Дослідження в математиці і механіці. – 2023. – Т. 28, вип. 1–2 (41–42). – С. 139–158

УДК 517.925

А. О. Стехун
Одеський національний університет імені І.І.Мечникова

ПРО АСИМПТОТИКУ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕАВТОНОМНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ АСИМПТОТИЧНО БЛИЗЬКИХ ДО ЛІНІЙНИХ

Встановлено необхідні і достатні умови існування всіх можливих типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків неавтономних двочленних звичайних диференціальних рівнянь другого та третього порядків асимптотично близьких до лінійних. Встановлено асимптотичні зображення кожного з можливих типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків, з'ясовано питання про їх кількість. Отримано також наслідки з одержаних теорем для випадків, коли рівняння є лінійним диференціальним рівнянням.
MSC: 34D05, 34E05.
Ключові слова: диференціальні рівняння другого порядку, диференціальні рівняння третього порядку, існування розвязків, асимптотичні зображення розв'язків, асимптотично близькі до лінійних, повільно змінна нелінійність.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305267.

Вступ

У 80-х роках XX століття в зв'язку з бурхливим розвитком теорії правильно змінних функцій, яка була створена у 1930 році Й. Караматою [1], виникло бажання поширити результати, що були отримані в роботах J.H. Lane, R. Emden, R. Fowler, F.V. Atkinson, І.Т. Кігурадзе, Т.А. Чантурія, Š. Belohoreč, C.V. Coffman, J.S.W. Wong, Л.В. Клебанова, О.В. Костіна, В.О. Кондратьева, В.М. Євтухова, І.В. Асташової і багатьох інших авторів для рівняннь зі степеневими нелінійностями на диференціальні рівняння із правильно змінними нелінійностями.

Означення 1. Додатна та вимірна в однобічному околі Δ_{Y_0} точки Y_0, де Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, функція φ називається правильно змінною при $y \to Y_0$, якщо існує таке число $\sigma \in \mathbb{R}$, що для довільного $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi(\lambda y)}{\varphi(y)} = \lambda^\sigma.$$

При цьому σ називають порядком функції φ (або показником). При $\sigma = 0$ функцію φ називають повільно змінною функцією при $y \to Y_0$.

Надійшла 18.04.2023 © Стехун А. О., 2023

Згідно з означенням правильно змінних функцій порядку σ, має місце зображення

$$\varphi(y) = |y|^\sigma L(y), \tag{1}$$

де $L : \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ – неперервна функція при $y \to Y_0$, така, що для будь-якого $\lambda > 0$ виконується умова

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1. \tag{2}$$

Прикладами повільно змінних функцій при $y \to Y_0 \in \{0, \pm\infty\}$ є функції виду

$$L(y) = \prod_{k=1}^{m} |\ln_k |y||^{\sigma_k}, \quad L(y) = \exp\left(|\ln |y||^{\gamma_1} \prod_{k=2}^{m} |\ln_k |y||^{\sigma_k} \right),$$

$$L(y) = \exp\left(\frac{\ln |y|}{|\ln_2 |y||^{\gamma_2}} \prod_{k=3}^{m} |\ln_k |y||^{\sigma_k} \right),$$

де $\sigma_k \in \mathbb{R}$ $(k = \overline{1, m})$, $0 < \gamma_1 < 1$, $\gamma_2 > 0$,

$$\ln_1 |y| = \ln |y|, \quad \ln_k |y| = \ln |\ln_{k-1} |y|| \quad (k = \overline{2, m}),$$

$$|\ln |y||^\mu \quad (\mu \neq 0), \quad |\ln |y||^\mu \ln^\gamma |\ln |y|| \quad (\mu^2 + \gamma^2 \neq 0),$$

$$\exp |\ln |y||^\mu \quad (0 < \mu < 1), \quad \exp \frac{\ln |y|}{\ln |\ln |y||},$$

також функції, що прямують до відміної від нуля сталої при $y \to Y_0$ та інші.

Відомо також, що для будь-якої повільно змінної функції $L : \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ граничне співвідношення (2) виконується рівномірно за $\lambda > 0$ на будь-якому проміжку $[c, d] \subset]0, +\infty[$, та існує диференційовна повільно змінна при $y \to Y_0$ функція $L_1 : \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$, що задовольняє умови

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{L(y)}{L_1(y)} = 1 \quad \text{і} \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y L_1'(y)}{L_1(y)} = 0. \tag{3}$$

Функцію L_1 називають нормалізованою повільно змінною при $y \to Y_0$ функцією.

Основні результати про асимптотику розв'язків диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями були отримані в роботі В. М. Євтухова, А. М. Самойленка [2]. В цій роботі розглядалось диференціальне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{4}$$

де $\alpha_0 \in \{-1,\ 1\}$, $p : [a,\ \omega[\to]0, +\infty[$ – непрервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi : \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ – непрервна і правильно змінна при $y \to Y_0$ функція порядку σ, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} – деякий однобічний окіл Y_0.

Для даного рівняння встановлювались умови існування та асимптотичної поведінки при $y \to Y_0$ так званих $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків.

Означення 2. Розв'язок y диференціального рівняння (4) будемо називати $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє наступні умови

$$y : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0,$$

$$y^{(n-1)}(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[\quad (t_0 \in]a, \omega[),$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або } \pm\infty, \\ \text{або } 0 \end{cases} \text{ при кожному } \ k \in \{1, \ldots, n-1\},$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left[\, y^{(n-1)}(t)\,\right]^2}{y^{(n)}(t)\, y^{(n-2)}(t)} = \lambda_0.$$

Множина всіх $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (4) розпадається на $n+2$ неперетинних підмножини, що відповідають наступним значенням параметра λ_0:

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\} \quad \text{(неособливий випадок)};$$

$$\lambda_0 = \pm\infty,\ \lambda_0 = 1,\ \lambda_0 = \frac{n-i-1}{n-i}\ (i = \overline{1, n-1}) \text{ (особливі випадки)}.$$

З використанням априорних асимптотичних властивостей $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків одержаних в роботі [3] були встановлені необхідні і достатні умови існування у диференціального рівняння (4) кожного з $n+2$ можливих типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків, а також асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ для кожного з таких розв'язків та їх похідних до $(n-1)$-го порядку включно, вирішено питання про кількість розв'язків з одержаними асимптотичними зображеннями.

Основні результати

1. Про асимптотику розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку асимптотично близьких до лінійних.

Незважаючи на те, що досить повно було вивчено рівняння (4), проте у всіх встановлених теоремах передбачалась, що $\sigma \neq 1$, тобто кожна з теорем роботи [2] не містила результатів, які б охоплювали той випадок, коли $\sigma = 1$.

У цьому випадку диференціальне рівняння (4) має вигляд

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) y L(y), \tag{5}$$

де $\alpha_0 \in \{-1,\ 1\}$, $p : [a,\ \omega[\to]0, +\infty[$ – непрервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $L : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ – непрервна та повільно змінна при $y \to Y_0$ функція, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} – деякий однобічний окіл Y_0.

При $L(y) \equiv 1$ рівняння (5) є лінійним диференціальним рівнянням. У разі довільної неперервної повільно змінної при $y \uparrow Y_0$ функції L має місце асимптотичне співвідношення $yL(y) = y^{1+o(1)}$ при $y \to Y_0$, і диференціальне рівняння (5) є асимптотично близьким до лінійного диференціальне рівняння. Зрозуміло, що такий тип рівнянь вимагав запровадження нових підходів і методів дослідження, які раніше не використовувались. Асимптотична поведінка розв'язків такого класу рівнянь вперше була досліджена в роботі В. М. Євтухова [4] для диференціальних рівнянь другого порядку.

$$y'' = \alpha_0 p(t) y L(y), \tag{6}$$

де $\alpha_0 \in \{-1,\ 1\}$, $p : [a,\ \omega[\to]0, +\infty[$ – непрервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $L : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ – непрервна та повільно змінна при $y \to Y_0$ функція, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} – деякий однобічний окіл Y_0.

Для цього рівняння введений клас $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків визначається наступним чином.

Розв'язок y диференціального рівняння (6) називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на деякому проміжку

$[t_0,\omega[\subset[a,\omega[$ і задовольняє умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t)=Y_0,\quad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t)=\begin{cases}\text{або } 0,\\ \text{або } \pm\infty,\end{cases}\qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)}=\lambda_0.$$

Щоб сформулювати отримані в роботі [4] для диференціального рівняння (6) результати, введемо допоміжні позначення.

Оберемо число $b\in\Delta_{Y_0}$ так, щоб виконувалась нерівність

$$|b|<1 \text{ при } Y_0=0,\quad b>1\ (b<-1) \text{ при } Y_0=+\infty\ (Y_0=-\infty), \tag{7}$$

та покладемо

$$\mu_0=\operatorname{sign} b,\ \mu_1=\begin{cases}\ \ 1, & \text{якщо } \Delta_{Y_0} - \text{лівий окіл } Y_0,\\ -1, & \text{якщо } \Delta_{Y_0} - \text{правий окіл } Y_0\end{cases} \tag{8}$$

помічаємо, що

$$\mu_0=\operatorname{sign} y(t),\quad \mu_1=\operatorname{sign}\ y'(t)\quad \text{при}\quad t\in[t_1,\omega[. \tag{9}$$

При цьому зауважимо, що для $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язку виконано

$$\mu_0\mu_1<0,\quad \text{при}\quad Y_0=0,\quad \mu_0\mu_1>0\quad \text{при}\quad Y_0=\pm\infty. \tag{10}$$

Далі, введемо функції

$$\pi_\omega(t)=\begin{cases} t, & \text{якщо } \omega=+\infty,\\ t-\omega. & \text{якщо } \omega<+\infty,\end{cases} \tag{11}$$

$$\Phi_1(y)=\int\limits_{B_1}^{y}\frac{ds}{sL(s)},\ \Phi_2(y)=\int\limits_{B_2}^{y}\frac{ds}{sL^{\frac12}(s)},$$

де

$$B_1=\begin{cases} b, \text{якщо} \int\limits_b^{Y_0}\frac{ds}{sL(s)}=\pm\infty,\\ Y_0, \text{якщо} \int\limits_b^{Y_0}\frac{ds}{sL(s)}=\text{const},\end{cases}\qquad B_2=\begin{cases} b, \text{якщо} \int\limits_b^{Y_0}\frac{ds}{sL^{\frac12}(s)}=\pm\infty,\\ Y_0, \text{якщо} \int\limits_b^{Y_0}\frac{ds}{sL^{\frac12}(s)}=\text{const},\end{cases}$$

та числа

$$\mu_i^*=\begin{cases}\ \ 1, & \text{якщо}\quad B_i=b,\\ -1, & \text{якщо}\quad B_i=Y_0\end{cases}\qquad (i=1,2). \tag{12}$$

В силу вибору μ_0, μ_1 та μ_i^* $(i=1,2)$

$$\operatorname{sign}\Phi_i(y)=\mu_0\mu_1\mu_i^* \quad (i=1,2) \quad \text{при} \quad y\in\Delta_{Y_0}(b)\setminus\{b\}.$$

Функції Φ_i $(i=1,2)$ є строго монотонними на проміжку $\Delta_{Y_0}(b)$. Областю їх значень є проміжки

$$\Delta_{Z_i}(c_i)=\begin{cases} [c_i,Z_i[, & \text{якщо} \quad \mu_0>0,\\ ]Z_i,c_i], & \text{якщо} \quad \mu_0<0 \end{cases} \qquad i=1,2, \tag{13}$$

де

$$c_i=\Phi_i(b), \qquad Z_i=\lim_{y\to Y_0}\Phi_i(y)=$$

$$=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad B_i=Y_0,\\ +\infty, & \text{якщо} \quad B_i=b \quad \text{і} \quad \mu_0\mu_1>0,\\ -\infty, & \text{якщо} \quad B_i=b \quad \text{і} \quad \mu_0\mu_1<0 \end{cases} \qquad i=1,2. \tag{14}$$

Отже, для них існують неперервно диференційовані та строго монотонні зворотні функції $\Phi_i^{-1}:\Delta_{Z_i}(c_i)\longrightarrow\Delta_{Y_0}(b)$ $i=1,2$, для яких $\lim_{z\to Z_i}\Phi_i^{-1}(z)=Y_0$ $i=1,2$.

Нижче, крім введених позначень, будуть використовуватись деякі допоміжні функції. Покладемо I_k $(k=1,2,3,4)$,

$$I_1(t)=\int_{A_1}^{t}p(\tau)\,d\tau, \qquad I_2(t)=\int_{A_2}^{t}\pi_\omega(\tau)p(\tau)\,d\tau, \tag{15}$$

$$I_3(t)=\int_{A_3}^{t}p^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau,\ I_4(t)=\int_{A_4}^{t}p(\tau)L\left(\Phi_2^{-1}\left(\mu_0\mu_1|\lambda_0|^{\frac{1}{2}}I_3(\tau)\right)\right)\,d\tau, \tag{16}$$

де кожна із меж інтегрування $A_i\in\{\omega;a\}$ $(i\in\{1,2,3\})$, $A_4\in\{\omega;a_0\}$ $(a_0\in[a,\omega[)$ і обирається так, щоб відповідний інтеграл прямував при $t\uparrow\omega$ або до 0, або до $\pm\infty$ (аналогічно тому, як обиралися межі інтегрування B_i $i=1,2$ у функціях Φ_i $i=1,2$).

В роботі [4] для диференціального рівняння (6) були отримані наступні результати.

Теорема 1.1. Нехай функція $L(\Phi_1^{-1}(z))$ є правильно змінною при $z\to Z_1$ порядку γ і $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, причому у випадку $\lambda_0=0$ існує

$\lim\limits_{t\uparrow\omega} \pi_\omega(t)p(t)[I_1(t)]^{-1}$ (скінчена або рівна $\pm\infty$). Тоді для існування у диференціального рівняння (6) $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків необхідно, а якщо

$$(1+\lambda_0)(1+\lambda_0+\lambda_0\gamma) \neq 0,$$

то й достатньо, щоб виконувалися умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I_1(t)} = -1, \quad \alpha_0(\lambda_0-1)\lim_{t\uparrow\omega} I_2(t) = Z_1,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega^2(t)p(t)L\left(\Phi_1^{-1}\left(\alpha_0(\lambda_0-1)I_2(t)\right)\right) = \frac{\alpha_0\lambda_0}{(\lambda_0-1)^2},$$

$$\alpha_0\mu_0\mu_1(\lambda_0-1)\pi_\omega(t) > 0, \quad \mu_1^*\pi_\omega(t)I_2(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a,\omega[.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення

$$\Phi_1(y(t)) = \alpha_0(\lambda_0-1)I_2(t)[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha_0(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)p(t)L\left(\Phi_1^{-1}(\alpha_0(\lambda_0-1)I_2(t))\right)[1+o(1)],$$

причому таких розв'язків при виконанні зазначених умов існує ціла однопараметрична сім'я у разі, коли $(\lambda_0-1)(1+\lambda_0+\gamma\lambda_0)I_2(t) < 0$ при $t \in]a,\omega[$, і двопараметрична сім'я у разі, коли $(\lambda_0-1)(1+\lambda_0+\gamma\lambda_0)I_2(t) > 0$ і $(\lambda_0^2-1)\pi_\omega(t) > 0$ при $t \in]a,\omega[$.

Теорема 1.2. Нехай функція $L(\Phi_2^{-1}(z))$ є правильно змінною при $z \to Z_2$ порядку γ. Тоді для існування у диференціального рівняння (6) $P_\omega(Y_0,1)$-розв'язків необхідно, а якщо функція $p : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$- неперервно диференційована і така, що існує (скінчена або рівна $\pm\infty$) границя

$$\lim_{t\uparrow\omega} p'(t)p^{-\frac{3}{2}}(t)L^{-\frac{1}{2}}\left(\Phi_2^{-1}\left(\mu_0\mu_1 I_3(t)\right)\right),$$

то й достатньо, щоб

$$\lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega(t)\left[p(t)L\left(\Phi_2^{-1}\left(\mu_0\mu_1 I_3(t)\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \infty, \quad \mu_0\mu_1 \lim_{t\uparrow\omega} I_3(t) = Z_2$$

і справджувались нерівності

$$\alpha_0 > 0, \quad \mu_2^* I_3(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a,\omega[.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\Phi_2(y(t)) = \mu_0\mu_1 I_3(t)[1+o(1)],$$
$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \mu_0\mu_1 \left[p(t)L\left(\Phi_2^{-1}\left(\mu_0\mu_1 I_3(t)\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}[1+o(1)],$$

причому таких розв'язків при виконанні зазначених умов існує ціла однопараметрична сім'я у разі, коли $\mu_0\mu_1\mu_2^* < 0$, і двопараметрична – коли $\mu_2^* > 0$ і $\mu_0\mu_1 > 0$.

Теорема 1.3. Нехай функція $L(\Phi_2^{-1}(z))$ є правильно змінною при $z \to Z_2$ порядку γ і $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$. Тоді для існування у диференціального рівняння (6) $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків необхідно, а якщо

$$(1+\lambda_0)\left[1+\lambda_0+\frac{\gamma}{2}(\lambda_0-1)\right] \neq 0,$$

то й достатньо, щоб

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_4'(t)}{I_4(t)} = -1, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\pi_\omega(t)I_4(t) = -\frac{\alpha_0\lambda_0}{(\lambda_0-1)^2}, \quad \mu_0\mu_1\lim_{t\uparrow\omega}I_3(t) = Z_2$$

і справджувались нерівності

$$\alpha_0\lambda_0 > 0, \quad \mu_0\mu_1(\lambda_0-1)\pi_\omega(t) > 0, \quad \mu_2^* I_3(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a,\omega[.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\Phi_2(y(t)) = \mu_0\mu_1|\lambda_0|^{\frac{1}{2}}I_3(t)[1+o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha_0(1-\lambda_0)I_4(t)[1+o(1)],$$

причому таких розв'язків при виконанні зазначених умов існує ціла однопараметрична сім'я у разі, коли $\mu_0\mu_1\mu_2^*\left[1+\lambda_0+\frac{\gamma}{2}(\lambda_0-1)\right] < 0$ і двопараметрична – коли $\mu_2^*(1+\lambda_0)\left[1+\lambda_0+\frac{\gamma}{2}(\lambda_0-1)\right] > 0$ і $\mu_0\mu_1(1+\lambda_0) > 0$.

2. Про асимптотику розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь третього порядку асимптотично близьких до лінійних.

Отримані в роботі [4] результати для диференціальних рівнянь другого порядку асимптотично близьких до лінійних створили передумови для поширення цих результатів на диференціальни рівняння третього порядку

$$y''' = \alpha_0 p(t) y L(y), \tag{17}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$ – неперервна функція, $L : \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$ – неперервна повільно змінна функція при $y \to Y_0$, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} – деякий однобічний окіл Y_0.

Такі рівняння досліджувались у роботах В. М. Євтухова, А. О. Стехун [6], А. О. Стехун [5; 7].

Для диференціального рівняння (17) означення $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язку набувають наступного вигляду.

Розв'язок y диференціального рівняння (17) називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на деякому проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0, \ \lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm\infty \end{cases} k = 1, 2; \ \lim_{t\uparrow\omega} \frac{[y''(t)]^2}{y'''(t)y'(t)} = \lambda_0. \quad (18)$$

В роботах [5–7] були встановлені необхідні і достатні умови існування всіх можливих типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (17), а також встановлено асимптотичні зображення кожного з можливих типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків та їх похідних до другого порядку включно, з'ясовано питання про кількість таких розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями.

Необхідність детального дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь третього порядку асимптотично близьких до лінійних виникла при спробі поширити результати отримані в [4] на рівняння типу (5), щоб виявити всі проблеми, які при цьому можуть виникати. Це було пов'язано, зокрема, с тим, що рівняння третього порядку має нові класи $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків (при $\lambda_0 = \frac{1}{2}$) яких у рівнянь другого порядку не існує. І тому для таких розв'язків було збудовано метод їх дослідження.

Щоб сформулювати отримані результати введемо числа (7)–(10), (12), функції (11), (14), яки були введені раніше, а також функції

$$I_5(t) = \int_{A_5}^{t} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)\, d\tau, \quad I_6(t) = \int_{A_6}^{t} p^{\frac{1}{3}}(\tau)\, d\tau,$$

де кожна з меж інтегрування $A_5, A_6 \in \{a; \omega\}$ і обирається таким чином, щоб відповідний інтеграл прямував при $t \uparrow \omega$ або до 0, або до $\pm\infty$. Крім того, суттєву роль відіграють повільно змінні при $y \to Y_0$ функції

$$\Phi_1(y) = \int\limits_{B_1}^{y} \frac{ds}{sL(s)}, \quad \Phi_2(y) = \int\limits_{B_2}^{y} \frac{ds}{sL^{\frac{1}{3}}(s)},$$

де кожна з меж інтегрування $B_i \in \{Y_0; b\}$ $(i = 1, 2)$ і обирається таким чином, щоб відповідний інтеграл прямував при $y \to Y_0$ або до 0, або до $\pm\infty$. Функції Φ_i $(i = 1, 2)$ є строго монотонними і диференційовними на проміжку $\Delta_{Y_0}(b)$ з множиной значень (14)–(15). Для них існують неперервно диференційовні і строго монотонні обернені функції $\Phi_i^{-1} : \Delta_{Z_i}(c_i) \to \Delta_{Y_0}(b), \ \ i = 1, 2.$

З використанням априорних властивостей $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків були одержані наступні результати.

Теорема 2.1. Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ і функція $L(\Phi_1^{-1}(z))$ є правильно змінною при $z \to Z_1$ порядку γ. Тоді для існування у диференціального рівняння (17) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків необхідно, щоб виконувались умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I_1(t)} = -2, \quad \alpha_0\lambda_0 \lim_{t\uparrow\omega} I_5(t) = Z_1, \tag{19}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega^3(t)p(t)L\left(\Phi_1^{-1}\left(\frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0} I_5(t)\right)\right) = \frac{\alpha_0\lambda_0(2\lambda_0-1)}{(\lambda_0-1)^3}, \tag{20}$$

$$\alpha_0\lambda_0\mu_0\mu_1 > 0, \quad \mu_1^* I_5(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, \omega[. \tag{21}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку при $t \uparrow \omega$ мають місце асимптотичні зображення

$$\Phi_1(y(t)) = \frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0} I_5(t)[1 + o(1)], \tag{22}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0}\pi_\omega^2(t)p(t)L\left(\Phi_1^{-1}\left(\frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0} I_5(t)\right)\right)[1 + o(1)], \tag{23}$$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)]. \tag{24}$$

Якщо ж поряд з умовами (19)–(21) виконується нерівність

$$(2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1)[(2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1)(\gamma + 1) + \lambda_0] \neq 0, \tag{25}$$

то у диференціального рівняння (17) існуют $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$– розв'язкі, які допускають асимптотичні зображення (22)–(24), причому, при виконанні нерівності $\mu_1^*(2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1)[(2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1)(\gamma + 1) + \lambda_0] > 0$ існує трьохпараметрична сім'я розв'язків з такими зображеннями у випадку, коли $2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 > 0$ і $\lambda_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) < 0$ при $t \in [a, \omega[$, двопараметрична сім'я у випадку, коли $2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 < 0$, однопараметрична сім'я у випадку, коли $2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 > 0$ і $\lambda_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0$ при $t \in [a, \omega[$, а при виконанні нерівності $\mu_1^*(2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1)[(2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1)(\gamma + 1) + \lambda_0] < 0$, таких розв'язків існує двопараметрична сім'я у випадку, коли $2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 > 0$ і $\lambda_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) < 0$ при $t \in [a, \omega[$, і однопараметрична сім'я у випадку, коли $2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 < 0$.

Теорема 2.2. Нехай функція $L(\Phi_2^{-1}(z))$ є правильно змінною при $z \to Z_2$ порядку γ і $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0; \frac{1}{2}; 1\}$. Тоді для існування у рівняння (17) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків необхідно, щоб виконувались умови

$$\begin{gathered} \lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega(t) p^{\frac{1}{3}}(t) L^{\frac{1}{3}}\left(\Phi_2^{-1}\left(\frac{\alpha_0(2\lambda_0-1)^{\frac{2}{3}}}{\lambda_0^{\frac{1}{3}}} I_6(t)\right)\right) = \\ = \frac{\alpha_0[\lambda_0(2\lambda_0-1)]^{\frac{1}{3}}}{\lambda_0-1}, \quad \mu_0\mu_1 \lim_{t\uparrow\omega} I_6(t) = Z_2 \end{gathered} \tag{26}$$

і справджувались нерівності

$$\alpha_0\lambda_0\mu_0\mu_1 > 0, \quad \mu_2^* I_6(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, \omega[. \tag{27}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні зображення

$$\Phi_2(y(t)) = \frac{\alpha_0(2\lambda_0 - 1)^{\frac{2}{3}}}{\lambda_0^{\frac{1}{3}}} I_6(t)[1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega, \tag{28}$$

$$\begin{gathered} \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{2\lambda_0-1}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega, \\ \frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{gathered} \tag{29}$$

Якщо ж поряд з умовами (26), (27) виконується нерівність

$$(2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1)\left[2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 + \frac{\gamma}{3}(2\lambda_0^2 - \lambda_0 - 1)\right] \neq 0, \tag{30}$$

то у диференціального рівняння (17) існують $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$– розв'язки, які допускають асимптотичні зображення (28), (29), причому, при виконанні нерівності

$$\mu_2^* \frac{2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 + \frac{\gamma}{3}(2\lambda_0^2 - \lambda_0 - 1)}{2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1} > 0$$

таких розв'язків існує трьохпараметрична сім'я у випадку, коли $2\lambda_0^2+2\lambda_0-1 > 0$ і $\alpha_0(2\lambda_0 - 1) < 0$, двопараметрична сім'я у випадку, коли $2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 < 0$, однопараметрична сім'я у випадку, коли $2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 > 0$ і $\alpha_0(2\lambda_0 - 1) > 0$, а при виконанні нерівності

$$\mu_2^* \frac{2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 + \frac{\gamma}{3}(2\lambda_0^2 - \lambda_0 - 1)}{2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1} < 0$$

існує двопараметрична сім'я розв'язків з такими зображеннями у випадку, коли $2\lambda_0^2+2\lambda_0-1 > 0$ і $\alpha_0(2\lambda_0-1) < 0$, і однопараметрична сім'я у випадку, коли $2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 - 1 < 0$.

Для даного рівняння встановлювались умови існування та асимптотичної поведінки при $y \to Y_0$ так званих $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків.

Теорема 2.3. Нехай функція $L(\Phi_2^{-1}(z))$ є правільно змінною при $z \to Z_2$ порядку γ. Тоді для існування у диференціального рівняння (17) $P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язків необхідно, а якщо функція $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервно диференційовна і така, що існує скінченна або рівна $\pm\infty$ границя

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left(p^{\frac{1}{3}}(t) L_1^{\frac{1}{3}}\left(\Phi_2^{-1}\left(\alpha_0 I_6(t)\right)\right)\right)'}{p^{\frac{2}{3}}(t) L_1^{\frac{2}{3}}\left(\Phi_2^{-1}\left(\alpha_0 I_6(t)\right)\right)}, \tag{31}$$

де $L_1 : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервно диференційована і повільно змінна при $y \to Y_0$ функція з властивостями (3), то і достатньо, щоб

$$\lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega(t) p^{\frac{1}{3}}(t) L^{\frac{1}{3}}\left(\Phi_2^{-1}\left(\alpha_0 I_6(t)\right)\right) = \infty, \quad \alpha_0 \lim_{t\uparrow\omega} I_6(t) = Z_2 \tag{32}$$

і справджувалися нерівності

$$\alpha_0\mu_0\mu_1 > 0, \quad \mu_2^* I_6(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, \omega[. \tag{33}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\begin{gathered} \Phi_2(y(t)) = \alpha_0 I_6(t)[1 + o(1)], \\ \frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha_0 p^{\frac{1}{3}}(t) L^{\frac{1}{3}}\left(\Phi_2^{-1}\left(\alpha_0 I_6(t)\right)\right)[1 + o(1)], \end{gathered} \tag{34}$$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \alpha_0 p^{\frac{1}{3}}(t) L^{\frac{1}{3}} \left(\Phi_2^{-1}\left(\alpha_0 I_6(t)\right)\right)[1+o(1)], \tag{35}$$

причому, при виконанні умов (31), (32), (33) існує при $\alpha_0 = 1$ трьохпараметрична сім'я $P_\omega(Y_0, 1)$– розв'язків з зображеннями (34), (35) у випадку, коли $\mu_2^* > 0$ і двопараметрична сім'я у випадку, коли $\mu_2^* < 0$, а при $\alpha_0 = -1$ однопараметрична сім'я таких розв'язків у випадку, коли $\mu_2^* > 0$.

Наступні три теореми, що стосуються випадків, коли $\lambda_0 = \pm\infty$, $\lambda_0 = 0$ встановлюються у припущені, що повільно змінна при $y \to Y_0$ функція L задовольняє умову S.

Означення 2.1. Будемо говорити, що повільно змінна функція $L : \Delta_Y \to]0, +\infty[$, де Y дорівнює або нулю або $\pm\infty$ і Δ_Y– однобічний окіл Y задовольняє умову S, якщо

$$L\left(\mu e^{[1+o(1)]\ln|y|}\right) = L(y)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y \ (y \in \Delta_Y), \tag{36}$$

де $\mu = \operatorname{sign} y$.

Теорема 2.4. Нехай функція L задовольняє умову S. Тоді для існування у диференціального рівняння (17) $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-розв'язків необхідно і достатньо виконання умов

$$\mu_0\mu_1\pi_\omega(t) > 0 \ \text{ при } \ t \in]a, \omega[, \qquad \mu_0 \lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| = Y_0, \tag{37}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} p(t)\pi_\omega^3(t)L(\mu_0\pi_\omega^2(t)) = 0, \int_{a_1}^{\omega} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)L(\mu_0\pi_\omega^2(\tau))\,d\tau = +\infty, \tag{38}$$

де $a_1 \in [a, \omega[$ таке, що $\mu_0\pi_\omega^2(t) \in \Delta_{Y_0}$ при $t \in [a_1, \omega[$. Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\ln|y(t)| = 2\ln|\pi_\omega(t)| + \frac{\alpha_0}{2}\int_{a_1}^{t} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)L(\mu_0\pi_\omega^2(\tau))\,d\tau[1+o(1)], \tag{39}$$

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{3-k}{\pi_\omega(t)}[1+o(1)] \quad (k = 1, 2), \tag{40}$$

причому, при виконанні умов (37), (38) існує у випадку $\omega = +\infty$ трьохпараметрична сім'я $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-розв'язків з асимптотичними зображеннями (39) і (40), а у випадку $\omega < +\infty$ – однопараметрична сім'я розв'язків з такими асимптотичними зображеннями.

Теорема 2.5. Нехай функція L задовольняє умову S і виконуються умови (37), (38). Нехай, крім того, функція $p : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[-$ неперервно диференційовна і існує (скінченна або рівна $\pm\infty$) границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)p'(t)}{p(t)}$. Тоді для кожного $P_\omega(Y_0,\pm\infty)$-розв'язку диференціального рівняння (17) мають місце при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення

$$\ln|y(t)| = 2\ln|\pi_\omega(t)| + \frac{\alpha_0}{2}\int_{a_1}^{t} p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)L(\mu_0\pi_\omega^2(\tau))\,d\tau[1+o(1)], \tag{41}$$

$$\begin{gathered}\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[2+\frac{\alpha_0}{2}p(t)\pi_\omega^3(t)L(\mu_0\pi_\omega^2(t))[1+o(1)]\right],\\ \frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}\left[1+\frac{\alpha_0}{2}p(t)\pi_\omega^3(t)L(\mu_0\pi_\omega^2(t))[1+o(1)]\right].\end{gathered} \tag{42}$$

Теорема 2.6. Нехай функція L задовольняє умову S. Тоді для існування у диференціального рівняння (17) $P_\omega(Y_0,0)$-розв'язків, для яких існує (скінченна або рівна $\pm\infty$) $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'''(t)}{y''(t)}$, необхідно і достатньо виконання умов

$$\begin{gathered}\mu_0\mu_1\pi_\omega(t)>0 \quad \text{при} \quad t\in]a,\omega[, \qquad \mu_0\lim_{t\uparrow\omega}|\pi_\omega(t)| = Y_0,\\ \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I_1(t)} = -2,\end{gathered} \tag{43}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}p(t)\pi_\omega^3(t)L(\mu_0|\pi_\omega(t)|)=0,\int_{a_1}^{\omega}p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)L(\mu_0|\pi_\omega(\tau)|)d\tau=+\infty, \tag{44}$$

де $a_1\in[a,\omega[$ таке, що $\mu_0|\pi_\omega(t)|\in\Delta_{Y_0}$ при $t\in[a_1,\omega[$. Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення

$$\ln|y(t)| = \ln|\pi_\omega(t)| - \alpha_0\int_{a_1}^{t}p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)L(\mu_0|\pi_\omega(\tau)|)d\tau[1+o(1)], \tag{45}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1+o(1)}{\pi_\omega(t)},\ \frac{y''(t)}{y'(t)} = -\alpha_0 p(t)\pi_\omega^2(t)L(\mu_0|\pi_\omega(t)|)[1+o(1)], \tag{46}$$

причому, при виконанні умов (43), (44) існує двопараметрична сім'я $P_\omega(Y_0,0)$-розв'язків з такими асимптотичними зображеннями.

У випадку $\sigma=0$, тобто для лінійного диференціального рівняння

$$y''' = \alpha_0 p(t)y, \tag{47}$$

з теорем були отримані наступні твердження, які свідчать про узгодженість з відомими результатами та, в деякій мірі, доповнюють їх.

Наслідок 2.1. Нехай існує відмінна від нуля скінченна границя

$$\lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega^3(t)p(t) = c$$

і алгебраїчне рівняння

$$c(\lambda_0 - 1)^3 = \alpha_0\lambda_0(2\lambda_0 - 1)$$

має три відмінних дійсних кореня $\lambda_{0i}(i = 1, 2, 3)$. Тоді, якщо при $i = 1, 2, 3$ виконуються нерівності

$$2\lambda_{0i}^2 + 2\lambda_{0i} - 1 \neq 0$$

і

$$\alpha_0\lambda_{0i}\mu_0\mu_1 > 0, \quad \frac{\alpha_0\lambda_{0i}(2\lambda_{0i} - 1)}{\lambda_{0i} - 1} \ln|\pi_\omega(t)| > 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, \omega[,$$

то лінійне диференціальне рівняння (47) має фундаментальну сім'ю розв'язків $y_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$, які допускають асимптотичні зображення

$$\ln|y_i(t)| = \frac{2\lambda_{0i} - 1}{\lambda_{0i} - 1} \ln|\pi_\omega(t)| \, [1 + o(1)] \ (i = 1, 2, 3) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

$$\frac{y_i'(t)}{y_i(t)} = \frac{2\lambda_{0i} - 1}{(\lambda_{0i} - 1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)] \ (i = 1, 2, 3) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

$$\frac{y_i''(t)}{y_i'(t)} = \frac{\lambda_{0i}}{(\lambda_{0i} - 1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)] \ (i = 1, 2, 3) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Наслідок 2.2 Для існування у лінійного диференціального рівняння (47) $P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язків необхідно, а якщо функція
$p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервно диференційовна і така, що існує (скінченна або рівна $\pm\infty$) границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega} p^{-\frac{4}{3}}(t)p'(t)$, то і достатньо, щоб

$$\alpha_0\mu_0\mu_1 > 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega(t)p^{\frac{1}{3}}(t) = \infty, \qquad \alpha_0 \lim_{t\uparrow\omega} I_6(t) = Z_2.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні зображення

$$\ln|y(t)| = \alpha_0 I_6(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \alpha_0 p^{\frac{1}{3}}(t)[1 + o(1)] \quad (k = 1, 2) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

причому при $\alpha_0 = 1$ існує трьохпараметрична сім'я таких розв'язків, а при $\alpha_0 = -1$ – однопараметрична сім'я.

Наслідок 2.3. Для існування у лінійного диференціального рівняння (47) $P_\omega(Y_0, \pm\infty)$-розв'язків необхідно і достатньо виконання умов

$$\mu_0\mu_1\pi_\omega(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[, \quad \mu_0 \lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| = Y_0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} p(t)\pi_\omega^3(t) = 0, \qquad \int\limits_a^\omega p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)d\tau = +\infty.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні зображення

$$\ln|y(t)| = 2\ln|\pi_\omega(t)| + \frac{\alpha_0}{2}\int\limits_a^t p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)d\tau[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{3-k}{\pi_\omega(t)}[1 + o(1)] \quad (k = 1, 2) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

причому при $\omega = +\infty$ існує трьохпараметрична сім'я таких розв'язків, а у випадку $\omega < +\infty$– однопараметрична сім'я.

Наслідок 2.4. Для існування у лінійного диференціального рівняння (47) $P_\omega(Y_0, 0)$-розв'язків, для яких існує (скінченна або рівна $\pm\infty$) границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'''(t)}{y''(t)}$, необхідно і достатньо виконання умов

$$\mu_0\mu_1\pi_\omega(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[, \qquad \mu_0 \lim_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| = Y_0,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)p(t)}{I_1(t)} = -2, \quad \lim_{t\uparrow\omega} p(t)\pi_\omega^3(t) = 0, \int\limits_a^\omega p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)d\tau = +\infty.$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні зображення

$$\ln|y(t)| = \ln|\pi_\omega(t)| - \alpha_0\int\limits_a^t p(\tau)\pi_\omega^2(\tau)d\tau[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1 + o(1)}{\pi_\omega(t)}, \qquad \frac{y''(t)}{y'(t)} = -\alpha_0 p(t)\pi_\omega^2(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

причому існує двопараметрична сім'я таких розв'язків.

З використанням априорних асимптотичних властивостей $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків одержаних в роботі [3] були встановлені необхідні і достатні умови існування у диференціального рівняння (4) кожного з $n+2$ можливих типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків, а також асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ для кожного з таких розв'язків та їх похідних до $(n-1)$-го порядку включно, вирішено питання про кількість розв'язків з одержаними асимптотичними зображеннями.

Висновки

Отримані в роботах В. М. Євтухова, А. О. Стехун результати для диференціальних рівнянь другого та третього порядків створюють основу для подальшого їх поширення на диференціальні рівняння більш високих порядків. Деякі результати про асимптотику $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння n-го порядку типу (5), були отримані В. М. Євтуховим та доповідались на однієї з міжнародних конференцій.

Список літератури

1. **Karamata J.** Sur un mode de croissance reguliere de fonctions // Math. (Cluj). — 1930. — Vol. 4. — P. 38–53.
2. **Евтухов В.М., Самойленко А.М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 2011. — Т. 46, № 10. — С. 1346–1364.
3. **Євтухов В.М.** Асимптотичні зображення розв'язків неавтономних звичайних диференціальних рівнянь // Дисертація доктора фіз.-мат. наук: [спец.] 01.01.02 Диференціальні рівняння. Одеський нац. ун-т імені І.І. Мечнікова. Одеса, 1998. 295 с.
4. **V. M. Evtukhov** Asymptotics of solutions of nonautonomous second-order ordinary differential equations asymptotically close to linear equations. (Russian) Ukr. Mat. Zh. — 2012. — Vol. 64, №. 10. — P. 1346–1364; translation in Ukr. Math. J. — 2013. — Vol. 64, №. 10. — P. 1531–1552.
5. **Стехун А. О.** Асимптотична поведінка розв'язків одного класу звичайних диференціальних рівнянь третього порядку // Нелінійні коливання. — 2013. — Т. 16, № 2. — С. 246–260.
6. **Evtukhov V. M., Stekhun A. A.** Asymptotic behavior of the solutions of one class of third-order ordinary differential equations // QUALITDE – 2016, Tbilisi, Georgia, December 24–26. — 2016. — P. 77–80.
7. **Stekhun A. A.** Asymptotic Behaviour of Special Types of Solutions of Third Order Differential Equations, asymptotically close to Linear. Abstracts of the International

Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations // «QUALITDE – 2021», Tbilisi, Georgia, December. — 2021. — P. 208–211.

8. **Sharai N, Shynkarenko V.** Asymptotic representations for the solutions of third-order nonlinear differential equations // Journal of Mathematical Sciences, — Vol. 215, No. 3. — June, 2016. — P. 408–420.

9. **Sharai N., Shynkarenko V.** Asymptotic behavior of solutions for one class of third order nonlinear differential equations. Abstracts of the International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations // QUALITDE-2018, Tbilisi, Georgia, December 1–3. — 2018. — P. 165–169.

Stekhun A.

On the asymptotics of solutions of non-autonomous differential equations asymptotically close to linear

Summary

The necessary and sufficient conditions are obtained for the existence of all possible types of $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-solutions of non-autonomous second and third-order ordinary differential equations that are asymptotically close to linear equations. The asymptotic representation of each possible type of $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-solutions has been determined, and the question of their quantity has been clarified. Consequences have also been derived from the obtained theorems for cases when the equation is a linear differential equation.

Key words: differential equations of the second order, differential equations of the third order, existence of solutions, asymptotic images of solutions, asymptotically close to linear ones, slowly varying nonlinearity.

References

1. Karamata J. (1930). Sur un mode de croissance reguliere de fonctions. *Math. (Cluj)*, Vol. 4, P. 38–53.
2. Евтухов В.М., Самойленко А.М. (2011). Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений *Укр. мат. журн.* Т. 46, № 10, С. 1346–1364.
3. Євтухов В.М. (1998). Асимптотичні зображення розв'язків неавтономних звичайних диференціальних рівнянь *Дисертація доктора фіз.-мат. наук: [спец.] 01.01.02 Диференціальні рівняння. Одеський нац. ун-т імені І.І. Мечнікова. Одеса,* 295 с.
4. Evtukho. V. M. (2012). Asymptotics of solutions of nonautonomous second-order ordinary differential equations asymptotically close to linear equations. *(Russian) Ukr. Mat. Zh. 64,* № 10, 1346–1364; *translation in Ukr. Math. J.* 64, № 10, P. 1531–1552
5. Стехун А. О. (2013). Асимптотична поведінка розв'язків одного класу звичайних диференціальних рівнянь третього порядку *Нелінійні коливання.* Т. 16, № 2, С. 246–260.
6. Evtukhov V. M., Stekhun A. A. (2016). Asymptotic behavior of the solutions of one class of third-order ordinary differential equations *QUALITDE — 2016, Tbilisi, Georgia, December 24–26.* P. 77–80.
7. Stekhun A. A. (2021). Asymptotic Behaviour of Special Types of Solutions of Third Order Differential Equations, asymptotically close to Linear. Abstracts of the International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations *«QUALITDE — 2021», Tbilisi, Georgia, December.* P. 208–211.

8. Sharai N, Shynkarenko V. (2016). Asymptotic representations for the solutions of third-order nonlinear differential equations *Journal of Mathematical Sciences,* Vol. 215, № 3, P. 408–420.

9. Sharai N., Shynkarenko V. (2018). Asymptotic behavior of solutions for one class of third order nonlinear differential equations. Abstracts of the International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations *QUALITDE-2018, Tbilisi, Georgia, December 1–3,* P. 165–169.