Дослідження в математиці і механіці. – 2023. – Т. 28, вип. 1–2 (41–42). – С. 172–184

УДК 517.927

Н. В. Шарай, В. М. Шинкаренко
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова
Одеський національний економічний університет

АСИМПТОТИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

У роботі, використовуючи апріорні властивості класу $P_\omega(\lambda_0)$–розв'язків, встановлюються умови існування одного класу розв'язків у двочленного неавтономного диференціального рівняння третього порядку з нелінійністю, близькою у деякому сенсі до лінійної, у критичному випадку, а саме коли $\lambda_0 = \pm\infty$. Отримано асимптотичні при $t \uparrow \omega$ $(\omega \le +\infty)$ зображення для таких розв'язків та їх похідних першого та другого порядку у випадку $\lambda_0 = \pm\infty$. Доведені для нелінійного рівняння леми та теореми перенесено на лінійні диференціальні рівняння третього порядку з асимптотично малими коефіцієнтами. Перенесені результати не суперечать, та, в деякій мірі, доповнюють відомі результати щодо асимптотичного поводження розв'язків лінійних диференціальних рівнянь третього порядку.
MSC: 34D05, 34E05.
Ключові слова: рівняння третього порядку, асимптотичні зображення, помірно змінна нелінійність, існування розв'язків.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305268.

Вступ

Розглядається диференціальне рівняння

$$y''' = \alpha_0 p(t) y |\ln|y||^\sigma, \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ −неперервна функція, $-\infty < a < \omega \le +\infty$*

Це рівняння належить до класу рівнянь виду

$$y''' = \alpha_0 p(t)\ \varphi(y), \tag{2}$$

*Вважаємо, що $a > 1$ при $\omega = +\infty$ і $\omega - a < 1$ при $\omega < +\infty$.

Надійшла 25.04.2023

де функція $\varphi(y)$ є правильно змінна порядку γ у випадках коли $y \to 0$, або коли $y \to \pm\infty$, а також неперервна в односторонньому околі однієї із зазначених особливих точок. Виявлений вченими інтерес до вивчення асимптотичних властивостей розв'язків таких рівнянь зумовлений насамперед тим, що через властивості функцій, що правильно змінюються (див., наприклад, монографію Е. Сенета [1]) вони є у деякому сенсі асимптотично близькими для $\gamma \neq 1$ до узагальненого рівняння типу Емдена-Фаудера

$$y''' = \alpha_0 p(t)|y|^\gamma \mathrm{sign} y,$$

а для $\gamma = 1$ – до лінійного диференціального рівняння

$$y''' = \alpha_0 p(t) y, \tag{3}$$

огляд численних досліджень яких міститься в добре відомій монографії І. Т. Кігурадзе і Т. А. Чантурія [2].

Серед робіт присвячених вивченню асимптотичної поведінки розв'язків диференціального рівняння (2) особливо слід відзначити для випадку $n \geq 2$ роботу В.М.Євтухова та А.М. Самойленка [3]. Однак, наведені в цієї та інших статтях результати не охоплюють рівняння виду (1), яке є асимптотично близьким при $y \to 0$ і $y \to \pm\infty$ до лінійного диференціального рівняння (3).

Розв'язок y рівняння (1), заданий і відмінний від нуля на проміжку $[t_y, \omega[\subset [a, \omega[$, називається $P_\omega(\lambda_0)$ - розв'язком, якщо він задовольняє наступним умовам:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або } \ 0, \\ \text{або} \pm\infty \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y''(t))^2}{y'''(t) y'(t)} = \lambda_0 \tag{4}$$

В роботах [4–6] для рівняння (1) були встановлені умови існуванняя $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язків у випадку, якщо $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, а також були одержани асимптотичні розвинення для таких розв'язків та їх похідних до другого порядку включно. При цьому встановлена кількість розв'язків із знайденими асимптотичними зображеннями.

Метою даної роботи є встановлення необхідних та достатніх умов існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язків в особливому випадку, коли $\lambda_0 = \pm\infty$, а також одержання асимптотичних при $t \uparrow \omega$ зображень для таких розв'язків та їхніх похідних до другого порядку включно.

Допоміжні твердження

Для встановлення основного результату знадобляться дві відомі допоміжні леми, одна із яких стосується апріорних асимптотичних властивостей $P_\omega(\pm\infty)$- розв'язків, а друга — існування зникаючих в особливій точці розв'язків у системах квазілінійних диференціальних рівнянь.

Щоб сформулювати перший із них, введемо необхідну надалі функцію

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \ \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{якщо } \ \omega < +\infty. \end{cases}$$

З Леми 10.4 праці В.М.Євтухова [7] (Гл.3, §10, стр. 141–142) (див. також лему 2.1 з праці В.М.Євтухова та А.М. Самойленко [3]) випливає наступне твердження.

Лема 1. *Кожний $P_\omega(\pm\infty)$ розв'язок диференціального рівняння* (1) *задовольняє при $t \uparrow \omega$ асимптотичним співвідношенням*

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{(3-k)}}{(3-k)!} y''(t), (k=1,2), \quad y'''(t) = o\left(\frac{y''(t)}{\pi_\omega(t)}\right). \tag{5}$$

Далі, розглянемо систему квазілінійних диференціальних рівнянь

$$\upsilon_k' = h_k(t)\left[f_k(t,\upsilon_1,\dots,\upsilon_n) + \sum_{i=1}^{3} c_{ki}\upsilon_i\right] \quad (k=1,2,3) \tag{6}$$

в якій $c_{ki} \in \mathbb{R}$ $(k,i=1,2,3)$, $h_k : [t_0,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$ - неперервні функції, f_k: $[t_0,\omega[\times\mathbb{R}^3_{\frac12}$ $(k=(1,2,3)$ —неперервні функції, які задовольняють умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_k(\tau,\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3) = 0 \quad \text{рівномірно по } \ (\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3) \in \mathbb{R}^3_{\frac12} \tag{7}$$

де $\mathbb{R}^3_{\frac12} = \left\{(\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3) \in \mathbb{R}^3 : |\upsilon_i| \le \frac12 \ (i=1,2,3)\right\}$.

В силу теореми 2.1 з роботи В.М. Євтухова та А.М. Самойленка [8] для системи диференціальних рівнянь виду (6) має місце наступне твердження.

Лема 2. *Нехай*

$$c_{kk}\, h_k(t) \ne 0 \ \text{ коли } \ t \in [t_0,\omega[, \quad \int_{t_0}^{\omega} h_k(t)dt = \pm\infty \quad (k=1,2,3) \tag{8}$$

і постійні B_k^0 $(k = 1,2,3)$, *які визначаються (починаючи з* $k = 3$ *) рекурентними співвідношеннями*

$$B_k^0 = \frac{1}{|c_{kk}|}\left(\sum_{j=1}^{k-1}|c_{kj}| + \sum_{j=k+1}^{3} B_j^0|c_{kj}|\right) \tag{9}$$

задовольняє нерівностям $B_k^0 < 1$ *при усіх* $k \in \{1,2,3\}$. *Тоді система диференціальних рівняннь* (5) *має принаймні один розв'язок* $(\upsilon_k)_{k=1}^3 : [t_1,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}^3$, *де* $t_1 \in [t_0,\omega[$, *яке прямує до нуля при* $t \uparrow \omega$, *причому таких розв'язків існує ціле* m *- параметричне сімейство, якщо серед функцій* $c_{kk}h_k(t)(k \in \{1,2,3\})$ *є* m *функцій, які є від'ємними на проміжку* $[t_0,\omega[$.

Основні результати

Введемо функцію I наступним чином

$$I(t) = \int\limits_a^t p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)|\ln|\pi_\omega(\tau)||^\sigma d\tau.$$

Теорема 1. *Для існування у диференціального рівняння* (1) $P_\omega(\pm\infty)$ *розв'язку необхідно й достатньо виконання умов*

$$\lim_{t\uparrow\omega} p(t)\pi_\omega^3(t)|\ln|\pi_\omega(t)||^\sigma = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} I(t) = \pm\infty \tag{10}$$

причому кожне таке рішення допускає при $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення*

$$\frac{y^{(k-1)}(t)}{y''(t)} = \frac{[\pi_\omega(t)]^{3-k}}{(3-k)!}[1 + o(1)] \qquad (k = 1,2), \tag{11}$$

$$\ln|y''(t)| = \alpha_0\, 2^{\sigma-1}\; I(t)[1 + o(1)] \tag{12}$$

Більш того, при виконанні умов (10) *у диференціального рівняння* (1) *у випадку* $\omega = +\infty$ *існує трьохпараметричне сімейство розв'язків, що допускають при* $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення* (11), (12), *а у випадку* $\omega < +\infty$ *- однопараметричне сімейство розв'язків із такими зображеннями.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай $y : [t_y,\omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ є довільним $P_\omega(\pm\infty)$ - розв'язком диференціального рівняння (1). Тоді, враховуючи означення $P_\omega(\lambda_0)$ - розв'язку існує $t_0 \in [t_y,\omega[$ таке, що $\ln|y(t)| \neq 0$ на проміжку $[t_0,\omega[$, і згідно з лемою 2.1 мають місце асимптотичні співвідношення (5). Згідно першому з асимптотичних співвідношень (5) має місце асимптотичні представлення (11) і, зокрема, співвідношення виду

$$y(t) \sim \frac{\pi_\omega^2(t)}{2}\ y''(t), \quad y'(t) \sim \pi_\omega(t)\ y''(t) \quad \text{при} \ \ t \uparrow \omega.$$

Наслідком вищевказаних асимптотичних зображень є наступне співвідношення

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{2}{\pi_\omega(t)} \ \ \text{при} \ \ t \uparrow \omega,$$

і тому $\ln|y(t)| \sim 2\ \ln|\pi_\omega(t)| \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$

Враховуючи ці асимптотичні співвідношення з (1) отримуємо

$$y'''(t) = \frac{\alpha_0}{2} p(t)\pi_\omega^2(t)|2\ln|\pi_\omega(t)||^\sigma y''(t)[1+o(1)] \ \ \text{при} \ \ t \uparrow \omega,$$

тобто

$$\frac{y'''(t)}{y''(t)} = \alpha_0\ 2^{\sigma-1} p(t)\pi_\omega^2(t)\left|\ln|\pi_\omega(t)|\right|^\sigma[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{13}$$

З цього співвідношення та останнього з формул (5) випливає справедливість першої з умов (10). Крім того, інтегруючи (13) на проміжку від t_0 до t, отримаємо

$$\ln\left|y''(t)\right| = c + \alpha_0|2|^{\sigma-1}\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)\left|\ln|\pi_\omega(\tau)|\right|^\sigma[1+o(1)]d\tau,$$

де c —деяка дійсна стала.

Оскільки тут згідно з означенням $P_\omega(\lambda_0)$ - розв'язку ліва частина прямує до $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, то виконується друга з умов (10) і тому при $t \uparrow \omega$ має місце асимптотичне зображення (12).

Достатність. Нехай виконуються умови (10). Покажемо, що в цьому випадку у диференціального рівняння (1) існує $P_\omega(\pm\infty)$ - розв'язки, що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (11), (12), та з'ясуємо питання щодо кількості розв'язків з такими зображеннями.

Застосовуючи до рівняння (1) перетворення

$$\frac{y(t)}{y''(t)} = \frac{[\pi_\omega(t)]^2}{2}\left[1+w_1(t)\right],$$
$$\frac{y'(t)}{y''(t)} = \pi_\omega(t)\left[1+w_2(t)\right], \tag{14}$$
$$\ln\left|y''(t)\right| = \alpha_0|2|^{\sigma-1}I(t)\left[1+w_3(t)\right],$$

отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$w_1' = \frac{2\left(w_2-w_1\right)}{\pi_\omega(t)} - \left(1+w_1\right)^2 \alpha_0 2^{\sigma-1} p(t)\pi_\omega^2(t)\left|\ln|\pi_\omega(t)|\right|^\sigma \times$$
$$\times\left|1+\frac{\ln\left|\frac{1+w_1}{2}\right|}{2\ln|\pi_\omega(t)|}+\frac{\alpha_0 2^{\sigma-2} I(t)\left(1+w_3\right)}{\ln|\pi_\omega(t)|}\right|^\sigma,$$
$$w_2' = -\frac{1}{\pi_\omega(t)}w_2 - \left(1+w_2\right)\left(1+w_1\right)\alpha_0 2^{\sigma-1} p(t)\pi_\omega^2(t)\left|\ln|\pi_\omega(t)|\right|^\sigma \times$$
$$\times\left|1+\frac{\ln\left|\frac{1+w_1}{2}\right|}{2\ln|\pi_\omega(t)|}+\frac{\alpha_0 2^{\sigma-2} I(t)\left(1+w_3\right)}{\ln|\pi_\omega(t)|}\right|^\sigma,$$
$$w_3' = -\frac{I'(t)}{I(t)}\left(1+w_3\right) + \frac{I'(t)}{I(t)}\left(1+w_1\right)\left|1+\frac{\ln\left|\frac{(1+w_1)}{2}\right|}{\ln|\pi_\omega^2(t)|}+\frac{\alpha_0 2^{\sigma-1} I(t)\left(1+w_3\right)}{\ln|\pi_\omega^2(t)|}\right|^\sigma$$

Вважаючи, що функції $h(t), H(t), \delta_i(t)$ $(i = 1, 2.3)$ набувають вигляду

$$h(t) = \frac{1}{\pi_\omega(t)}, \quad H(t) = \frac{I'(t)}{I(t)}$$

$$\delta_1(t) = \alpha_0\ 2^{\sigma-1}p(t)\pi_\omega^3(t)\left|\ln|\pi_\omega(t)|\right|^\sigma, \quad \delta_2\left(t, w_1\right) = \frac{\ln\left|\frac{1+w_1}{2}\right|}{2\ln|\pi_\omega(t)|},$$
$$\delta_3\left(t, w_3\right) = \frac{\alpha_0\ 2^{\sigma-1} I(t)\left(1+w_3\right)}{2\ln|\pi_\omega(t)|},$$

перепишемо цю систему у вигляді

$$\begin{cases} w_1' = h(t)\left[\bar f_1\left(t, w_1, w_2, w_3\right) - 2w_1 + 2w_2\right], \\ w_2' = h(t)\left[\bar f_2\left(t, w_1, w_2, w_{23}\right) - w_3\right], \\ w_3' = H(t)\left[\bar f_3\left(t, w_1, w_2, w_3\right) + w_1 - w_3\right]. \end{cases} \tag{15}$$

де функціїї $\bar f_k\left(t, w_1, w_2, w_3\right)$, $(k = 1, 2, 3)$ мають вигляд

$$\bar f_1\left(t, w_1, w_2, w_3\right) = -\delta_1(t)\left(1+w_1\right)\left(1+w_2\right)\left|1+\delta_2\left(t, w_1\right)+\delta_3\left(t, w_3\right)\right|^\sigma,$$
$$\bar f_2\left(t, w_1, w_2, w_3\right) = -\delta_1(t)\left(1+w_2\right)\left(1+w_1\right)\delta_1(t)\left|1+\delta_2\left(t, w_1\right)+\delta_3\left(t, w_3\right)\right|^\sigma,$$
$$\bar f_3\left(t, w_1, w_2, w_3\right) = \left(1+w_1\right)\left[-1+\left|1+\delta_2\left(t, w_1\right)+\delta_3\left(t, w_3\right)\right|^\sigma\right].$$

Оскільки $\ln|\pi_\omega(t)| \longrightarrow \pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, та виконуються умови (10) то в силу правила Лопіталя

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{I(t)}{\ln|\pi_\omega(t)|} = \lim_{t\uparrow\omega} p(t)\,\pi_\omega^3(t)\,|\ln|\pi_\omega(t)||^\sigma = 0$$

то для функцій $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ мають місце граничні співідношення

$$\lim_{t\uparrow\omega} \delta_1(t) = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \delta_2\left(t, w_1\right) = 0 \quad \text{рівномірно по } w_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \tag{16}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \delta_3\left(t, w_3\right) = 0 \quad \text{рівномірно по } w_3 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \tag{17}$$

Тому в системі (15) функції $\bar{f}_k\left(t, w_1, w_2, w_3\right), \left(k = 1, 2, 3\right)$ такі, що виконується

$$\lim_{t\uparrow\omega} \bar{f}_k\left(t, w_1, w_2, w_3\right) = 0, \, (k = 1, 2, 3) \quad \text{рівномірно по } (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}}$$

де множина $\mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}}$ визначається наступним чином

$$\mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}} = \left\{(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 : |w_i| \leq \frac{1}{2}, i = 1, 2, 3\right\}$$

Далі, враховуючи умови (16), (17) виберемо число $t_0 \in [a, \omega[$ таким, щоб виконувалася нерівність

$$|\delta_2\left(t, w_1\right)| + |\delta_3\left(t, w_3\right)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad t \in \Big[t_0, \omega\Big[\quad \text{і} \quad w_1, w_3 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

та розглянемо систему (15) на множині $\Omega = \Big[t_0, \omega\Big[\times\mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}}$. На цій множині система (15) є системою типа (6).

Приведемо її до виду, що допускає застовування леми 2.2. Для цього, обрав довільним чином число $0 < \varepsilon < 1$, систему рівнянь (15) за допомогою додаткового перетворення

$$\omega_k(t) = \varepsilon \upsilon_k(t) \quad (k = 1, 2), \quad \omega_3(t) = \upsilon_3(t) \tag{18}$$

приведемо до системи диференційних рівнянь

$$\begin{cases} \upsilon_1' = h(t)\left[f_1\left(t, \upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3\right) - 2\upsilon_1 + 2\upsilon_2\right], \\ \omega_2' = h(t)\left[f_2\left(t, \upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3\right) - \upsilon_2\right], \\ \upsilon_3' = H(t)\left[f_3\left(t, \upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3\right) + \varepsilon\upsilon_1 - \upsilon_3\right], \end{cases} \tag{19}$$

де функції $f_k(t, v_1, v_2, v_3)$ $(k = 1, 2, 3)$ набувають вигляду

$$f_k(t, v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{\varepsilon} \bar{f}_k(t, \varepsilon v_1, \varepsilon v_2, v_3) \, (k = 1, 2),$$

$$f_3(t, v_1, v_2, v_3) = \bar{f}_3(t, \varepsilon v_1, \varepsilon v_2, v_3)$$

Тут, з огляду на граничні умови (16), (17)

$$\lim_{t \uparrow \omega} f_k(t, v_1, v_2, v_3) = 0 \ (k = 1, 2, 3) \text{ рівномірно за } (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}}$$

Покажемо, що для цієї системи типу (6) виконані всі умови леми 2.2. З огляду на вигляд функцій $\pi_\omega(t), I(t)$ і другої з умов (10)

$$\int_{t_0}^{t} h(\tau) d\tau \sim \ln |\, \pi_\omega(t) \,| \to \pm\infty, \qquad \int_{t_0}^{t} H(\tau) d\tau \sim \ln |I(t)| \to +\infty \ \text{ при } t \uparrow \omega$$

Окрім того, в системі рівнянь

$$c_{kk} h_k(t) = -\frac{3-k}{\pi_\omega(t)} \quad \text{при} \quad k = 1, 2 \quad \text{та} \quad c_{33} h_3(t) = -H(t),$$

при цьому виконується

$$\text{sign}[c_{kk} h_k(t)] = -\text{sign } \pi_\omega(t) \ \ (k = 1, 2), \ \ \text{sign}\,[c_{33} h_3(t)] = -1$$

Сталі B_k^0 $(k = 1, 2, 3)$ з леми 2.2, визначені (починаючи з $k = 3$ рекурентними співвідношеннями (2.5), для системи (19) приймають наступні значення

$$B_3^0 = \varepsilon, B_k^0 = 0 \ \ (k = 1, 2).$$

Оскільки $0 < \varepsilon < 1$, то $B_k^0 < 1$ для всіх $k = 1, 2, 3$

Отже для системи диференційних рівнянь (19) виконані усі умови леми 2.2. Згідно з цією лемою система диференціальних рівнянь (19) має хоча б один розв'язок $(v_k)_{k=1}^3 : [t_1, \omega] \to \mathbf{R}^3 (t_1 \in [t_0, \omega])$, який прямує до нуля при $t \uparrow \omega$.

Крім того, оскільки $c_{33} h_3(t) < 0$ та $\text{sign}[c_{kk} h_k(t)] = -\text{sign}[\pi_\omega(t)]$ при $k = 1, 2$, то на підставі цієї ж леми, у системи рівнянь (19) у випадку $\omega = \pm\infty$ існує трьохпараметричне сімейство зникаючих на нескінченності розв'язків, а у випадку $\omega < +\infty$ у неї існує однопараметричне сімейство зникаючих у точці ω розв'язків.

Кожному з прямуючих до нуля розв'язків $(v_k)_{k=1}^3 : [t_1, \omega] \to \mathbf{R}^3$ системи диференціальних рівнянь (19) з огляду заміни (18) та (14) відповідає розв'язок $y : [t_1, \omega] \to \mathbf{R}$ диференціального рівняння (1), що допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичне зображення (11) - (12). Використовуючи ці зображення та умови (10) неважко також переконатися в тому, що кожний такий розв'язок є $P_\omega(\pm\infty)$ - розв'язком диференціального рівняння (1). Теорема доведена повністю.

При $\sigma = 0$, тобто для випадку лінійного диференціального рівняння (3) з теореми 3.1 випливає наступне твердження

Наслідок 1.

Для існування у лінійного диференціального рівняння (3) $P_\omega(\pm\infty)$-*розв'язку необхідно й достатньо, щоб виконувались умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega} p(t)\pi_\omega^3(t) = 0, \quad \int_a^\omega p(t)\pi_\omega^2(t)dt = \pm\infty. \tag{20}$$

Для кожного такого розв'язку має місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\frac{y(t)}{y''(t)} = \frac{[\pi_\omega(t)]^2}{2}\,[1 + o(1)] \quad \frac{y'(t)}{y''(t)} = \pi_\omega(t)\,[1 + o(1)] \tag{21}$$

$$\ln|\,y''(t)\,| = \frac{\alpha_0}{2}\int_a^t p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)d\tau\,[1 + o(1)]\,. \tag{22}$$

Більш того, при виконанні умов (20) *у диференціального рівняння* (3) *у випадку, коли* $\omega = +\infty$ *існує* n *- параметричне сімейство* $P_\omega(\pm\infty)$ *- розв'язків з зображеннями* (21) - (22), *а у випадку* $\omega < \infty$ *таких розв'язків існує однопараметричне сімейство.*

Дана теорема у випадку $\omega = +\infty$ доповнює результати для лінійних диференціальних рівнянь з асимптотично малими коефіцієнтами, наведені в монографії І.Т. Кігурадзе та Т.А. Чантурія [2] (див. Гл. 1, §6, п. 6.5, стор. 184–186).

Висновки

У роботі для двочленного неавтономного диференціального рівняння третього порядку (1) встановлено асимптотичну поведінку при $t \uparrow \omega$

$(\omega \le +\infty)$, $P_\omega(\lambda_0)$–розв'язків в особливому випадку, а саме коли $\lambda_0 = \pm\infty$. Також отримано необхідні та достатні умови існування таких розв'язків та вирішено питання стосовно їх кількості Доведена теорема доповнює отримані раніше результати стосовно асимптотики розв'язків рівняння (1).

Зауважимо, що встановлені зображення не суперечать асимптотичним співвідношенням, отриманим у роботах [9], [10] для асимптотично близького до (1) рівняння третього порядку.

Подальшим кроком дослідження асимптотичних властивостей $P_\omega(\pm\infty)$–розв'язків рівняння (1) вбачаємо в отриманні асимптотики більш загального вигляду за умови додаткових обмежень на функцію $p(t)$.

Список літератури

1. **Seneta E.** Regularly Varying Functions / E. Seneta. - Springer, Verlag Berlin Heidelberg. 1976. - 116 p.
2. **Kiguradze I.** Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations / I.T. Kiguradze, T. A. Chanturia. – Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, 1993. – 331 p.
3. **Evtukhov V.M.** Asymptotic representations of solutions of nonautonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities. / Evtukhov, V.M., Samoilenko, A.M.// Diff Equat. - 2011. - No 47 - P. 627-649
4. **Sharai N.** Asymptotic representations for the solutions of third order nonlinear differential equations / N. Sharai, V. Shinkarenko // J. Math. Sci. (N.Y.). – 2016. – Vol. 215, No. 3. – P. 408–420.
5. **Шарай Н.В.** Асимптотичне зображення деяких класів розв'язків диференціального рівняння третього порядку. / Шарай Н.В., Шинкаренко В.М. // Дослідження в математиці і механіці. — 2022. — Т. 27, №1-2(39-40). — С. 96–110
6. **Sharai N.** Asymptotic behavior of solutions for one class of third order nonlinear differential equations. Abstracts of the International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations / N. Sharai, V. Shinkarenko // QUALITDE-2018, Tbilisi, Georgia, December 1-3. – 2018. – P. 165–169.
7. **Евтухов В.М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов. – Диссертация д-ра физ.-мат. наук: [спец.] 01.01.02 Дифференциальные уравнения. Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 1997. – 295 с.
8. **Evtukhov V. M.** Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point / V. M. Evtukhov, A. M. Samoilenko // Ukrainian Math. J. — 2010. — Vol. 62, No. 1. — P. 56–86.

9. **Evtukhov V.M.** Asymptotic behavior of the solutions of one class of third-order ordinary differential equations / V. M. Evtukhov, A. A. Stekhun // QUALITDE-2016, Tbilisi, Georgia, December 24–26. —2016. — P. 77–80.

10. **Stekhun A.O.** Asymptotic behavior of the solutions of one class of third-order ordinary differential equations / A. O. Stekhun // Nelin. Kolyv. — 2013. — Vol. 16, №2. — P. 246–260; English translation: J. Math. Sci., 198. — 2014 . — №3. — P. 336–350.

Sharai N. V., Shinkarenko V. M.

ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF SOLUTIONS CLOSE TO LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

Summary

In the work, using the a priori properties of the $P_\omega(\lambda_0)$ class of solutions, the conditions for the existence of one class of solutions in the binomial non-autonomous of a differential equation of the third order with a nonlinearity close in some sense to linear, in the critical case, namely when $\lambda_0 = \pm\infty$. Asymptotic at $t \uparrow \omega$ $(\omega \leq +\infty)$ images for such solutions and their derivatives of the first and second order in the case $\lambda_0 = \pm\infty$. Proven for of the nonlinear equation, the lemma and the theorem are transferred to linear differential equations of the third order with asymptotically small coefficients. The transferred results do not contradict, and to some extent, complement known results regarding the asymptotic behavior of solutions of linear differential equations of the third order.

Key words: equations of the third order, asymptotic images, moderately variable nonlinearity, existence of solutions.

REFERENCES

1. Seneta E. (1976) *Regularly Varying Functions.* Springer, Verlag Berlin Heidelberg. 116 p.
2. Kiguradze I., Chanturia T. (1993). *Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations.* Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, 331 p.
3. Evtukhov V., Samoilenko A. (2011) Asymptotic representations of solutions of nonautonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities. *Diff Equat.* No 47, P. 627–649
4. Sharai N., Shinkarenko V. (2016). Asymptotic representations for the solutions of third order nonlinear differential equations. *J. Math. Sci. (N.Y.)*, Vol. 215, №3, P. 408–420.
5. Sharai N., Shinkarenko V. (2022) Asymptotychne zobrazhennia deiakykh klasiv rozviazkiv dyferentsialnoho rivniannia tretoho poriadku [Asymptotic representation of some classes of solutions of the third-order differential equation] *Res. in Mat. and Mech.* Vol. 27, №1–2(39–40), P. 96–110.
6. Sharai N., Shinkarenko V. (2018). Asymptotic behavior of solutions for one class of third order nonlinear differential equations. Abstracts of the International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations. *QUALITDE-2018, Tbilisi, Georgia,* December 1–3, P. 165–169.

7. Evtukhov V. M. (1998). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy [Asymptotic representations of solutions of non-autonomous ordinary differential equations.] *(D.Sc. Thesis) Differential equations. Kyiv: institute of Mathematics of NASU.*

8. Evtukhov V. M., Samoilenko A. M. (2010). Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point. *Ukrainian Math. J.* Vol. 62, №1, P. 56–86.

9. Evtukhov V .M., Stekhun A. A. (2016). Asymptotic behavior of the solutions of one class of third-order ordinary differential equations. *QUALITDE-2016, Tbilisi, Georgia, December 24–26,* P. 77–80.

10. Stekhun A. O. (2013). Asymptotic behavior of the solutions of one class of third-order ordinary differential equations. *Nelin. Kolyv.* Vol. 16, №2, P. 246–260; (2014). English translation: *J. Math. Sci.*, 198, №3, P. 336–350.