + R_{i\alpha} R_{kl_2}) \delta_j^\alpha - (R_{j\alpha} R_{il_2} + R_{i\alpha} R_{jl_2}) \delta_k^\alpha \right) \right\} \Big|_0 = 0$$

Тоді:

$$\left\{ 4 (n R_{ik} R_{jl_2} + R_{ik} R_{jl_2} - n R_{ij} R_{kl_2} - R_{ij} R_{kl_2}) + \right. \\ \left. + (n-2) (R_{kj} R_{il_2} + R_{ij} R_{kl_2} - R_{jk} R_{il_2} - R_{ik} R_{jl_2}) \right\} \Big|_0 = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\left\{ 4(n+1) [R_{ik} R_{jl_2} - R_{ij} R_{kl_2}] - (n-2) (R_{ik} R_{jl_2} - R_{ij} R_{kl_2}) \right\} \Big|_0 = 0$$

Врешті-решт, отримали

$$\left. \{(R_{ik}R_{jl_2} - R_{ij}R_{kl_2})(3n+6)\} \right|_0 = 0$$

Оскільки $3n+6 \neq 0$, то

$$R_{ik}R_{jl_2} = R_{ij}R_{kl_2}. \quad (1.11)$$

З урахуванням (1.11) співвідношення (1.10) набуває наступного виду

$$\left. \{(n^2 - 3n - 2)(R_{ij}R_{l_1l_2} + R_{ij}R_{l_1l_2}) + 8R_{ij}R_{l_1l_2}\} \right|_0 = 0$$

$$(2n^2 - 6n + 4) R_{ij}R_{l_1l_2} = 0 \quad (1.12)$$

Так як $(2n^2 - 6n + 4) \neq 0$, то виходить, що $R_{ij} = 0$. Таким чином, доведена наступна

Теорема 2. Якщо простір афінної зв'язності $\tilde{A}_n$ є проективно плоским, то простір A_n - плоский.

Властивості просторів в залежності від виду тензора Річчі вивчались в роботах [7, 9].

2. Нескінченно малі рухи в $\tilde{A}_n$.

Означення 2. Відображення простору $\tilde{A}_n$ на себе, яке зберігає об'єкт $\tilde{\Gamma}_{ij}^h(y)$, називається рухом даного простору афінної зв'язності.

Будемо досліджувати перехід від координат $y^1, y^2, \dots, y^n$ до нових координат $y'^1, y'^2, \dots, y'^n$ на лінійному перетворенні відносно приросту параметра t

$$y'^h = y^h + \tilde{\xi}^h(y)\delta t, \quad (2.1)$$

де $\tilde{\xi}^h(y)$ - вектор зміщення рухів.

Компоненти вектора зміщення рухів $\tilde{\xi}^h(y)$ будемо шукати в такому вигляді:

$$\tilde{\xi}^h(y) = a_{\cdot}^h + a_{\cdot l_1}^h y^{l_1} + a_{\cdot l_1 l_2}^h y^{l_1} y^{l_2} + a_{\cdot l_1 l_2 l_3}^h y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} + \dots + a_{\cdot l_1 l_2 \dots l_k}^h y^{l_1} y^{l_2} \dots y^{l_k} + \dots$$

або

$$\tilde{\xi}^h(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\cdot}^h, \quad (2.2)$$

де введено позначення

$$a_{\cdot p}^h = a_{\cdot l_1 l_2 \dots l_p}^h y^{l_1} y^{l_2} \dots y^{l_p}. \quad (2.3)$$

Зауваження 1. У (2.3) $a^h, a^h_{.l_1 l_2 \dots l_p}$ - деякі постійні, причому $a^h_{.l_1 \dots l_p}$ ($p \geq 2$) симетричні за будь-якою парою нижніх індексів.

Введемо позначення:

$$t_\alpha^h = \frac{1}{3} R^h_{.l_1 l_2 l_2} y^{l_1} y^{l_2}, t_\alpha^{(2)h} = t_\beta^h t_\alpha^\beta, \dots \quad (2.4)$$

Методом повної математичної індукції доведено наступну лему:

Лема 1. Для того, щоб ряди (2.2) визначали компоненти вектора зміщення рухів $\tilde{\xi}^h(y)$ у просторі $\tilde{A}_n$, необхідно, щоб члени цих рядів визначалися з рекурентних співвідношень

$$a^h_{2k} = -\frac{2k-3}{k(2k-1)} a^{\alpha}_{2k-2} t_\alpha^h \quad (2.5)$$

$$a^h_{2k+1} = 0, k \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Доведення. Необхідність. Відомо, що векторне поле зміщення рухів $\tilde{\xi}^h(y)$ тоді і тільки тоді переводить об'єкт $\tilde{\Gamma}^h_{ij}(y)$ в себе, коли

$$L_\xi \tilde{\Gamma}^h_{ij}(y) = 0 \quad (2.7)$$

де $L_\xi \tilde{\Gamma}^h_{ij}$ - похідна Лі об'єкта зв'язності [4, 10].

Відносно компонентів вектора зміщення рухів $\tilde{\xi}^h(y)$ рівняння (2.7) представляють систему диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\xi}^h}{\partial y^i \partial y^j} + \tilde{\xi}^\alpha \frac{\partial \tilde{\Gamma}^h_{ij}}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^i} \tilde{\Gamma}^h_{\alpha j} + \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^j} \tilde{\Gamma}^h_{\alpha i} - \frac{\partial \tilde{\xi}^h}{\partial y^\alpha} \tilde{\Gamma}^\alpha_{ij} = 0 \quad (2.8)$$

Диференціюємо співвідношення (2.2) як степеневу функцію:

$$\frac{\partial \tilde{\xi}^h}{\partial y^i} = a^h_{.i} + 2a^h_{.il} y^l + 3a^h_{.il_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} + \dots + (k+1)a^h_{.il_1 l_2 \dots l_k} y^{l_1} y^{l_2} \dots y^{l_k} + \dots$$

Розпишемо перший доданок рівняння (2.8):

$$\frac{\partial^2 \tilde{\xi}^h}{\partial y^i \partial y^j} = 2a^h_{.ij} + 2 \cdot 3a^h_{.ijl_1} y^{l_1} + 3 \cdot 4a^h_{.ijl_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} + \dots + (k+1)(k+2)a^h_{.ijl_1 \dots l_k} y^{l_1} \dots y^{l_k} + \dots$$

Тепер розпишемо другий доданок:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ij}^h}{\partial y^\alpha} &= -\frac{1}{3} R_{0 \cdot (ij)\alpha}^h \\ \xi^\alpha \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ij}^h}{\partial y^\alpha} &= -\frac{1}{3} \left[\left(a_{\cdot}^\alpha R_{(ij)\alpha}^h \right) \Big|_0 + \left(a_{\cdot l_1}^\alpha R_{(ij)\alpha}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} + \left(a_{\cdot l_1 l_2}^\alpha R_{(ij)\alpha}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(a_{\cdot l_1 \dots l_k}^\alpha R_{(ij)\alpha}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} \dots y^{l_k} \right] \end{aligned}$$

Третій доданок має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^i} \tilde{\Gamma}_{\alpha j}^h &= -\frac{1}{3} \left[\left(a_{\cdot i}^\alpha R_{(\alpha j) l_1}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} + 2 \left(a_{\cdot i l_1}^\alpha R_{(\alpha j) l_2}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} + 2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(a_{\cdot i l_1 l_2}^\alpha R_{(\alpha j) l_3}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} + \dots + k \left(a_{\cdot i l_1 \dots l_{k-1}}^\alpha R_{(\alpha j) l_k}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} \dots y^{l_k} + \dots \right] \end{aligned}$$

Аналогічно четвертий доданок:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^j} \tilde{\Gamma}_{\alpha i}^h &= -\frac{1}{3} \left[\left(a_{\cdot j}^\alpha R_{(\alpha i) l_1}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} + 2 \left(a_{\cdot j l_1}^\alpha R_{(\alpha i) l_2}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} + 2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(a_{\cdot j l_1 l_2}^\alpha R_{(\alpha i) l_3}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} + \dots + k \left(a_{\cdot j l_1 \dots l_{k-1}}^\alpha R_{(\alpha i) l_k}^h \right) \Big|_0 y^{l_1} \dots y^{l_k} + \dots \right] \end{aligned}$$

П'ятий доданок:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \tilde{\xi}^h}{\partial y^\alpha} \tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha &= \frac{1}{3} R_{(ij)m}^\alpha y^m \left(a_{\cdot \alpha}^h + 2a_{\cdot \alpha l_1}^h y^{l_1} + 2a_{\cdot \alpha l_1 l_2}^h y^{l_1} y^{l_2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + k a_{\cdot \alpha l_1 \dots l_{k-1}}^h y^{l_1} \dots y^{l_{k-1}} + \dots \right) \end{aligned}$$

Отримані співвідношення підставляємо в рівняння (2.8) і зведемо подібні:

$$\begin{aligned}
 & \left(2a_{.ij}^h - \frac{1}{3}a_{.}^{\alpha}R_{.(ij)\alpha}^h \right) \Big|_0 + \left[2 \cdot 3a_{.jjl_1}^h - \frac{1}{3} \left(a_{.l_1}^{\alpha}R_{.(ij)\alpha}^h + a_{.i}^{\alpha}R_{.(\alpha j)l_1}^h + a_{.j}^{\alpha}R_{.(\alpha i)l_1}^h - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - a_{.\alpha}^h R_{.(ij)l_1}^{\alpha} \right) \right] \Big|_0 y^{l_1} + \left[3 \cdot 4a_{.ijl_1l_2}^h - \frac{1}{3} \left(a_{.l_1l_2}^{\alpha}R_{.(ij)\alpha}^h + 2 \left(a_{.il_1}^{\alpha}R_{.(\alpha j)l_2}^h + \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + a_{.jl_1}^{\alpha}R_{.(\alpha i)l_2}^h - a_{.al_1}^h R_{.(ij)l_2}^{\alpha} \right) \right) \right] \Big|_0 y^{l_1}y^{l_2} + \dots + \left[(k+1)(k+2)a_{.ijl_1\dots l_k}^h y^{l_1} \dots y^{l_k} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{3} \left(a_{.l_1\dots l_k}^{\alpha}R_{.(ij)\alpha}^h + k \left(a_{.il_1\dots l_{k-1}}^{\alpha}R_{.(\alpha j)l_k}^h + a_{.jl_1\dots l_{k-1}}^{\alpha}R_{.(\alpha i)l_k}^h - \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - a_{.al_1\dots l_{k-1}}^h R_{.(ij)l_k}^{\alpha} \right) \right) \right] \Big|_0 y^{l_1} \dots y^{l_k} = 0
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Оскільки рівняння (2.9) виконується при будь-яких $y^{l_1}y^{l_2} \dots y^{l_n}$, то зведені коефіцієнти дорівнюють нулю.

Спочатку прирівнюємо нулю доданок першого степеня.

$$\left[2 \cdot 3a_{.ijl_1}^h - \frac{1}{3} \left(a_{.l_1}^{\alpha}R_{.(ij)\alpha}^h + a_{.i}^{\alpha}R_{.(\alpha j)l_1}^h + a_{.j}^{\alpha}R_{.(\alpha i)l_1}^h - a_{.\alpha}^h R_{.(ij)l_1}^{\alpha} \right) \right] \Big|_0 y^{l_1} = 0$$

Згортаємо його з $y^i y^j$ та підсумуємо за індексами $i, j = 1, \dots, n$.

$$2 \cdot 3a_{.l_1l_2l_3}^h y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} = \frac{1}{3} \left(2a_{.l_1}^{\alpha}R_{.l_2l_3\alpha}^h + 2a_{.l_1}^{\alpha}R_{.(\alpha l_2)l_3}^h - 2a_{.\alpha}^h R_{.l_2l_3l_1}^{\alpha} \right) y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3}$$

З властивості тензора Рімана випливає, що $R_{.al_1l_2l_3}^h y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} \equiv 0$, тому

$$\begin{aligned}
 3a_{.l_1l_2l_3}^h y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} &= \frac{1}{3} \left(a_{.l_1}^{\alpha}R_{.l_2l_3\alpha}^h + a_{.l_1}^{\alpha}R_{.al_2l_3}^h + a_{.l_1}^{\alpha}R_{.l_2l_3}^h \right) y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} \\
 3a_{.l_1l_2l_3}^h y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} &= a_{.l_1}^{\alpha} \left(R_{.l_2l_3\alpha}^h - R_{.l_2l_3\alpha}^h \right) y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} \\
 a_{.l_1l_2l_3}^h y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} &= 0 \\
 a_{.}^h &= 0
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Тепер розглянемо рівність нулю зведеного коефіцієнта при $y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3}$.

$$\begin{aligned}
 4 \cdot 5a_{.ijl_1l_2l_3}^h y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} &= \frac{1}{3} \left(a_{.l_1l_2l_3}^{\alpha}R_{.(ij)\alpha}^h + 3 \left(a_{.il_1l_2}^{\alpha}R_{.(\alpha j)l_3}^h + a_{.jl_1l_2}^{\alpha}R_{.(\alpha i)l_3}^h - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - a_{.al_1l_2}^h R_{.(ij)l_3}^{\alpha} \right) \right) y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3}
 \end{aligned}$$

Обидві частини попереднього співвідношення згортаємо з $y^i y^j$ та підсумуємо за індексами $i, j = 1, \dots, n$.

$$4 \cdot 5 a_{5\cdot}^h = \frac{1}{3} \left(2 a_{3\cdot}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h + 2 \cdot 3 a_{3\cdot}^\alpha R_{al_1 l_2}^h - 2 \cdot 3 a_{3\cdot}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h \right) y^{l_1} y^{l_2}$$

$$a_{5\cdot}^h = 0$$

Продовжуючи цей процес, на $(2k-1)$ -ому кроці ми бачимо, що $a_{2k-1\cdot}^h = 0$

виражаються через добуток, у якому присутній множник $a_{2k-1\cdot}^h = 0$, тому має місце співвідношення (2.6). Наразі доведемо (2.5), для цього спочатку прирівняємо нулю вільний член.

$$2 a_{ij\cdot}^h - \frac{1}{3} a^\alpha R_{(ij)\alpha}^h = 0$$

$$a_{ij\cdot}^h = \frac{1}{6} a^\alpha R_{(ij)\alpha}^h$$

Якщо домножити попереднє рівняння на $y^i y^j$ та підсумувати за індексами $i, j = 1, \dots, n$, то отримаємо

$$a_{2\cdot}^h = a^\alpha t_\alpha^h. \quad (2.11)$$

Легко бачити, що (2.11) можна отримати і з (2.5) при $k = 1$. Розглянемо тепер рівність нулю доданка другого степеня відносно $y^1 y^2 \dots y^k$.

$$\left[3 \cdot 4 a_{ijl_1 l_2}^h - \frac{1}{3} \left(a_{l_1 l_2}^\alpha R_{(ij)\alpha}^h + 2 \left(a_{il_1}^\alpha R_{(\alpha j) l_2}^h + a_{jl_1}^\alpha R_{(\alpha i) l_2}^h - a_{al_1}^h R_{(ij) l_2}^\alpha \right) \right) \right] \Big|_0 y^{l_1} y^{l_2} = 0$$

$$3 \cdot 4 a_{ijl_1 l_2}^h y^{l_1} y^{l_2} = \frac{1}{3} \left(a_{l_1 l_2}^\alpha R_{(ij)\alpha}^h + 2 \left(a_{il_1}^\alpha R_{(\alpha j) l_2}^h + a_{jl_1}^\alpha R_{(\alpha i) l_2}^h - a_{al_1}^h R_{(ij) l_2}^\alpha \right) \right) y^{l_1} y^{l_2}$$

Ліву та праву частини останнього співвідношення згортаємо з $y^i y^j$ та підсумуємо за індексами $i, j = 1, \dots, n$.

$$3 \cdot 4 a_{4\cdot}^h = \frac{1}{3} \left(2 a_{2\cdot}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h + 4 a_{2\cdot}^\alpha R_{((al_1) l_2)}^h \right) y^{l_1} y^{l_2}$$

$$3 \cdot 4 a_{4\cdot}^h = \frac{1}{3} \left(2 a_{2\cdot}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h + 4 a_{2\cdot}^\alpha R_{al_1 l_2}^h - 4 a_{2\cdot}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h \right) y^{l_1} y^{l_2}$$

$$3 \cdot 4 a_{4\cdot}^h = -\frac{2}{3} a_{2\cdot}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h y^{l_1} y^{l_2}$$

Враховуючи рівняння (2.4), отримаємо

$$a_{4\cdot}^h = -\frac{1}{6} a_{2\cdot}^\alpha t_\alpha^h \quad (2.12)$$

Але до того ж результату приходимо і з (2.5) при $k = 2$. Тепер розглянемо рівність нулю зведеного коефіцієнта при $y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4}$.

$$5 \cdot 6 a_{ijl_1 \dots l_4}^h y^{l_1} \dots y^{l_4} = \frac{1}{3} \left(a_{l_1 \dots l_4}^a R_{\cdot(ij)\alpha}^h + 4 \left(a_{il_1 l_2 l_3}^\alpha R_{\cdot(\alpha j)l_4}^h + a_{jl_1 l_2 l_3}^\alpha R_{\cdot(\alpha i)l_4}^h - a_{\alpha l_1 l_2 l_3}^h R_{\cdot(ij)l_4}^\alpha \right) \right) y^{l_1} \dots y^{l_4}$$

Обидві частини попереднього співвідношення згортаємо з $y^i y^j$ та підсумуємо за індексами $i, j = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} 5 \cdot 6 a_{6\cdot}^h &= \frac{1}{3} \left(2 a_{4\cdot}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h + 2 \cdot 4 a_{4\cdot}^\alpha R_{\alpha l_1 l_2}^h - 2 \cdot 4 a_{4\cdot}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h \right) y^{l_1} y^{l_2} \\ 5 \cdot 3 a_{6\cdot}^h &= -\frac{4-1}{3} a_{4\cdot}^\alpha R_{l_1 l_2 \alpha}^h y^{l_1} y^{l_2} \\ a_{6\cdot}^h &= -\frac{1}{5} a_{4\cdot}^\alpha t_\alpha^h \end{aligned} \quad (2.13)$$

Легко бачити, що (2.13) можна отримати і з (2.5) при $k = 3$.

Таким чином, формула (2.5) вірна для $k = 1, 2, 3$. Нехай вона має місце для $k = p$, тобто

$$a_{2p\cdot}^h = -\frac{2p-3}{p(2p-1)} a_{2p-2\cdot}^\alpha t_\alpha^h.$$

Доведемо, що вона справедлива і для $k = p + 1$. Враховуючи припущення індукції, отримуємо

$$a_{2p+2\cdot}^h = -\frac{2p-1}{(p+1)(2p+1)} a_{2p\cdot}^\alpha t_\alpha^h, \quad (2.14)$$

що й завершує доведення леми.

Раніше [3, 15] було доведено наступні дві леми:

Лема 2. Для того, щоб ряди (2.2) визначали компоненти вектора зміщення рухів $\tilde{\xi}^h(y)$ у просторі $\tilde{A}_n$, необхідно, щоб виконувалися співвідношення (2.6), а загальні члени рядів мали вигляд

$$a_{2k\cdot}^h = \frac{(-1)^{k+1}}{k!(2k-1)} a_{\cdot}^\alpha t_\alpha^{(k)h} \quad (2.15)$$

Лема 3. *Ряди*

$$\tilde{\xi}^h(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!(2k-1)} a_{\cdot}^{\alpha} t_{\alpha}^{(k)h} \quad (2.16)$$

при $h = 1, 2, \dots, n$ сходяться абсолютно і рівномірно на множині

$$\left| R_{l_1 l_2 k}^h y^{l_1} y^{l_2} \right| < \frac{3}{n}.$$

Знайдемо достатність умов (2.5) та (2.6) леми 1. Вимагатимемо, щоб ряди (2.2), члени яких знаходяться з (2.5) та (2.6), визначали компоненти вектора зміщення рухів $\tilde{\xi}^h(y)$ у просторі $\tilde{A}_n$. З рівнянь (2.14) випливає, що

$$(2p+2)a_{2p+1}^h(ij) = -\frac{2p-1}{3(p+1)(2p+1)} \left[2k \frac{a_{2p-1}^{\alpha}}{\cdot} (i R_j)_{l_1 l_2 \alpha} y^{l_1} y^{l_2} - \frac{a_{2p}^{\alpha}}{\cdot} R_{\alpha(ij)l} y^l \right] \quad (2.17)$$

Підстановка співвідношень (1.1), (2.5), (2.6) і (2.7) в рівняння (2.9) з урахуванням (2.4) дає

$$a_{\cdot(i}^{\alpha} R_j)_{(l_1 l_2) \alpha} + a_{\cdot(l_1}^{\alpha} R_{l_2)(ij) \alpha} = 0 \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} a_{2p-1}^{\alpha} (i t_j)_{\alpha} + \frac{a_{\alpha}^{\alpha}}{2p} \Gamma_{ij}^{\alpha} &= 0 \\ (p = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Таким чином доведена наступна

Лема 4. *Для того, щоб ряди (2.2), члени яких визначаються з (2.6) і рекурентних співвідношень (2.5), визначали компоненти вектора зміщення рухів $\tilde{\xi}^h(y)$ у просторі $\tilde{A}_n$, достатньо, щоб виконувалися рівняння (2.17) і (2.18).*

Об'єднуючи лему 1 - лему 4, отримуємо наступну теорему.

Теорема 3. *Для того, щоб у просторі $\tilde{A}_n$ існував вектор зміщення рухів $\tilde{\xi}^h(y)$ виду (2.2), необхідно та достатньо, щоб виконувалися співвідношення (2.6) і (2.15).*

Отримані результати можуть бути застосовані в загальній теорії відносності [6, 9], теоретичній механіці [11, 14] та інших областях геометрії [12, 13].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Barden, D., Thomas, C.** (2003). *An Introduction to Differential Manifolds*. University of Cambridge, UK. <https://doi.org/10.1142/p285>
2. **do Carmo, M. P.** (1992). *Riemannian Geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA. <https://link.springer.com/book/9780817634902>
3. **Doikov, D., Kiosak, V.** (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040001. <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
4. **Duistermaat, J. J., Kolk, J. A. C.** (2000). *Lie Groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56936-4>
5. **Eisenhart, L. P.** (1950, repr. 1997). *Riemannian Geometry*. Princeton Univ. Press. ISBN: 9780691023533
6. **Isham, C. J.** (1999). *Modern Differential Geometry for Physicists*, 2nd Edition. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/3867>
7. **Kiosak, V., Kusik, L., Isaiev, V.** (2022). Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 15(2), 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
8. **Kiosak, V., Lesechko, O., Savchenko, O.** (2018). Mappings of Spaces with Affine Connection. In: *17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT*. Bratislava, pp. 563–569.
9. **Kiosak, V., Savchenko, A., Kusik, L.** (2022). On the properties of Ricci solitons. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120006. <https://doi.org/10.1063/5.0100792>
10. **Kiosak, V., Savchenko, A., Khniunin, S.** (2020). On the typology of quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040003. <https://doi.org/10.1063/5.0033700>
11. **Kiosak, V., Savchenko, A., Kovalova, G.** (2020). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I. *Proceedings of the International Geometry Center*, 13(1), 35–48. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v13i1.1711>
12. **Kiosak, V., Savchenko, A., Latysh, O.** (2021). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(1), 80–91. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i1.1936>
13. **Kuzakon, V. M., Kirichenko, V. N., Prishlyak, O. O.** (2013). *Smooth Manifolds*. Kyiv: Institute of Mathematics, NAS of Ukraine.
14. **Lesechko, O., Latysh, O., Kamienieva, A.** (2019). Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040002. <https://doi.org/10.1063/1.5130794>
15. **Pokas, S., Bilokobylskyi, I.** (2022). Lie group of the second-degree infinitesimal conformal transformations in a symmetric Riemannian space of the first class. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120005.

16. Pokas, S., Krutoholova, A. (2019). Infinitesimal conformal transformations in a second-approximation Riemannian space of non-zero constant curvature. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040004.
17. Pokas, S. M. (2014). Infinitesimal conformal transformations in a second-approximation Riemannian space. *Proceedings of the International Geometry Center*, 7(2), 36–50.

Vashpanova N. V., Pokas S. M.

SOME ISSUES OF APPROXIMATION THEORY FOR AFFINELY CONNECTED SPACES

Summary

The idea of studying geometric objects in the neighborhood of an arbitrary point with a certain order of precision has been partially applied in geometry and has led to a deeper investigation of these objects. In the theory of curves, an invariant vector to the tangent arises in the first-order differential neighborhood. This makes it possible to introduce the concept of the arc length of a curve and to choose it as a parameter. In the second-order differential neighborhood, the principal normal vector and the curvature of the curve are constructed. When considering the third-order differential neighborhood, the torsion of the curve is obtained.

In this work, affine connection spaces without torsion are studied. Methods for constructing approximate geometric objects have been developed, and their properties with respect to analogous objects in the given affine connection space have been examined. The investigation is carried out in a special coordinate system. The obtained results are applied to the study of motions in affine connected spaces. The form of the Killing vector in approximate affine connected spaces has been determined.

Keywords: affine connected space, Riemannian space, Riemann tensor, Ricci tensor, Lie derivative.

REFERENCES

1. **Barden, D., Thomas, C.** (2003). *An Introduction to Differential Manifolds*. University of Cambridge, UK. <https://doi.org/10.1142/p285>
2. **do Carmo, M. P.** (1992). *Riemannian Geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA. <https://link.springer.com/book/9780817634902>
3. **Doikov, D., Kiosak, V.** (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040001. <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
4. **Duistermaat, J. J., Kolk, J. A. C.** (2000). *Lie Groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56936-4>
5. **Eisenhart, L. P.** (1950, repr. 1997). *Riemannian Geometry*. Princeton Univ. Press. ISBN: 9780691023533

6. **Isham, C. J.** (1999). *Modern Differential Geometry for Physicists*, 2nd Edition. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/3867>
7. **Kiosak, V., Kusik, L., Isaiev, V.** (2022). Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 15(2), 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
8. **Kiosak, V., Lesechko, O., Savchenko, O.** (2018). Mappings of Spaces with Affine Connection. In: *17th Conference on Applied Mathematics, APLIMAT*. Bratislava, pp. 563–569.
9. **Kiosak, V., Savchenko, A., Kusik, L.** (2022). On the properties of Ricci solitons. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120006. <https://doi.org/10.1063/5.0100792>
10. **Kiosak, V., Savchenko, A., Khniunin, S.** (2020). On the typology of quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040003. <https://doi.org/10.1063/5.0033700>
11. **Kiosak, V., Savchenko, A., Kovalova, G.** (2020). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, I. *Proceedings of the International Geometry Center*, 13(1), 35–48. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v13i1.1711>
12. **Kiosak, V., Savchenko, A., Latysh, O.** (2021). Geodesic mappings of compact quasi-Einstein spaces, II. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(1), 80–91. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i1.1936>
13. **Kuzakon, V. M., Kirichenko, V. N., Prishlyak, O. O.** (2013). *Smooth Manifolds*. Kyiv: Institute of Mathematics, NAS of Ukraine.
14. **Lesechko, O., Latysh, O., Kamienieva, A.** (2019). Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040002. <https://doi.org/10.1063/1.5130794>
15. **Pokas, S., Bilokobylskyi, I.** (2022). Lie group of the second-degree infinitesimal conformal transformations in a symmetric Riemannian space of the first class. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120005.
16. **Pokas, S., Krutoholova, A.** (2019). Infinitesimal conformal transformations in a second-approximation Riemannian space of non-zero constant curvature. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040004.
17. **Pokas, S. M.** (2014). Infinitesimal conformal transformations in a second-approximation Riemannian space. *Proceedings of the International Geometry Center*, 7(2), 36–50.