

УДК 517.91

О. О. Пришляк, С. О. Стась

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ФУНКЦІЇ МОРСА ТА ФУНКЦІЇ КОРОЗМІРНОСТІ 1 НА ПРОЕКТИВНІЙ ПЛОЩИНІ

Для опису топологічних властивостей функцій на двовимірних многовидах використовується інваріант, що називається графом Ріба. У випадку простих функцій Морса на замкнутих орієнтованих двовимірних многовидах, це повний топологічний інваріант для пошарової еквівалентності. У разі неорієнтованого двовимірного многовиду, а також многовидів з межею потрібна додаткова інформація для побудови повного топологічного інваріанта. Якщо лінійний порядок заданий на множині вершин, то він стає повним топологічним інваріантом відносно топологічної еквівалентності.

У роботі досліджується топологічна класифікація функцій Морса та функцій корозмірності 1 на проективній площині. У цих випадках граф Ріба є орієтованим кореневим деревом. Отримано аналітичний вираз для кількості орієтованих графів Ріба з коренем. Для функцій корозмірності 1 для фіксованої кількості критичних точок побудовані всі можливі графи Ріба.

MSC: 58K05, 37D15.

Ключові слова: пошарова еквівалентність, функція Морса, функція корозмірності 1, граф Ріба, проективна площина, топологічна класифікація, топологічна теорія функцій, неорієнтовані многовиди, топологічні інваріанти.

DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305262](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305262).

ВСТУП

У роботах Кронрода [9] та Ріба [21] було введено інваріант (граф Ріба), який описує топологічні властивості функцій на двовимірних многовидах. У випадку простих функцій Морса на замкнутих орієнтованих двовимірних многовидах, це повний топологічний інваріант для пошарової еквівалентності. Якщо лінійний порядок заданий на множині вершин, то він стає повним топологічним інваріантом відносно топологічної еквівалентності.

У разі неорієнтованого двовимірного многовиду, а також многовидів з межею потрібна додаткова інформація для побудови повного топологічного інваріанта. Для некомпактних многовидів, граф Ріба може бути не гаусдорфовим простором, що викликає додаткові труднощі при роботі з ним. Якщо функція не проста, то крім графіка Ріба інформація про необхідні

структури функції в околі кожного критичної точки рівні. Інший спосіб визначити топологічну структуру функцій Морса — це використовувати векторні поля Морса-Смейла із заданими значеннями функції в особливих точках. Тому топологічна класифікація Морса-Смейла векторні поля тісно пов'язані з класифікацією функцій. Топологічна класифікація векторних полів для замкнених поверхнях була отримана у роботах [15; 16; 24], а для поверхонь з межею у [10; 13; 16], для 3-многовидів у [4; 20].

Оскільки потоки Морса є градієнтними потоками для функцій Морса, то якщо зафіксувати значення функції в критичних точках, то потік визначає структуру функції [11].

Крім того, топологічні інваріанти функцій на неорієнтованих поверхнях будувались у роботі [11], а у [2; 7; 8; 14] для поверхонь з межею, у [19] для некомпактних поверхонь. Цій тематиці також присвячені роботи [1; 7; 8; 11; 18; 19; 22; 26], а для многовидів з межею роботи [5; 6; 8], а для 3- та 4-вимірних многовидів [12; 17].

Основні поняття топологічної теорії функцій містяться у роботах [14; 25; 26].

Основною метою даної роботи є дослідження топологічних властивостей графів Ріба простих графів Морса функцій на проективній площині та підрахувати їх кількість для фіксованої кількості критичних точок.

Автори вдячні студентам Ю. Зелений та А. Власенко за паралельні обчислення деяких чисел графів Ріба функцій Морса.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Топологія та геометрія проективної площини

В цьому розділі ми притримуємося термінології та означень з [23]. *Дійсна проективна пряма* це множина прямих на площині, що проходять через початок координат, або ж можна сказати, що це множина одновимірних підпросторів двовимірного простору. Відстань між прямими визначається як найменший кут між ними, наприклад, гострий кут. Топологічні властивості — це ті властивості, що зберігаються при гомеоморфізмах, тобто бієктивних неперевних в обидва боки відображеннях. Геометричні властивості, з іншого боку, зберігаються при ізометриях, які є бієктивними відображеннями, що зберігають відстань або довжину кривої. Для дослі-

дження топологічних та геометричних властивостей проєктивної прямої побудуємо відображення $p : \mathbb{R}P^1 \rightarrow S_{1/2}$, яке відображає проєктивні прямі на коло радіуса $1/2$. Формула для цього відображення полягає в присвоєнні кожній прямій відповідного кута нахилу α , а потім відображенні цього кута на координати на колі за формулою

$$p(\alpha) = (1/2 \cos(2\alpha), 1/2 \sin(2\alpha)).$$

Дійсна проєктивна площина – це множина одновимірних підпросторів тривимірного евклідового простору.

Розглянемо сферу S^2 з радіусом 1 та центром у початку координат в тривимірному евклідовому просторі. Всяка пряма, яка проходить через початок координат, перетинає сферу за парою діаметрально протилежних точок. Тому існує взаємно-однозначне відображення між прямими та парами діаметрально протилежних точок на сфері.

Проєктивна площина є факторпростором двовимірної сфери за відношенням еквівалентності породженим симетрією відносно центра сфери (клас еквівалентності це пара діаметрально протилежних точок):

$$\mathbb{R}P^2 = S^2 / \sim, \text{ де } p \sim p \text{ або } p \sim -p, \quad p \in S^2.$$

На S^2 можна задати дію групи $Z_2 = \{1, -1\}$ як $1p = p$ і $-1p = -p$. Тоді проєктивна площина є множина орбіт цієї дії:

$$\mathbb{R}P^2 = S^2 / Z_2.$$

Давайте опишемо ще один метод створення проєктивної площини. В топології точки називаються склеєними, якщо вони належать одному класу еквівалентності в процесі факторизації. Щоб склеїти діаметрально протилежні точки на сфері, спочатку склеїмо точки верхньої півсфери з точками нижньої півсфери (за винятком екватора). Потім ортогонально проєктуємо отриману нижню півсферу на горизонтальну площину. Отримаємо двовимірний диск (круг) D^2 , де необхідно склеїти симетричні точки на межі.

Означення 1.

$$\mathbb{R}P^2 = D^2 / \sim, \text{ де } p \sim p \text{ або } p \sim -p, \quad p \in \partial D^2.$$

Замість проєкціювання перпендикулярно до площини, ми можемо використати центральну проєкцію нижньої півсфери з центра сфери на площину $z = -1$. Ця проєкція забезпечить бієктивне відображення точок нижньої півсфери на точки площини, тоді як точки екватора будуть відображені на точки в нескінченності.

Проективна площина є евклідовою площиною, до якої додано нескінченно віддалені точки. На проективній площині існує множина нескінченно віддалених точок, кожна з яких відповідає класу еквівалентності паралельних прямих. Ці класи еквівалентності називаються *напрямками*, а множина нескінченно віддалених точок утворює проективну пряму.

Повсякденне використання проективної площини та відстаней відбувається, коли ми спостерігаємо об'єкти в тривимірному просторі. У такому випадку, ми сприймаємо промені, які випромінюють з об'єкту та падають на сітківку нашого ока. Відстані та розміри об'єктів оцінюються на основі кутів між цими променями, що відображає проективну метрику або відстань на сфері (сітківці). При зміні положення голови, наша сприйнятливність змінюється, що може призводити до проективних перетворень (ізометричних перетворень сфери).

Теорема 1. [23] *Існує замкнена крива на проективній площині, яка розбиває її на дві частини. Одна з цих частин гомеоморфна листу М'юбіуса, а інша – двовимірному диску.*

Наслідок 1. [23] *Якщо від довільної точки проективної площини віддалити достатньо малий регулярний окіл, то отримана множина буде гомеоморфна листу М'юбіуса.*

Наслідок 2. [23] *Проективна площина є поверхнею без орієнтації.*

Проективною прямою називається множина прямих, об'єднання яких є двовимірним підпростором евклідового простору. Оскільки площина, яка проходить через початок координат, перетинає одиничну сферу S^2 у колі радіуса 1 з центром у початку координат (велике коло), то якщо діаметрально протилежні точки на цьому колі будуть ототожнені, то отримана множина знову буде колом. Це означає, що проективна пряма гомеоморфна колу, тобто є замкненою кривою.

Теорема 2. [23] *Найкоротша крива між двома точками на проективній площині є відрізок проективної прямої.*

2. Функція Морса на $\mathbb{R}P^2$

Нехай M – гладкий замкнений двовимірний многовид, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ – гладка функція.

Означення 2. Невиродженою критичною точкою називається критична точка $x \in M$, якщо в деяких локальних координатах x_1, x_2 матриця

$$H = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

є невинродженою.

На двовимірному многовиді існує 3 типи невинроджених критичних точок функції: сідло, локальний мінімум та максимум.

Означення 3. Функція Морса – це гладка функція $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, у якій всі критичні точки є невинродженими.

Означення 4. Функція Морса називається *простою*, якщо всі її критичні точки лежать на різних рівнях, тобто $f(p) \neq f(q)$, якщо $p \neq q$, в інакшому випадку – *складною*.

Означення 5. Компонента лінії рівня $f^{-1}(y)$ функції Морса називається *шаром*.

Означення 6. Дві функції Морса називаються *пошарово еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм поверхні на себе, який переводить шари однієї функції в шари іншої, а також локальні мінімуми на локальні мінімуми.

Означення 7. Фактор-простір M/\sim з орієнтацією ребер відповідно до напрямку зростання функції називається *графом Ріба*, де $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ – функція Морса, $x_1 \sim x_2$, якщо x_1 і x_2 належать одному шару. Графи Ріба розглядаються з урахуванням ізоморфізму орієнтованих графів.

Приклади графів Ріба показані на рис. 1, 2.

Дві прості функції Морса на орієнтовній поверхні є пошарово еквівалентні тоді й тільки тоді, коли їх графи Ріба ізоморфні. На неорієнтовних поверхнях є кілька нееквівалентних функцій з однаковими графами Ріба. Використаємо додаткові інваріанти для класифікації функцій Морса, в разі проективної площини маємо наступне.

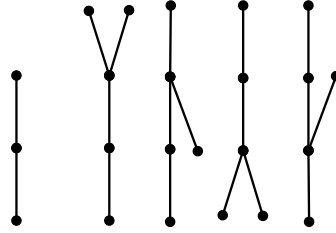


Рис. 1: 1 граф Ріба з одним сідлом і 4 графи Ріба з двома сідлами

Теорема 3. *Граф Ріба простої функції Морса на проективній площині має такі властивості:*

- 1) *граф є деревом;*
- 2) *граф має одну вершину валентності 2, інші вершини мають ступені 1 або 3;*
- 3) *лише вершини ступеня 1 є джерелами та стоками.*

Доведення. 1) Якщо граф не є деревом, то він має цикл, який відповідає зв'язній сумі з тором або пляшкою Кляйна, що означає, що рід неорієнтованої поверхні більший або дорівнює 2, що неможливо.

2) Кожна вершина ступеня 2 відповідає неорієнтованому атому (мебіусовій стрічці з отвором). Якщо таких вершин більше однієї, то рід поверхні буде більше одиниці.

3) Джерела та стоки відповідають локальним екстремумам функції, а вершини ступеня 2 та 3 - сідловим точкам.

Теорема 4. *Дві прості функції Морса на $\mathbb{R}P^2$ є пошарово еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх графи Ріба ізоморфні.*

Доведення. Розглянемо окіл критичного рівня, який відповідає вершині з валентністю 2 на графі Ріба. Після розрізання вздовж двох регулярних траєкторій градієнтного поля, цей окіл матиме нову форму. Функція Морса на орієнтованій поверхні буде топологічно еквівалентна до функції на цих двох частинах околу, якщо їх границі будуть мати збережену або змінену орієнтацію. Ізотопії (гомеоморфізми) до ідентичного відображення або симетрії відносно осі визначають топологічну еквівалентність функцій на комірці. Таким чином, топологічна еквівалентність функцій визначається за допомогою цих гомеоморфізмів на комірці, центральній частині та доповненні до U .

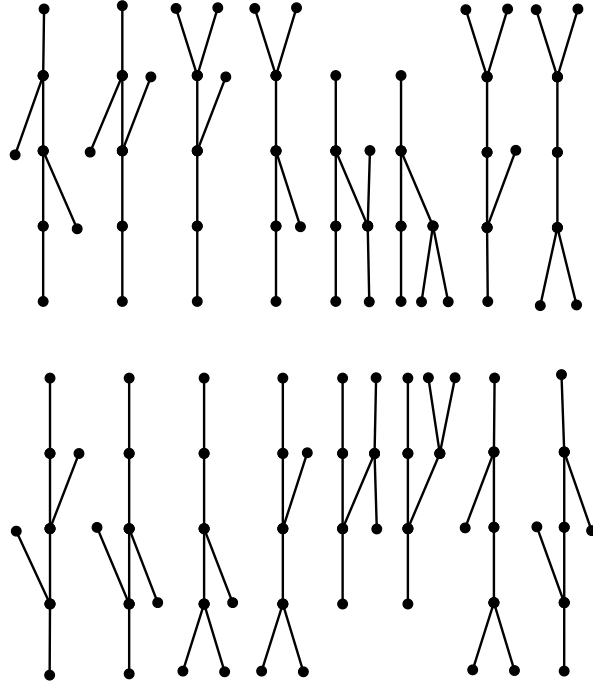


Рис. 2: 16 графів Ріба функцій Морса на RP^2 з трьома сідловими критичними точками.

3. Кількість графів Ріба для функцій Морса на проєктивній площині

Для отримання кількості топологічно невизначених морсових функцій на проєктивній площині спочатку розраховуємо кількість графів Ріба з заданою кількістю критичних точок типу сідла.

Теорема 5. Число K_k орієнтованих графів Ріба з коренем та k сідловими точками можна обчислити за допомогою наступних рекурсивних формул: для парного $k = 2n$

$$K_{2n} = 3(K_0K_{2n-1} + K_1K_{2n-2} + \dots + K_{n-1}K_n);$$

для непарного $k = 2n + 1$

$$K_{2n+1} = 3(K_0K_{2n} + K_1K_{2n-1} + \dots + K_{n-1}K_{n+1}) + \frac{3K_n^2 + K_n}{2}.$$

Доведення. Розглянемо сідло, найближче до кореня. Воно є вершиною ступеня 3. Видаляємо це сідло з графа. Отримаємо три зв'язні компо-

ненти. Одна з них – це ребро, що з'єднує сідло з коренем. Інші дві компоненти можна розглядати як кореневі графи Ріба, де коренем є віддалене сідло. Припустимо, що в першому з цих графів є не менше вершин, ніж у другому.

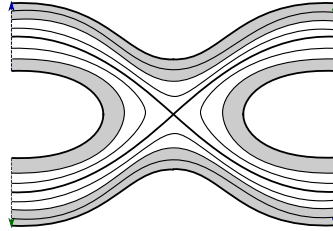


Рис. 3: Окіл критичного рівня.

Тоді є три варіанти:

- 1) В обох графах, ребро, що виходить з кореня, направлене вгору у початковому графі,
- 2) У першому графі це ребро направлене вгору, а в другому – вниз,
- 3) У другому графі воно направлене вгору, а в першому – вниз.

Якщо ребро спрямоване вниз у даному випадку, то це призводить до зворотніх орієнтацій у дереві з коренем. Обидва графи пов'язані тільки за умовою, що мають однакову кількість вершин. Якщо кількість вершин різна, то графи не можуть бути ізоморфними, тому кількість неізоморфних початкових графів з такими підграфами дорівнюватиме кількості неізоморфних підграфів, помножених між собою. Це дає першу формулу. Якщо кількість вершин у першому і другому графах співпадає, то другий і третій варіанти збігаються і їх треба порахувати тільки один раз. Крім того, у першому варіанті неізоморфні графи були пораховані двічі, а ізоморфні – один раз. Враховуючи це, ми можемо отримати другу формулу.

З використанням цих формул ми отримуємо такі початкові значення:

$K_0 = 1$	$K_5 = 540$	$K_{10} = 2392866$
$K_1 = 2$	$K_6 = 2736$	$K_{11} = 13570386$
$K_2 = 6$	$K_7 = 14396$	$K_{12} = 77815161$
$K_3 = 25$	$K_8 = 77649$	$K_{13} = 450418536$
$K_4 = 111$	$K_9 = 427608$	$K_{14} = 2628225684$

Теорема 6. Кількість N_k топологічно нерівносильних простих функцій Морса на $\mathbb{R}P^2$ можна обчислити за допомогою наступної формули

$$N_k = K_0 K_{k-1} + K_1 K_{k-2} + \dots + K_{k-1} K_0.$$

Доведення. Граф Ріба, який відповідає простій функції Морса на проєктивній площині, розбивається на два кореневі орієнтовані графи Ріба з вершинами степеня 2. Це означає, що загальна кількість графів Ріба може бути обчислена як сума добутків відповідних корневих графів Ріба.

Використовуючи це, ми отримуємо:

$N_1 = 1$	$N_6 = 1824$	$N_{11} = 9046744$
$N_2 = 4$	$N_7 = 9589$	$N_{12} = 51876774$
$N_3 = 16$	$N_8 = 51766$	$N_{13} = 300278112$
$N_4 = 74$	$N_9 = 285035$	$N_{14} = 1752150456$
$N_5 = 358$	$N_{10} = 2178244$	$N_{15} = 10295599780$

Усі можливі графи Ріба з 1 та 2 сідловими критичними точками показані на рис. 1, з 3 - на рис. 2.

4. Функції корозмірності 1.

Функції корозмірності 1 – це функції, що виникають в типових однопараметричних сім'ях функцій і змінюють свою структуру при малих змінах параметру. Ці функції бувають двох типів:

1) мають одну вироджену критичну точку, яка заміною системи координат в околі критичної точки зводиться до однієї з двох функцій а) $f(x, y) = x^3 + y^2$, б) $f(x, y) = x^3 - y^2$, всі інші критичні точки є невиродженими і значення функції в різних критичних точках різні;

2) всі критичні точки є невиродженими і лише двоє з них мають однакові значення функції.

У випадку 1а) відбувається скорочення або народження пари критичних точок: точки мінімуму та сідлової точки, а у випадку 1б) – точки максимуму та сідлової точки. На графі Ріба ця точка знаходиться на одному з ребер. В результаті деформації функції на графі Ріба ця точка або щезає або до неї приєднується ребро. Отже, для обчислення числа топологічно не еквівалентних функцій у цьому випадку треба просто знайти число ребер (з урахуванням симетрій) у відповідного графа та помножити його на два.

У випадку функції з двома критичними точками на одному критичному рівні можливі два варіанти: а) точки лежать на різних компонентах рівня, б) точки лежать на одній компоненті рівня. В першому варіанті на графі Ріба треба виділити дві незрівнянні вершини. В другому варіанті, окіл відповідної компоненти утворює атом функції складності два. Якщо цей атом не задається графом Ріба, то треба вказати його тип і вкладення в граф Ріба (молекулу за Болсуновим-Фоменком).

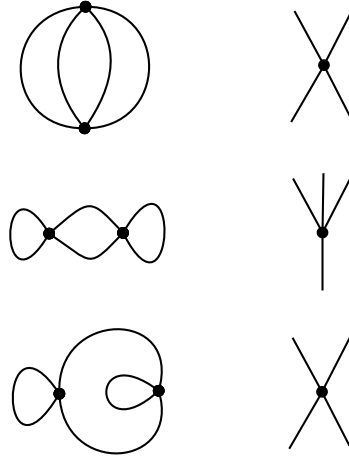


Рис. 4: Орієнтовані атоми складності 2

Оскільки ми розглядаємо функції на проективній площині, то відповідні атоми (околиця критичного шару) мають рід 0, якщо вони орієнтовані та рід 1, якщо неорієнтовані. Отже, в орієнтованому випадку можливі такі атоми складності 2: C_2 , D_1 , D_2 , а в неорієнтованому випадку: \tilde{C}_1 , \tilde{D}_1 . Ці атоми зображені на рис. 4 та 5. На цих рисунках зліва зображені критичні рівні, а справа графи Ріба відповідних атомів. Атом отримується із критичного рівня приклеюванням до 2-дисків (околів критичних точок в проекції на площину) стрічок, що є околицями кривих, які з'єднують критичні точки. Стрічка приклеюється прямо, якщо крива зображена чорним кольором і перекручується, якщо вона синя. У атома C_2 обидва верхні та обидва нижні ребра рівноправні між собою. У атома D_1 верхні ліва та праве ребра відповідають петлям на критичному рівні, а середнє верхнє ребро – циклу, що складається з двох кратних ребер. Для графа Ріба атому D_2 ліві ребра відповідають петлям. На графі Ріба для \tilde{C}_1 праве верхнє ребро

відповідає циклу, утвореному чорними ребрами, а на графі для \tilde{D}_1 праве верхнє ребро відповідає чорній петлі.

Граф Ріба отримується з графа Ріба простої функції Морса за допомогою стискання в точку ребра, кінцями якого є сідлові точки.

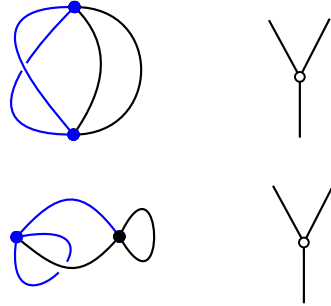


Рис. 5: Неорієновані атоми складності 2

5. Функції корозмірності 1 з малим числом критичних точок.

Функції з 3 критичними точками є функціями Морса загального положення.

Графи Ріба функцій з 4 критичними точками можуть бути отримані із графів Ріба функцій з 5 критичними точками (рис.1), стисканням ребра-листка до сідлової точки степені 3. З урахуванням симетрій, на кожному з чотирьох графів Ріба є по одному такому листку. Отже, існує чотири функції корозмірності 1 з 4 критичними точками.

Графи Ріба функцій з 5 критичними точками отримані з графів Ріба функцій з 5 критичними точками стисканням ребра між сідлами в точку. Можливо отримати лише два графи: Y та перевернене Y . Обидва графи мають в своїй центральній точці неорієнтований атом. Для кожного з них існує по два таких атоми. Отже, всього є чотири функції з 5 критичними точками.

Графи Ріба функцій з 6 критичними точками можуть бути отримані із функцій з 7 критичними точками, стисканням ребра-листка до сідлової точки степені 3, для якого існує друге ребро з такою самою орієнтацією по відношенні до цієї вершини. З урахуванням симетрій, на кожному з 16 графів Ріба існує такі числа листків: 2, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 2. Отже, існує 24 функції корозмірності 1 з 6 критичними точками.

Графи Ріба функцій з 7 критичними точками отримані з графів Ріба

функції з 7 критичними точками стисканням ребра між сідлами в точку. Якщо ребро з'єднає два орієнтовані сідла, то отримаємо орієнтований атом складності 2. Граф Ріба отримаємо з графа Ріба цього атома замкнувши ребра вершинами степені 1, а одне ребро розбивши на два вершиною степені 2. Для атому C_2 обидва верхні (так само як і нижні) ребра рівноправні, тому можливо вибрати 2 способи розташування вершини степені 2. Для графа D_1 можливо два способи вибору верхнього ребра і одине нижнє ребро. З урахуванням перевернутого графа D_1 маємо 6 варіантів. Для графа D_2 всі 4 ребра дають різні варіанти. Отже, всього $2+6+4=12$ топологічно нееквівалентних функцій з орієнтованим атомом степені 2.

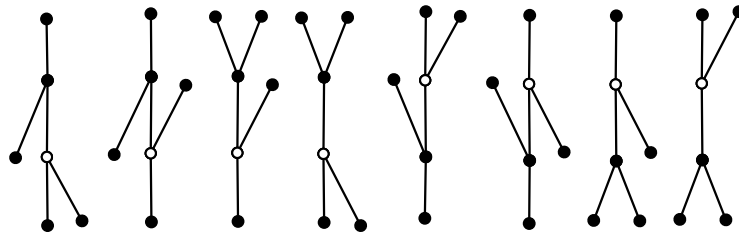


Рис. 6: Графи Ріба з неорієнтованим атомом

На рис. 6 зображені всі можливі графи Ріба з одним неорієнтованим атомом складності 2 і одним простим сідлом. Для кожного з них біла вершина може бути одним з двох атомів складності 2. Якщо у графа є симетрія, яка міняє місцями два інцидентних білій вершині ребра направлених в один бік (догори або до низу) між собою, то для такого графа можливі 2 різні функції, інакше – 4. Отже, для 8 графів на рис. 6 числа нееквівалентних функцій дорівнюють: 2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 2. Загалом маємо 24 функції з неорієнтованим атомом. З урахуванням 12 функцій з орієнтованим атомом маємо всього 36 функцій корозмірності 1 із 7 критичними точками.

Висновки

В цій роботі було отримано топологічну класифікацію функцій Морса та функцій корозмірності 1 на проективній площині. Описані всі можливі топологічні структури функцій з не більше ніж 7 критичними точками. Отримано рекурсивну формулу для знаходження числа топологічно не-

квівалентних функцій Морса із заданим числом критичних точок.

Отримані результати можуть бути корисними для подальшого дослідження топологічних властивостей функцій Морса на різних поверхнях. Наприклад, можна дослідити залежність кількості критичних точок від форми та розміру поверхні, а також дослідити гомотопічну класифікацію функцій Морса на інших класах поверхонь.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Bilun S.** The closed morse 1-forms on closed surfaces. / S. Bilun, A. Prishlyak // *Visn., Mat. Mekh., Kyv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka.* — 2002. — № 8. — P. 77–81.
2. **Bolsinov A.V.** Integrable Hamiltonian systems. Geometry, Topology, Classification. / A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko. — A CRC Press Company, Boca Raton London New York Washington, D.C., 2004 —724 p.
3. **Harary F.** Graph Theory / F. Harary. — Westview Press, 1969. — 274 p.
4. **Hatamian C.** Heegaard diagrams and optimal morse flows on non-orientable 3-manifolds of genus 1 and genus 2. / C. Hatamian , A. Prishlyak. // *Proceedings of the International Geometry Center.* — 2020. — Vol 13, № 3 — P. 33–48 doi: 10.15673/tmgc.v13i3.1779
5. **Hladysh B.I.** Functions with nondegenerate critical points on the boundary of the surface. / B. I. Hladysh, A. O. Pryshlyak // *Ukrainian Mathematical Journal.* — 2016. — Vol. 68,. — P. 29–41. doi: 10.1007/s11253-016-1206-5.
6. **Hladysh B.I.** Deformations in the general position of the optimal functions on oriented surfaces with boundary. / B. I. Hladysh, A. O. Pryshlyak // *Ukrainian Mathematical Journal.* — 2020. — Vol. 71, № 8. — P. 1173–1185. doi: 10.1007/s11253-019-01706-8.
7. **Hladysh B.I.** Topology of functions with isolated critical points on the boundary of a 2-dimensional manifold. / Hladysh B.I., A. O. Prishlyak // *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications.* — 2017. — Vol. 13, № 50. doi: 0.3842/SIGMA.2017.050.
8. **Hladysh B. I.** Simple morse functions on an oriented surface with boundary. // Hladysh B.I., Prishlyak A.O. *Журнал математической физики. анализа, геометрии.* — 2019. — Т. 15, № 3. — С. 354–368. doi: 10.15407/mag15.03.354.
9. **Kronrod A.S.** Functions of two variables. / A. S. Kronrod // *Russian Mathematical Surveys.* — 1950. — Т. 5. — С. 24–134.
10. **Losieva M.** Topology of Morse–Smale flows with singularities on the boundary of a two-dimensional disk. / M. Losieva, A. Prishlyak // *Pr. Mizhnar. Heometr. Tsentr.* — 2016. — Vol. 9, № 2. — P. 32–41, . doi: 10.15673/tmgc.v9i2.279.
11. **Lychak D. P.** Morse functions and flows on nonorientable surfaces. / D. P. Lychak and A. O. Prishlyak. — *Methods of Functional Analysis and Topology.* —2009. — Vol. 15, № 3. — P. 251–258.

12. **Prishlyak A. O.** Conjugacy of Morse functions on 4-manifolds. / A. O. Prishlyak // Russian Mathematical Surveys. — 2001. — Vol. 56, № 1. — С. 170–171.
13. **Prishlyak A. O.** On sum of indices of flow with isolated fixed points on a stratified sets. / A. O. Prishlyak // Zhurnal Matematicheskoi Fiziki, Analiza, Geometrii [Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry]. — 2003. — Vol. 10, № 1. — P. 106–115.
14. **Prishlyak A. O.** Topological properties of functions on two and three dimensional manifolds. / A. O. Prishlyak // Palmarium Academic Publishing. — 2012.
15. **Prishlyak A.** Flows with collective dynamics on a sphere. / A. Prishlyak, A. Prus, S. Huraka // Proc. Int. Geom. Cent. — 2021. — Vol. 14, № 1. — P. 61–80.
16. **Prishlyak A.** Morse-smale flows on torus with hole. / A. Prishlyak, A. Prus // Proceedings of the International Geometry Center. — 2017. — Vol. 10, № 1. — P.47–58.
17. **Prishlyak A.O.** Equivalence of morse function on 3-manifolds / A. O. Prishlyak // Methods of Func. Ann. and Topology. — 1999. — Vol. 5, № 3. — P. 49–53.
18. **Prishlyak A.O.** Conjugacy of morse functions on surfaces with values on a straight line and circle / A. O. Prishlyak // Ukrainian Mathematical Journal. — 2000. — Vol. 52, № 10. — P. 1623–1627.
19. **Prishlyak A.O.** Morse functions with finite number of singularities on a plane. / A. O. Prishlyak // Meth. Funct. Anal. Topol. — 2002. — Vol. 8. — P. 75–78.
20. **Prishlyak A.O.** Topological equivalence of morse-smale vector fields with beh2 on three-dimensional manifolds. / A. O. Prishlyak // Ukrainian Mathematical Journal. — 2002. — Vol. 54, № 4. — P. 603–612
21. **Reeb. G.** Sur les points singuliers d’une forme de pfaff completement integrable ou d’une fonction numerique. / G. Reeb. // C.R.A.S. Paris. — 1946. — Vol. 222. — P. 847–449.
22. **Sharko. V. V.** Functions on manifolds. Algebraic and topological aspects / V. V. Sharko // Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI. — 1993. — Vol. 131. — 193 p.
23. **Білун С.** Геометрія та топологія проєктивної площини / С. Білун, О. Пришляк // У світі математики. — 2022. — P. 1–6.
24. **Кузаконь В.М.** Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти / В.М. Кузаконь, В.Ф. Кириченко, and О.О. Пришляк. // Праці Інституту математики НАН України. — 2013. — № 97. — 500 с.
25. **Пришляк О.О.** Теорія Морса. / О. О. Пришляк. — Вид-во Київський університет, 2002. — 65с.
26. **Пришляк О.О.** Топологія многовидів / О.О. Пришляк // Київський університет, 2015.

Prishlyak A. O., Stas S. O.

MORSE AND CODIMENSION 1 FUNCTIONS ON THE PROJECTIVE PLANE

Summary

The topological properties of functions on two-dimensional spaces are described using an invariant called the Reeb graph. In the case of Morse functions on closed oriented two-dimensional manifolds, this serves as a complete topological invariant for homotopy equivalence. For non-oriented two-dimensional manifolds and manifolds with boundaries, additional information is required to construct a complete topological invariant. If a linear order is imposed on the set of vertices, it becomes a complete topological invariant with respect to topological equivalence.

The research explores the topological classification of Morse functions and functions of corank 1 on the projective plane. In these cases, the Reeb graph is an oriented rooted tree. An analytical expression is derived for the number of oriented Reeb graphs with a root. For functions of corank 1 and a fixed number of critical points, all possible Reeb graphs are constructed.

Key words: Morse function, functions of codim 1, Ribbon graph, topological classification, topological function theory, unoriented manifolds, topological invariants.

REFERENCES

1. **Bilun S.** The closed morse 1-forms on closed surfaces. / S. Bilun, A. Prishlyak // *Visn., Mat. Mekh., Kyv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka.* — 2002. — № 8. — P. 77–81.
2. **Bolsinov A.V.** Integrable Hamiltonian systems. Geometry, Topology, Classification. / A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko. — A CRC Press Company, Boca Raton London New York Washington, D.C., 2004 —724 p.
3. **Harary F.** Graph Theory / F. Harary. — Westview Press, 1969. — 274 p.
4. **Hatamian C.** Heegaard diagrams and optimal morse flows on non-orientable 3-manifolds of genus 1 and genus 2. / C. Hatamian , A. Prishlyak. // *Proceedings of the International Geometry Center.* — 2020. — Vol 13, № 3 — P. 33–48 doi: 10.15673/tmgc.v13i3.1779
5. **Hladysh B.I.** Functions with nondegenerate critical points on the boundary of the surface. / B. I. Hladysh, A. O. Pryshlyak // *Ukrainian Mathematical Journal.* — 2016. — Vol. 68,. — P. 29–41. doi: 10.1007/s11253-016-1206-5.

6. **Hladysh B.I.** Deformations in the general position of the optimal functions on oriented surfaces with boundary. / B. I. Hladysh, A. O. Pryshlyak // Ukrainian Mathematical Journal. — 2020. — Vol. 71, № 8. — P. 1173–1185. doi: 10.1007/s11253-019-01706-8.
7. **Hladysh B.I.** Topology of functions with isolated critical points on the boundary of a 2-dimensional manifold. / Hladysh B.I., A. O. Prishlyak // SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. — 2017. — Vol. 13, № 50. doi: 0.3842/SIGMA.2017.050.
8. **Hladysh B. I.** Simple morse functions on an oriented surface with boundary. // Hladysh B.I., Prishlyak A.O. Журнал математической физики. анализа, геометрии. — 2019. — Т. 15, № 3. — С. 354–368. doi: 10.15407/mag15.03.354.
9. **Kronrod A.S.** Functions of two variables. / A. S. Kronrod // Russian Mathematical Surveys. — 1950. — Т. 5. — С. 24–134.
10. **Losieva M.** Topology of Morse–Smale flows with singularities on the boundary of a two-dimensional disk. / M. Losieva, A. Prishlyak // Pr. Mizhnar. Heometr. Tsentr. — 2016. — Vol. 9, № 2. — P. 32–41, . doi: 10.15673/tmgc.v9i2.279.
11. **Lychak D. P.** Morse functions and flows on nonorientable surfaces. / D. P. Lychak and A. O. Prishlyak. — Methods of Functional Analysis and Topology. —2009. — Vol. 15, № 3. — P. 251–258.
12. **Prishlyak A. O.** Conjugacy of Morse functions on 4-manifolds. / A. O. Prishlyak // Russian Mathematical Surveys. —2001. — Vol. 56, № 1. — С. 170–171.
13. **Prishlyak A. O.** On sum of indices of flow with isolated fixed points on a stratified sets. / A. O. Prishlyak // Zhurnal Matematicheskoi Fiziki, Analiza, Geometrii [Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry]. — 2003. — Vol. 10, № 1. — P. 106–115.
14. **Prishlyak A. O.** Topological properties of functions on two and three dimensional manifolds. / A. O. Prishlyak // Palmarium Academic Publishing. — 2012.
15. **Prishlyak A.** Flows with collective dynamics on a sphere. / A. Prishlyak, A. Prus, S. Huraka // Proc. Int. Geom. Cent. — 2021. — Vol. 14, № 1. — P. 61–80.
16. **Prishlyak A.** Morse-smale flows on torus with hole. / A. Prishlyak, A. Prus // Proceedings of the International Geometry Center. — 2017. — Vol. 10, № 1. — P.47–58.
17. **Prishlyak A.O.** Equivalence of morse function on 3-manifolds / A. O. Prishlyak // Methods of Func. Ann. and Topology. — 1999. — Vol. 5, № 3. — P. 49–53.
18. **Prishlyak A.O.** Conjugacy of morse functions on surfaces with values on a straight line and circle / A. O. Prishlyak // Ukrainian Mathematical Journal. — 2000. — Vol. 52, № 10. — P. 1623–1627.
19. **Prishlyak A.O.** Morse functions with finite number of singularities on a plane. / A. O. Prishlyak // Meth. Funct. Anal. Topol. — 2002. — Vol. 8. — P. 75–78.
20. **Prishlyak A.O.** Topological equivalence of morse–smale vector fields with beh2 on three-dimensional manifolds. / A. O. Prishlyak // Ukrainian Mathematical Journal. — 2002. — Vol. 54, № 4. — P. 603–612

21. **Reeb. G.** Sur les points singuliers d'une forme de pfaff complètement integrable ou d'une fonction numerique. / G. Reeb. // C.R.A.S. Paris. — 1946. — Vol. 222. — P. 847–449.
22. **Sharko. V. V.** Functions on manifolds. Algebraic and topological aspects / V. V. Sharko // Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI. — 1993. — Vol. 131. — 193 p.
23. **Білун С.** Геометрія та топологія проєктивної площини / С. Білун, О. Пришляк // У світі математики. — 2022. — Р. 1–6.
24. **Кузаконь В.М.** Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти / В.М. Кузаконь, В.Ф. Кириченко, and О.О. Пришляк. // Праці Інституту математики НАН України. — 2013. — № 97. — 500 с.
25. **Пришляк О.О.** Теорія Морса. / О. О. Пришляк. — Вид-во Київський університет, 2002. — 65с.
26. **Пришляк О.О.** Топологія многовидів / О.О. Пришляк // Київський університет, 2015.