

УДК 514.07

С. М. Покась, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
e-mail: pokas@onu.edu.ua

М. О. Білозерова, кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
e-mail: marbel@ukr.net
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3177-790X>

ІНФІНІТЕЗИМАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ У РІМАНОВИХ ПРОСТОРАХ ДРУГОГО НАБЛИЖЕННЯ

В роботі розвиваються наближені методи дослідження геометричних властивостей ріманових просторів з використанням рядів Тейлора. Досліджуються нескінченно малі конформні рухи та нетривіальні конциркулярні перетворення у рімановому просторі другого наближення для ріманова простора спеціальної структури. У явному вигляді отримано вектор зсуву конформного вектора Кілінга. Отримані умови носять необхідний і достатній характер, тому вони дозволяють вивчити геометричні властивості як самих просторів, так і їх наближення. Доведено, що простір другого наближення, відмінний від простору сталої кривини, не допускає нетривіальних конциркулярних перетворень. Для дослідження використовуються спеціальні системи координат для визначення наближення другого порядку. Дослідження ведуться локально, тензорними методами без обмежень на сигнатуру та знаковизначеність метричного тензора ріманового простору.

MSC: 53B35.

Ключові слова: рімановий простір, тензор Рімана, тензор Річчі, простір другого наближення, інфінітезимальні перетворення, похідна Лі.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1\(43\).342065](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1(43).342065).

Вступ

Актуальність розробки в диференціальній геометрії інваріантних щодо вибору системи координат наближених методів пояснюється наступними

міркуваннями.

Основні геометричні об'єкти диференціальної геометрії виникають в результаті розгляду різних геометричних образів в диференціальному околі першого, другого або більш високого порядку, і таким чином наближено, з деякою, що не піддається більш-менш суворій оцінці, точністю. Однак при вивченні геометричних об'єктів зазначений принцип, як правило, не враховується, що є неприродним з теоретичної точки зору і перешкоджає використанню досягнень сучасної диференціальної геометрії в додатках [4, 5].

Ідея вивчення геометричних об'єктів в околі довільної точки з точністю того чи іншого порядку досить часто застосовувалася в геометрії і приводила до більш глибокому вивченню цих об'єктів. Так, наприклад, в теорії кривих у диференціальній околі 1-го порядку виникає інваріантний вектор дотичної. Це дозволяє ввести поняття довжини дуги кривої і вибрати її в якості параметра кривої. У диференціальній околі 2-го порядку будується вектор головної нормалі і кривина кривої. І, нарешті, при розгляді диференціального окола 3-го порядку отримуємо скрут кривої.

Використання наближених методів у рімановій геометрії пов'язано з формулою Тейлора. Вперше цю формулу для метричного тензора симетричного ріманова простору, віднесеного до нормальної системи координат, застосував П. А. Широков. Відзначимо, що наближені методи застосовуються в різних розділах математики: в теорії диференціальних рівнянь, в крайових задачах і рівняннях математичної фізики, в деяких областях теоретичної фізики: прикладної астрономії і атмосферної оптики [1, 6].

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Ріманові простори другого наближення.

Розглянемо рімановий простір V_n , віднесений до координат $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ з метричним тензором $g_{ij}(x)$. Зафіксуємо в V_n точку $M_0(x_0^h)$ і побудуємо новий простір $\tilde{V}_n^2$, визначив його метричний тензор $\tilde{g}_{ij}$ наступним чином

$$\tilde{g}_{ij}(y) = g_{ij} + \frac{1}{3} R_{il_1 l_2 j} y^{l_1} y^{l_2}, \quad (1.1)$$

де $g_{ij} = g_{ij}(M_0)$, $R_{il_1 l_2 j} = R_{il_1 l_2 j}(M_0)$.

Далі формули типу (1.1) будемо записувати у вигляді

$$\tilde{g}_{ij}(y) = g_{ij} + \frac{1}{3}R_{i\alpha\beta j}y^\alpha y^\beta,$$

вважаючи, що об'єкти простору V_n обчислені у точці M_0 . Якщо у V_n перейти до ріманової системи координат з початком у точці M_0 і розкласти метричний тензор $g_{ij}(x)$ у ряд Тейлора і околі точки M_0 , то побачимо, що простір $\tilde{V}_n^2$ реалізує наближення другого порядку для V_n і тому відражає його геометричні властивості з деяким ступенем точності [3, 9].

Простір $\tilde{V}_n^2$ ми будемо називати простором другого наближення для ріманового V_n .

Відзначимо деякі властивості простору $\tilde{V}_n^2$ [13, 14].

Теорема 1. *Якщо простір V_n піддається ізометричному перетворенню, то наближення $\tilde{V}_n^2$ також піддається ізометричному перетворенню.*

Теорема 2. *Система координат $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$ у просторі $\tilde{V}_n^2$ є рімановою з початком у точці $y^k = 0$, ($k = 1, 2, \dots, n$)*

Теорема 3. *Елементи оберненої матриці для $\|\tilde{g}_{ij}(y)\|$ простору $\tilde{V}_n^2$ мають вигляд*

$$\tilde{g}^{ij}(y) = g^{ij} + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p t^{(p)ij}, \quad (1.2)$$

де

$$t_k^i = \frac{1}{3}R_{l_1 l_2 k}^i y^{l_1} y^{l_2} \quad (1.3)$$

$$t_j^{(2)i} = t_\alpha^i t_j^\alpha$$

$$t_j^{(p)i} = t_\alpha^{(p-1)i} t_j^\alpha, \quad (p = 1, 2, 3 \dots) \quad (1.4)$$

Причому ряди (1.2) збігаються абсолютно та рівномірно на множині $|R_{l_1 l_2 k}^h y^{l_1} y^{l_2}| < \frac{3}{n}$.

Відомо, що дослідження аналітичних нескінченно малих конформних рухів у просторі $\tilde{V}_n^2$

$$y'^h = y^h + \xi^h(y)\delta t$$

зводиться до інтегрування узагальнених рівнянь Кіллінга

$$L_\xi \tilde{g}_{ij} = \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^i} \tilde{g}_{\alpha j} + \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial y^j} \tilde{g}_{\alpha i} + \tilde{\xi}^\alpha \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial y^\alpha} = \psi(y) \tilde{g}_{ij} \quad (1.5)$$

Якщо задати аналітичну функцію $\psi(y)$

$$\psi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^h \quad (b_k = b_{l_1 \dots l_k} y^{l_1} \dots y^{l_k}), \quad (1.6)$$

де $b_{l_1 \dots l_k}$ - деякі константи, симетричні за нижніми індексами і шукати $\tilde{\xi}(y)$ теж у вигляді аналітичних функцій [2, 7]

$$\tilde{\xi}^h = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^h \quad (a_k^h = a_{l_1 \dots l_k}^h y^{l_1 \dots l_k}). \quad (1.7)$$

$a_{l_1 \dots l_k}^h$ - невідомі константи, симетричні за нижніми індексами, то аналіз рівнянь Кіллінга дає наступний результат: для того, щоб ряди (1.7) визначали компоненти вектора зсуву аналітичних нескінченно малих конформних рухів у наближеному просторі $\tilde{V}_n^2$, необхідно і достатньо виконання наступних умов:

$$\begin{aligned} a_{2p}^h &= \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1} a^{\alpha} t_{\alpha}^{(p)h} + \frac{1}{2p} \left(b_{2p-1} y^h - \frac{1}{2} b_{2p-2} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) + \\ &+ \frac{(-1)^p}{4(2p-1)} \sum_{s=1}^{p-1} \frac{2p-2s-1}{p-s} b_{2p-2s-2}^{\alpha} t_{\alpha}^{(s)h} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \quad (p=2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} a_{2p+1}^h &= \left(b_{2p} y^h - \frac{1}{2} b_{2p-1} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) + \frac{1}{2p} \left[\frac{p+1}{2p+1} b^{\alpha} t_{\alpha}^h + \right. \\ &+ \left. \sum_{s=2}^{p-1} \frac{(-1)^{s+1}(p-s)}{2p-2s+1} b_{2p-2s+1}^{\alpha} t_{\alpha}^{(s)h} \right] g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \quad (p=3, 4, \dots) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$a_{(ij)} = b g_{ij} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} &\frac{4k}{2k+1} \left(a_{(i}^{\alpha} t_{j)\alpha} + \frac{1}{3} a_{\alpha} R_{(ij)l}^{\alpha} y^l \right) + \\ &+ \frac{k}{k+1} \left(b_{(i} g_{j)l} y^l - b_{2k+1} g_{ij} - b_{2k-1} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) - b_{2k-1} t_{ij} = 0, \quad k=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} &\frac{2m+1}{m+1} \left(a_{2m}^{\alpha} t_{(ij)\alpha} + \frac{1}{3} a_{\alpha} R_{(ij)l}^{\alpha} y^l \right) + \\ &+ \frac{2m+1}{2m+3} \left(b_{(i} g_{j)l} y^l - b_{2m+2} g_{ij} - b_{2m} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) - b_{2m} t_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Зауваження 1. Оскільки члени рядів (1.7) виражаються через a^h, a_1^h, b, b_1 об'єкти простору $\tilde{V}_n^2$ в точці M_0 , то з огляду на рівняння (1.10), (1.11) і (1.12) доводимо відомого результату про те, що максимальний порядок r групи Лі аналітичних нескінченно малих конформних рухів у рімановому просторі $\tilde{V}_n^2$ другого наближення задовольняє нерівності

$$r \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

При дослідженні інфінітезимальних рухів у просторі $\tilde{V}_n^2$ умовами тензорного характеру був виділен деякий клас напівсиметричних ріманових просторів, а саме Π_n^2 - простори, тензор кривини яких задовольняє умові [10, 11]:

$$R_{(l_1 l_2) \alpha}^h R_{(ij) l_3}^\alpha + R_{(l_3 l_2) \alpha}^h R_{(ij) l_1}^\alpha + R_{(l_1 l_3) \alpha}^h R_{(ij) l_2}^\alpha = 0 \quad (1.13)$$

Знайдемо узагальнений вектор Кіллінга для простору Π_n^2 . Враховуючи умову (1.13), члени рядів (1.7) матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} a_2^h &= a^\alpha t_\alpha^h + \frac{1}{2} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) \\ a_{2p}^h &= \frac{1}{2p} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) + \frac{(-1)^p (2p-3)}{4(2p-1)(p-1)} \frac{b}{2p-3} \alpha t_\alpha^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \quad (p=2, 3, \dots) \\ a_3^h &= \frac{1}{3} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) \\ a_5^h &= \frac{1}{12} b^\alpha t_\alpha^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} + \frac{1}{5} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) \\ a_{2p+1}^h &= \frac{1}{2p+1} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) + \frac{1}{2p} \cdot \frac{p+1}{2p+1} \frac{b}{2p-3} \alpha t_\alpha^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \quad (p=3, 4, \dots) \end{aligned}$$

А тоді, узагальнений вектор Кіллінга матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^h &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^h = a^h + a_{l_1}^h y^{l_1} + \left[a^\alpha t_\alpha^h + \frac{1}{2} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{3} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) + \frac{1}{4} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) + \\ &+ \frac{1}{12} b^\alpha t_\alpha^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} + \frac{1}{5} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) + \frac{1}{6} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) - \\ &- \frac{3}{2 \cdot 20} b^\alpha b^\alpha t_\alpha^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} + \frac{1}{7} \left(b y^h - \frac{1}{2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} \right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{7} b^\alpha t_\alpha^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} + \dots \end{aligned}$$

Зводячи подібні отримуємо:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}^h &= a^h + a_{l_1}^h y^{l_1} + a^\alpha t_\alpha^h + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} b^h y^h - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} + \\ &+ \left[\frac{1}{6} b^\alpha + \sum_{p=3}^{\infty} \left(\frac{(-1)^p (2p-3)}{4(p-1)(2p-1)} + \frac{p+1}{2p(2p_1)} \right) \right] b_{2p-3}^\alpha g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^2\end{aligned}$$

Таким чином має місце наступне твердження [15, 16]:

Теорема 4. У просторі другого наближення $\tilde{\Pi}_n^2$ для простору Π_n , узагальнений вектор Кілінга має вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}^h &= a^h + a_{l_1}^h y^{l_1} + a^\alpha t_\alpha^h + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} b^h y^h - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} b^h g_{l_1 l_2} y^{l_1 l_2} + \\ &+ \left[\frac{1}{6} b^\alpha + \sum_{p=3}^{\infty} \left(\frac{(-1)^p (2p-3)}{4(p-1)(2p-1)} + \frac{p+1}{2p(2p_1)} \right) \right] b_{2p-3}^\alpha g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^2\end{aligned}$$

2. Нескінченно малі конциркулярні перетворення в рімановому просторі другого наближення для V_n спеціальної структури

Розгляд конциркулярних перетворень, окрім чистого геометричного інтересу, представляє зацікавленість з точки зору загальної теорії відносності, тому що геодезичні кола є траєкторії рівноприскореного руху в теорії Ейнштейна. Крім того існує зв'язок між проєктивними і конциркулярними рухами в V_n .

Означення 1. Геодезичним колом в V_n називається крива з постійною першою і нульовою другою кривинами.

Рівняння геодезичного кола має вигляд

$$\frac{d^3 u^h}{ds^3} + g_{\alpha\beta} \frac{d^2 u^\alpha}{ds^2} \frac{d^2 u^\beta}{ds^2} \frac{du^h}{ds} = 0$$

Означення 2. Векторне поле в X в рімановому просторі V_n називається інфінітезімальним конциркулярним перетворенням або конциркулярним рухом, якщо виконуються умови

$$L_X g_{ij} = \psi g_{ij}$$

$$\psi_{,ij} = \phi g_{ij},$$

де ψ_i, ϕ - функції на V_n (кома - знак коваріантної похідної відносно g_{ij} , $L_X g_{ij}$ - похідна Лі) [8, 12].

Розглянемо випадок, коли простіром V_n служить Π_n , тобто виконується умова

$$R^h_{\cdot(l_1 l_2)\alpha} R^\alpha_{(ij)l_3} + R^h_{\cdot(l_3 l_2)\alpha} R^\alpha_{(ij)l_1} + R^h_{\cdot(l_1 l_3)\alpha} R^\alpha_{(ij)l_2} = 0 \quad (2.1)$$

Простір $\tilde{\Pi}_n^2$ має ту властивість, що компоненти об'єкту зв'язності $\tilde{\Gamma}_{ij}^h(y)$ є лінійними однорідними функціями

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^h = -\frac{1}{3} R^h_{\cdot(ij)l} y^l, \quad (2.2)$$

Будемо вивчати нескінченно малі конциркулярні перетворення в просторі $\tilde{\Pi}_n^2$

Має місце таке твердження:

Теорема 5. *Простір другого наближення $\tilde{\Pi}_n^2$ для просторів Π_n не допускає нескінченно малих конциркулярних перетворень.*

Доведення. Розглянемо рівняння

$$\tilde{\Delta}_{ij} \psi = \phi(y) \tilde{g}_{ij} \quad (2.3)$$

Підрахуємо ліву частину (2.3). Оскільки

$$\psi(y) = b + b_l y^l + b_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} + b_{l_1 l_2 l_3} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} + \dots,$$

то

$$\tilde{\Delta}_i \psi \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y^i} = b_i + 2b_{il_1} y^{l_1} + 3b_{il_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} + \dots + (p+1)b_{il_1 \dots l_p} y^{l_1} \dots y^{l_p} + \dots$$

$$\tilde{\Delta}_{ij} \psi = \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial y^j} - \tilde{\psi}_\alpha \tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^h &= \tilde{g}^{h\alpha} \left(-\frac{1}{3} R_{\alpha(ij)m} y^m \right) = -\frac{1}{3} R^h_{\cdot(ij)m} y^m \\ \tilde{\psi}_\alpha \tilde{\Gamma}_{ij}^\alpha &= -\frac{1}{3} R^h_{\cdot(ij)m} y^m \left(b_\alpha + 2b_{\alpha l_1} y^{l_1} + 3b_{\alpha l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} + \dots + (p+1)b_{\alpha l_1 \dots l_p} y^{l_1} \dots y^{l_p} + \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{3} \left[b_\alpha R^h_{\cdot(ij)l} y^l + 2b_{\alpha l_1} R^h_{\cdot(ij)l_2} y^{l_1} y^{l_2} + 3b_{\alpha l_1 l_2} R^h_{\cdot(ij)l_3} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} + \dots \right. \\ &\quad \left. + pb_{\alpha l_1 \dots l_{p-1}} R^h_{\cdot(ij)l_p} y^{l_1} \dots y^{l_p} + \dots \right] \end{aligned}$$

Тоді (2.4) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{ij}\psi = & 2b_{ij} + 3b_{ij}y^l + 3 \cdot 4b_{ijl_1l_2}y^{l_1}y^{l_2} + \dots + (p+1) \cdot (p+2)b_{ijl_1\dots l_p}y^{l_1} \dots y^{l_p} + \dots + \\ & + \frac{1}{3} \left[b_{\alpha}R_{(ij)l}^{\alpha}y^l + 2b_{\alpha l_1}R_{(ij)l_2}^{\alpha}y^{l_1}y^{l_2} + 3b_{\alpha l_1l_2}R_{(ij)l_3}^{\alpha}y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} + \dots \right. \\ & \left. + pb_{\alpha l_1\dots l_{p-1}}R_{(ij)l_p}^{\alpha}y^{l_1} \dots y^{l_p} + \dots \right]\end{aligned}$$

Підрахуємо праву частину рівняння (2.3).

$$\begin{aligned}\phi(y) = & c + cy^l + c_{l_1l_2}y^{l_1}y^{l_2} + c_{l_1l_2l_3}y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} + \dots \\ \phi(y)\tilde{g}_{ij}(y) = & \left(g_{ij} + \frac{1}{3}R_{i\alpha\beta j}y^{\alpha}y^{\beta} \right) \Big|_0 \cdot \left(c + c_l y^l + c_{l_1l_2}y^{l_1}y^{l_2} + c_{l_1l_2l_3}y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} + \dots \right) = \\ = & cg_{ij} + c_l g_{ij}y^l + \left(c_{l_1l_2}g_{ij} + \frac{1}{3}cR_{il_1l_2j} \right) \Big|_0 y^{l_1l_2} + \left(c_{l_1l_2l_3}g_{ij} + \frac{1}{3}c_{l_1}R_{il_2l_3j} \right) \Big|_0 y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} + \dots\end{aligned}$$

Отже, рівняння (2.3) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}(2b_{ij})|_0 + & \left[2 \cdot 3b_{ijl} - \frac{1}{3}b_{\alpha}R_{(ij)l}^{\alpha} \right] \Big|_0 y^l + \left[3 \cdot 4b_{ijl_1l_2} - \frac{2}{3}b_{\alpha l_1}R_{(ij)l_2}^{\alpha} \right] \Big|_0 y^{l_1}y^{l_2} + \dots + \\ & + \left[4 \cdot 5b_{ijl_1l_2l_3} - 3 \cdot \frac{1}{3}b_{\alpha l_1l_2}R_{(ij)l_3}^{\alpha} \right] \Big|_0 y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} + \dots + \\ & + \left[(p+1) \cdot (p+2)b_{ijl_1\dots l_p} - p \cdot \frac{1}{3}b_{\alpha l_1\dots l_{p-1}}R_{(ij)l_p}^{\alpha} \right] \Big|_0 y^{l_1} \dots y^{l_p} + \dots = \quad (2.5) \\ & (cg_{ij})|_0 + (cg_{ij})|_0 y^l + \left(c_{l_1l_2}g_{ij} + \frac{1}{3}cR_{il_1l_2j} \right) \Big|_0 y^{l_1}y^{l_2} + \\ & + \left(c_{l_1l_2l_3}g_{ij} + \frac{1}{3}c_{l_1}R_{il_2l_3j} \right) \Big|_0 y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} + \dots + \left(c_{l_1\dots l_p}g_{ij} + \frac{1}{3}c_{l_1} \dots l_{p-2}R_{il_{p-1}l_pj} \right) \Big|_0 y^{l_1} \dots y^{l_p} + \dots\end{aligned}$$

З (2.5) випливає послідовність рівностей:

$$2b_{ij} = cg_{ij} \quad (2.6)$$

$$\left(2 \cdot 3b_{ijl} - \frac{1}{3}b_{\alpha}R_{(ij)l}^{\alpha} \right) y^l = cg_{ij}y^l \quad (2.7)$$

$$\left[3 \cdot 4b_{ijl_1l_2} - 2 \cdot \frac{1}{3}b_{\alpha l_1}R_{(ij)l_2}^{\alpha} \right] y^{l_1}y^{l_2} = \left(c_{l_1l_2}g_{ij} + \frac{1}{3}R_{il_1l_2j} \right) y^{l_1}y^{l_2} \quad (2.8)$$

$$\left[4 \cdot 5b_{ijl_1l_2l_3} - 3 \cdot \frac{1}{3}b_{\alpha l_1l_2}R_{(ij)l_3}^{\alpha} \right] y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} = \left(c_{l_1l_2l_3}g_{ij} + \frac{c_{l_1}}{3}R_{il_2l_3j} \right) y^{l_1}y^{l_2}y^{l_3} \quad (2.9)$$

...

$$\begin{aligned} & \left[(p+1) \cdot (p+2) b_{ijl_1 \dots l_p} - p \cdot \frac{1}{3} b_{\alpha l_1 \dots l_{p-1}} R_{(ij)l_p}^\alpha \right] y^{l_1} \dots y^{l_p} = \\ & = \left(c_{l_1 \dots l_p} g_{ij} + \frac{1}{3} c_{l_1 \dots l_{p-2}} R_{il_{p-1}l_pj} \right) y^{l_1} y^{l_p} \end{aligned} \quad (2.10)$$

З (2.6) випливає:

$$b_{ij} = \frac{c}{2} g_{ij} \quad (2.11)$$

Розглянемо (2.7). Проальтернувавши його за j і i отримуємо:

$$-3 \cdot \frac{1}{3} b_\alpha R_{ijl}^\alpha = c_l g_{ij} - c_j g_{il}$$

Результат просиметрируємо за i і j

$$\begin{aligned} -b_\alpha R_{(ij)l}^\alpha &= 2c_l g_{ij} - c_i g_{jl} - c_j g_{il} \\ b_\alpha R_{(ij)l}^\alpha &= c_i g_{jl} + c_j g_{il} - 2c_l g_{ij} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Співвідношення (2.7) на підставі (2.12) приймає вигляд

$$2 \cdot 3 b_{ijl} - \frac{1}{3} (c_i g_{jl} + c_j g_{il} - 2c_l g_{ij}) = c_l g_{ij}$$

Звідки отримаємо

$$2 \cdot 3 \cdot 3 b_{ijl} = c + i g_{jl} + c_j g_{il} + c_l g_{ij} \quad (2.13)$$

Згортаючи (2.13) з $y^i y^j$ будемо мати:

$$b = \frac{1}{2 \cdot 3} c_{l_1} g_{l_2 l_3} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3}$$

Підставимо (2.13) і (2.7) і, приводячи подібні, отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} (c_i g_{il} + c_j g_{il} + c_l g_{ij}) - \frac{1}{3} b_\alpha R_{(ij)l}^\alpha = c_l g_{ij} \\ & c_i g_{il} + c_j g_{il} + c_l g_{ij} - b_\alpha R_{(ij)l}^\alpha = 3c_l g_{ij} \\ & b_\alpha R_{(ij)l}^\alpha = c_i g_{il} + c_j g_{il} - 2c_l g_{ij} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Таким чином, аналіз рівняння (2.7) дає:

$$b = \frac{1}{2 \cdot 3} c_{l_1} g_{l_2 l_3} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3}$$

а вектори b_i повинні задовольняти рівнянням

$$b_\alpha R_{(ij)l}^\alpha = c_i g_{il} + c_j g_{il} - 2c_l g_{ij} \quad (2.15)$$

І рівняння (2.7) виконуються тотожно на підставі (2.15). Розглянемо рівняння (2.8):

$$\begin{aligned} \left[3 \cdot 4b_{ijl_1l_2} - 2 \cdot \frac{1}{3} b_{\alpha l_1} R_{(ij)l_2}^\alpha \right] y^{l_1} y^{l_2} &= \left(c_{l_1l_2} g_{ij} + \frac{1}{3} R_{il_1l+2j} \right) y^{l_1} y^{l_2} \\ \left[3 \cdot 4b_{ijl_1l_2} - \frac{1}{3} R_{(ij)l_2}^\alpha \right] y^{l_1} y^{l_2} &= \left(c_{l_1l_2} g_{ij} + \frac{1}{3} R_{il_1l_2j} \right) y^{l_1} y^{l_2} \\ 3 \cdot 4b_{ijl_1l_2} y^{l_1} y^{l_2} &= (c_{l_1l_2} g_{ij} + R_{il_1l_2j}) y^{l_1} y^{l_2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Згорнувши останню рівність із $y^i y^j$ отримаємо,

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4b_{l_1l_2l_3l_4} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4} &= c_{l_1l_2} g_{l_2l_3} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4} \\ b_{l_1l_2l_3l_4} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4} &= \frac{1}{3 \cdot 4} c_{l_1l_2} g_{l_2l_3} y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} y^{l_4} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Далі, по черзі продиференціюємо (2.17) спочатку по $\frac{\partial}{\partial y^i}$, а потім по $\frac{\partial}{\partial y^j}$, маємо:

$$\begin{aligned} 4b_{il_1l_2l_3} y^{l_1l_2l_3} &= \frac{1}{3 \cdot 2} (c_{il_1} g_{l_2l_3} + c_{l_1l_2} g_{il_3}) y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} \\ 3 \cdot 4b_{il_1l_2l_3} y^{l_1l_2l_3} &= \frac{1}{2 \cdot 3} (c_{ij} g_{l_1l_2} + 2c_{il_2} g_{il_2} + 2c_{jl_1} g_{il_2} + c_{l_1l_2} g_{ij}) y^{l_1} y^{l_2} \end{aligned}$$

Останнє порівняння з (2.16)

$$\frac{1}{2 \cdot 3} (c_{ij} g_{l_1l_2} + 2c_{il_2} g_{il_2} + 2c_{jl_1} g_{il_2} + c_{l_1l_2} g_{ij}) y^{l_1} y^{l_2} = (c_{l_1l_2} g_{ij} + R_{il_1l_2j}) y^{l_1} y^{l_2}$$

Розглянемо рівність приведених коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} (c_{ij} g_{l_1l_2} + c_{l_1l_2} g_{ij} + c_{l_1(i} g_{j)l_2} + c_{l_2(i} g_{j)l_1}) &= 2c_{l_1l_2} g_{ij} + R_{i(l_1l_2j)} \\ c_{ij} g_{l_1l_2} - 5c_{l_1l_2} g_{ij} + c_{l_1(i} g_{j)l_2} + c_{l_2(i} g_{j)l_1} &= R^{i(l_1l_2)j} \end{aligned}$$

Проальтернуємо останню рівність по j і l_2 маємо:

$$\begin{aligned} c_{ij} g_{l_1l_2} - c_{il_2} g_{jl_1} - 5c_{l_1l_2} g_{ij} + 5c_{jl_1} g_{il_2} + c_{l_1} g_{jl_2} - c_{l_1} g_{l_2j} + c_{jl_1} g_{il_2} - c_{l_1l_2} g_{ij} + \\ + c_{l_2} g_{jl_1} - c_{ij} g_{l_1l_2} + c_{l_2j} g_{il_1} - c_{jl_2} g_{il_1} = 3R_{il_1l_2j} \end{aligned}$$

$$R_{il_1l_2j} = 2(c_{jl_1}g_{il_2} - c_{l_1l_2}g_{ij}) \quad (2.18)$$

Просиметризуємо (2.18) за i і l_1 :

$$0 = c_{jl_1}g_{il_2} + c_{ij}g_{l_1l_2} - c_{l_1l_2}g_{ij} - c_{il_2}g_{jl_1}$$

Згорнемо останнє з g^{ij} :

$$\begin{aligned} c_{l_1l_2} + c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}g_{l_1l_2} - nc_{l_1l_2} - c_{l_1l_2} &= 0 \\ c_{l_1l_2} &= \frac{1}{n}c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}g_{l_1l_2} \end{aligned}$$

Отже, (2.18) набуває вигляду:

$$R_{il_1l_2j} = \frac{2}{n}c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}(g_{jl_1}g_{il_2} - g_{l_1l_2}g_{ij}) \quad (2.19)$$

Підставимо (2.19) у рівняння (2.1):

$$\begin{aligned} R_{i(l_1l_2)j} &= \frac{2}{n}c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}(g_{jl_1}g_{il_2} + g_{jl_2}g_{il_1} - 2g_{l_1l_2}g_{ij}) \\ R_{(l_1l_2)k}^h &= \frac{2}{n}c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}\left(g_{kl_1}\delta_{l_2}^h + g_{kl_2}\delta_{l_1}^h - 2g_{l_1l_2}\delta_k^h\right) \\ R_{(l_1l_2)\alpha}^h R_{(ij)l_3}^\alpha &= \left(\frac{2}{n}c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}\right)^2 \left(g_{\alpha l_1}\delta_{l_2}^h + g_{\alpha l_2}\delta_{l_1}^h - 2g_{l_1l_2}\delta_\alpha^h\right) (g_{l_3i}\delta_j^\alpha + g_{l_3j}\delta_i^\alpha - 2g_{ij}\delta_{l_3}^\alpha) = \\ &= \left(\frac{2}{n}c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}\right)^2 \left(g_{jl_1}\delta_{l_2}^h g_{il_3} + g_{l_2j}\delta_{l_1}^h g_{il_3} + g_{il_1}\delta_{l_2}^h g_{jl_3} + g_{il_2}\delta_{l_1}^h g_{jl_3} - \right. \\ &\quad \left. - 2g_{ij}g_{l_3(l_1}\delta_{l_2)}^h - 2g_{l_1l_2}g_{l_3(i}\delta_{j)}^h + 4g_{l_1l_2}g_{ij}\delta_{l_3}^\alpha\right) \end{aligned}$$

Позначимо, через

$$H = \frac{2}{n}c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$$

Тоді умови (2.1) приймають вигляд:

$$\begin{aligned} R_{(l_1l_2)\alpha}^h R_{(ij)l_3}^\alpha + R_{(l_2l_3)\alpha}^h R_{(ij)l_1}^\alpha + R_{(l_1l_3)\alpha}^h R_{(ij)l_2}^\alpha &= H^2 \left(g_{j(l_1}\delta_{l_2)}^h g_{il_3} + g_{j(l_3}\delta_{l_1)}^h g_{il_2} + \right. \\ &+ g_{j(l_3}\delta_{l_2)}^h g_{il_1} + g_{j(l_3}\delta_{l_2)}^h g_{il_1} + g_{j(l_2}\delta_{l_3)}^h g_{il_1} + g_{j(l_1}\delta_{l_2)}^h g_{il_3} - 4g_{ij} \left(g_{l_1l_2}\delta_{l_3}^h + g_{l_3l_2}\delta_{l_1}^h + \right. \\ &+ g_{l_3l_1}\delta_{l_2}^h \left. \right) - 2 \left(g_{l_1l_2}g_{l_3(i}\delta_{j)}^h + g_{l_3l_2}g_{l_1(i}\delta_{j)}^h + g_{l_1l_3}g_{l_2(i}\delta_{j)}^h \right) + 4g_{ij} \left(\delta_{l_3}^\alpha g_{l_1l_2} + \delta_{l_3}^\alpha g_{l_1l_2} + \right. \\ &\quad \left. + \delta_{l_2}^\alpha g_{l_1l_3} + \delta_{l_1}^\alpha g_{l_3l_2} \right) \left. \right) = 0 \end{aligned}$$

Підсумуємо за індексами h і l_3 :

$$H^2 [n(g_{il_2}g_{jl_1} + g_{il_1}g_{jl_2}) - 2g_{l_1l_2}g_{ij}] = 0$$

Згорнемо останнє з g^{il_1} :

$$H^2(n+2)(n-1)g_{jl_2} = 0$$

Звідки випливає, що $H^2 = 0$, а значить $c_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = 0$ і $R_{hijk} = 0$.

А це означає, що простір другого наближення $\tilde{\Pi}_n^2$ для простору Π_n^2 не допускає нескінченно малих конциркулярних перетворень. І тим самим, теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Doikov, D., Kiosak, V. (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040001. <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
2. Duistermaat, J. J., Kolk, J. A. C. (2000). *Lie Groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56936-4>
3. Eisenhart, L. P. (1926). *Non-Riemannian Geometry*. Princeton Univ. Press. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 8 (2000).
4. Fernandes, R. L. (2014). *Lectures on Differential Geometry*. University of Illinois Urbana-Champaign, USA. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/12733>
5. Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J. (2004). *Riemannian Geometry*, 3rd edn. Universitext. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-18855-8>
6. Isham, C. J. (1999). *Modern Differential Geometry for Physicists*, 2nd Edition. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/3867>
7. Kiosak, V., Savchenko, A., Makarenko, L. (2022). Invariant transformations that preserve mappings. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120003. <https://doi.org/10.1063/5.0100787>
8. Kiosak, V., Savchenko, A., Gudyreva, O. (2019). On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040001. <https://doi.org/10.1063/1.5130793>
9. Kiosak, V., Latysh, O., Kuzmich, V. (2024). Split curvature. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(3), 232–243. <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i3.2817>
10. Kiosak, V., Prishlyak, O., Gudyreva, O. (2024). On geodesic mappings of three-symmetric spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(1), 56–64. <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i1.2647>
11. Kiosak, V., Prishlyak, O., Lesechko, O. (2021). On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(4), 13–26. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i4.2140>
12. Lesechko, O., Latysh, O., Kamienieva, A. (2019). Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040002. <https://doi.org/10.1063/1.5130794>

-
13. Pokas, S., Bilokobylskyi, I. (2022). Lie group of the second-degree infinitesimal conformal transformations in a symmetric Riemannian space of the first class. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120005.
 14. Pokas, S., Krutoholova, A. (2019). Infinitesimal conformal transformations in a second-approximation Riemannian space of non-zero constant curvature. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040004.
 15. Pokas, S. M. (2014). Infinitesimal conformal transformations in a second-approximation Riemannian space. *Proceedings of the International Geometry Center*, 7(2), 36–50.
 16. Rong, W., Yue, C. (1999). *An Introduction to Differential Geometry and Topology in Mathematical Physics*. Zhejiang University, PR China. <https://doi.org/10.1142/3871>

Pokas S. M., Bilozeroва M. O.

INFINITESIMAL TRANSFORMATIONS IN SECOND-ORDER APPROXIMATION RIEMANNIAN SPACES

Summary

The work develops approximate methods for studying the geometric properties of Riemannian spaces using Taylor series expansions. Infinitesimal conformal motions and nontrivial concircular transformations are investigated in the second-order approximation of a Riemannian space with special structure. The displacement vector of the conformal Killing vector is obtained explicitly. The derived conditions are both necessary and sufficient, which makes it possible to study the geometric properties of the spaces themselves as well as their approximations. It is proven that a second-order approximation space, different from a space of constant curvature, does not admit nontrivial concircular transformations. Special coordinate systems are employed to define the second-order approximation. The study is carried out locally using tensor methods without imposing restrictions on the signature or definiteness of the Riemannian metric tensor.

Keywords: Riemannian space, Riemann tensor, Ricci tensor, second-order approximation space, infinitesimal transformations, Lie derivative.

REFERENCES

1. Doikov, D., Kiosak, V. (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. *AIP Conference Proceedings*, 2302, 040001. <https://doi.org/10.1063/5.0033657>
2. Duistermaat, J. J., Kolk, J. A. C. (2000). *Lie Groups*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56936-4>
3. Eisenhart, L. P. (1926). *Non-Riemannian Geometry*. Princeton Univ. Press. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 8 (2000).
4. Fernandes, R. L. (2014). *Lectures on Differential Geometry*. University of Illinois Urbana-Champaign, USA. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/12733>
5. Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J. (2004). *Riemannian Geometry*, 3rd edn. Universitext. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-18855-8>
6. Isham, C. J. (1999). *Modern Differential Geometry for Physicists*, 2nd Edition. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/3867>
7. Kiosak, V., Savchenko, A., Makarenko, L. (2022). Invariant transformations that preserve mappings. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120003. <https://doi.org/10.1063/5.0100787>

8. Kiosak, V., Savchenko, A., Gudyreva, O. (2019). On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040001. <https://doi.org/10.1063/1.5130793>
9. Kiosak, V., Latysh, O., Kuzmich, V. (2024). Split curvature. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(3), 232–243. <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i3.2817>
10. Kiosak, V., Prishlyak, O., Gudyreva, O. (2024). On geodesic mappings of three-symmetric spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*, 17(1), 56–64. <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i1.2647>
11. Kiosak, V., Prishlyak, O., Lesechko, O. (2021). On the geodesic mappings of pseudo-Riemannian spaces with special supplementary tensor. *Proceedings of the International Geometry Center*, 14(4), 13–26. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v14i4.2140>
12. Lesechko, O., Latysh, O., Kamienieva, A. (2019). Models of mechanical systems preserving the Weyl tensor. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040002. <https://doi.org/10.1063/1.5130794>
13. Pokas, S., Bilokobylskyi, I. (2022). Lie group of the second-degree infinitesimal conformal transformations in a symmetric Riemannian space of the first class. *AIP Conference Proceedings*, 2522, 120005.
14. Pokas, S., Krutoholova, A. (2019). Infinitesimal conformal transformations in a second-approximation Riemannian space of non-zero constant curvature. *AIP Conference Proceedings*, 2164, 040004.
15. Pokas, S. M. (2014). Infinitesimal conformal transformations in a second-approximation Riemannian space. *Proceedings of the International Geometry Center*, 7(2), 36–50.
16. Rong, W., Yue, C. (1999). *An Introduction to Differential Geometry and Topology in Mathematical Physics*. Zhejiang University, PR China. <https://doi.org/10.1142/3871>