

УДК 517.925

О. О. Чепок кандидат фіз-мат наук,
Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний
університет імені К. Д. Ушинського»
кафедра вищої математики і статистики
вул Старопортофранківська 26, м. Одеса, Україна, 65020
e-mail: olachtpok@ukr.net
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-8514-2769>

**АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -РОЗВ'ЯЗКІВ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ЯКЕ
МІСТИТЬ ДОБУТОК РІЗНОГО ТИПУ НЕЛІНІЙНОСТЕЙ, У
ДЕЯКОМУ КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ**

Встановлення умов існування та побудова асимптотичних зображень розв'язків диференціальних рівнянь з нелінійностями різних типів у правій частині є однією з найважливіших задач якісної теорії диференціальних рівнянь. Подібні рівняння мають практичне значення, зокрема, у моделях горіння чи при дослідженні електростатичного потенціалу в сферичних або циліндричних об'ємах плазми продуктів згорання. У даній роботі розглянуто диференціальні рівняння другого порядку, у правій частині яких міститься добуток правильно змінної нелінійної функції від невідомої функції та швидко змінної нелінійної функції від її похідної при прямованні аргументів до нуля або до нескінченності. Отримано необхідні й достатні умови існування повільно змінних $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків таких рівнянь у деякому критичному випадку, а також побудовано асимптотичні зображення таких розв'язків та їхніх перших похідних. При додаткових обмеженнях на коефіцієнти характеристичного рівняння відповідної еквівалентної системи квазілінійних рівнянь встановлено умови існування однопараметричної та двопараметричної сім'ї $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків. Варто зазначити, що раніше аналогічні результати були отримані для рівнянь, у яких, навпаки, праву частину становить добуток швидко змінної функції від невідомої функції та правильно змінної функції від її похідної. Для рівнянь, розглянутих у цій роботі, отримані результати є новими.

MSC: 34A34, 34C41, 34E99.

Ключові слова: нелінійні диференціальні рівняння другого порядку, асимптотичні зображення розв'язків, $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язки, швидко змінні функції, правильно змінні функції, повільно змінні перші похідні.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1\(43\).342064](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1(43).342064).

Вступ

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y') \varphi_1(y), \quad (1)$$

у якому $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, функції $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$) та $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0, +\infty[$ ($i \in \{0, 1\}$) є неперервними у своїх областях визначення, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, проміжок Δ_{Y_i} — або $[y_i^0, Y_i[$, або $]Y_i, y_i^0]$ * (тобто, деякий однобічний окіл точки Y_i , $i \in \{0, 1\}$)

Крім того, будемо вважати, що функція $\varphi_1 : \Delta_{Y_1} \rightarrow]0, +\infty[$ є правильно змінною (див. [1], с. 17) порядку σ_1 при прямуванні аргументу до Y_1 , а функція $\varphi_0 : \Delta_{Y_0} \rightarrow]0, +\infty[$ двічі неперервно диференційовна на Δ_{Y_0} та задовольняє умови:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_0(y) \in \{0, +\infty\}, \quad \varphi'_0(y) \neq 0 \text{ при } y \in \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(y) \varphi''_0(y)}{(\varphi'_0(y))^2} = 1. \quad (2)$$

З умов (2) випливає, що функція φ_0 та її похідна першого порядку є швидко змінними при прямуванні аргументу до Y_0 (див. [9], С. 91-92).

Отже, диференціальне рівняння (1) містить у правій частині добуток правильно та швидко змінних нелінійностей від невідомої функції та її похідної відповідно, при прямуванні аргументів до нуля або нескінченності.

Істотно нелінійні диференціальні рівняння, які містять добуток двох нелінійностей не лише від невідомої функції, а й від її похідної, часто виникають на практиці, наприклад, у теорії плазми продуктів згоряння.

Так, наприклад, під час розгляду електростатичного потенціалу в циліндричному об'ємі плазми продуктів згоряння виникає диференціальне рівняння досліджуваного типу, у якому $\varphi_0(y) = \exp(\sigma y)$, $\varphi_1(y') = |y'|^\lambda$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$, $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a, a < \omega \leq +\infty$) — неперервно диференційовна функція. Відповідні результати отримано у роботах В. М. Євтухова та Н. Г. Дрік (див. [7])

Особливий інтерес, як узагальнення попередніх класів рівнянь, становлять рівняння, у правій частині яких стоїть добуток функцій $\varphi_0(y)$ та $\varphi_1(y')$, де φ_0 є швидко змінною при $y \rightarrow Y_0$, а φ_1 — правильно змінною при $y' \rightarrow Y_1$. Відповідні результати були опубліковані, наприклад, у [2].

* При $Y_i = +\infty$ ($Y_i = -\infty$) вважаємо, що $y_i^0 > 0$ ($y_i^0 < 0$) відповідно.

У даній роботі ми продовжуємо дослідження рівнянь типу (1), у яких функція φ_0 є швидко змінною функцією від похідної невідомої функції, тоді як φ_1 — правильно змінна функція від самої невідомої функції.

Для рівнянь типу (1) розглянемо наступний клас рівнянь.

Означення 1. Розв'язок y рівняння (1), визначений на $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, називається $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язком $(-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty)$, якщо справедливими є наступні твердження

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \quad (3)$$

Цей клас розв'язків був визначений у роботі В. М. Євтухова та А. М. Самойленка [8] для диференціальних рівнянь n -го порядку типу Емдена-Фаулера та конкретизований для рівняння другого порядку. Завдяки асимптотичним властивостям функцій у класі $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків, кожен такий розв'язок належить до однієї з чотирьох непересічних множин відповідно до значення λ_0 : $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_0 = \pm\infty$.

У даній роботі ми досліджуємо рівняння (1) щодо умов існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків. Цей клас розв'язків для рівнянь виду (1) є одним з найскладніших для вивчення, оскільки похідна другого порядку явно не виражається через похідну першого порядку.

Для досліджуваних $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків у роботі [8] було встановлено наступні апріорні асимптотичні співвідношення:

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = [1 + o(1)], \quad \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \quad (4)$$

де

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty. \end{cases}$$

З умов (4) випливає, що $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язки є правильно змінними функціями (див. [1], с. 17) порядку 1 при $t \uparrow \omega$, а їх похідні першого порядку є повільно змінними функціями при $t \uparrow \omega$. Деякі результати для $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків рівняння (1) у випадку $\lambda_0 = \pm\infty$ були отримані в роботах [3] та [4].

Метою даної роботи є встановлення необхідних і достатніх умов існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків, а також знаходження асимптотичних зображень при $t \uparrow \omega$ для цих розв'язків та їх похідних першого порядку у деякому критичному випадку, який у роботах [3] та [4] розглянуто не було.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Наведемо наступні означення.

Означення 2. Нехай $Y \in \{0, \infty\}$, Δ_Y — деякий однобічний окіл Y . Неперервно диференційовна функція $L : \Delta_Y \rightarrow]0; +\infty[$ називається нормалізованою повільно змінною функцією при $y \rightarrow Y$ ($y \in \Delta_Y$) ([9], с.2-3), якщо

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{yL'(y)}{L(y)} = 0.$$

Означення 3. Говорять, що повільно змінна при $y \rightarrow Y$ ($y \in \Delta_Y$) функція $\theta : \Delta_Y \rightarrow]0; +\infty[$ задовільняє умову S при прямуванні аргументу до Y (див., наприклад, у [8]), якщо для будь-якої нормалізованої повільно змінної при $y \rightarrow Y$ ($y \in \Delta_Y$) функції $L : \Delta_Y \rightarrow]0; +\infty[$ має місце співвідношення

$$\theta(yL(y)) = \theta(y)(1 + o(1)) \quad \text{при } y \rightarrow Y \quad (y \in \Delta_Y).$$

Введемо наступні позначення

$$\mu_0 = \text{sign} \varphi'_0(y'), \quad v_0 = \text{sign} y'_0, \quad v_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Delta_{Y_0} = [y_0^0, Y_0[, \\ -1, & \text{якщо } \Delta_{Y_0} =]Y_0, y_0^0]. \end{cases}$$

Згідно з означення $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків диференціального рівняння (1) числа v_0, v_1 та α_0 однозначно визначають знаки будь-якого $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язку, а також його першої та другої похідних у деякому околі точки ω . Зауважимо, що умови

$$v_0 \cdot v_1 < 0 \quad \text{при } Y_0 = 0, \quad v_0 \cdot v_1 > 0 \quad \text{при } Y_0 = \pm\infty,$$

та

$$v_1 \cdot \alpha_0 < 0 \quad \text{при } \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = 0, \quad \alpha_0 \cdot v_1 > 0 \quad \text{при } \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = \pm\infty,$$

є необхідними для існування таких розв'язків.

Тоді, зважаючи на (4), виконуються умови

$$v_0 \cdot v_1 \pi_\omega(t) > 0 \text{ при } t \in [a, \omega[,$$

а також,

$$Y_0 = 0 \text{ при } \omega < +\infty, Y_0 = \pm\infty \text{ при } t \in [a, \omega[,$$

які є необхідним умовами існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків.

У роботі [4] також доведено наступну теорему, яка також вказує на необхідні умови існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків.

Теорема 1. *Нехай $\sigma_1 \neq 1$, функція $\varphi_1(y')|y'|^{-\sigma_1}$ задовольняє умову S при $y' \rightarrow Y_1$ ($y' \in \Delta_{Y_1}$). Тоді, кожен $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ - розв'язок диференціального рівняння (1) може бути представлений у вигляді*

$$y(t) = \pi_\omega(t)L(t), \quad (5)$$

де $L : [t_0, \omega[\rightarrow R$ - двічі неперервно диференційовна функція така, що

$$y_0^0 \pi_\omega(t)L(t) > 0, \quad L'(t) \neq 0 \quad \text{при } t \in [t_1, \omega[\quad (t_0 \leq t_1 < \omega), \quad (6)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} L(t) \in \{0; \pm\infty\}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t)L(t) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} = 0. \quad (7)$$

При цьому, у випадку існування скінченної або нескінченної границі

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}, \quad (8)$$

мають місце наступні співвідношення

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)} = -1, \quad \alpha_0 L'(t) > 0 \quad \text{при } t \in [t_1, \omega[\quad (t_0 \leq t_1 < \omega), \quad (9)$$

$$p(t) = \frac{\alpha_0 L'(t)}{|\pi_\omega(t)L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(\pi_\omega(t)) \cdot \varphi_0 \left(L(t) \left[1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \right] \right)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (10)$$

Означення 4. Будемо говорити, що виконується умова N , якщо для деякої неперервно диференційовної функції $L(t) : [t_0, \omega[\rightarrow R$ ($t_0 \in [a, \omega[$), яка задовольняє умови (5)-(7) та (9), має місце зображення

$$p(t) = \frac{\alpha_0 L'(t)}{|\pi_\omega(t)L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(\pi_\omega(t)) \cdot \varphi_0 \left(L(t) \left[1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \right] \right)} [1 + r(t)], \quad (14)$$

де $r(t) : [t_0, \omega[\rightarrow]-1; +\infty[$ - неперервна функція, яка прямує до нуля при $t \uparrow \omega$.

Введемо наступні позначення

$$\theta_1(y) = \varphi_1(y)|y|^{-\sigma_1}, \quad X(t) = L(t) \cdot e_1(t),$$

$$H(t) = \frac{L^2(t)\varphi'_0(X(t))}{\pi_\omega(t)L'(t)\varphi_0(X(t))}, \quad q_1(t) = \frac{\left(\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right)^2} \Big|_{y=X(t)}, \quad q_2(t) = y \frac{\left(\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi'_0(y)}{\varphi_0(y)}\right)} \Big|_{y=X(t)},$$

$$e_1(t) = 1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}, \quad e_2(t) = 2 + \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}.$$

Для цих функцій, у силу (2) та (7) виконуються наступні твердження:

1)

$$\lim_{t \uparrow \omega} e_1(t) = \lim_{t \uparrow \omega} e_2(t) = 1 \quad (15)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} H(t) = \pm\infty, \quad \lim_{t \uparrow \omega} q_1(t) = 0, \quad (16)$$

2) якщо існує границя

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \cdot \frac{H'(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}},$$

тоді

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \cdot \frac{H'(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}} = 0. \quad (17)$$

Дійсно, в твердження (15) безпосередньо впливають з умов (7) та (9).

Твердження (16) впливають зі справедливості тверджень:

$$H(t) = \frac{L(t)}{\pi_\omega(t)L'(t)} \cdot \frac{X(t)\varphi'_0(X(t))}{\varphi_0(X(t))} \cdot \frac{1}{e_1(t)},$$

$$\frac{\varphi_0(X(t))\varphi''_0(X(t))}{(\varphi'_0(X(t)))^2} = 1 + \frac{\left(\frac{\varphi'_0(X(t))}{\varphi_0(X(t))}\right)'}{\frac{\varphi'_0(X(t))}{\varphi_0(X(t))}}.$$

Твердження (17) доводиться аналогічно до відповідного твердження, наведеного у роботі Євтухова В.М. та Чернікової А.Г. [5].

У даній роботі на відміну від [3] та [4] розглянемо випадок, коли виконується умова

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} |H(t)|^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (18)$$

У цьому випадку, з урахуванням (17)

$$\frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} q_1(t)H(t) = -1 + o(1) \text{ при } t \uparrow \omega$$

З виду функцій H , q_1 , q_2 випливає, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} q_2(t) = -1,$$

звідки, в силу (9) та (10) функція $\frac{\varphi'_0(y')}{\varphi_0(y')}$ є правильно змінною порядку -1 при $y' \rightarrow Y_0$ ($y' \in \Delta_{Y_0}$)

Отже, випадок виконання умови (18) є у деякому сенсі критичним.

Будемо надалі вважати, що існує скінчення або нескінченна границя

$$\lim_{t \uparrow \omega} \left(1 + q_1(t) + \frac{X(t)}{e_2(t) \cdot L'(t)} \right) \cdot (e_1(t) - 1) \cdot e_1(t) \cdot H(t) = \gamma_1. \quad (19)$$

Зауважимо, що знак γ_1 повинен співпадати зі знаком $\alpha_0 \cdot v_0 \cdot v_1 \mu_0(t)$

Теорема 2. Нехай $\sigma_1 \neq 1$, функція θ_1 задовольняє умову S , виконується умова N та (18). Тоді диференціальне рівняння (1) має принаймні один $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язок, для якого мають місце наступні асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$:

$$y(t) = \pi_\omega(t) \cdot L(t)(1 + o(1)), \quad (20)$$

$$y'(t) = X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi'_0(X(t))} \cdot |H(t)|^{\frac{1}{2}} \cdot o(1). \quad (21)$$

Більш того, якщо $\omega < +\infty$, то при виконанні однієї з умов

$$\text{або } 1 < \gamma_1 < 0, \text{ або } \gamma_1 = 0 \text{ та } \alpha_0 \cdot \mu_0 > 0,$$

диференціальне рівняння (1) має однопараметричну $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків з асимптотичними зображеннями (20)-(21), а якщо $\omega = +\infty$, то таких розв'язків існує двопараметрична сім'я у випадках, коли

$$\text{або } 1 < \gamma_1 < 0, \text{ або } \gamma_1 = 0 \text{ та } \alpha_0 \cdot \mu_0 < 0,$$

і однопараметрична сім'я у випадках, коли

$$-\infty < \gamma_1 < -1 \text{ або } 0 < \gamma_1 < +\infty$$

Доведення. До рівняння (1) застосуємо перетворення

$$y(t) = \pi_\omega(t) \cdot L(t) \cdot [1 + z_1(t)], \quad (22)$$

$$y'(t) = X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi'_0(X(t))} \cdot z_2(t).$$

У результаті перетворення отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$z'_1 = \frac{e_1(t)}{\pi_\omega(t)} \cdot [-z_1 + K(t)z_2], \quad (23)$$

$$z'_2 = L'(t) \cdot e_2(t) \cdot \frac{\varphi'_0(X(t))}{\varphi_0(X(t))} \times \\ \times \left[\frac{\alpha_0 p(t) |\pi_\omega(t) \cdot L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(\pi_\omega(t)) \varphi_0(Y_2(t, z_2)) \cdot N(t, z_1)}{L'(t) e_2(t)} \cdot [1 + z_1]^{\sigma_1} - 1 + z_2 \cdot q_1(t) \right],$$

де

$$K(t) = \frac{\varphi_0(X(t))}{X(t) \varphi'_0(X(t))}, \quad N(t, z_1) = \frac{\theta_1(Y_1(t, z_1))}{\theta_1(\pi_\omega(t))},$$

$$Y_1(t, z_1) = \pi_\omega(t) \cdot L(t) \cdot [1 + z_1(t)], \quad Y_2(t, z_2) = X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi'_0(X(t))} \cdot z_2(t).$$

Оскільки функція $Y_1(t, z_1)$ є правильно змінною порядку 1, функція θ_1 задовольняє умову S , то

$$\lim_{t \uparrow \omega} N(t, z_1) = 1 \text{ рівномірно за } z_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \quad (24)$$

У силу умови N

$$\frac{\alpha_0 p(t) |\pi_\omega(t) L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(\pi_\omega(t)) \varphi_0(Y_2(t, z_2))}{L'(t)} = \frac{\varphi_0(Y_2(t, z_2))}{\varphi_0(X(t))} [1 + r(t)]. \quad (25)$$

Розкладаючи праву частину (25) при фіксованому $t \in [t_1; \omega[$ за формулою Маклорена з залишком у формі Лагранжа, маємо,

$$\frac{\varphi_0(Y_1(t, z_1))}{\varphi_0(X(t))} \cdot [1 + r(t)] = [1 + r(t)] \cdot (1 + z_2) + R(t, z_2),$$

де

$$R(t, z_2) = [1 + r(t)] \cdot \frac{\varphi_0'' \left(X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi \right) \varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot z_2^2,$$

$$|\xi| < |z_2|.$$

Оскільки,

$$Y(t, z_1) = X(t) \left[1 + \frac{1}{\frac{X(t)\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))}} \xi \right],$$

то з умов (2) та (7) випливає, що

$$\varphi_0'' \left(X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi \right) = \frac{\varphi_0'^2 \left(X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi \right)}{\varphi_0 \left(X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi \right)} \cdot [1 + d_1(t, z_2)],$$

де

$$\lim_{t \uparrow \omega} d_1(t, z_2) = 0 \text{ рівномірно за } z_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

За лемою 1.2. з [5] так, як $\varphi_0, \varphi_0' \in \Gamma_{Y_1}(Z_1)$ з додатковою функцією $g = \frac{\varphi_0}{\varphi_0'}$, то справедливою є рівність

$$\varphi_0'' \left(X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi \right) = \frac{\varphi_0'^2(X(t))}{\varphi_0(X(t))} e^\xi [1 + d_1(t, z_2)],$$

де

$$\lim_{t \uparrow \omega} d_1(t, z_2) = 0 \text{ рівномірно за } z_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

Отже, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують такі

$t_1 \in [t_0; \omega[$ та $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$, що

$$|R(t, z_2)| \leq (1 + \varepsilon)|z_2|^2 \text{ при } t \in [t_1; \omega[, |z_1| \leq \delta. \quad (26)$$

Вибираємо довільним чином число $\varepsilon > 0$ та розглянемо систему (23) на множині

$$\Omega = [t_1; \omega[\times D, \text{ де } D = \{(z_1; z_2) \in R^2, \quad |z_1| \leq \delta, \quad |z_2| \leq \frac{1}{2}\}.$$

Система (23) на Ω має вид

$$z_1' = \frac{e_1(t)}{\pi_\omega(t)} \cdot [A_{11}z_1 + A_{12}z_2], \quad (27)$$

$$z_2' = L'(t)e_2(t) \cdot \frac{\varphi_0'(X(t))}{\varphi_0(X(t))} \cdot [A_{21}(t)z_1 + A_{22}(t)z_2 + R_1(t, z_1, z_2) + R_2(t, z_1, z_2)], \quad (28)$$

де

$$A_{11}(t) = -1, \quad A_{12} = K(t), \quad A_{21}(t) = \sigma_1, \quad A_{22}(t) = 1 + q_1(t),$$

$$\begin{aligned} R_1(t, z_1, z_2) &= \left(\frac{(1+r_1)N(t, z_1)}{e_2(t)} - 1 \right) (1 + \sigma_1 z_1 + z_2), \\ R_2(t, z_1, z_2) &= \frac{(1+r_1)N(t, z_1)}{e_2(t)} (\sigma_1 z_1 z_2 + (1+z_2)((1+z_1)^{\sigma_1} - 1 - \sigma_1 z_1)) + \\ &\quad + R(t, z_2) \cdot \frac{(1+z_2)(1+z_1)^{\sigma_1} N(t, z_1)}{e_2(t)}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що з урахуванням (2) та (15),

$$\lim_{t \uparrow \omega} A_{11} = -1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} A_{12} = 0.$$

До системи (27)-(28) застосуємо перетворення

$$z_1(t) = \omega_1(t)$$

$$z_2(t) = \frac{\omega_2(t)}{K(t)}.$$

У результаті отримаємо систему

$$\omega_1' = h_1(t) \cdot [c_{11}(t)\omega_1 + c_{12}(t)\omega_2], \quad (29)$$

$$\omega_2' = h_2(t) \cdot [c_{21}(t)\omega_1 + c_{22}(t)\omega_2 + f(t, \omega_1, \omega_2) + R_3(t, \omega_1, \omega_2)], \quad (30)$$

де

$$h_1(t) = \frac{e_1(t)}{\pi_\omega(t)}, c_{11}(t) = -1, c_{12}(t) = 1$$

$$h_2(t) = \frac{L'(t) \cdot e_2(t)}{e_1(t) \cdot L(t)}$$

$$c_{21}(t) = \sigma_1, \quad c_{22}(t) = \frac{1 + q_1 + \frac{1}{h_2(t)}}{K(t)},$$

$$\begin{aligned} R_1(t, \omega_1, \omega_2) &= \left(\frac{(1 + r_1)N(t, \omega_1)}{e_2(t)} - 1 \right) \left(1 + \sigma_1 \omega_1 + \frac{\omega_2}{K(t)} \right), \\ R_2(t, \omega_1, \omega_2) &= \frac{(1 + r_1)N(t, \omega_1)}{e_2(t)} \left(\sigma_1 \omega_1 \frac{\omega_2}{K(t)} + \left(1 + \frac{\omega_2}{K(t)} \right) ((1 + \omega_1)^{\sigma_1} - 1 - \sigma_1 \omega_1) \right) + \\ &\quad + R(t, \frac{\omega_2}{K(t)}) \cdot \frac{(1 + \frac{\omega_2}{K(t)})(1 + \omega_1)^{\sigma_1} N(t, \omega_1)}{e_2(t)}. \end{aligned}$$

В силу умови N, умов теореми та умови маємо

$$h_1(t) \cdot h_2(t) \neq 0, \quad t \in [t_1; \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{h_2(t)}{h_1(t)} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \cdot L'(t) \cdot e_2(t)}{e_1^2(t) \cdot L(t)} = 0,$$

$$\int_{t_1}^t h_2(\tau) d\tau = \pm \infty$$

Крім того,

$$\lim_{t \uparrow \omega} c_{22}(t) = \gamma_1$$

Також,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R_1(t; \omega_1; \omega_2) = 0 \text{ рівномірно за } \omega_1, \omega_2 : |z_i| < \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2.$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{R_2(t; \omega_1; \omega_2)}{|\omega_1| + |\omega_2|} = 0.$$

При $0 \leq \gamma_1 < +\infty$ та $\gamma_1 \neq -1$ гранична матриця коефіцієнтів при ω_1 та ω_2 має вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \sigma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}$$

Оскільки $\gamma_1 \neq -1$, визначник матриці не дорівнює нулю, сума елементів першого рядка дорівнює 0, сума елементів другого рядка не дорівнює 0, в сиду умов для системи виконані всі умови теореми 2.7 роботи [6].

Відповідно до цієї теореми система (29)-(30) має принаймні один розв'язок $\{\omega_i\}_{i=1}^2 : [t^*, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ ($t^* \geq t_1$), які прямують до нуля при $t \uparrow \omega$. Цим

розв'язкам відповідають розв'язки $y : [t^*, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ($t^* \geq t_1$) рівняння (1), що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (20)-(21).

При $\omega < +\infty$ та $\alpha_0\mu_0\nu_0\nu_1 < 0$, а також при $\omega = +\infty$ та $\alpha_0\mu_0\nu_0\nu_1 > 0$ існує однопараметрична сім'я таких $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків, при $\omega = +\infty$ та $\alpha_0\mu_0\nu_0\nu_1 < 0$ існує двопараметрична сім'я таких $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків. В силу виду зображень (20)-(21) впливає, що отримані розв'язки є $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язками рівняння (1). Теорема повністю доведена.

Висновки

У даній роботі отримано достатні умови існування рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків у деякому критичному випадку, визначена кількість таких розв'язків в залежності від умов на рівня (1), а також, встановлено асимптотичні при зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків та їх похідних першого порядку. Застосована в роботі методика дослідження може бути використана для встановлення асимптотики диференціальних рівнянь третього і вищих порядків з добутком правильно та швидко змінних нелінійностей від невідомої функції та її першої похідної у правій частині.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.** Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications.// Cambridge university press. Cambridge. 1987. 494p.
2. **Чепок О. О.** Asymptotic Representations of a Class of Regularly Varying Solutions of Differential Equations of the Second Order with Rapidly and Regularly Varying Non-linearities// Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. 2018. V. 74. P. 79–92.
3. **Чепок, О.** (2022). Асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, +\infty)$ -розв'язків диференціального рівняння другого порядку, яке містить добуток різного типу нелінійностей від невідомої функції та її похідної// Дослідження в математиці і механіці. 2022. Т. 27, вип. 1-2(38-39). С. 92–104.10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294309
4. **Чепок, О.** (2023). Asymptotic behavior of $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solutions of the second order differential equations with the product of different types of nonlinearities from an unknown function and its first derivative. Bukovinian Math. Journal. 11, No. 2, 33 – 40. 10.31861/bmj2023.02.04
5. **Evtukhov, V., Chernikova, A.** (2019). Asymptotic Behavior of Slowly Varying Solutions of Second-Order Ordinary Binomial Differential Equations with Rapidly Varying Nonlinearity // Journal of Mathematical Sciences. 236. 10.1007/s10958-018-4111-7.

6. **Evtukhov, V., Samoilenko, A.** (2010). Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point // Ukrainian Mathematical Journal - UKR MATH J. 62. 56-86. 10.1007/s11253-010-0333-7.
7. **Evtulhov V. M., Drik N. G.** Asimptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation // Georgian Mathematical Journal. 1996. Vol.3, №2, P. 101-120.
8. **Evtukhov, V., Samoilenko, A.** (2011). Asymptotic Representations of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities // Differential Equations, Vol. 47, No. 5, pp. 627–649
9. **Maric V.** Regular Variation and differential equations // Springer (Lecture notes in mathematics, 1726). 2000. 127p.
10. **Seneta E.** (1976) *Regularly varying functions* Lecture Notes in Math., vol. 508, Berlin: Springer-Verlag.

Chepok O. O.

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -SOLUTIONS OF A SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION CONTAINING A PRODUCT OF DIFFERENT TYPES OF NONLINEARITIES, IN SOME CRITICAL CASE

Summary

Establishing the existence conditions and constructing asymptotic representations of solutions of differential equations with nonlinearities of various types in the right-hand side is one of the most important tasks of the qualitative theory of differential equations. Such equations have practical significance, in particular, in combustion models or in the study of the electrostatic potential in spherical or cylindrical plasma volumes of combustion products. This paper considers second-order differential equations, the right-hand side of which contains the product of a regularly varying nonlinear function from an unknown function and a rapidly varying nonlinear function from its derivative as the arguments approach zero or infinity. Necessary and sufficient conditions for the existence of slowly varying $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solutions of such equations in some critical case are obtained, and asymptotic representations of such solutions and their first derivatives are also constructed. With additional restrictions on the coefficients of the characteristic equation of the corresponding equivalent system of quasilinear equations, the conditions for the existence of one-parameter and two-parameter families of $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solutions are established. It is worth noting that previously similar results were obtained for equations in which, on the contrary, the right-hand side is the product of a rapidly varying function by an unknown function and a regularly varying function by its derivative. For the equations considered in this paper, the obtained results are new.

Keywords: nonlinear second-order differential equations, asymptotic representations of solutions, $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -solutions, rapidly varying functions, regularly varying functions, slowly varying first-order derivatives.

REFERENCES

1. **Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.** Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications.// Cambridge university press. Cambridge. 1987. 494p.

2. **Чепок О. О.** Asymptotic Representations of a Class of Regularly Varying Solutions of Differential Equations of the Second Order with Rapidly and Regularly Varying Nonlinearities // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. 2018. V. 74. P. 79–92.
3. **Чепок, О.** (2022). Asymptotic representations of $P_\omega(Y_0, Y_1, +\infty)$ -solutions of a second-order differential equation containing the product of various types of nonlinearities of an unknown function and its derivative [Asymptotychni zobrazhennia $P_\omega(Y_0, Y_1, +\infty)$ -rozv'iazkiv dyferentsialnoho rivniannia druho poriadku, yake mistyt dobutok riznoho typu neliniinosti vid nevidomoi funktsii ta yii pokhidnoi] // Doslidzhennia v matematytsi i mekhanitsi. 2022. 27, 1-2(38-39). P. 92–104. 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294309
4. **Чепок, О.** (2023). Asymptotic behavior of $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -solutions of the second order differential equations with the product of different types of nonlinearities from an unknown function and its first derivative. Bukovinian Math. Journal. 11, No. 2, 33–40. 10.31861/bmj2023.02.04
5. **Evtukhov, V., Chernikova, A.** (2019). Asymptotic Behavior of Slowly Varying Solutions of Second-Order Ordinary Binomial Differential Equations with Rapidly Varying Nonlinearity // Journal of Mathematical Sciences. 236. 10.1007/s10958-018-4111-7.
6. **Evtukhov, V., Samoilenko, A.** (2010). Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point // Ukrainian Mathematical Journal - UKR MATH J. 62. 56-86. 10.1007/s11253-010-0333-7.
7. **Evtukhov V. M., Drik N. G.** Asimptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation // Georgian Mathematical Journal. 1996. Vol.3, №2, P. 101-120.
8. **Evtukhov, V., Samoilenko, A.** (2011). Asymptotic Representations of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities // Differential Equations, Vol. 47, No. 5, pp. 627–649
9. **Maric V.** Regular Variation and differential equations // Springer (Lecture notes in mathematics, 1726). 2000. 127p.
10. **Seneta E.** (1976) *Regularly varying functions* Lecture Notes in Math., vol. 508, Berlin: Springer-Verlag.