Дослідження в математиці і механіці. – 2023. – Т. 28, вип. 1–2 (41–42). – С. 120–138

УДК 519.9

Собчук В. В., Зеленська І. О.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ РІВНОМІРНОЇ АСИМПТОТИКИ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ ПРИ ДОДАТНИХ КОЕФІЦІЄНТАХ МАТРИЦІ

Робота присвячена аналізу коефіцієнтів сингулярного оператора типу Орра-Зоммерфельда у векторній формі включаючи точку звороту. Досліджена система сингулярно збурених диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній. Розглянуто випадок, коли спектр граничного оператора містить кратні і тотожно рівні нулеві елементи. Використовуючи метод істотно особливих функцій, побудовано рівномірну асимптотику розв'язку системи. Для випадку стабільної точки звороту, асимптотика розв'язків системи побудована в секторі, який містить точку звороту. Асимптотика перших двох розв'язків для однорідної задачі побудована з використанням функцій Ейрі та їх похідних. Третій формальний розвязок однорідної системи для даного випадку викликає певні труднощі. Тому з урахуванням вказаних умов для побудови рівномірної асимптотики розв'язку для заданої системи, використали частинний розв'язок неоднорідної системи в якості третього розв'язку однорідної системи.
MSC: 34A34, 34C60, 34D05, 34E20.
Ключові слова: асимптотичний розв'язок, сингулярно збурена система диференціальних рівнянь, точка звороту, істотно особливі функції, простір безрезонансних розв'язків, рівномірна асимптотика, особлива точка, збурення.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305266.

Вступ

Досліджуючи динаміку поведінки багатьох систем у фізиці, хімії, біології та інших науках зручно представити математичні моделі таких систем за допомогою систем диференціальних рівнянь. Часто такі математичні моделі описують процеси, які характеризуються швидкою зміною поведінки системи в околі певних особливих точок [7]. В таких випадках ці особливості математично описують, використовуючи так звані системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Варто заначити, що системи диференціальних рівнянь з точками звороту є окремим класом таких задач. Специфіка поведінки систем в околі особливих точок обумовлена

Надійшла 05.02.2023

різними факторами. В загальному випадку має місце зміна характеру поведінки фізичних процесів при досягненні відповідних положень. Власне для сингулярно збурених диференціальних в таких випадках має місце зміна коливного характеру поведінки системи на показниковий. Точки, в яких відбувається така зміна характеру поведінки системи називають точками звороту [**?**; 3]. Вивчення точок звороту є важливою проблематикою в асимптотичній теорії диференціальних операторів, оскільки інформація про асимптотичну поведінку розв'язків цих диференціальних рівнянь є чи не єдиним способом зрозуміння якісних ефектів їх поведінки. А характер локалізації та поведінка точок звороту спричиняє вирішальний вплив на асимптотику розв'язків відповідних диференціальних рівнянь. У даній статті, спираючись на попередні дослідження [1; 4–6], проаналізовано поведінку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту. Основним фокусом даної роботи є дослідження особливостей побудови асимптотики розв'язків, обумовлених додатнозначністю коефіцієнтів матриці системи, до якої зводиться рівняння типу Орра-Зомерфельда вигляду

$$\varepsilon y'''(x,\varepsilon) + x\tilde{a}(x)y'(x,\varepsilon) + b(x)y(x,\varepsilon) = h(x),$$

Варто зазначити, що додатнозначність коефіцієнтів матриці породжую низку труднощів, які необхідно враховувати при побудові асимтотики розв'язку.

Основні результати

1. Постановка задачі.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь:

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon) = H(x), \tag{1}$$

де $A(x,\varepsilon)$ має таку структуру

$$A(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1,$$

а $A_0(x)$ і A_1 матриці вигляду

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\varepsilon \to 0$, $x \in [0,l]$, $Y(x,\varepsilon) = colomn(y_1(x,\varepsilon), y_2(x,\varepsilon), y_3(x,\varepsilon))$ - шукана вектор-функція, $H(x) = colomn(0,0,h(x))$ – задана вектор-функція.

Дослідимо задачу про побудову рівномірної асимптотики розв'язків сингулярно збуреної системи (1) для якої виконуються умови:

С 1. $A_0(x)$, $H(x) \in C^\infty[0,l]$.

С 2. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) > 0$, $\quad b(x) > 0$.

В цій роботі розглянемо випадок, коли $b(x) > 0$. Тоді умова **С 2** матиме вигляд

$$a(x) = x\tilde{a}(x), \quad \tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) > 0. \tag{2}$$

Запишемо характеристичне рівняння, що відповідає системі сингулярно збурених диференціальних рівнянь (1). Воно має вигляд:

$$|A(x,0) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -b(x) & -a(x) & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - x\tilde{a}(x)\lambda = 0.$$

Коренями даного характеристичного рівняння є

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{x\tilde{a}(x)}.$$

Далі дослідимо випадок коли корінь λ_1 тотожно рівен нулеві, а корені λ_2 і λ_3 злипаються в точці звороту [1]. Оскільки корені характеристичного рівняння уявні, це вказує на стабільність точки звороту $x = 0$ [1].

2. Розширення системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь.

Точка $\varepsilon = 0$ є особливою точкою для рівняння (1). Для виділення всіх істотно особливих функцій та збереження їх як єдиних цілих в системі (1), введемо регуляризуючу змінну

$$t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x), \tag{3}$$

де показник p і регуляризуюча функція $\varphi(x)$ власне й і мають бути визначені.

Згідно методу істотно особливих функцій, необхідною умовою розширення задачі є справедливість співвідношення

$$\tilde{Y_k}(x,t,\varepsilon)|_{t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)} \equiv Y_k(x,\varepsilon).$$

Тоді для визначення розширенної функції $\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon)$ одержимо розширене векторне рівняння

$$\tilde{L_\varepsilon}\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{1-p}\varphi'\frac{\partial\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon)}{\partial t}+ \\ +\varepsilon\frac{\partial\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon)}{\partial x} - A(x,\varepsilon)\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon) = H(x). \quad (4)$$

Згідно метода істотно особливих функцій необхідно виділити множини функцій (підпростори), в яких розв'язок досліджуваної задачі містить всі істотно особливі функції і сама задача буде регулярно залежати від малого параметра ε.

Основною метою подальшого дослідженння є побудова третього розв'язку розширеного рівняння (4), який буде описано із застосуванням істотно особливих функцій $\psi(x)$ та $\psi'(x)$. В роботі [2] описана схема побудови розв'язків скаслярних рівнянь типу Орра-Зоммерфельда.

2.1. Простір безрезонансних розв'язків.

Виділимо таку множину функцій, в якій розширена задача (4) буде регулярно збуреною відносно малого параметра. Для цього розглянемо множини (підпростори) функцій

$$\begin{gathered} D_{1k} = \alpha_{1k}(x,\varepsilon)U_1(t) + \varepsilon^\gamma\beta_{1k}(x,\varepsilon)U_1'(t), \\ D_{2k} = \alpha_{2k}(x,\varepsilon)U_2(t) + \varepsilon^\gamma\beta_{2k}(x,\varepsilon)U_2'(t), \\ D_{3k} = f_k(x,\varepsilon)\psi(t) + \varepsilon^\gamma g_k(x,\varepsilon)\psi'(t), \\ D_{4k} = \overline{\omega}_k(x,\varepsilon), \end{gathered} \quad (5)$$

де $U_i(t), (i=\overline{1,2})$ – функції Ейрі-Дородніцина [1].

З підпросторів (5), складемо як пряму суму новий простір

$$D_k = \Big[\sum_{i=1}^{2}\{D_{ik}\} \oplus D_{3k} \oplus D_{4k}\Big].$$

Елемент $\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon)$ простору D_k має таку структуру:

$$\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2} D_{ik}(x,t,\varepsilon) + f_k(x,\varepsilon)\psi(t) + \varepsilon^\gamma g_k(x,\varepsilon)\psi'(t) + \omega_k(x,\varepsilon), \quad (6)$$

де

$$\sum_{k=1}^{2} D_ik(x,t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{s1}\alpha_{k1}(x,\varepsilon) \\ \varepsilon^{s2}\alpha_{k2}(x,\varepsilon) \\ \varepsilon^{s3}\alpha_{k3}(x,\varepsilon) \end{pmatrix} U_i(t) + \varepsilon^\gamma \begin{pmatrix} \varepsilon^{k1}\beta_{k1}(x,\varepsilon) \\ \varepsilon^{k2}\beta_{k2}(x,\varepsilon) \\ \varepsilon^{k3}\beta_{k3}(x,\varepsilon) \end{pmatrix} U_i'(t),$$

де $\alpha_{ik}(x,\varepsilon)$, $\beta_{ik}(x,\varepsilon)$, $f_k(x,\varepsilon)$, $g_k(x,\varepsilon)$, $\omega_k(x,\varepsilon)$, $k=\overline{1,3}$ – шукані аналітичні функції, які залежать від параметра $\varepsilon>0$ що нескінченно диференційовні на проміжку $x\in[0;l]$.

Далі для того, щоб обчислити регуляризуючу змінну згідно з (6), необхідно визначити показник p і функцію $\varphi(x)$. Для цього подіємо розширеним оператором $\tilde{L}_\varepsilon$ на вектор функцію $D_k(x,t,\varepsilon)$. Підставимо результат в однорідне розширене рівняння (4), тобто при $H(x)=0$. Отримаємо

$$\tilde{L}_\varepsilon(\alpha_{ik}(x,\varepsilon)U_{ik}(t)+\varepsilon^\gamma\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i'(t))=\varepsilon^{1-p}\alpha_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x)U_i'(t)+$$

$$+\varepsilon\alpha_{ik}'(x,\varepsilon)U_i(t)-A(x,\varepsilon)\alpha_{ik}(x,\varepsilon)U_i(t)+\varepsilon^{1-p+\gamma}\varphi'(x)\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i''(t)+$$

$$+\varepsilon^{1+\gamma}\beta_{ik}'(x,\varepsilon)U_i'(t)-\varepsilon^\gamma A(x,\varepsilon)\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i'(t)=0.$$

Для подальших міркувань та перетворень з компонентою $U''(t)$ використаємо модельний оператор Ейрі-Дородніцина

$$U''(t)+tU(t)=0,$$

$$U''(t)=-tU(t),\quad t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi'(x).$$

Тоді необхідно, щоб коефіцієнти при істотно особливих функціях та їх похідних перетворились в нуль. Відтак випишемо коефіцієнти при істотно особливих функціях та їх похідних:

$$U_i'(t):\varepsilon^{1-p}\alpha_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-\varepsilon^\gamma[A_0(x)+\varepsilon A_1]\beta_{ik}(x,\varepsilon)=-\varepsilon^{1+\gamma}\beta_{ik}'(x,\varepsilon), \quad (7)$$

$$U_i(t):-\varepsilon^{1+\gamma-2p}\beta_k(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)-[A_0(x)+\varepsilon A_1]\alpha_{ik}(x,\varepsilon)=-\varepsilon\alpha_{ik}'(x,\varepsilon) \quad (8)$$

де $i=\overline{1,2}$.

Вимагатимемо, щоб одержані системи (7) і (8) були регулярно збуреними відносно малого параметра $\varepsilon>0$. З попередніх досліджень

$$p=\frac{2}{3},\qquad\gamma=\frac{1}{3},\qquad k_1=k_2=s_3=0,\qquad s_1=s_2=k_3=-\frac{1}{3}. \quad (9)$$

Важливим є наступне твердження

Зауваження 1. Для існування розв'язків систем (7) і (8) необхідно, щоб виконувалась умова $p=\frac{2}{3}$, $\gamma=\frac{1}{3}$.

Векторні рівняння (7) і (8) запишемо у вигляді системи алгебраїчних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{i1}(x,\varepsilon) = \mu^3[\beta_{i2}(x,\varepsilon) - \beta'_{i1}(x,\varepsilon)], \\ \varphi'(x)\alpha_{i2}(x,\varepsilon) - \beta_{i3}(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta'_{i2}(x,\varepsilon), \\ \varphi'(x)\alpha_{i3}(x,\varepsilon) + b(x)\beta_{i1}(x,\varepsilon) + a(x)\beta_{i2}(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta'_{i3}(x,\varepsilon), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i1}(x,\varepsilon) = \mu^3[\alpha'_{i1}(x,\varepsilon) - \alpha_{i2}(x,\varepsilon)], \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i2}(x,\varepsilon) + \alpha_{i3}(x,\varepsilon) = \mu^3\alpha'_{i2}(x,\varepsilon), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i3}(x,\varepsilon) - b(x)\alpha_{i1}(x,\varepsilon) - a(x)\alpha_{i2}(x,\varepsilon) = \mu^3\alpha'_{i3}(x,\varepsilon). \end{cases} \tag{10}$$

Тут $i = \overline{1;2}$, $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{3}}$. В подальших міркуваннях, враховуватимо, що $\varepsilon = \mu^3$.

Таким способом, одержана система (10) є регуляризованою. Це означає, що в ході перетворень було правильно виділено, описано та збережено як єдину цілісність усі істотно особливі функції, які містяться у розв'язках системи (1).

3. Побудова формальних розв'язків однорідної системи.

Варто відзначити, що особливістю розширеної задачі (10) є те, що вона регулярно збурена відносно малого параметра $\mu > 0$ у просторі безрезонансних розв'язків (5). Тоді всі компоненти вектор-функцій $\alpha_{ik}(x,\varepsilon)$ і $\beta_{ik}(x,\varepsilon)$ будемо шукати у вигляді рядів

$$\alpha_{ik}(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \alpha_{ikr}(x), \qquad \beta_{ik}(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \beta_{ikr}(x). \tag{11}$$

Підставимо ряди (11) у систему (10)для визначення вектор-функцій

$$\alpha_{ikr}(x) = colomn(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x)),$$

$$\beta_{ikr}(x) = colomn(\beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x)).$$

Підставивши ряди (11) у розширену задачу (3) і зрівнявши коефіцієнти біля однакових степенів малого параметра $\mu > 0$, для визначення коефіцієнтів рядів отримаємо рекурернтну систему задач:

$$\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = 0, \quad r = \overline{0,2}, \quad \Phi(x)Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{k(r-3)}(x), \quad r \geq 3, \tag{12}$$

за умови, що $Z_{kr}(x) = colomn(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x), \beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x))$, а

$$\Phi(x)= \\ =\begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \varphi'(x) & -b(x) & a(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 \\ b(x) & -a(x) & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$F\cdot Z_{k(r-3)}(x)=colomn\left(z_{i1(r-3)},z_{i2(r-3)},z_{i3(r-3)},z_{i4(r-3)},z_{i5(r-3)},z_{i6(r-3)}\right),$$

де

$$z_{i1(r-3)}=(\beta_{i2(r-3)}(x)-\beta_{i1(r-3)}(x)),$$
$$z_{i2(r-3)}=-\beta_{i2(r-3)}(x),$$
$$z_{i3(r-3)}=-\beta_{i3(r-3)}(x),$$
$$z_{i4(r-3)}=(\alpha_{i1(r-3)}(x)-\alpha_{i2(r-3)}(x)),$$
$$z_{i5(r-3)}=\alpha_{i2(r-3)}(x),$$
$$z_{i6(r-3)}=\alpha_{i3(r-3)}(x).$$

Обчислимо визначник цієї системи (13)

$$\det\Phi(x)=\varphi'^2[\varphi(x)\varphi_2'(x)]^2\cdot[\varphi(x)\varphi'^2(x)-a(x)]^2=0.$$

Зауважимо, що регуляризуюча функція $\varphi(x)$ поки не визначена. Тому визначимо її як розв'язок задачі:

$$\varphi(x)\varphi'^2(x)=a(x)\equiv x\tilde{a}(x), \qquad \varphi(0)=0. \tag{14}$$

Розв'язавши (14) отримуємо

$$\varphi(x)=\left(\frac{3}{2}\int_0^x\sqrt{x\widetilde{a}(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Запишемо систему рекурентних рівнянь (12) при $r=0$

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{i10}(x,\varepsilon)=0, \\ \varphi'(x)\alpha_{i20}(x,\varepsilon)-\beta_{i30}(x,\varepsilon)=0, \\ \varphi'(x)\alpha_{i30}(x,\varepsilon)+b(x)\beta_{i10}(x,\varepsilon)+a(x)\beta_{i20}(x,\varepsilon)=0, \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i1}(x,\varepsilon)=\mu^3[\alpha_{i10}'(x,\varepsilon)-\alpha_{i20}(x,\varepsilon)], \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i20}(x,\varepsilon)+\alpha_{i30}(x,\varepsilon)=0, \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i30}(x,\varepsilon)-b(x)\alpha_{i1}(x,\varepsilon)-a(x)\alpha_{i20}(x,\varepsilon)=0. \end{cases}$$

Оскільки $\det\Phi(x) \equiv 0$, то існує нетривіальний розв'язок системи $\Phi(x)\cdot Z_{kr} = 0$, $r = \overline{0,2}$ вигляду:

$$Z_{ikr}(x) = colomn\left(0, \frac{1}{\varphi'(x)}\beta_{i2r}(x), -\varphi\varphi'(x)\beta_{i3r}(x), 0, \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x)\right), \quad (15)$$

де $\beta_{ikr}(x), i = \overline{1;2}, k = \overline{1;3}, r = \overline{0;2}$ – до певного часу довільні, достатньо гладкі функції при $x \in [0;l]$.

Таким способом, отримавши розв'язок системи $\Phi(x)\cdot Z_{kr} = 0$, $r = \overline{0;2}$, перейдемо до розв'язків неоднорідних систем (13) $\Phi(x)\cdot Z_{kr}(x) = F\cdot Z_{k(r-3)}(x)$, $r \geq 3$. Спочатку розглянемо ці системи при $r = 3$. З урахуванням розв'язку (16), отримаємо системи

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{i13}(x) = \beta_{i20}(x) - \beta'_{i10}(x) \equiv \beta_{i20}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{k23}(x) - \beta_{i33}(x) = -\beta'_{i20}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{i33}(x) + b(x)\beta_{i13}(x) + a(x)\beta_{i23}(x) = -\beta'_{i30}(x), \end{cases} \quad (16)$$

та

$$\begin{cases} \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i13}(x) = -\alpha'_{i10}(x) + \alpha_{i20}(x) \equiv \alpha_{i20}(x) \equiv [\varphi'(x)]^{-1}\beta_{i30}(x), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i23}(x) + \alpha_{i33}(x) = \alpha'_{i20}(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}\beta_{i30}(x)), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i33}(x) - b(x)\alpha_{i13}(x) - a(x)\alpha_{i23}(x) = \alpha'_{i30}(x) \equiv \\ \qquad \equiv \frac{d}{dx}[-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i20}(x)]. \end{cases} \quad (17)$$

З перших рівнянь систем (16) та (17) визначимо функції

$$\alpha_{i13}(x) = [\varphi'(x)]^{-1}\beta_{i20}(x),$$

$$\beta_{i13}(x) = [\varphi'(x)]^{-2}[\varphi(x)]^{-1}\beta_{i30}(x).$$

Тоді системи (16) і (17) наберуть вигляду

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{i23}(x) - \beta_{i33}(x) = -\beta'_{i20}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{i33}(x) + a(x)\beta_{i23}(x) = -\beta'_{i30}(x) - b(x)\beta_{i13}(x), \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i23}(x) + \alpha_{i33}(x) = \alpha'_{i20}(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}\beta_{i30}(x)), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x) - a(x)\alpha_{i23}(x) = \frac{d}{dx}[-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i20}(x)] + b(x)\alpha_{i13}(x). \end{cases}$$

З (16) та (17) одержимо

$$\beta_{i20}(x) = \beta_{i20}^{0} \cdot exp\{\int \frac{b(x) - \varphi'^{3}(x) - \varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x)}{2a(x)}\}, \qquad (18)$$

$$\beta_{i30}(x) = \beta_{i30}^{0} \cdot exp\{\int \frac{b(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x)}{2a(x)}\}, \qquad (19)$$

Тепер з умов (18) та (19) однозначно визначимо компоненти розв'язку (15) при $r = \overline{0,2}$, а саме

$$\beta_{is0}(x) = \beta_{is0}^{0} \cdot \tilde{\beta}_{is0}(x),$$

де $i = \overline{1;2}$, $s = \overline{2;3}$, $\beta_{is0}^{0}(x)$ – довільні сталі, $\tilde{\beta}_{is0}(x)$ – частинні, достатньо гладкі розв'язки однорідних систем (15) та (16) при $x \in [0;l]$. При такому визначенні вектор-функцій $Z_{k0}(x)$ існують розв'язки неоднорідних систем (16) та (17) вигляду

$$Z_{i3}(x) = colomn \left(\; z_{k13}, z_{k23}, z_{k33}, z_{k43}, z_{k53}, z_{k63} \; \right),$$

$$z_{i13} = (\varphi'(x))^{-1}\beta_{i20}(x)$$

$$z_{i23} = \frac{-\beta_{i20}'(x) + \beta_{i33}(x)}{\varphi'(x)},$$

$$z_{i33} = \frac{-\beta_{i30}'(x) - a(x)\beta_{i23}(x) - b(x)(\varphi(x))^{-1}(\varphi'(x))^{-2}\beta_{i30}}{\varphi'(x)},$$

$$z_{i43} = (\varphi(x))^{-1}(\varphi'(x))^{-2}\beta_{i20}(x),$$

$$z_{i53} = \beta_{i21}(x),$$

$$z_{i63} = \beta_{i31}(x).$$

Необхідно відмітити, що $\beta_{i21}(x)$ та $\beta_{i31}(x)$, як і в (15), до певного часу довільні, достатньо гладкі функції для всіх $x \in [0;l]$.

Продовжуючи далі розв'язувати системи алгебраїчних рівнянь (16) та (17) при $r > 3$, знайдемо всі необхідні члени ряду для обох систем з точністю до двох довільних сталих $\beta_{i2q}(x)$ та $\beta_{i3q}(x)$, де $r = \overline{0;q}$.

Висновок 1. Лінійно незалежні розв'язки однорідної системи алгебраїчних рівнянь (1) мають вигляд

$$D_{ik}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^{r}[\alpha_{ik}(x)U_i(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i'(t)], \quad i = \overline{1;2}, k = \overline{1;3}. \qquad (20)$$

де

$$\alpha_{ik}(x) = colomn(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x)),$$

$$\beta_{ik}(x) = colomn(\beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x)).$$

Тут $\alpha_{ik}(x)$ та $\beta_{ik}(x)$ визначені вектор-функції, $i = \overline{1;2}$, $k = \overline{1;3}$. При чому (26) отримуємо як ітераційні розв'язки систем (16) та (17).

Повертаючись до заміни $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$ одержимо розв'язки системи (1) у вигляді

$$D_{ik}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ik}(x) U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) + \\ + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ik}(x, \varepsilon) U_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))], \quad i = \overline{1;2}, k = \overline{1;3}. \quad (21)$$

Тоді, поступово розв'язуючи (1), отримаємо два формальні розв'язки однорідного рівняння

$$D_{ik}(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{ikr}(x) U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) + \\ + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ikr}(x, \varepsilon) U_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))]. \quad (22)$$

Третій формальний розв'язок однорідного векторного рівняння ми не можемо отримати з виродженого рівняння, системи (1). В даному випадку точка звороту буде стабільною, як і в попередньому випадку, але розв'язки виродженого рівняння не будуть достатньо гладкими у точці $x = 0$. З урахуванням умов C1 і C2, тобто коли $b(x) > 0$, тобто одержимо $\frac{-b(0)}{\tilde{a}(0)} = \rho < 0$ [1]. Тому повторити логіку і використати міркування, які були описані у випадку A ми не можемо. Оскільки розв'язок виродженого диференціального рівняння системи (1) та його похідні не є достатньо гладкими в точці $x = 0$. Це пояснюється тим, що розв'язок має розрив другого роду в точці звороту. Тому він не може бути використаний для побудови третього лінійно незалежного розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (1). Труднощі, які виникають при побудові третього формального розв'язку опишемо нижче.

4. Побудова формальних частинних розв'язків неоднорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь.

Вивчимо дію розширенного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ на елементи простору безрезонансних розв'язків D_{3k} і D_{4k}.

Для подальших міркувань та перетворень з компонентою $\psi''(t)$ використаємо модельний оператор

$$\psi(t)'' + t\psi(t) = 1,$$

$$\psi(t)'' = 1 - t\psi(t), \quad t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi'(x).$$

Прирівняємо коефіцієнти при істотно особливих функціях в лівій та правій частинах рівності, в результаті отримаємо рівняння вигляду

$$\psi'(t) : \varphi'(x)f(x,\varepsilon) - [A_0(x) + \mu^3 A_1]g(x,\varepsilon) = -\mu^3 g'(x,\varepsilon), \tag{23}$$

$$\psi(t) : \varphi(x)\varphi'(x)g_k(x,\varepsilon) + [A_0(x) + \mu^3 A_1]f_k(x,\varepsilon) = \mu^3 f'(x,\varepsilon), \tag{24}$$

$$\mu^3\bar{\omega}'(x,\varepsilon) - [A_0(x) + \mu^3 A_1]\bar{\omega}(x,\varepsilon) + \mu^2\varphi'(x)g_k(x,\varepsilon) = \\ = H(x) - \mu^2\varphi'(x)g_k(x,\varepsilon). \tag{25}$$

Вивчивши рівняння (23) та (24), бачимо, що вони мають таку ж структуру як і (7) та (8). Але скористатись прямим результатом (26) ми не можемо, оскільки в цьому випадку не отримаємо очікуваних результатів для системи (25). Для отримання рівномірної асимптотики системи (25) необхідно використати розв'язки (23) та (24), провівши аналогічні міркування як у (7) та (8). Дослідимо системи (23) та (24) і побудуємо їх розв'язки у вигляді рядів:

$$f_k(x,\varepsilon) = \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r f_{kr}(x), \qquad g_k(x,\varepsilon) = \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r g_{kr}(x). \tag{26}$$

Для визначення компонент вектор-функцій

$$f_{kr}(x) = colomn(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x)),$$

$$g_{kr}(x) = colomn(g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x))$$

підставимо ряди (26) у рівняння (23) та (24). Будемо мати наступні системи рекурентних рівнянь:

$$\Phi(x) \cdot Z_0^{part.}(x) = 0,\ r = -2; -1; 0,\ \ \Phi(x) \cdot Z_r^{part.}(x) = -Z_{r-3}^{part.}(x),\ r \geq 1. \tag{27}$$

В одержаних рекурсіях (27) $\Phi(x)$– матриця, а

$$Z_r^{part.}(x) = colomn(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x), g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x))$$

невідома вектор-функція.

Нагадаємо, що в попередньому пункті ми не змогли побудувати третій формальний розв'язок однорідної системи (3). Тому будемо будувати тільки частинні розв'язки цієї системи.

Оскільки $\det\Phi(x)\equiv 0$, то існує нетривіальний розв'язок системи $\Phi(x)\cdot Z_{kr}=0$, $r=\overline{-2,0}$ вигляду:

$$Z_{kr}(x)=colomn\left(0,\frac{1}{\varphi'(x)}g_{2r}(x),-\varphi\varphi'(x)g_{3r}(x),0,g_{2r}(x),g_{3r}(x)\right),\qquad(28)$$

де $g_{kr}(x),k=\overline{1;3},r=\overline{-2;0}$ – до певного часу довільні, достатньо гладкі функції при $x\in[0;l]$.

Таким способом, отримавши розв'язок системи $\Phi(x)\cdot Z_{kr}=0$, $r=\overline{-2;0}$, перейдемо до розв'язків неоднорідних систем (28) $\Phi(x)\cdot Z_{kr}(x)=F\cdot Z_{k(r-3)}(x)$, $r\geq 1$. Спочатку розглянемо ці системи при $r=1$. З урахуванням розв'язку (**??**) і слідуя міркуванням попереднього пункту, одержимо диференціальні рівняння виду

$$-2a(x)g'_{2(-2)}(x)+\Big[b(x)-\varphi'(x)(\varphi(x)\varphi'(x))'\Big]g_{2(-2)}(x)=0,\qquad(29)$$

та

$$-2g'_{3(-2)}(x)+\Big[\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}-\frac{b(x)}{a(x)}\Big]g_{3(-2)}(x)=0.\qquad(30)$$

У рівнянні (29) введемо позначення

$$b_2(x)=b(x)-\varphi'^3(x)-\varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x).$$

Нагадаємо, що

$$\varphi(x)=\left(\frac{3}{2}\int_0^x\sqrt{x\widetilde{a}(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\varphi'(x)=\left(\int_0^x\sqrt{x\widetilde{a}(x)}dx\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{x\widetilde{a}(x)}.$$

Відповідно в рівнянні (30) також введемо позначення

$$b_3(x)=b(x)+\varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x).$$

Тоді рівняння (29) та (30) запишемо у вигляді

$$g'_{2(-2)}(x) - \frac{1}{x}\Big[\frac{b_2(x)}{2\tilde{a}(x)}\Big] g_{2(-2)}(x) = 0, \qquad (31)$$

та

$$g'_{3(-2)}(x) - \frac{1}{x}\Big[\frac{b_3(x)}{2\tilde{a}(x)}\Big] g_{3(-2)}(x) = 0. \qquad (32)$$

Розв'яжемо (31). Тоді

$$g_{2(-2)}(x) = g^0_{2(-2)} \cdot exp\{\int \frac{b_2(x)}{x}\}. \qquad (33)$$

З (32) одержимо

$$g_{3(-2)}(x) = g^0_{3(-2)} \cdot exp\{\int \frac{b_3(x)}{x}\}, \qquad (34)$$

$$\bar{Z}^{part.}_{k1}(x) = colomn\left(\bar{z}_{k1}, \bar{z}_{k2}, \bar{z}_{k3}, \bar{z}_{k4}, \bar{z}_{k5}, \bar{z}_{k6}\right), \qquad (35)$$

де

$$\bar{z}_{k1} = \frac{g^0_{2(-2)}(x) \cdot x^{\rho_2}}{\varphi'(x)},$$

$$\bar{z}_{k2} = \frac{-g^0_{2(-2)}(x) \cdot x^{\rho_2} + g_{31}(x)}{\varphi'(x)},$$

$$\bar{z}_{k3} = \frac{-g^0_{2(-2)}(x) \cdot x^{\rho_2} + \frac{b(x) g^0_{3(-2)}(x) \cdot x^{\rho_3}}{a(x)} - a(x) g_{21}(x)}{\varphi'(x)},$$

$$\bar{z}_{k4} = \frac{-g^0_{3(-2)}(x) \cdot x^{\rho_3}}{a(x)},$$

$$\bar{z}_{k5} = g_{21}(x),$$

$$\bar{z}_{k6} = g_{31}(x).$$

де $g_{k1}, k = \overline{2;3}$ – до певного часу довільні, достатньо гладкі функції $x \in [0; l]$.

Введемо нові позначення

$$\frac{b_2(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{b(0) - \varphi'^3(0) - \varphi(0)\varphi'(0)\varphi''(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{b(0) - \varphi'^3(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{1}{2}[\rho - 1] = \rho_2$$

і

$$\frac{b_3(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{b(0) + \varphi(0)\varphi'(0)\varphi''(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{b(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{1}{2}\rho = \rho_3$$

З метою забезпечення побудови рівномірної асимптотики розв'язку рівняння (3) на всьому відрізку відносно малого параметра необхідно, щоб виконувалась вимога $\rho \quad \epsilon \quad N$. Оскільки $\frac{b(0)}{\tilde{a}(0)} = \rho$ має бути натуральним числом, то розглянемо такі випадки.

Випадок 1. Нехай $\rho = 2n$ - парне число, $n\epsilon N$. Тоді, використовуючи вищезазначені позначення одержимо, що $\rho_2 = n - \frac{1}{2}$ не є натуральним числом, а $\rho_3 = n$ - натуральне число або $\rho_3 = 0$ при $\rho = 0$.

Гладкість розв'язків (33) та (34) рівнянь (31) та (32) на всьому відрізку, включаючи і точку звороту, істотньо залежить від знаків виразів $\frac{b_j(0)}{2\tilde{a}(0)}$, $j = 1, 2$. Тому дослідимо підінтегральні функції у (31) та (32). Враховуючи розклад підінтегральних функцій в ряд Маклорена отримаємо рівності

$$\frac{b_j(x)}{x\tilde{a}(x)} = \frac{\rho}{x} + \tilde{R}_j^{part.}(x),$$

де $\tilde{R}_j^{part.}(x)$ —аналітична функція в околі точки звороту.

Якщо $\rho_2 = n - \frac{1}{2}$ — достатньо велике число, то для побудови асимптотики лінійно незалежого розв'язку системи (1) з визначеною тоністю відносно малого параметра $\varepsilon > 0$ можна використати розв'язки (37). Оскільки в цьому випадку $\rho_3 = \frac{1}{2}\rho$ є цілим невід'ємним числом, то використовуючи загальний розв'язки рівнянь виду (33) та частинні розв'язки рівнянь виду (34) ми побудуємо асимптотику лінійно незалежного розв'язку системи (1) з довільною точністю відносно малого параметра $\varepsilon > 0$ на всьому відрізку $[0, l]$, включаючи і точку звороту.

Випадок 2. Нехай $\rho = 2n - 1$ — непарне число $n\epsilon N$. Тоді $\rho_2 = n - 1$ - ціле невід'ємне число, а $\rho_3 = n - \frac{1}{2}$ - не є натуральним числом. В цьому випадку для побудови асимптотики лінійно незалежого розв'язку системи (1) з визначеною тоністю відносно малого параметра $\varepsilon > 0$ будемо використовувати загальний розв'язки рівнянь виду (34) та частинні розв'язки рівнянь виду (33).

Дослідимо систему (25) при $r = 1$. Для існування достатньо гладкого розв'язку цієї системи на всьому відрізку, включаючи і точку звороту $x =$

0, припустимо, що $g^0_{(-1)} = g^0_0 = 0$. Тоді система (25) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \bar{\omega'}_{10}(x) = -\varphi'(x)\cdot g_{11}(x) + \bar{\omega}_{20}(x), \\ -\bar{\omega}_{31}(x) = -\varphi'(x)\cdot g_{2(-1)}(x), \\ b(x)\bar{\omega}_{11}(x) + a(x)\bar{\omega}_{21}(x) = -\varphi'(x)\cdot g_{3(-1)}(x). \end{cases} \tag{36}$$

При $r = 2$ з (25) одержимо наступну систему

$$\begin{cases} \bar{\omega'}_{11}(x) = -\varphi'(x)\cdot g_{12}(x) + \bar{\omega}_{21}(x), \\ -\bar{\omega}_{32}(x) = -\varphi'(x)\cdot g_{20}(x), \\ b(x)\bar{\omega}_{12}(x) + a(x)\bar{\omega}_{22}(x) = -\varphi'(x)\cdot g_{30}(x). \end{cases} \tag{37}$$

Продовжуючи дослідженння (25) при $r \geq 3$ одержимо систему

$$\begin{cases} \bar{\omega}_{3r}(x) = \varphi'(x)\cdot g_{2(r-2)}(x) + \bar{\omega}'_{2(r-3)}(x), \\ b(x)\bar{\omega}_{1r}(x) + a(x)\bar{\omega}_{2r}(x) = -\varphi'(x)\cdot g_{3(r-2)} - \bar{\omega'}_{3(r-3)}(x), \\ 0 = -\varphi'(x)\cdot g_{1(r-2)} + \bar{\omega}(x)_{2(r-3)} - \bar{\omega'}_{1(r-3)}. \end{cases} \tag{38}$$

Починаючи з $r \geq 3$, одержимо неоднорідні рівняння (25) відносно невідомих функцій $\omega_{kr}(x)$. Продовжуючи далі ітераційний процес, одержимо достатньо гладкі розв'язки на всьому відрізку $[0, 1]$ функцій $\omega_{kr}(x)$, $f_{kr}(x)$, $g_{kr}(x)$. Таким чином буде визначений третій формальний розв'язок розширеного рівняння (3) у вигляді ряду

$$\tilde{Y}_3(x, t, \varepsilon) = \tag{39}$$

$$\sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\psi(t) + \mu g_{kr}(x)\psi'(t) \right] + \sum_{r=0}^{\infty} \bar{\omega}_{kr}(x).$$

Таким способом побудовано розв'язок системи (25) при $r = 0$.

Висновок 2. Розв'язок системи (25) при $r = 0$ має вигляд

$$\bar{\omega}_{10}(x) = \bar{\omega}^0_{10}\cdot exp\{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\} + exp\{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\}\cdot \frac{h(x)}{a(x)} exp\{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\}.$$

$$\bar{\omega}_{20}(x) = \bar{\omega'}_{10}\cdot \varphi'(x)\cdot \frac{g^0_{3(-2)}x^{\rho_3}}{a(x)}.$$

$$\bar{\omega}_{30}(x) = \varphi'(x)\cdot g^0_{2(-2)}x^{\rho_2}.$$

Продовжуючи далі розв'язувати системи ітераційних рівнянь з (26) знайдемо всі компоненти $\omega_{kr}(x)$.

Теорема 1. *Формально розв'язок однорідної системи (3) можна представити у вигляді рядів (25) :*

$$Y_{ik}(x,\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x),\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^{r}\Big[\alpha_{ikr}(x)U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))+ \\ +\varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ikr}(x,\varepsilon)U_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))\Big]+ \\ +\sum_{r=-2}^{\infty}\mu^{r}\left[f_{kr}(x)\psi(t)+\mu g_{kr}(x)\psi'(t)+\bar{\omega}_{kr}(x)\right]. \quad (40)$$

Висновки

В роботі, досліджено особливості побудови асимптотики розв'язків, обумовлених додатнозначністю коефіцієнтів матриці системи (1), до якої зводиться рівняння типу Орра-Зомерфельда. Додатнозначність коефіцієнтів матриці (2) породжує низку труднощів, які необхідно враховувати при побудові асимтотики розв'язку. Зокрема, показано, що на відміну від випадків, коли коефіцієнти матриці були різних знаків, тобто $a>0$, $b<0$ або ж $a<0$, $b>0$ побудова асимптотики розв'язку при побудові третього розв'язку векторного рівняння (3) використовується частинний розв'язок неоднорідного.

Побудовано асимтотику розв'язку системи (1) у вигляді (40). Власне отримано вектор-функцію, компоненти якої визначаються через ітераційні розв'язки системи (12) та (27). Оскільки рівняння типу Орра-Зомерфельда отримано як математичну модель процесів в гідродинаміці, то однією з важливих задач є дослідження ламінарних течій, які в реальних умовах спостерігаються при обмежених значення числа Рейнольдса. Експериментально встановлено, що в міру зростання числа Рейнольдса ламінарний потік починає проявляти здатність збільшувати збурення передаючи їм енергію. Власне отримана вектор-функція (40) є прикладом формалізації ефектів, які виникають в околі точок звороту. Таким способом, комбінуючи значення параметрів для системи (1) можна досліджувати ефекти які матимуть місце для асимптотики (40). Побудувавши відповідні графіки вектор функції, можна спостерігати еволюцію вектор-функції, яка ілюструватиме ефекти поведінки у турбулентних станах системи в околі диференціальної точки звороту.

Список літератури

1. **Бобочко В.М.** Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту / В.М. Бобочко, М.О. Перестюк // Київ: Наукова думка, 2002. – 310 с.
2. **Бобочко В.М.** Система диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту / В.М. Бобочко, І.О. Зеленська // Наукові записки. Серія: математичні науки.– 2007– Т.13, № 1 – С. 40-47.
3. **Eckert M.** Troublesome Birth of Hydrodynamic Stability Theory: Sommerfeld and the Turbulence Problem / M.Eckert The European Physical Journal H. – 2010. – №35– PP. 29–51. DOI:10.1140/epjh/e2010-00003-3
4. **Зеленська І.О.** Побудова розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту /І.О.Зеленська // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2023. – №3 – С. 116-121. DOI:10.20998/2222-0631.2023.01.17
5. **Sobchuk V.** Algorithm for solution of systems of singularly perturbed differential equations with adifferential turning point / V. Sobchuk, I. Zelenska, O. Laptiev // Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences. –2023.– T. 71, №3.–C. 1–8. DOI: 10.24425/bpasts.2023.145682
6. **Собчук В.** Побудова асимптотики розв'язку системи СЗДР 4-го порядку з диференціальною точкою звороту методом істотно особливих функцій /В.В. Собчук, І.О. Зеленська // Вид-во УжНУ Говерла. – 2022.–Т. 41, № 2– С. 78-90. DOI:10.24144/2616-7700.2022.41(2)
7. **Coskun. N.** Scattering properties of Sturm-Liouville equations with sign-alternating weight and transmission condition at turning point / N. Coskun, M. Gorgulu // Open Mathematics. – 2023. DOI:10.1515/math-2022-0566

Sobchuk V. V., Zelenska I. O.

FEATURES OF THE CONSTRUCTION OF UNIFORM ASYMPTOTIC SOLUTION OF A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A TURNING POINT WITH POSITIVE COEFFICIENTS OF THE MATRIX

Summary

The work is devoted to the analysis of the coefficients of the singular operator of the Orr-Sommerfeld type in vector form including the turning point. The system of singularly perturbed differential equations with a small parameter at the highest derivative is investigated. We consider the case when the spectrum of the limit operator contains multiple and identically equal zero elements. Using the method of essentially singular functions, the uniform asymptotic solution of the system is constructed. For the case of a stable turning point, the asymptotics of the solutions of the system are constructed in the sector that contains the turning point. The asymptotics of the first two solutions for the homogeneous problem are constructed using the Airy functions and their derivatives. The third formal solution of a homogeneous system for this case presents certain difficulties. Therefore, taking into account the specified conditions, in order to construct the uniform asymptotics of the solution for the given system, we used the partial solution of the heterogeneous system as the third solution of the homogeneous system.

Key words: asymptotic solution, singularly perturbed system of differential equations, turning point, essentially singular functions, space of resonance-free solutions, uniform asymptotics, singular point, perturbation.

REFERENCES

1. Bobochko V.M., Perestyuk M.O.(2002). *Asymptotic integration of the Liouville equation with turning points.* 310 p.
2. Bobochko V.V., Zelenska I.O. (2007). A system of differential equations with a differential turning point. *Series: mathematical sciences.*,V.13, № 1, P. 40–47.
3. Eckert M. (2010) Troublesome Birth of Hydrodynamic Stability Theory: Sommerfeld and the Turbulence Problem. *The European Physical Journal H.*, №35, P. 29—51. DOI:10.1140/epjh/e2010-00003-3
4. Zelenska I.O. (2023) Construction of the solution of a system of singularly perturbed differential equations with a differential turning point. *Bulletin of the National Technical*

University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology, №3, P. 116–121. DOI:10.20998/2222-0631.2023.01.17

5. Sobchuk V., Zelenska I., Laptiev O.(2023) Algorithm for solution of systems of singularly perturbed differential equations with adifferential turning point *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*,V. 71, №3, P. 1–8. DOI: 10.24425/bpasts.2023.145682
6. Sobchuk V.V., Zelenska I.O. (2022) Construction of the asymptotics of the solution of the 4th-order SZDR system with a differential turning point by the method of significantly singular functions. *Hoverla University of Applied Sciences*, V. 41, № 2, P. 78–90. DOI:10.24144/2616-7700.2022.41(2)
7. N. Coskun, M. Gorgulu (2023) Scattering properties of Sturm-Liouville equations with sign-alternating weight and transmission condition at turning point. *Open Mathematics*. DOI:10.1515/math-2022-0566