

УДК 517.925

В. М. Євтухов, доктор фіз.-мат. наук, професор
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
e-mail: evtukhov@onu.edu.ua

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0000-2458-7887>

Л. Л. Кольцова, ст. викладач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
кафедра математичного аналізу
вул. Змієнка Всеволода, 2, м. Одеса, 65082, Україна
e-mail: koltsova.liliya@gmail.com

ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0005-1133-676X>

АСИМПТОТИКА НЕЯВНИХ ФУНКЦІЙ НА НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

Досліджуються властивості неявної функції, заданої рівнянням $F(t, x_1, \dots, x_n, y) = 0$ у необмеженій області при $t \rightarrow +\infty$ та малих значеннях інших змінних. Ця стаття є узагальненням одного з результатів роботи [1] на багатовимірний випадок та доповнюють результати робіт [2], [3].

Доведено теорему існування та єдиності неперервної функції $y = y(t, x_1, \dots, x_n)$, яка має неперервні частинні похідні по змінним $x_1, \dots, x_n$. Встановлено ключову асимптотичну властивість $y(t, 0, \dots, 0) \sim -\frac{F(t, 0, \dots, 0)}{F_y(t, 0, \dots, 0)}$ при $t \rightarrow +\infty$.

Отримані результати є фундаментальними для асимптотичного аналізу розв'язків диференціальних рівнянь з сингулярностями на нескінченності та можуть знайти застосування в теорії динамічних систем і нелінійних коливань.

MSC: 34E05.

Ключові слова: неявна функція, необмежена область, асимптотична поведінка, сингулярність, диференціальні рівняння.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1\(43\).342062](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2024.1(43).342062).

Вступ

Дослідження властивостей неявних функцій, що визначаються функціональними співвідношеннями, є важливим для теорії диференціальних рівнянь. Особливий інтерес представляють випадки, коли такі співвідношення розглядаються

в необмежених областях, де незалежна змінна прямує до нескінченності. У подібних ситуаціях виникають нетривіальні питання щодо існування, диференційовності та асимптотичної поведінки відповідних розв'язків на нескінченності.

У даній роботі розглядається рівняння

$$F(t, x_1, \dots, x_n, y) = 0, \quad (1)$$

де $(t, x_1, \dots, x_n, y) \in D$, $D = D_0 \times [-b; b]$, $D_0 = [a; +\infty) \times [-h_1; h_1] \times \dots \times [-h_n; h_n]$, $a, h_k, b \in \mathbb{R}$, $h_k > 0$ ($k = \overline{1, n}$), $b > 0$. На функцію F накладаються такі умови:

- (i) $F, F'_{x_k}, F''_{yy} \in C(D; \mathbb{R})$ для всіх $k = \overline{1, n}$;
- (ii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t, 0, \dots, 0) = 0$;
- (iii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} F'_y(t, 0, \dots, 0) = A_1 \neq 0$;
- (iv) $\sup_D |F''_{yy}(t, x_1, \dots, x_n, y)| = A_2 < +\infty$.

Метою роботи є доведення існування єдиної неперервної функції $y = y(t, x_1, \dots, x_n)$, яка задовольняє рівняння (1) у деякій підобласті $D_1 \subset D$, та дослідження її асимптотичної поведінки при $t \rightarrow +\infty$ і $x_k \rightarrow 0$ ($k = \overline{1, n}$).

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Для рівняння (1) має місце наступне твердження.

Теорема. *Нехай для функції F виконуються умови (i)–(iv). Тоді в деякій області $D_1 = D_{01} \times [-b_0; b_0]$, де $D_{01} = [t_0; +\infty) \times [-h_1^0; h_1^0] \times \dots \times [-h_n^0; h_n^0]$, t_0, h_k^0 ($k = \overline{1, n}$) і b_0 задовольняють нерівності $t_0 \geq a$, $0 < h_k^0 \leq h_k$, $b_0 \in (0; b_0]$, $\frac{4A_2b_0}{|A_1|} < 1$, рівняння (1) визначає єдину неперервну на множині D_{01} функцію $y = y(t, x_1, \dots, x_n)$, таку що $F(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n)) \equiv 0$, $\frac{\partial y}{\partial x_k} \in C(D_{01}; \mathbb{R})$ ($k = \overline{1, n}$), $y(+\infty, 0, \dots, 0) = 0$ і*

$$y(t, 0, \dots, 0) \sim -\frac{F(t, 0, \dots, 0)}{F'_y(t, 0, \dots, 0)} \quad (t \rightarrow +\infty). \quad (2)$$

Доведення. Оскільки функція $F(t, x_1, \dots, x_n, y)$ диференційована за змінною y при $(t, x_1, \dots, x_n) \in D_0$, то, згідно формули Тейлора із залишковим членом у формі Пеано, рівняння (1) можна записати у вигляді:

$$F(t, x_1, \dots, x_n, y) = F(t, x_1, \dots, x_n, 0) + F'_y(t, x_1, \dots, x_n, 0) \cdot y + R(t, x_1, \dots, x_n, y) = 0, \quad (3)$$

де $R(t, x_1, \dots, x_n, y) = r(t, x_1, \dots, x_n, y) \cdot y$, $r(t, x_1, \dots, x_n, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$ для будь-якої точки $(t, x_1, \dots, x_n) \in D_0$.

З (3) випливає, що $y = y(t, x_1, \dots, x_n)$ – неявна функція, яка визначається співвідношенням

$$y(t, x_1, \dots, x_n) = \frac{-F(t, x_1, \dots, x_n, 0) - R(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n))}{F'_y(t, x_1, \dots, x_n, 0)}. \quad (4)$$

Оскільки

$$R(t, x_1, \dots, x_n, y) = F(t, x_1, \dots, x_n, y) - F(t, x_1, \dots, x_n, 0) - F'_y(t, x_1, \dots, x_n, 0) \cdot y,$$

тоді

$$R'_y(t, x_1, \dots, x_n, y) = F'_y(t, x_1, \dots, x_n, y) - F'_y(t, x_1, \dots, x_n, 0).$$

Розглянемо та оцінімо при $(t, x_1, \dots, x_n) \in D_0$ і фіксованих $y_1, y_2 \in [-b; b]$ ($y_1 < y_2$) різницю $F'_y(t, x_1, \dots, x_n, y_2) - F'_y(t, x_1, \dots, x_n, y_1)$, застосувавши теорему Лагранжа за змінною y :

$$F'_y(t, x_1, \dots, x_n, y_2) - F'_y(t, x_1, \dots, x_n, y_1) = F''_{yy}(t, x_1, \dots, x_n, y^*) \cdot (y_2 - y_1),$$

де $y^* \in (y_1; y_2)$.

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} \sup_{D_0} |F'_y(t, x_1, \dots, x_n, y_2) - F'_y(t, x_1, \dots, x_n, y_1)| &\leq \\ &\leq \sup_{D_0} |F''_{yy}(t, x_1, \dots, x_n, y^*)| \cdot |y_2 - y_1| \leq \\ &\leq \sup_D |F''_{yy}(t, x_1, \dots, x_n, y)| \cdot |y_2 - y_1| = A_2 \cdot |y_2 - y_1|. \end{aligned}$$

Покладаючи $y_1 = 0$, $y_2 = y$, для будь-якого фіксованого $y \in [-b; b]$ отримаємо:

$$\sup_{D_0} |R'_y(t, x_1, \dots, x_n, y)| \leq A_2 \cdot |y|. \quad (5)$$

Аналогічно розглянемо і оцінімо при $(t, x_1, \dots, x_n) \in D_0$ і фіксованих $y_1, y_2 \in [-b; b]$ різницю $R(t, x_1, \dots, x_n, y_2) - R(t, x_1, \dots, x_n, y_1)$, застосувавши теорему Лагранжа за змінною y :

$$R(t, x_1, \dots, x_n, y_2) - R(t, x_1, \dots, x_n, y_1) = R'_y(t, x_1, \dots, x_n, y^{**}) \cdot (y_2 - y_1),$$

де $y^{**} \in (y_1; y_2)$.

Враховуючи (5) отримаємо, що

$$\begin{aligned} \sup_{D_0} |R(t, x_1, \dots, x_n, y_2) - R(t, x_1, \dots, x_n, y_1)| &\leq \\ &\leq \sup_{D_0} |R'_y(t, x_1, \dots, x_n, y)| \cdot |y_2 - y_1| \leq A_2 \cdot |y_2 - y_1|^2. \end{aligned}$$

Вважаючи $y_1 = 0$, $y_2 = y$, для будь-якого фіксованого $y \in [-b; b]$ отримаємо:

$$\sup_{D_0} |R(t, x_1, \dots, x_n, y)| \leq A_2 \cdot |y|^2. \quad (6)$$

В силу (6) та властивостей (ii), (iii) функції F існує область $D_{01} = [t_0; +\infty) \times [-h_1^0; h_1^0] \times \dots \times [-h_n^0; h_n^0]$, $D_{01} \subset D_0$, де $t_0 \geq a$, $0 < h_k^0 \leq h_k$ ($k = \overline{1, n}$), для якої:

- 1) $\sup_{D_{01}} |F(t, x_1, \dots, x_n, 0)| \leq \frac{b_0 |A_1|}{4}$, де $b_0 \in (0; b]$ та $\frac{4A_2 b_0}{|A_1|} < 1$;
- 2) $\inf_{D_{01}} |F'_y(t, x_1, \dots, x_n, 0)| > \frac{|A_1|}{2}$;
- 3) $\sup_{D_{01}} |R(t, x_1, \dots, x_n, y)| \leq \sup_{D_0} |R(t, x_1, \dots, x_n, y)| \leq A_2 \cdot |y|^2$.

Розглянемо банаховий простір B обмежених неперервних у D_{01} функцій $y(t, x_1, \dots, x_n)$ з нормою $\|y\| = \sup_{D_{01}} |y(t, x_1, \dots, x_n)|$.

У банаховому просторі B розглянемо підпростір $B_1 \subset B$ функцій $y \in B$, для яких $\|y\| \leq b_0$, і введемо на B_1 оператор

$$T(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n)) \equiv \frac{-F(t, x_1, \dots, x_n, 0) - R(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n))}{F'_y(t, x_1, \dots, x_n, 0)}. \quad (7)$$

Використовуючи принцип стислих відображень, покажемо, що $T(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n)) = y(t, x_1, \dots, x_n)$, тобто оператор T має нерухому точку $y \in B_1$.

- 1) Доведемо, що $T(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n)) \in B_1$ при $y \in B_1$.

Оскільки $y \in C(D_{01}; \mathbb{R})$, то в силу структури оператора $T \in C(D_{01}; \mathbb{R})$.

З $\|y(t, x_1, \dots, x_n)\| \leq b_0$ випливає, що

$$\begin{aligned} \|T(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n))\| &= \left\| \frac{-F(t, x_1, \dots, x_n, 0) - R(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n))}{F'_y(t, x_1, \dots, x_n, 0)} \right\| \leq \\ &\leq \frac{\left(\sup_{D_{01}} |F(t, x_1, \dots, x_n, 0)| + \sup_{D_{01}} |R(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n))| \right)}{\inf_{D_{01}} |F'_y(t, x_1, \dots, x_n, y)|} \leq \\ &\leq \frac{2}{|A_1|} \left(\frac{b_0 |A_1|}{4} + A_2 |y|^2 \right) \leq \frac{b_0}{2} + \frac{b_0}{2} \leq b_0. \end{aligned}$$

2) Перевіримо умову стискання.

Оберемо довільним чином $y_1(t, x_1, \dots, x_n), y_2(t, x_1, \dots, x_n) \in B_1$, тоді

$$\begin{aligned} \|T(t, x_1, \dots, x_n, y_2(t, x_1, \dots, x_n)) - T(t, x_1, \dots, x_n, y_1(t, x_1, \dots, x_n))\| &= \\ &= \left\| \frac{R(t, x_1, \dots, x_n, y_2(t, x_1, \dots, x_n)) - R(t, x_1, \dots, x_n, y_1(t, x_1, \dots, x_n))}{F'_y(t, x_1, \dots, x_n, 0)} \right\| \leq \\ &\leq \frac{A_2}{\inf_{D_{01}} |F'_y(t, x_1, \dots, x_n, 0)|} \|y_2(t, x_1, \dots, x_n) - y_1(t, x_1, \dots, x_n)\|^2 \leq \\ &\leq \frac{2A_2(\|y_2(t, x_1, \dots, x_n)\| + \|y_1(t, x_1, \dots, x_n)\|)}{|A_1|} \|y_2(t, x_1, \dots, x_n) - y_1(t, x_1, \dots, x_n)\| \leq \\ &\leq \frac{4A_2 b_0}{|A_1|} \|y_2(t, x_1, \dots, x_n) - y_1(t, x_1, \dots, x_n)\|. \end{aligned}$$

Тобто оператор T відображає простір B_1 у себе і є оператором стискання. Тому згідно принципу стислих відображень існує єдина функція $y = y(t, x_1, \dots, x_n) \in B_1$, така що

$$y(t, x_1, \dots, x_n) = T(t, x_1, \dots, x_n, y(t, x_1, \dots, x_n)).$$

В силу (7) ця неперервна на множині D_{01} функція є єдиним розв'язком рівняння (4), що задовольняє умову $\|y\| \leq b_0$. З урахуванням цієї умови і оскільки $F \in C(D; \mathbb{R})$, то за локальною теоремою о диференціюванні неявної функції можна стверджувати, що $y, \frac{\partial y}{\partial x_k} \in C(D_{01}; \mathbb{R})$ ($k = \overline{1, n}$).

Доведемо, що функція $y(t, x_1, \dots, x_n)$ при $x_k = 0$ ($k = \overline{1, n}$) має властивість (2).

Функція $y(t, x_1, \dots, x_n)$ задовольняє рівнянню (3), яке, поклавши $x_k = 0$ ($k = \overline{1, n}$), можна записати у вигляді

$$F(t, 0, \dots, 0) + F'_y(t, 0, \dots, 0)y(t, 0, \dots, 0) + r(t, 0, \dots, 0, y(t, 0, \dots, 0))y(t, 0, \dots, 0) \equiv 0.$$

Звідси, враховуючи, що $F'_y(+\infty, 0, \dots, 0) = A_1 \neq 0$,

$$y(t, 0, \dots, 0) \cdot \left(1 + \frac{r(t, 0, \dots, 0, y(t, 0, \dots, 0))}{F'_y(t, 0, \dots, 0)} \right) = -\frac{F(t, 0, \dots, 0)}{F'_y(t, 0, \dots, 0)}.$$

З останньої рівності випливає властивість (2).

Теорему доведено

Висновки

У даній роботі доведено існування єдиної неперервної неявної функції $y = y(t, x_1, \dots, x_n)$, яка задовольняє рівняння (1) у деякій підобласті $D_1 \subset D$. Встановлено, що ця функція є диференційовною за змінними x_k ($k = \overline{1, n}$) і має асимптотичну поведінку (2) при $t \rightarrow +\infty$.

Отримані результати створюють основу для асимптотичного аналізу розв'язків диференціальних рівнянь із сингулярностями на нескінченності. Вони відкривають перспективи для застосування у дослідженні динамічних систем, теорії нелінійних коливань та інших суміжних галузях, пов'язаних із поведінкою розв'язків у необмежених областях.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Koltsova L., Kostin A.** The Asymptotic behavior of Solutions of Monotone type of First-order Nonlinear Ordinary Differential Equations, unresolved for the derivative [Text] / L. Koltsova, A. Kostin // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2012. – № 57. – С. 51–74.
2. **Євтухов В. М.** Про зникаючі на нескінченності розв'язки неавтономних систем квазілінійних диференціальних рівнянь [Текст] / В.М. Євтухов // Диференц. рівняння. – 2003. – Т. 39, № 4. – С. 441–452.
3. **Євтухов В. М., Самойленко А. М.** Умови існування зникаючих в особливій точці розв'язків у реальних неавтономних системах квазілінійних диференціальних рівнянь [Текст] / В.М. Євтухов, А.М. Самойленко // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, № 1. – С. 52–80.

Evtukhov V. M., Koltsova L. L.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF IMPLICIT FUNCTIONS ON UNBOUNDED DOMAINS

Summary

The properties of an implicit function defined by the equation $F(t, x_1, \dots, x_n, y) = 0$ in an unbounded domain as $t \rightarrow +\infty$ and for small values of the other variables are investigated. This article generalizes one of the results of [1] to the multidimensional case and supplements the results of the works [2], [3].

A theorem on the existence and uniqueness of a continuous function $y = y(t, x_1, \dots, x_n)$ with continuous partial derivatives with respect to the variables $x_1, \dots, x_n$ is proved. The key asymptotic property $y(t, 0, \dots, 0) \sim -\frac{F(t, 0, \dots, 0)}{F'_y(t, 0, \dots, 0)}$ as $t \rightarrow +\infty$ is established.

The obtained results are fundamental for the asymptotic analysis of solutions to differential equations with singularities at infinity and can find applications in the theory of dynamical systems and nonlinear oscillations.

Keywords: implicit function, unbounded domain, asymptotic behavior, singularity, differential equations.

REFERENCES

1. **Koltsova L., Kostin A.** The Asymptotic behavior of Solutions of Monotone type of First-order Nonlinear Ordinary Differential Equations, unresolved for the derivative [Text] / L. Koltsova, A. Kostin // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2012. – No. 57. – C. 51–74.
2. **Yevtukhov B. M.** On solutions vanishing at infinity of nonautonomous systems of quasilinear differential equations [Text] // Differential Equations. – 2003. – Vol. 39, No. 4. – P. 441–452.
3. **Yevtukhov V. M., Samoilenko A. M.** Yevtukhov V. M., Samoilenko A. M. Conditions for the existence of solutions vanishing at a singular point in real nonautonomous systems of quasilinear differential equations [Text] / V.M. Yevtukhov, A.M. Samoilenko // Ukrainian Mathematical Journal. – 2010. – Vol. 62, No. 1. – P. 52–80.