

УДК 514.07

А. А. Соловійов, аспірант

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна

e-mail: andrey-solovyov@stud.onu.edu.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0003-7923-6912>

ВІДОБРАЖЕННЯ ПСЕВДОРІМАНОВИХ ПРОСТОРІВ З НАПІВСИМЕТРИЧНОЮ АФІНОРНОЮ СТРУКТУРОЮ

Робота складається з двох частин. У першій частині з використанням тензора деформації зв'язності розглянуто загальні геометричні властивості нетривіальних відображень між двома просторами афінної зв'язності без скруту. Побудовано геометричний об'єкт, що позначає різницю коваріантних похідних довільного тензора за зв'язностями простора, на яке відбувається відображення та його прообраз, яка суттєво залежить лише від згорток самого тензора та тензора деформації. Як наслідок, отримана залежність різниці коваріантних похідних тензора деформації за двома різними зв'язностями просторів, між якими відбувається відображення, яка виражається через згортки тензора деформації з самим собою. Продовжуючи ідею дослідження загальних властивостей відображень, введено в розгляд чотиривалентний тензор, що визначає різницю тензорів Рімана просторів, які залучено у відображення, та двовалентний тензор, що визначає різницю тензорів Річчі цих просторів. Отримано вираз через диференційно-алгебраїчні доданки тензора деформації цих двох тензорів.

У другій частині розглянуто псевдоріманові простори, які наділено антисиметричною майже комплексною напівсиметричною афінорною структурою, досліджено властивості довільних тензорів у цих просторах загалом та зокрема афінора, що визначає структуру. Далі, було приділено увагу п'яти спеціальним відображенням таких просторів окремо та доведено, що лише тензор деформації, що визначає відображення першого типу, відмінний від нульового тензора. Доведено, що якщо простори, що розглядаються, допускають відображення першого типу, то це K -простори. Для відображень першого типу побудовані геометричні об'єкти, що пов'язують коваріантні похідні цих двох просторів, як у першій частині роботи, для цих об'єктів отримано вираз через афінор та його згортки. Враховуючи напівсиметричність афінорної структури побудовано чотиривалентний геометричний об'єкт як альтернування коваріантної похідної тензора деформації, що згорнуто з афінором, який при відображенні стає від'ємним зі зміною послідовності індексів.

Дослідження ведуться локально, тензорними методами без обмежень на сигнатуру та знаковизначенність метричного тензору простору, що розглядається. В роботі широко застосовується спеціальна операція (спряження), що введена для просторів, які

наділено афінною структурою, та її властивості для тензорів Рімана та Річчі.

MSC: 53B35.

Ключові слова: рімановий простір, псевдорімановий простір, тензор Рімана, тензор Річчі, відображення просторів, тензор деформації, простори афінної зв'язності, коваріантна похідна, афінор, афінорна структура, напівсиметрична афінорна структура, антисиметрична афінорна структура, майже комплексна афінорна структура, операція спряження, K -простір, геометричний об'єкт.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1\(43\).342063](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1(43).342063).

Вступ

Зв'язності в диференціальній геометрії виникли сто років тому в роботах Туліо Леві-Чівіті (1917 рік), а згодом Г. Вейль (1920 рік), вивчаючи питання про паралельне перенесення векторів, прийшов до просторів афінної зв'язності.

В теорії відображень працювала велика кількість вчених як математиків, так і фізиків, зацікавлених в застосуванні результатів для моделювання динамічних процесів. Як відомо, рух деяких типів механічних систем, багато процесів в гравітаційних та електромагнітних полях, в суцільних середовищах протікають за траєкторіями, які можна розглядати як геодезичні лінії афіннозв'язного або псевдоріманового простору, що визначаються енергетичним режимом, за якого зовнішні сили відсутні, або за деякими кривими, вектор кривини яких – це вектор узагальнених зовнішніх сил.

Вивчення відображень (морфізмів) різних типів геометричних структур складає актуальну частину сучасної диференціальної геометрії. Під відображенням в сучасній геометрії розуміють дифеоморфізм, що зберігає ті чи інші властивості геометричних об'єктів. Центральною в сучасній геометрії є структура афінної зв'язності, як така, що має широке застосування.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Деформація внутрішньої геометрії простору при відображенні.

Означення 1. Простором афінної зв'язності A_n розмірності n називають такий диференційований многовид, на кожній кривій якого задана афінна зв'язність, що задовольняє умові лінійності, тобто для кожної точки M та для всякого векторного поля в околі даної точки, абсолютний диференціал

вектора, що належить цьому полю, обчислений в точці M для всякої кривої, що проходить через цю точку, є лінійна функція вектора елементарного зміщення по кривій.

Якщо не зазначено інше, то розглядаються простори афінної зв'язності A_n без скруту [3], тобто такі, що

$$\Gamma_{ij}^h(x) = \Gamma_{ji}^h(x) \quad (1)$$

Простір A_n належить класу C^r ($A_n \in C^r$), якщо $\Gamma_{ij}^h(x) \in C^r$ [2]. Розглянемо два простори афінної зв'язності.

Означення 2. Взаємно однозначна відповідність між точками просторів афінної зв'язності A_n та $\bar{A}_n$ називається відображенням, якщо в спільній за відображенням системі координат виконуються умови

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + P_{ij}^h(x). \quad (2)$$

Спільною за відображенням системою координат [3] називають таку систему криволінійних координат, в якій координати відповідних точок співпадають.

Означення 3. Тензор $P_{ij}^h(x)$ називають тензором деформації зв'язності при даному відображенні. Якщо

$$P_{ij}^h(x) \neq 0, \quad (3)$$

то відображення називають нетривіальним.

Зауваження 1. Тензор деформації симетричний за коваріантними індексами, тобто $P_{ij}^h = P_{ji}^h$, для просторів афінної зв'язності без скруту.

Тут тензор деформації є об'єктом, що належить простору V_n , проте неважко побачити, що

$$\Gamma_{ij}^h(x) = \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) - P_{ij}^h(x), \quad (4)$$

або, враховуючи означення тензора деформації

$$\Gamma_{ij}^h(x) = \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) + \bar{P}_{ij}^h(x), \quad (5)$$

тому доведено

Наслідок 1. Тензори деформації просторів, між якими відбувається відображення, мають наступну залежність

$$\bar{P}_{ij}^h(x) = -P_{ij}^h(x) \quad (6)$$

В випадку тензорного поля S типу $\binom{p}{q}$ коваріантна похідна по зв'язності A_n , яку ми будемо позначати ∇ , в кожній системі координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ визначається наступним чином:

$$\begin{aligned} \nabla_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) &= \partial_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) + \Gamma_{k\alpha}^{i_1}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p}(x) + \dots + \\ &+ \Gamma_{k\alpha}^{i_p}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \alpha}(x) - \Gamma_{kj_1}^\beta(x) S_{\beta j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) - \dots - \\ &- \Gamma_{kj_q}^\beta(x) S_{j_1 j_2 \dots j_{q-1} \beta}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) \end{aligned} \quad (7)$$

$(i_1, \dots, i_p; \quad j_1, \dots, j_q; \quad k = 1, 2, \dots, n)$

Для простору $\bar{A}_n$ та коваріантній похідної в ньому $\bar{\nabla}$ будемо мати [4] в спільній системі координат

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) &= \partial_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) + \bar{\Gamma}_{k\alpha}^{i_1}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p}(x) + \dots + \\ &+ \bar{\Gamma}_{k\alpha}^{i_p}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \alpha}(x) - \bar{\Gamma}_{kj_1}^\beta(x) S_{\beta j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) - \dots - \\ &- \bar{\Gamma}_{kj_q}^\beta(x) S_{j_1 j_2 \dots j_{q-1} \beta}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) \end{aligned} \quad (8)$$

$(i_1, \dots, i_p; \quad j_1, \dots, j_q; \quad k = 1, 2, \dots, n)$

Віднімаючи від останнього (4) з урахуванням (2), отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) - \nabla_k S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) &= P_{k\alpha}^{i_1}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{\alpha i_2 \dots i_p}(x) + \dots + \\ &+ P_{k\alpha}^{i_p}(x) S_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \alpha}(x) - P_{kj_1}^\beta(x) S_{\beta j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) - \dots - \\ &- P_{kj_q}^\beta(x) S_{j_1 j_2 \dots j_{q-1} \beta}^{i_1 i_2 \dots i_p}(x) \end{aligned} \quad (9)$$

$(i_1, \dots, i_p; \quad j_1, \dots, j_q; \quad k = 1, 2, \dots, n)$

Останнє справедливе для будь-якого тензора, а для тензора деформації (6) прийме вигляд

$$\bar{\nabla}_k P_{ij}^h(x) - \nabla_k P_{ij}^h(x) = P_{k\alpha}^h(x) P_{ij}^\alpha(x) - P_{ki}^\alpha(x) P_{\alpha j}^h(x) - P_{kj}^\alpha(x) P_{i\alpha}^h(x). \quad (10)$$

Альтернуючи останнє, отримаємо

$$\bar{\nabla}_k P_{ij}^h - \bar{\nabla}_j P_{ik}^h - \nabla_k P_{ij}^h + \nabla_j P_{ik}^h = -2 \left(P_{k\alpha}^h P_{ij}^\alpha - P_{ki}^\alpha P_{\alpha j}^h \right). \quad (11)$$

Закон зміни тензора кривини, що визначається, як

$$R_{.ijk}^h = \partial_j \Gamma_{ik}^h + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^h - \partial_k \Gamma_{ij}^h - \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{k\alpha}^h, \quad (12)$$

при відображенні простору A_n на $\bar{A}_n$ запишеться в вигляді

$$\bar{R}_{.ijk}^h = R_{.ijk}^h + P_{.ijk}^h, \quad (13)$$

де

$$P_{.ijk}^h = \nabla_k P_{ji}^h - \nabla_j P_{ki}^h + P_{\alpha k}^h P_{ji}^\alpha - P_{\alpha j}^h P_{ki}^\alpha. \quad (14)$$

Або, з урахуванням (12),

$$P_{.ijk}^h = \frac{1}{2} \left(\nabla_k P_{ji}^h - \nabla_j P_{ki}^h + \bar{\nabla}_k P_{ji}^h - \bar{\nabla}_j P_{ki}^h \right). \quad (15)$$

Тензор Річчі $R_{ij} = R_{ij\alpha}^\alpha$ змінюється за законом

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + P_{ij}. \quad (16)$$

де

$$P_{ij} = \frac{1}{2} \left(\nabla_\alpha P_{ji}^\alpha - \nabla_j P_{\alpha i}^\alpha + \bar{\nabla}_\alpha P_{ji}^\alpha - \bar{\nabla}_j P_{\alpha i}^\alpha \right). \quad (17)$$

Теорема 1. При відображенні простору афінної зв'язності A_n на простір афінної зв'язності $\bar{A}_n$ тензори Рімана та Річчі просторів A_n та $\bar{A}_n$ в спільній системі координат зв'язані співвідношеннями (15) та (16) відповідно.

Якщо в просторі афінної зв'язності тензор Річчі є симетричним [5], тобто

$R_{ij} = R_{ji}$, то такі простори називають еквіафінними просторами.

2. Спеціальні відображення афінор-напівсиметричних просторів.

Розглянемо псевдоріманів простір V_n з метричним тензором $g_{ij}(x)$, у якому існує тензор $F_i^h(x)$ [8]. Задля зручності введемо в V_n операцію спряження:

$$A_{i...}^{\cdot\cdot\cdot} \equiv A_{\alpha...}^{\cdot\cdot\cdot} F_i^\alpha \quad B_{i...}^{\bar{\cdot}\bar{\cdot}\bar{\cdot}} \equiv B^{\alpha...}_{\cdot\cdot\cdot} F_{\alpha}^i. \quad (18)$$

Тут A і B довільні тензори будь-якої валентності.

Якщо у просторі V_n існує тензор $F_i^h(x)$, який задовільняє деяким умовам, тоді про такі простори кажуть, що вони наділені афінорною структурою [7].

Означення 4. Простір V_n назвемо афінор-напівсиметричним, якщо в ньому існує напівсиметрична афінорна структура $F_i^h(x)$, тобто афінор $F_i^h(x)$ задовольняє умовам

$$\nabla_{[kl]} F_{ij} = 0. \quad (19)$$

Тут індекс опускається за допомогою метричного тензора

$$F_{ij} = g_{i\alpha} F_{\cdot j}^\alpha. \quad (20)$$

Розглянемо афінор-напівсиметричний простір V_n без скруту з метричним тензором $g_{ij}(x)$, афінорна структура якого додатково задовольняє

$$F_{(ij)} = 0, \quad (21)$$

$$F_{\cdot\alpha}^h F_{\cdot i}^\alpha = -\delta_i^h, \quad (22)$$

де круглі дужки в індексах позначають операцію симетрування, а δ_i^h - символи Кронекера, які визначаються наступними умовами

$$\delta_i^h = \begin{cases} 1, & i = h \\ 0, & i \neq h \end{cases}. \quad (23)$$

З (21) випливає

$$g^{\alpha h} \nabla_\alpha F_{(ij)} = \nabla^h F_{(ij)} = 0. \quad (24)$$

Афінорні структури, які задовольняють (22) називають майже комплексними [8]. З урахуванням (18) формула (22) в термінах операції спряження приймає вид

$$F_{\cdot i}^h = -\delta_i^h. \quad (25)$$

Цей вираз коваріантно продиференціюємо за напрямком x^k та врахуємо коваріантну сталість символів Кронекера

$$\nabla_k F_{\cdot i}^{\bar{h}} = \nabla_k F_{\cdot i}^h. \quad (26)$$

Розглянемо деякі спеціальні [9–11] відображення простору V_n на $\bar{V}_n$ та їх властивості.

Досліджуючи простори, що наділено афінорною структурою [12], багато відображень було визначено незалежно багатьма авторами починаючи з 1954 року. Деякі з них, наприклад, Й. А. Схоутен [13] та К. Яно [14], базуються на геометричних припущеннях, а інші, такі як П. Ліberman та А.

Ліхнерович [15], визначають відображення неявно, без явних формул для тензора деформації, а також один з них, А. Фреліхер, наводить відображення без будь-яких пояснень. Т. Уесугі розглянув співвідношення між цими відображеннями, використовуючи адаптовану систему координат. Продовжуючи дослідження цього напрямку, розглянемо відображення простору V_n , перераховуючи тензори деформації кожного з відображень:

$$P_{ij}^1 = \frac{1}{2} F^{h\alpha} \nabla_i F_{j\alpha}, \quad (27)$$

$$P_{ij}^2 = -\frac{1}{2} (\nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}} + \nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} + \nabla^{\bar{h}} F_{ij}). \quad (28)$$

$$P_{ij}^3 = -\frac{1}{2} (\nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}} - \nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} + \nabla^{\bar{h}} F_{ij}). \quad (29)$$

$$P_{ij}^4 = \frac{1}{2} (\nabla^{\bar{h}} F_{ij} - \frac{1}{2} \nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} - \nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}} - \frac{1}{2} \nabla^h F_{\cdot ij}). \quad (30)$$

$$P_{ij}^5 = \frac{1}{2} (\nabla_i F_{\cdot j}^h - \nabla_j F_{\cdot i}^h + \nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}}). \quad (31)$$

Кожне з наведених відображень будемо називати відповідним типом.

2.1. Відображення першого типу.

З урахуванням (18) та (21) визначення першого типу приймає вид

$$P_{ij}^h = \frac{1}{2} \nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}}. \quad (32)$$

Таким чином, символи Кристофеля при цьому відображенні змінюються за формулою

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \frac{1}{2} \nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}}. \quad (33)$$

Оскільки простір V_n без скруту,

$$\frac{1}{2} \nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} = P_{ji}^h = P_{ij}^h = \frac{1}{2} \nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}}, \quad (34)$$

тому

$$\nabla_j F_{\cdot i}^h = \nabla_i F_{\cdot j}^h. \quad (35)$$

Відомо, що псевдоріманів простір, в якому афінорна структура задовольняє цій умові, називається K -простором. Доведена

Теорема 2. *Якщо при відображенні майже комплексного простору V_n з антисимметричною афінорною структурою на $\bar{V}_n$ тензор деформації зв'язності першого типу, тоді V_n - це K -простір.*

Перепишемо вираз (32) беручи до уваги (26)

$$P_{ij}^h = \frac{1}{2} \nabla_i F_{\bar{j}}^h. \quad (36)$$

Далі, згортаючи з афінором рівність (32) за індексом h та рівність (36) за індексом j отримуємо властивість для тензора деформації

$$P_{ij}^{\bar{h}} = P_{i\bar{j}}^h, \quad (37)$$

або, враховуючи симетричність за нижніми індексами тензору деформації,

$$P_{ij}^{\bar{h}} = P_{\bar{i}j}^h, \quad (38)$$

таким чином,

$$P_{i\bar{j}}^h = P_{\bar{i}j}^h. \quad (39)$$

Звідси випливає

$$P_{i\bar{j}}^{\bar{h}} = P_{i\bar{j}}^h = P_{\bar{i}j}^h = -P_{ij}^h. \quad (40)$$

У (7) підставимо (36)

$$\bar{\nabla}_k P_{ij}^h - \nabla_k P_{ij}^h = \frac{1}{2} (\nabla_k F_{\bar{\alpha}}^h \nabla_i F_{\bar{j}}^\alpha - \nabla_k F_{\bar{i}}^\alpha \nabla_\alpha F_{\bar{j}}^h - \nabla_k F_{\bar{j}}^\alpha \nabla_i F_{\bar{\alpha}}^h). \quad (41)$$

Відомо, що в K -просторах виконується

$$\nabla_j F_{\bar{i}}^h = \nabla_{\bar{j}} F_i^h, \quad (42)$$

тому, враховуючи цю властивість та додатково (26) перепишемо (41)

$$\bar{\nabla}_k P_{ij}^h - \nabla_k P_{ij}^h = \frac{1}{2} (\nabla_k F_{\bar{\alpha}}^h \nabla_i F_{\bar{j}}^\alpha - \nabla_k F_{\bar{i}}^\alpha \nabla_\alpha F_{\bar{j}}^h - \nabla_k F_{\bar{j}}^\alpha \nabla_i F_{\bar{\alpha}}^h). \quad (43)$$

Розглянемо коваріантну похідну афінора за напрямком x^j за зв'язністю простора $\bar{V}_n$

$$\bar{\nabla}_j F_{\bar{i}}^h = \partial_j F_{\bar{i}}^h + F_{\bar{i}}^\alpha \bar{\Gamma}_{\alpha j}^h - F_{\alpha}^h \bar{\Gamma}_{ij}^\alpha. \quad (44)$$

Тут врахуємо (33) та (38)

$$\bar{\nabla}_j F_i^h = \nabla_j F_i^h. \quad (45)$$

Далі, знову коваріантно продиференціюємо цей вираз за напрямком x^k за зв'язністю простора $\bar{V}_n$ враховуючи закон перетворення символів Кристофеля та властивості афінора

$$\bar{\nabla}_k \bar{\nabla}_j F_i^h = \nabla_k \nabla_j F_{i,jk}^h + \frac{1}{2} (\nabla_{\bar{k}} F_{\alpha}^h \nabla_i F_{\cdot j}^{\alpha} - \nabla_{\bar{k}} F_{\cdot i}^{\alpha} \nabla_{\alpha} F_{\cdot j}^h - \nabla_{\bar{k}} F_{\cdot j}^{\alpha} \nabla_i F_{\alpha}^h). \quad (46)$$

Рівність (43) спряжімо за індексом k та віднімемо від (46)

$$\bar{\nabla}_k \bar{\nabla}_j F_i^h - \nabla_k \nabla_j F_i^h = \bar{\nabla}_{\bar{k}}^1 P_{ij}^h - \nabla_{\bar{k}}^1 P_{ij}^h. \quad (47)$$

Альтернуємо отриману рівність за індексами j, k та враховуючи афінор-напівсиметричність простору будемо мати

$$\bar{\nabla}_{\bar{k}}^1 P_{ij}^h - \bar{\nabla}_{\bar{j}}^1 P_{ik}^h = \nabla_{\bar{k}}^1 P_{ij}^h - \nabla_{\bar{j}}^1 P_{ik}^h, \quad (48)$$

або, використовуючи (6)

$$\bar{\nabla}_{\bar{j}}^1 \bar{P}_{ik}^h - \bar{\nabla}_{\bar{k}}^1 \bar{P}_{ij}^h = \nabla_{\bar{k}}^1 P_{ij}^h - \nabla_{\bar{j}}^1 P_{ik}^h. \quad (49)$$

Цю рівність згорнемо з афінором за індексами j, k та отримаємо

$$\bar{M}_{ijk}^h = -M_{ikj}^h, \quad (50)$$

де

$$\bar{M}_{ijk}^h \stackrel{def}{=} \bar{\nabla}_j \bar{P}_{i\bar{k}}^h - \bar{\nabla}_k \bar{P}_{i\bar{j}}^h \quad (51)$$

$$M_{ijk}^h \stackrel{def}{=} \nabla_j P_{i\bar{k}}^h - \nabla_k P_{i\bar{j}}^h. \quad (52)$$

Далі, користуючись (15) закон зміни тензора кривини при відображенні запишемо як

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \frac{1}{2} (\nabla_k \nabla_{\bar{j}} F_i^h - \nabla_j \nabla_{\bar{k}} F_i^h) + \frac{1}{4} (\nabla_{\alpha} F_{\cdot k}^h \nabla_j F_{\cdot i}^{\alpha} - \nabla_{\alpha} F_{\cdot j}^h \nabla_k F_{\cdot i}^{\alpha}), \quad (53)$$

тоді закон зміни тензора Річчі, відповідно до (16), буде мати вигляд

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + \frac{1}{2} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\bar{j}} F_{\cdot i}^{\alpha} - \nabla_j \nabla_{\bar{\alpha}} F_{\cdot i}^{\alpha}) - \frac{1}{4} \nabla_{\alpha} F_{\cdot j}^{\beta} \nabla_{\beta} F_{\cdot i}^{\alpha}. \quad (54)$$

Доведена

Теорема 3. Якщо тензор деформації при відображенні $V_n \longrightarrow \bar{V}_n$ має вигляд (30) та V_n наділено антисиметричною майже комплексною афінор-

напівсиметричною структурою, тоді мають місце (53), (54)

2.2. Відображення другого типу.

Доведемо

Теорема 4. Якщо афінорна структура антисиметрична при другому типі відображення, тоді вона також є коваріантно сталою, а відображення - тривіальним.

$$P_{\cdot ij}^h \equiv P_{ijk}^h \equiv P_{ij} \equiv 0, \quad \bar{R}_{\cdot ijk}^h = R_{ijk}, \quad \bar{R}_{ij} = R_{ij}. \quad (55)$$

Доведення. Оскільки простір без скруту, будемо мати

$$-\frac{1}{2}(\nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} + \nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}} + \nabla^{\bar{h}} F_{ji}) = P_{\cdot ji}^h = P_{ij}^h = -\frac{1}{2}(\nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}} + \nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} + \nabla^{\bar{h}} F_{ij}). \quad (56)$$

Тому після спряження за індексом h отримуємо

$$\nabla^h F_{ji} = \nabla^h F_{ij}, \quad (57)$$

але враховуючи (24)

$$\nabla^h F_{ji} = 0. \quad (58)$$

Таким чином, доведена коваріантна сталість афінору, тому виконуються

$$P_{ij}^h = 0, \quad \bar{R}_{\cdot ijk}^h = R_{ijk}, \quad \bar{R}_{ij} = R_{ij}, \quad (59)$$

і таке відображення тривіальне що й треба було довести $\square$.

2.3. Відображення третього типу.

Враховуючи симетричність тензора P_{ij}^h будемо мати

$$-\frac{1}{2}(\nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} - \nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}} + \nabla^{\bar{h}} F_{ji}) = P_{\cdot ji}^h = P_{ij}^h = -\frac{1}{2}(\nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}} - \nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} + \nabla^{\bar{h}} F_{ij}), \quad (60)$$

порівнюючи ліву та праву частинку, з урахуванням антисиметричності афінорної структури впливає

$$\nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}} - \nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} + \nabla^{\bar{h}} F_{ij} = 0. \quad (61)$$

Цю рівність підставимо у визначення тензора деформації

$$P_{ij}^h = 0, \quad (62)$$

тому це відображення є тривіальним і, як наслідок, виконуються

$$P_{ij}^h \equiv P_{ijk}^h \equiv P_{ij} \equiv 0, \quad \bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}, \quad \bar{R}_{ij} = R_{ij}. \quad (63)$$

Доведена

Теорема 5. *Якщо афінорна структура антисиметрична при третьому типі відображення, тоді таке відображення - тривіальне.*

2.4. Відображення четвертого типу.

Проальтернуємо визначення тензора деформації відображення цього типу

$$2\nabla^{\bar{h}}F_{ij} + \frac{1}{2}\nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}} - \frac{1}{2}\nabla_i F_{\cdot j}^{\bar{h}} - \nabla^h F_{\bar{i}j} = 0, \quad (64)$$

спряжімо за індексом i

$$2\nabla^{\bar{h}}F_{\bar{i}j} + \frac{1}{2}\nabla_j F_{\cdot \bar{i}}^{\bar{h}} - \frac{1}{2}\nabla_{\bar{i}} F_{\cdot j}^{\bar{h}} - \nabla^h F_{ij} = 0, \quad (65)$$

та врахуємо (26)

$$2\nabla^{\bar{h}}F_{\bar{i}j} - \frac{1}{2}\nabla_j F_{\cdot i}^h - \frac{1}{2}\nabla_{\bar{i}} F_{\cdot j}^{\bar{h}} + \nabla^h F_{ij} = 0. \quad (66)$$

Далі, рівність (64) спряжімо за індексом j

$$2\nabla^{\bar{h}}F_{\cdot i\bar{j}} + \frac{1}{2}\nabla_{\bar{j}} F_{\cdot i}^{\bar{h}} - \frac{1}{2}\nabla_i F_{\cdot \bar{j}}^{\bar{h}} - \nabla^h F_{i\bar{j}} = 0, \quad (67)$$

або, беручи до уваги (26)

$$2\nabla^{\bar{h}}F_{\cdot i\bar{j}} + \frac{1}{2}\nabla_{\bar{j}} F_{\cdot i}^{\bar{h}} + \frac{1}{2}\nabla_i F_{\cdot \bar{j}}^h + \nabla^h F_{i\bar{j}} = 0. \quad (68)$$

Порівнюючи (66) та (68) отримуємо

$$\nabla_j F_{\cdot i}^h + \nabla_i F_{\cdot j}^h + \nabla_{\bar{i}} F_{\cdot j}^{\bar{h}} + \nabla_{\bar{j}} F_{\cdot i}^{\bar{h}} = 0 \quad (69)$$

Цю рівність домножимо на F_{hk} просумуємо за індексом h та зробимо заміну індексів $k \rightarrow h$

$$\nabla_j F_{hi} + \nabla_i F_{hj} - \nabla_{\bar{i}} F_{hj} - \nabla_{\bar{j}} F_{hi} = 0 \quad (70)$$

зробимо заміну індексів $h \longleftrightarrow i$

$$\nabla_j F_{ih} + \nabla_h F_{ij} - \nabla_{\bar{h}} F_{ij} - \nabla_{\bar{j}} F_{ih} = 0 \quad (71)$$

та додамо до (70)

$$\nabla_i F_{\bar{h}j} - \nabla_{\bar{i}} F_{hj} + \nabla_h F_{ij} - \nabla_{\bar{h}} F_{ij} = 0. \quad (72)$$

Спряжімо цю рівність за індексом i

$$\nabla_{\bar{i}} F_{\bar{h}j} + \nabla_i F_{hj} - \nabla_h F_{ij} - \nabla_{\bar{h}} F_{ij} = 0. \quad (73)$$

Вираз (69) домножимо на g_{hk} просумуємо за індексом h та зробимо заміну індексів $k \longrightarrow h$

$$\nabla_j F_{hi} + \nabla_i F_{hj} + \nabla_{\bar{i}} F_{\bar{h}j} + \nabla_{\bar{j}} F_{\bar{h}i} = 0 \quad (74)$$

та додамо до (73)

$$\nabla_j F_{hi} + \nabla_{\bar{j}} F_{\bar{h}i} - \nabla_h F_{ij} - \nabla_{\bar{h}} F_{ij} = 0. \quad (75)$$

Далі, спряжімо отриману рівність за індексом i

$$\nabla_j F_{h\bar{i}} + \nabla_{\bar{j}} F_{\bar{h}i} - \nabla_h F_{ij} + \nabla_{\bar{h}} F_{ij} = 0 \quad (76)$$

та врахуємо (26)

$$\nabla_j F_{h\bar{i}} - \nabla_{\bar{j}} F_{hi} - \nabla_h F_{ij} + \nabla_{\bar{h}} F_{ij} = 0. \quad (77)$$

Вираз (75) згорнемо з афінором за індексом h

$$\nabla_j F_{\bar{h}i} - \nabla_{\bar{j}} F_{hi} - \nabla_{\bar{h}} F_{ij} + \nabla_h F_{ij} = 0 \quad (78)$$

та додамо до (77)

$$\nabla_j F_{h\bar{i}} + \nabla_j F_{\bar{h}i} - 2\nabla_{\bar{j}} F_{hi} = 0, \quad (79)$$

або, скориставшись (26)

$$\nabla_j F_{h\bar{i}} = \nabla_{\bar{j}} F_{hi}, \quad (80)$$

тому тензор деформації можна записати як

$$P_{ij}^h = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \nabla^h F_{ij} - \frac{1}{2} \nabla_j F_{\bar{i}}^{\bar{h}} - \nabla_i F_{\bar{j}}^{\bar{h}} \right). \quad (81)$$

Знов, врахуємо симетрію тензора деформації

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\nabla^h F_{\bar{j}i} - \frac{1}{2}\nabla_i F_{\bar{j}}^{\bar{h}} - \nabla_j F_{\bar{i}}^{\bar{h}}) = \overset{4}{P}_{\bar{j}i}^h = \overset{4}{P}_{ij}^h = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\nabla^h F_{\bar{i}j} - \frac{1}{2}\nabla_j F_{\bar{i}}^{\bar{h}} - \nabla_i F_{\bar{j}}^{\bar{h}}), \quad (82)$$

тобто

$$\nabla_j F_{\bar{i}}^h = \nabla_i F_{\bar{j}}^h. \quad (83)$$

Перепишемо цей вираз беручи до уваги (80)

$$\nabla_j F_{\bar{i}}^h = \nabla_{\bar{i}} F_{\bar{j}}^h, \quad (84)$$

або, згорнувши з афіном за індексом i

$$\nabla_j F_{\bar{i}}^h = \nabla_i F_{\bar{j}}^h, \quad (85)$$

що характерно для K -просторів. Таким чином, доведена

Теорема 6. *Якщо тензор деформації при відображенні $V_n \longrightarrow \bar{V}_n$ має вигляд (30) та V_n наділено антисиметричною майже комплексною афіною структурою, тоді V_n - це K -простір.*

Врахуємо (85) у визначенні тензора деформації

$$\overset{4}{P}_{ij}^h = \nabla_{\bar{i}} F_{\bar{j}}^h, \quad (86)$$

проте з симетричності тензора деформації та антисиметричності афінової структури випливає

$$\overset{4}{P}_{ij}^h = 0, \quad (87)$$

і, як наслідок,

$$\overset{4}{P}_{ij}^h \equiv P_{ijk}^h \equiv P_{ij} \equiv 0, \quad \bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}, \quad \bar{R}_{ij} = R_{ij}. \quad (88)$$

тому доведена

Наслідок 2. *Якщо тензор деформації при відображенні $V_n \longrightarrow \bar{V}_n$ четвертого типу та V_n наділено антисиметричною майже комплексною афіною структурою, тоді це тривіальне відображення.*

2.3. Відображення п'ятого типу.

Враховуючи симетричність тензору деформації будемо мати

$$\frac{1}{2}(\nabla_j F_{\bar{i}}^h - \nabla_{\bar{i}} F_{\cdot j}^h + \nabla_i F_{\cdot \bar{j}}^{\bar{h}}) = P_{\cdot j i}^h = P_{i j}^{\bar{h}} = \frac{1}{2}(\nabla_i F_{\cdot \bar{j}}^h - \nabla_{\bar{j}} F_{\cdot i}^h + \nabla_j F_{\cdot i}^{\bar{h}}), \quad (89)$$

тому

$$\nabla_i F_{\cdot \bar{j}}^h + \nabla_j F_{\cdot \bar{i}}^h + \nabla_{\bar{j}} F_{\cdot i}^h - \nabla_{\bar{i}} F_{\cdot j}^h = 0. \quad (90)$$

У цьому виразі за допомогою метричного тензора опустимо індекс h

$$\nabla_i F_{h \bar{j}} + \nabla_j F_{h \bar{i}} + \nabla_{\bar{j}} F_{h i} - \nabla_{\bar{i}} F_{h j} = 0 \quad (91)$$

та згорнемо з афінором за індексом h

$$\nabla_i F_{h \bar{j}} + \nabla_j F_{h \bar{i}} + \nabla_{\bar{j}} F_{h i} - \nabla_{\bar{i}} F_{h j} = 0, \quad (92)$$

або, враховуючи (26)

$$\nabla_{\bar{j}} F_{h i} - \nabla_{\bar{i}} F_{h j} - \nabla_i F_{h j} - \nabla_j F_{h i} = 0. \quad (93)$$

Перепишемо цю рівність зробивши заміну індексів $h \longleftrightarrow i$

$$\nabla_{\bar{j}} F_{i h} - \nabla_{\bar{h}} F_{i j} - \nabla_h F_{i j} - \nabla_j F_{i h} = 0, \quad (94)$$

додамо її до (93)

$$\nabla_{\bar{i}} F_{h j} + \nabla_i F_{h j} + \nabla_{\bar{h}} F_{i j} + \nabla_h F_{i j} = 0. \quad (95)$$

Далі, виконаємо заміну індексів $h \longleftrightarrow j$ в (93)

$$\nabla_{\bar{h}} F_{j i} - \nabla_{\bar{i}} F_{j h} - \nabla_i F_{j h} - \nabla_h F_{j i} = 0. \quad (96)$$

та перепишемо її з урахуванням антисиметричності афінорної структури

$$\nabla_{\bar{i}} F_{h \bar{j}} - \nabla_{\bar{h}} F_{i \bar{j}} + \nabla_i F_{h j} + \nabla_h F_{i j} = 0. \quad (97)$$

Цей вираз віднімемо від (95)

$$\nabla_{\bar{i}} F_{h \bar{j}} - \nabla_{\bar{i}} F_{h \bar{j}} + \nabla_{\bar{h}} F_{i j} + \nabla_{\bar{h}} F_{i \bar{j}} = 0 \quad (98)$$

та врахуємо в ньому (26)

$$\nabla_{\bar{h}} F_{i j} = 0, \quad (99)$$

або, згортаючи з афінором за індексами h, i

$$\nabla_h F_{ij} = 0, \quad (100)$$

отримуємо, що афінорна структура при такому відображенні буде коваріантно сталою, і, як наслідок, відображення буде тривіальним, тобто

$$P_{ij}^5 \equiv P_{ijk}^h \equiv P_{ij} = 0, \quad \bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}, \quad \bar{R}_{ij} = R_{ij}. \quad (101)$$

. Доведена

Теорема 7. *Якщо тензор деформації при відображенні $V_n \longrightarrow \bar{V}_n$ n 'ятого типу та V_n наділено антисиметричною майже комплексною афінорною структурою, тоді це тривіальне відображення.*

Висновки

Досліджено псевдоріманові простори, які оснащені антисиметричною майже комплексною напівсиметричною афінорною структурою. Визначено характеристики довільних тензорних полів у таких просторах, зокрема аналізується афінор, що визначає цю структуру. Далі окремо розглянуто п'ять специфічних типів відображень між такими просторами, серед яких лише для першого типу тензор деформації виявляється ненульовим. Доведено, що прообраз відображення першого типу є K -простором. Для цього класу відображень побудовано аналогічні до першої частини роботи геометричні об'єкти, які пов'язують коваріантні похідні різних просторів, та отримано їхнє подання через афінор і його згортки. Використавши напівсиметричність структури, сконструйовано чотиривалентний об'єкт як результат альтернування коваріантної похідної від тензора деформації, що був згорнутий з афінором; при відображенні цей об'єкт змінює знак, а його два останні індекси міняються місцями.

Розглянуто нетривіальні відображення між двома просторами афінної зв'язності без скруту. За допомогою тензора деформації виявлено загальні геометричні характеристики таких відображень. Визначено об'єкт, який відображає різницю коваріантних похідних довільного тензора відносно зв'язностей у просторі, який є образом та його прообразом; цей об'єкт залежить лише від згорток самого тензора і тензора деформації. Звідси

отримано формулу для різниці коваріантних похідних самого тензора деформації відносно двох зв'язностей, що виражається через його власні згортки. Було введено в розгляд чотиривалентний тензор, який характеризує різницю тензорів Рімана відповідних просторів, та двовалентний тензор, що описує різницю їхніх тензорів Річчі. Для цих нових геометричних об'єктів отримано представлення через диференційно-алгебраїчні комбінації доданків тензора деформації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Eisenhart, L.P. (1926). *Riemannian Geometry*. Princeton University Press. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 8 (2000).
2. Schouten, J.A.; Struik, D.J. (1935) *Introduction into new Methods in Differential Geometry*. (Germ. Einfuhrung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie.) 1935.
3. Lesechko, O.; Latysh, O.; Spychak, T. (2020). Conformally flat Kahler spaces. *AIP Conference Proceedings*. Vol. 2302, 040004. <https://doi.org/10.1063/5.0034024>.
4. Kiosak, V.; Savchenko, O.; Shevchenko, T. (2018). Holomorphically Projective Mappings of Special Kahler Manifolds. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2025, 08004. <https://doi.org/10.1063/1.5064924>.
5. Kiosak, V.; Kusik, L.; Isaiev, V. (2022). Geodezychni Richi-symetrychni psevdorimanovi prostory [Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces]. *Proceedings of the International Geometry Center*, Vol. 15, P. 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
6. Kiosak, V.; Savchenko, O.; Gudyreva, O. (2019). On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2164, 040001. <https://doi.org/10.1063/1.5130793>.
7. Kahler, E. (1933). Uber eine bemerkenswerte Hermitesche Metric. *Sem. Hamburg. Univ.*, Vol. 9, P. 173–186.
8. Yano, K. (1965) *Differential geometry of complex and almost complex spaces*. Pergamon Press, (1965).
9. Suguri, T. (1956) Determination of various affine connexions in almost Hermitian space. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, A, 10, No 2, 151–166.
10. Reboucas, M.J.; Santos, J.; Teixeira, A.F.F. (2004) Classification of energy momentum tensors in $n = 5$ dimensional space-time. *Brazilian J. of Physics*, vol. 34, 2A, June, 535-543.
11. Fedorova, A.; Kiosak, V.; Matveev, V.; Rosemann, S. (2012). The only Kahler manifold with degree of mobility at least 3 is $(CP^n, g_{\text{Fubini-Study}})$, *Proceedings of the London Mathematical Society*. <https://doi.org/10.1112/plms/pdr053>.

12. Ehresmann, C.; Libermann, P. (1951) Sur les structures presque hermitiennes isotropes. *Acad., sci.*, 232, No 13, 1281—1283.
13. Schouten, J. A.; Dantzig, D. (1930) Ober unitare Geometric. *Math. Ann.*, 103, No 2, 319—346.
14. Yano, K. (1955) On three remarcable affine connexions in a almost Hermitian space. *Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.*, A58, No 1, 24—32.
15. Lichnerowicz, A. (1954) Un theoreme sur les espaces homogenes complexes. *Arch. Math.*, 5, No 1-3, 207—215.

Soloviov A. A.

MAPPINGS OF PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES WITH SEMI-SYMMETRIC AFFINOR STRUCTURE

Summary

The work consists of two parts. In the first part, using the deformation tensor of the connection, the general geometric properties of nontrivial mappings between two affine connection spaces without torsion are considered. A geometric object is constructed that represents the difference of the covariant derivatives of an arbitrary tensor with respect to the connections of the target space and its preimage. This object essentially depends only on the contractions of the tensor itself and the deformation tensor. As a consequence, a relation is obtained for the difference of the covariant derivatives of the deformation tensor with respect to the two different connections of the spaces involved in the mapping, which is expressed through the contractions of the deformation tensor with itself. Continuing the idea of studying the general properties of mappings, a four-valent tensor is introduced that characterizes the difference between the Riemann tensors of the spaces under consideration, as well as a two-valent tensor that characterizes the difference between their Ricci tensors. Explicit expressions for these two tensors are obtained in terms of differential-algebraic terms of the deformation tensor.

In the second part, pseudo-Riemannian spaces endowed with an antisymmetric almost complex semi-symmetric affinor structure are studied. The properties of arbitrary tensors in these spaces are investigated in general, and in particular, the affinor that defines the structure. Further, five special mappings of such spaces are examined individually, and it is shown that only the deformation tensor defining a mapping of the first type is nonzero. It is proven that if the spaces under consideration admit mappings of the first type, then they are K -spaces. For first-type mappings, geometric objects are constructed that relate the covariant derivatives of the two spaces, similar to the first part of the work; for these objects, explicit expressions are obtained in terms of the affinor and its contractions. Taking into account the semi-symmetry of the affinor structure, a four-valent geometric object is constructed as the alternation of the covariant derivative of the deformation tensor contracted with the affinor. Under the mapping, this object becomes negative when the sequence

of indices is permuted.

The research is carried out locally, using tensor methods without restrictions on the signature or definiteness of the metric tensor of the space under consideration. A special operation (conjugation), introduced for spaces endowed with an affinor structure, is widely applied, and its properties with respect to the Riemann and Ricci tensors are studied.

Keywords: Riemannian space, pseudo-Riemannian space, Riemann tensor, Ricci tensor, mapping of spaces, deformation tensor, affine connection spaces, covariant derivative, affinor, affinor structure, semi-symmetric affinor structure, antisymmetric affinor structure, almost complex space, conjugation operation, K -space, geometric object.

REFERENCES

1. Eisenhart, L.P. (1926). *Riemannian Geometry*. Princeton University Press. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 8 (2000).
2. Schouten, J.A.; Struik, D.J. (1935) *Introduction into new Methods in Differential Geometry*. (Germ. Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie.) 1935.
3. Lesechko, O.; Latysh, O.; Spsychak, T. (2020). Conformally flat Kahler spaces. *AIP Conference Proceedings*. Vol. 2302, 040004. <https://doi.org/10.1063/5.0034024>.
4. Kiosak, V.; Savchenko, O.; Shevchenko, T. (2018). Holomorphically Projective Mappings of Special Kahler Manifolds. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2025, 08004. <https://doi.org/10.1063/1.5064924>.
5. Kiosak, V.; Kusik, L.; Isaiev, V. (2022). Geodezychni Richi-symetrychni psevdorimanovi prostory [Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces]. *Proceedings of the International Geometry Center*, Vol. 15, P. 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>
6. Kiosak, V.; Savchenko, O.; Gudyreva, O. (2019). On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2164, 040001. <https://doi.org/10.1063/1.5130793>.
7. Kahler, E. (1933). Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metric. *Sem. Hamburg. Univ.*, Vol. 9, P. 173–186.
8. Yano, K. (1965) *Differential geometry of complex and almost complex spaces*. Pergamon Press, (1965).
9. Suguri, T. (1956) Determination of various affine connexions in almost Hermitian space. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, A, 10, No 2, 151–166.
10. Reboucas, M.J.; Santos, J.; Teixeira, A.F.F. (2004) Classification of energy momentum tensors in $n = 5$ dimensional space-time. *Brazilian J. of Physics*, vol. 34, 2A, June, 535–543.

-
11. Fedorova, A.; Kiosak, V.; Matveev, V.; Rosemann, S. (2012). The only Kahler manifold with degree of mobility at least 3 is $(CP^n, g_{\text{Fubini-Study}})$, *Proceedings of the London Mathematical Society*. <https://doi.org/10.1112/plms/pdr053>.
 12. Ehresmann, C.; Libermann, P. (1951) Sur les structures presque hermitiennes isotropes. *Acad., sci.*, 232, No 13, 1281–1283.
 13. Schouten, J. A.; Dantzig, D. (1930) Ober unitare Geometric. *Math. Ann.*, 103, No 2, 319–346.
 14. Yano, K. (1955) On three remarkable affine connexions in a almost Hermitian space. *Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.*, A58, No 1, 24–32.
 15. Lichnerowicz, A. (1954) Un theoreme sur les espaces homogenes complexes. *Arch. Math.*, 5, No 1-3, 207–215.