Дослідження в математиці і механіці. – 2023. – Т. 28, вип. 1–2 (41–42). – С. 185–199

УДК 510.28+510.635(045)

Н. А. Якімова
Одеській національний університет ім. І. І. Мечнікова

ОПЕРАЦІЇ НАД БЛОЧНИМИ ПРЕДИКАТНИМИ МАТРИЦЯМИ

В даній статті розглянуто можливість виконання основних логічних операцій над матрицями, які розділено на прямокутні блоки в якійсь довільний спосіб. Отримані результати проілюстровані на прикладі предикатних логічних матриць, що задані над полем скінченних предикатів довільної арності. Також обґрунтовано можливість розповсюдити отримані результати на булеві матриці (вважається, що їх задано над полем скінченних предикатів нульової арності). В той же час з використанням апарату багатозначної логіки, відштовхуючись від булевих логічних матриць, отримані результати можна розповсюдити на дослідження логічних об'єктів, що не є булевими. Блочне розділення матриць дозволяє розбивати інформацію, подану у матричному вигляді, на частини, обробляти їх окремо, а потім поєднувати в єдине ціле, дотримуючись певних правил та обмежень, що описані в даній статті. Ці методи можуть знайти своє застосування в теорії графів, теорії алгоритмів, програмуванні та інших сферах теоретичної та практичної діяльності, що так чи інакше пов'язані з математичною логікою.

У класичній лінійній алгебрі широко використається апарат матриць. Але класична лінійна алгебра має справу із безперервними об'єктами. Логічна алгебра, побудована за аналогією з класичною лінійною алгеброю, будує ті ж самі моделі за допомогою дискретних об'єктів, що мають логічну структуру і підкоряються відповідним законам. Це призводить до суттєвих відмінностей у функціонуванні побудованих моделей. Дана стаття присвячена матрицям, в якості елементів для яких взято елементарні логічні елементи, а саме скінченні предикати довільної арності. В роботі досліджені властивості таких матриць та особливості їх застосування за умови їх блочного подання. Також розглянуто основні операції над такими матрицями. Крім звичайних операцій, що мають місце в класичній лінійній алгебрі, логічні структури дозволяють виконувати це декілька операцій. Особливу увагу приділено операції добутку блочних предикатних матриць з урахуванням їх особливостей, пов'язаних з логічною структурою таких об'єктів.

MSC: 03G05, 03G25, 03F52, 06E25, 15B34.
Ключові слова: булева матриця, скінченний предикат, предикатна матриця, блочне подання, елементарні логічні операції, арність предикатів, логічний скаляр, багатозначна логіка.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305269.

Вступ

Устояні уявлення про математичну логіку як про науку, що вивчає закони мислення із застосуванням апарата математики, головним чином,

Надійшла 01.02.2023

для потреб самої математики, у сучасних умовах стає занадто вузьким [1]. Сьогодення ставить перед наукою все більшу кількість задач, пов'язаних із комп'ютеризацією. Саме потреби комп'ютерної обробки інформації потребують дослідження можливостей матричного вирахування для матриць логічного типу. Такі матриці мають дуже широке застосування. Ними можна подавати, наприклад, основні операції над графами [2]. Також логічні конструкції використовуються для побудови математичних моделей природної мови [3]. Тому актуальною є задача створення математичного апарату, який би дозволяв обробляти матриці, елементами яких є об'єкти довільної логічної природи за аналогією із звичайним алгебраїчним матричним апаратом.

1. Попередні результати

Розрізняють логічні матриці двох типів: булеві та предикатні.

Означення 1. Матриця називається булевою, якщо її елементами є логічні скаляри із поля $K = \{0, 1\}$ [3].

Тобто елементами булевої матриці є нулі та одиниці. Наприклад, булевою буде матриця [2]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Означення 2. Матриця називається предикатною, якщо усі її елементи узято із одного й того ж поля скінченних предикатів довільної арності [3].

Означення 3. Скінченним n-місним предикатом (предикатом арності n) над деяким алфавітом G називається будь-яка функція $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від n аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ заданих на множині G, що приймає значення із двохелементної множини $K = \{0, 1\}$.

Булеві матриці можна розглядати як окремий випадок предикатних матриць. При цьому можна вважати, що арність предикатів, що складають скалярне поле, дорівнює нулю.

Часто інформація для обробки надається частинами, кожна з яких може оброблятися як окремо, так і як складова цілісної системи. Поєднання цих частин задля сумісної обробки дозволяє зробити апарат блочних матриць.

Основні результати

Візьмемо довільну логічну матрицю $A[4]$ та поділимо її на частини горизонтальними та вертикальними прямими лініями. Отримані частини можна розглядати як логічні матриці меншої розмірності, які, в свою чергу, є елементами початкової матриці A.

Означення 4. Прямокутні частини, на які можна поділити довільну логічну матрицю A, які при цьому не перетинаються між собою, але сукупно утворюють всю вказану матрицю, називаються клітками або блоками матриці A.

Означення 5. В свою чергу, матриця A, яку розділено в описаний спосіб, називається блочною.

Існує декілька варіантів розбиття однієї й тієї ж самої матриці A на блоки [5]. Наприклад,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

тощо.

Для блочних логічних матриць мають місце ті ж самі властивості, що й для звичайних булевих та предикатних матриць. Операції над ними здійснюються за тими ж правилами, що виконуються для звичайних логічних матриць [4]. Припустимо, що деяку логічну матрицю A розділено на блоки в якійсь один з можливих способів:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}.$$

Щоб виконати операцію логічного добутку на скаляр α описаної матриці α, треба виконати кон'юнкцію логічного скаляру α з усіма елементами матриці A, і як наслідок, з усіма елементами кожного з її блоків. Отже,

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha A_{11} & \dots & \alpha A_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \alpha A_{m1} & \dots & \alpha A_{mn} \end{pmatrix}.$$

Візьмемо за поле логічних скалярів множину одномісних скінченних предикатів, заданих над алфавітом $K = 0, 1$:

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Як було показано в [1], логічні операції над скінченними предикатами однакової арності виконуються порозрядно.

Оберемо, наприклад, за логічний скаляр $\alpha = P_2(x) = (1 \quad 0)$. В якості матриці, заданої над цим скалярним полем, розглянемо блочне розбиття предикатної матриці

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_0 & P_2 & P_1 \\ \hline P_3 & P_1 & P_0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Тоді маємо:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2 \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_0 & P_2 \end{pmatrix} & P_2 \begin{pmatrix} P_3 \\ P_1 \end{pmatrix} \\ P_2 \begin{pmatrix} P_3 & P_1 \end{pmatrix} & P_2 \begin{pmatrix} P_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 \wedge P_1 & P_2 \wedge P_2 \\ P_2 \wedge P_0 & P_2 \wedge P_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} P_2 \wedge P_3 \\ P_2 \wedge P_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} P_2 \wedge P_3 & P_2 \wedge P_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} P_2 \wedge P_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} P_0 & P_2 & P_2 \\ P_0 & P_2 & P_0 \\ \hline P_2 & P_0 & P_0 \end{array}\right).$$

Візьмемо тепер логічну матрицю B, що має ту ж саму розмірність, що й A, та розділену на блоки в спосіб, аналогічний розділенню матриці A:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ B_{m1} & \dots & B_{mn} \end{pmatrix}.$$

Згідно з означенням диз'юнкції логічних матриць [4], елементи матриці $C_\vee = A \vee B$ будуть дорівнювати диз'юнкціям їх відповідних елементів. З цього випливає, що матриця C буде розділеною на блоки так само, як і матриці A і B, причому її блоки будуть відповідати результатам диз'юнкції відповідних блоків матриць A і B, тобто

$$C_\vee = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ C_{m1} & \dots & C_{mn} \end{pmatrix} = A \vee B = \begin{pmatrix} A_{11} \vee B_{11} \dots\dots\dots A_{1n} \vee B_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{m1} \vee B_{m1} \quad \dots \quad A_{mn} \vee B_{mn} \end{pmatrix}.$$

Наприклад, для наведеної вище матриці A та матриці

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} P_3 & P_2 & P_1 \\ P_2 & P_1 & P_1 \\ \hline P_0 & P_1 & P_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

маємо:

$$A \vee B = \begin{pmatrix} A_{11} \vee B_{11} & A_{12} \vee B_{12} \\ A_{21} \vee B_{21} & A_{22} \vee B_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}P_1 & P_2\\P_0 & P_2\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}P_3 & P_2\\P_2 & P_1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}P_3\\P_1\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}P_1\\P_1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}P_3 & P_1\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}P_0 & P_1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}P_0\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}P_3\end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} P_3 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_3 & P_1 \\ \hline P_3 & P_1 & P_3 \end{array}\right).$$

Згідно з означенням кон'юнкції логічних матриць [4], елементами матриці $C_\wedge = A \wedge B$ є результати кон'юнкцій відповідних елементів матриць і . З цього випливає, що розділення матриці $C_\wedge$ є таким самим, що й для матриць і , причому її блоки дорівнюють кон'юнкціям відповідних блоків матриць і , тобто

$$C_\wedge = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{m1} & \dots & C_{mn} \end{pmatrix} = A \wedge B = \begin{pmatrix} A_{11} \wedge B_{11} & \dots & A_{1n} \wedge B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} \wedge B_{m1} & \dots & A_{mn} \wedge B_{mn} \end{pmatrix}$$

Для наведених вище матриць A і B їх кон'юнкцією буде

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} \wedge B_{11} & A_{12} \wedge B_{12} \\ A_{21} \wedge B_{21} & A_{22} \wedge B_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_0 & P_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_3 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} P_3 \\ P_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_1 \\ P_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} P_3 & P_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_0 & P_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} P_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} \begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} P_1 & P_2 & P_1 \\ P_0 & P_0 & P_1 \\ \hline P_0 & P_1 & P_0 \end{array} \right)$$

Згідно з означенням заперечення логічних матриць [1], елементами матриці $\overline{A}$ є заперечення відповідних елементів матриці A, тобто $\overline{a}_{ij}$. Отже, заперечення блочної матриці $\overline{A}$ буде розділено на блоки так само, як і початкова матриця A, а її елементами будуть заперечення відповідних блоків матриці A, тобто

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{A}_{11} & \dots & \overline{A}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{A}_{m1} & \dots & \overline{A}_{mn} \end{pmatrix}$$

Таким чином, для наведеної вище блочної предикатної матриці маємо:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_0 & P_2 \end{pmatrix}} & \overline{\begin{pmatrix} P_3 \\ P_1 \end{pmatrix}} \\ \overline{\begin{pmatrix} P_3 & P_1 \end{pmatrix}} & \overline{\begin{pmatrix} P_0 \end{pmatrix}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{P}_1 & \overline{P}_2 \\ \overline{P}_0 & \overline{P}_2 \\ \overline{P}_3 & \overline{P}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \overline{P}_3 \\ \overline{P}_1 \\ \overline{P}_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}} & \overline{\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}} \\ \overline{\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}} & \overline{\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}} \\ \overline{\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}} & \overline{\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}} \\ \overline{\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}} \\ \overline{\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}} \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} P_2 & P_1 & P_0 \\ P_3 & P_1 & P_2 \\ \hline P_0 & P_2 & P_3 \end{array}\right)$$

У випадку добутку блочних логічних матриць аналогія з добутком звичайних логічних матриць не є вже такою очевидною. Розглянемо логічні матриці A і B:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,p} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \cdots & B_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,1} & B_{n,2} & \cdots & B_{n,p} \end{pmatrix}$$

тобто розділені на блоки в такий спосіб, щоб кількість стовпців блоку A_{ij} збігалася б з кількістю рядків блоку $B_{jk}(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, k = \overline{1,p})$. Іншими словами, всі горизонтальні розміри в матриці-лівому множнику збігалися з відповідними вертикальними розмірами в матриці-правому множнику [5]. Лише за умови дотримання цього правила розбиття

$$C_{jk} = A_{i1}B_{1k} \vee A_{in}B_{nk}$$

має сенс. Матриці, розділені на блоки в описаний спосіб, перемножуються аналогічно до звичайних логічних матриць.

Теорема. *Блоки матриці, що є результатом добутку блочних логічних матриць A і B дорівнюють диз'юнкціям добутків блоків рядків матриці A на блоки відповідних стовпців матриці B.*

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли матриці A і B мають по два блоки, тобто будемо доводити правило добутку блочних логічних матриць в наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = A_1B_1 \vee A_2B_2 \tag{1}$$

Нехай $a^1_{ij}, a^2_{ir}, b^1_{jt}, b^2_{rt}$– елементи матриць, що відповідають блокам A_1, A_2, B_1, B_2 відповідно $\left(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, r = \overline{1,s}, t = \overline{1,p}\right)$. Виконуючи дії, вказані в лівій частині виразу (1), отримуємо елемент матриці $C{=}AB$, що стоїть в i-тому рядку та t-тому стовпці:

$$c_{it} = a^1_{i1}b^1_{1t} \vee \dots \vee a^1_{in}b^1_{nt} \vee a^2_{i1}b^2_{1t} \vee \dots \vee a^2_{is}b^2_{st}$$

Обчислюючи елемент, що стоїть в i-тому рядку і t-тому стовпці матриці, записаної в правій частині виразу (1), ми отримаємо ту ж саму рівність, що й для c_{it}, що й доводить рівність (1). Тепер доведемо правило добутку блочних логічних матриць в загальному випадку:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots A_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = A_1B_1 \vee A_2B_2 \vee \dots \vee A_nB_n \tag{2}$$

де елементи A_i та B_i є окремими блоками. При $n = 2$ ця формула є вже доведеною вище рівністю (1). Подальше доведення будемо проводити за допомогою методу математичної індукції. Припустимо, що для всіх $n = q - 1$ співвідношення (2) виконується. Доведемо його істинність для $n = q$. Для цього позначимо

$$X = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots A_B \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = A_1B_1 \vee A_2B_2 \vee \dots \vee A_nB_n.$$

Тоді, згідно з рівністю (1), маємо:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & ... & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ Y \end{pmatrix} =$$

$$= A_1B_1 \vee XY = A_1B_1 \vee A_2B_2 \vee \ldots \vee A_nB_n.$$

В аналогічний спосіб отримуємо рівність

$$A\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & \ldots & AB_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

та рівність

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_1B \\ A_2B \\ \vdots \\ A_nB \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Тепер із рівностей (2), (3) і (4) виводиться загальна формула

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} \dots C_{1p} \\ \dots\dots\dots\dots \\ C_{m1} \dots C_{mp} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Для цього позначимо рядки блоків матриці A через $A_1, ..., A_m$, а стовпці блоків матриці B через $B_1, ..., B_p$. Згідно з рівністю (4), можна записати наступне:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_1B \\ A_2B \\ \vdots \\ A_mB \end{pmatrix}.$$

Якщо підставити в це співвідношення вираз для розбиття матриці B, отримаємо

$$AB = \begin{pmatrix} A_1(B_1 \quad \dots \quad B_p) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_m(B_1 \quad \dots \quad B_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 \quad \dots \quad A_1B_p \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_mB_1 \quad \dots \quad A_mB_p \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Але згідно з рівністю (2), отримуємо:

$$A_iB_k = (A_{i1} \quad \dots \quad A_{in}) \begin{pmatrix} B_{1k} \\ \vdots \\ B_{nk} \end{pmatrix} = A_{i1}B_{1k} \vee \dots \vee A_{in}B_{nk} = C_{ik}.$$

Якщо підставити цей результат до рівності (6), отримаємо співвідношення (5). Отже, тим амим доведено правило добутку блочних логічних матриць. Теорему доведено.

Отже, для можливості обчислення добутку двох блочних предикатних матриць A' і B' четвертого порядку їх розділення на блоки має бути, наприклад, наступним:

$$A^{`}=\left(\begin{array}{cc|cc} P_1 & P_2 & P_3 & P_1 \\ P_0 & P_3 & P_1 & P_1 \\ P_2 & P_2 & P_0 & P_3 \\ \hline P_1 & P_0 & P_3 & P_3 \end{array}\right), B^{`}=\left(\begin{array}{ccc|c} P_0 & P_3 & P_2 & P_2 \\ P_2 & P_2 & P_1 & P_1 \\ \hline P_3 & P_3 & P_0 & P_2 \\ P_3 & P_0 & P_3 & P_3 \end{array}\right).$$

Для цих матриць їх добуток буде дорівнювати

$$A^{`}B^{`}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_0 & P_3 \\ P_2 & P_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} P_3 & P_1 \\ P_1 & P_1 \\ P_0 & P_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} P_1 & P_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} P_3 & P_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 & P_3 & P_2 \\ P_2 & P_2 & P_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} P_2 \\ P_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} P_3 & P_3 & P_0 \\ P_3 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$=\left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_0 & P_3 \\ p_2 & P_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_0 & P_3 & P_2 \\ P_2 & P_2 & P_1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_3 & P_1 \\ P_1 & P_1 \\ P_0 & P_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_3 & P_3 & P_0 \\ P_3 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} P_1 & P_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_0 & P_3 & P_2 \\ P_2 & P_2 & P_1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_3 & P_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_3 & P_3 & P_0 \\ P_3 & P_0 & P_3 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c} \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_0 & P_3 \\ P_2 & P_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_2 \\ P_1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_3 & P_1 \\ P_1 & P_1 \\ P_0 & P_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} P_1 & P_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_2 \\ P_1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} P_3 & P_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \end{array}\right) =$$

$$=\left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

$$
\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}
\end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}
&
\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}
&
\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}
\end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}
\end{pmatrix}=
$$

$$
=\left(\begin{array}{ccc|c}
\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\\
\hline
\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}
\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}
P_3&P_3&P_1&P_3\\
P_3&P_3&P_1&P_1\\
P_3&P_2&P_3&P_3\\
\hline
P_3&P_3&P_3&P_3
\end{array}\right).
$$

Для розглянутих вище предикатних матриць A і B третього порядку наведений варіант їх одночасного розділення на блоки є припустимим для обчислення добутку цих матриць. Але при збереженні розбиття для матриці A жодний інший варіант розбиття матриці B вже не є припустимим, тому що будь-яке інше розбиття матриці B порушує умову рівності відповідних горизонтальних та вертикальних розмірностей блоків цих матриць [5].

Висновки

При доведенні отриманих результатів арність предикатів скалярного поля, над яким можуть бути задані досліджувані логічні матриці, ніяким чином не було обмежено. Тобто ця арність може дорівнювати, зокрема, нулю. З цього випливає, що отримані результати є узагальненими і можуть бути застосовані як до предикатних, так і до булевих матриць. Більш за те, інколи виникає потреба застосування математичного апарату логічних матриць для довільних матриць, які не завжди є булевими. В цьому випадку за умови використання загального означення логічних операцій диз'юнкції та кон'юнкції для багатозначної логіки як $x \vee y = max\{x, y\}$ та $x \wedge y = min\{x, y\}$ [6], отримані результати зберігаються і для багатозначних логічних конструкцій. Це може стати в нагоді при дослідженні, наприклад, матричного апарату для задання операцій над графами [2].

Список літератури

1. **Якімова Н.А.** Предикатні логічні матриці / Н.А. Якімова // Вісник Одеського національного університету ім.І.І.Мечнікова. Дослідження в математиці і механіці. – 2019. – Том 24. – Випуск 2 (34) – С.67-74.
2. **Якімова Н.А.** Матричне подання операцій над графами / Н.А. Якімова, М.Є. Клішин // Вісник Одеського національного університету ім.І.І.Мечнікова. Дослідження в математиці і механіці. – 2022. – Том 27. – Випуск 1 – 2 (38 – 39). – С.121-141.
3. **Якимова Н.А.** Алгебраический синтез простых словосочетаний в предложение естественного языка / Н.А. Якимова // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. – 2000. – Вып. 111. – С. 22-27.
4. **Гвоздинская Н.А.** О логических матрицах / Н.А. Гвоздинская, З.В. Дударь, С.А. Пославский, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко// Проблемы бионики. Вып.48, 1998. Стр. 12 – 22.
5. **Гантмахер Ф.** Теорія матриць. – Київ: Надруковано в Україні, 2010. – 560 с.
6. **Шапорев С.Д.** Математическая логика. Курс лекций и практических занятий/ С.Д. Шапорев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.

Yakimova N.A.

OPERATIONS ON BLOCK PREDICATE MATRICES

Summary

This article discusses the possibility of performing basic logical operations on matrices that are divided into rectangular blocks in an arbitrary manner. The results obtained are illustrated using the example of predicate logical matrices defined over a field of finite predicates of arbitrary arity. The possibility of extending the results obtained to Boolean matrices is also justified (they are considered to be defined over a field of finite predicates of zero arity). At the same time, using the apparatus of multivalued logic, starting from Boolean logical matrices, the results obtained can also be extended to the study of logical objects that are not Boolean. Block partitioning of matrices allows you to divide information specified in matrix form into parts, process these parts separately, and then combine them into a single whole, adhering to certain rules and restrictions described in this article. These methods can find their application in graph theory, in the theory of algorithms, programming and in other areas of theoretical and practical activity that are in one way or another related to mathematical logic.

Key words: boolean matrix, finite predicate, predicate matrix, block partitioning, elementary logical operations, arity of predicates, logical scalar, multivalued logic.

REFERENCES

1. Yakimova N.A. (2019). Predykatni logichni matritzi [Predicative logical matrices]. *Visnyk Odes'kogo Natzional'nogo universitetu. Researches in Mathematics and Mechanics.* Vol. 24, Iss. 2(34), P.67–74.
2. Yakimova N.A., Klishin N.E. (2022). Matrychne podannya operatziy nad grafami [Matrix representation of operation on graphs]. *Visnyk Odes'kogo Natzional'nogo universitetu. Researches in Mathematics and Mechanics.* Vol.27, Iss. 1–2(38–39), P.121–141.
3. Yakimova N.A. (2000). Algebraicheskiy sintez prostyh slovosochetaniy v predlozhenie estestvennogo yazyka [Algebraic synthesis of simple phrases into natural language sentences]. *Avtomatizirovannye systemy upravleniya s pribory avtomatiki.* Vol. 111, P. 22–27.
4. Gvozdinskaya N.A., Dudar.Z.V., Poplavskiy S.A., Shabanov-Kushnarenko Y.P. (1998). O logicheskikh matitzakh [On logical matrix].*Problemy bioniki.* Vol.48, pp. 12–22.

5. Gantmaker F. *Teoriya matrytz [Matrix theory]*. Kyiv: Nadrukovano v Ukraini, 560p.

6. Shaporev S.D. (2005). *Matematicheskaya logika [Mathematical logic]*. St-Peterburg: BHV-Peterburg, 416p.