Дослідження в математиці і механіці. – 2023. – Т. 28, вип. 1–2 (41–42). – С. 64–76

УДК 514.7

С. Г. Лейко
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

L-ІНТЕГРАЛ ДЛЯ ІЗОПЕРИМЕТРИЧНИХ ЕКСТРЕМАЛЕЙ ПОВОРОТУ

В даній роботі розглянуто геодезичний потік на сферичному дотичному розшаруванні двомірного ріманового многовиду з метрикою Сасакі та показано, що, якщо базисний многовид локально ізометричний поверхні обертання, то відповідна потоку гамільтонова система цілком інтегрована за Ліувіллем. Звідси, як наслідок, знаходяться траєкторії потоку в квадратурах.
MSC: 53B20.
Ключові слова: псевдоріманові простори, екстремалі повороту, інтеграл Клеро, варіаційна задача.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305259.

Вступ

Як відомо, гамільтонові рівняння складають один з найважливіших класів диференціальних рівнянь. Зокрема, рівняння цього виду виникають в задачі знаходження геодезичних кривих на ріманових многовидах. При цьому серед всіх гамільтонових систем випадок цілком інтегрованих з'являється вкрай рідко [1-4]. В даній роботі розглянуто геодезичний потік на сферичному дотичному розшаруванні двомірного ріманового многовиду з метрикою Сасакі та показано, що, якщо базисний многовид локально ізометричний поверхні обертання, то відповідна потоку гамільтонова система цілком інтегрована за Ліувіллем. Звідси, як наслідок, знаходяться траєкторії потоку в квадратурах.

Дане дослідження виникло у зв'язку з вивченням автором варіаційних задач для функціоналів повороту кривих [5-9]. З'ясувалось, що базисні траєкторії потоку (тобто проекції траєкторій потоку на базу) являються ізопериметричними екстремалями повороту та характеризуються деякими екстремальними властивостями. Знайдений нами для цих екстремалей інтеграл (узагальнюючий інтеграл Клеро для геодезичних кривих) виявився саме тим відсутнім інтегралом для повної інтегрованості геодезичного потоку на сферичному дотичному розшаруванні з метрикою Сасакі [11; 12]

Надійшла 16.02.2023

в випадку, коли базисний многовид локально ізометричний поверхні обертання. Остання обставина аналогічна тому, як класичний інтеграл Клеро приводить до повної інтегруємості геодезичного потоку на поверхні обертання [1; 2].

Основні результати

1. Ізопериметричні екстремалі повороту на двовимірних ріманових многовидах

В рімановому просторі (M^n, g) розглянемо функціонал, який має довжину $l[\gamma] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\right)^{0.5} dt$ та функціонал абсолютного повороту $\theta[\gamma] = \int\limits_0^l k_g dl$. Тут γ деяка параметризована крива, $\dot{x}^i \equiv \xi^i = \dfrac{d\dot{x}^i}{dl}$ — компоненти дотичного вектору $\dot{\gamma}$, l — довжина дуги на кривій γ, k_g — її перша кривина Френе, а у випадку двовимірного простору $n = 2$ це абсолютна геодезична кривина.

Розглянемо для функціоналу поворота ізопериметричну варіаційну задачу

$$\delta\theta = 0, \quad l\left[\gamma\right] = \hat{l} = const$$

з фіксованими кінцями

$$\gamma(t_0) = p_0, \quad \gamma(t_1) = p_1.$$

Використанням стандартного методу Ейлера-Лагранжа, ми отримали, що розв'язок зазначеної задачі в двовимірному просторі задовольняють рівнянню

$$k_g = cK, \tag{1}$$

де c – ізопериметрична стала, яка залежить від фіксованої довжини $\widehat{l}$, K — гаусова кривина простору. Крім того, в особливому випадку $K = 0$, розв'язком задачі являється довільна допустима крива (класу C^4 без точок розпрямлення). Криві, які задовольняють рівняннння (1), названі нами ізопериметричними екстремаллями поворота (ІЕП) двовимірного простору (M^2, g) [6].

Відмітимо, що рівняння (1) раніше розглядались в дослідженнях А. Пуанкаре у зв'язку з вивченням замкнутих геодезичних кривих овальної поверхні, до якого зводилась астрономічна «задача про три тіла» [13, с.229]. Нами встановлені екстремальні властивості ізопериметричних екстремалей повороту і отримані їх диференціальні рівняння у нормальній формі [8].

В випадку, якщо простір (M^2, g) реалізований на поверхні евклідового простору, ізопериметричним екстремалям повороту дана механічна інтерпретація [9].

На поверхнях обертання нами знайдений наступний інтеграл

$$r \sin w = ec \sin \varphi + c_1, \quad e = \pm 1, \quad c_1 = const, \tag{2}$$

де w — кут між екстремаллю та меридіаном в їх спільній точці, r — відстань від своєї точки до вісі обертання, φ — кут, який утворений дотичною до меридіану з віссю обертання [8].

2. Геодезичні криві на сферичному дотичному розшаруванні двовимірного ріманового многовиду з метрикою Сасакі

Метрика Сасакі вперше була розглянута на сферичному дотичному розшаруванні одиничних векторів T_1M^n, а потім П. Надь узагальнив її на $T_\rho M^n$ — сферичне дотичне розшарування векторів, квадрат довжини яких є сталою $\rho > 0$ [10-12].

Нехай (M^2, g) — двовимірне рімановий многовид з метрикою

$$dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j, \dots = 1, 2.$$

Метрика Сасакі g^*дотичного розшарування TM^2 в індукованих координатах x^i, y^i

$$dt^2 = g_{ij} dx^i dx^j + g_{ij} Dy^i Dy^j, \quad Dy^k = dy^k + \Gamma^k_{ij} y^i dx^j \tag{3}$$

обмежується на сферичне дотичне розшарування $T_\rho M^2$ рівністю

$$g_{ij} y^i y^j = \rho.$$

Тут $\Gamma^k_{ij}(x^1, x^2)$ — коефіцієнти ріманової зв'язності (символи Христофеля) відносно метрики g.

Візьмемо в координатному околі многовиду (M^2, g) напівгеодезичні координати x^1, x^2. Тоді

$$dl^2 = \left(dx^1\right)^2 + G\left(x^1, x^2\right)\left(dx^2\right)^2,$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{G_1}{2}, \quad \Gamma^2_{12} = -\frac{G_1}{2G}, \quad \Gamma^2_{22} = -\frac{G_2}{2G},$$

решта символів Христофелю рівні нулю та гаусова кривина

$$K = -\frac{\left(\sqrt{G}\right)_{11}}{G}.$$

В якості третьої координати x^3 на $T_\rho M^2$ візьмемо кут між дотичним вектором y^i та дотичним вектором $\dfrac{\partial}{\partial x^1}$ до першої координатної лінії в точці (x^1, x^2). У цьому випадку

$$y^1 = \sqrt{\rho}\cos x^3, \quad y^2 = \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{G}}\sin x^3.$$

В координатах $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ метрика Сасакі g^* на $T_\rho M^2$ в силу (3) набуває вигляд

$$dt^2 = g^*_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \quad \alpha, \beta, \dots = 1, 2, 3,$$

$$\left(g^*_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & G + \rho\left(\left(\sqrt{G}\right)_1\right)^2 & \rho\left(\sqrt{G}\right)_1 \\ 0 & \rho\left(\sqrt{G}\right)_1 & \rho \end{pmatrix}.$$

Звідси знаходимо компоненти взаємного метричного тензору $g^{*\alpha\beta}$

$$\left(g^*_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & G^{-1} & -G^{-1}\left(\sqrt{G}\right)_1 \\ 0 & -G^{-1}\left(\sqrt{G}\right)_1\rho^{-1} & G^{-1}\left(\left(\sqrt{G}\right)_1\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Та символи Христофелю першого та другого роду

$$\Gamma^*_{12,3} = \Gamma^*_{13,2} = -\Gamma^*_{23,1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^*_{23}}{\partial x^1},$$

$$\Gamma^*_{12,2} = -\Gamma^*_{22,1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^*_{22}}{\partial x^1},$$

$$\Gamma^*_{22,2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^*_{22}}{\partial x^2}, \quad \Gamma^*_{22,3} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^*_{23}}{\partial x^2},$$

(решта – нулі);

$$\Gamma^{*1}_{\alpha\beta} = g^{*1\gamma}\Gamma^{*}_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma^{*}_{\alpha\beta,1},$$

$$\Gamma^{*2}_{\alpha\beta} = g^{*2\gamma}\Gamma^{*}_{\alpha\beta,\gamma} = G^{-1}\Gamma^{*}_{\alpha\beta,2} - G^{-1}\left(\sqrt{G}\right)_1 \Gamma^{*}_{\alpha\beta,3},$$

$$\Gamma^{*3}_{\alpha\beta} = g^{*3\gamma}\Gamma^{*}_{\alpha\beta,\gamma} = -G^{-1}\left(\sqrt{G}\right)_1 \Gamma^{*}_{\alpha\beta,2} + \left[\rho^{-1} + G^{-1}\left(\left(\sqrt{G}\right)_1\right)^2\right]\Gamma^{*}_{\alpha\beta,3}.$$

Відносно введених координат x^{α} елемент повороту $d\Theta$ і абсолютна геодезична кривина $k_g(l)$ базисної кривої $x^i(l)$ набуває вигляд

$$d\Theta = dx^3 + \left(\sqrt{G}\right)_1 dx^2,$$

$$k_g = e\frac{d\Theta}{dl} = e\left(\frac{dx^3}{dl} + \left(\sqrt{G}\right)_1 \frac{dx^2}{dl}\right),$$

де знак $e = \pm 1$ вибирається так, щоб отримати абсолютне значення геодезичної кривини.

Якщо метрику Сасакі dt^2 записати у вигляді

$$dt^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(G + \rho\left(\left(\sqrt{G}\right)_1\right)^2\right)\left(dx^2\right)^2 + 2\rho\left(\sqrt{G}\right)_1 dx^2 dx^3 + \rho\left(dx^3\right)^2,$$

в силу попередніх рівностей, отримаємо

$$dt^2 = dl^2 + \rho d\Theta^2. \tag{4}$$

Розглянемо диференціальні рівняння геодезичних кривих $x^{\alpha}(t)$ на сферичному дотичному розшаруванні $T_{\rho}M^2$ з метрикою Сасакі g^*, віднесених до натурального параметру, тобто

$$\frac{d^2x^{\gamma}}{dt^2} + \Gamma^{*\gamma}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\frac{dx^{\beta}}{dt} = 0. \tag{5}$$

Підставивши сюди знайдені значення символів Христофеля, отримаємо

$$\frac{d^2x^1}{dt^2} + \Gamma^1_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = \rho\left(\sqrt{G}\right)_{11}\frac{dx^2}{dt}\frac{d\Theta}{dt}. \tag{6}$$

$$\frac{d^2x^2}{dt^2} + \Gamma^2_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = -\rho G^{-1}\left(\sqrt{G}\right)_{11}\frac{dx^1}{dt}\frac{d\Theta}{dt}. \tag{7}$$

$$\frac{d^2x^3}{dt^2} + \left(\left(\sqrt{G}\right)_{11} - \rho G^{-1}\left(\left(\sqrt{G}\right)_1\right)^2\left(\sqrt{G}\right)_{11} + \right.$$

$$\left. + G^{-1}G_1\left(\sqrt{G}\right)_1\right)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^2}{dt} + \left(\left(\sqrt{G}\right)_{12} - \frac{1}{2}G^{-1}G_2\left(\sqrt{G}\right)_1\right)\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 -$$

$$- \rho G^{-1}\left(\sqrt{G}\right)_1\left(\sqrt{G}\right)_{11}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^3}{dt} = 0. \quad (8)$$

З перших двох рівнянь системи(5) витікає, що вздовж геодезичної кривої $x^\alpha(t)$ на $T_\rho M^2$ має місце $g_{ij}\xi^i(t)\xi^j_1(t) = 0$, де $\xi^i(t) = \dfrac{dx^i}{dt}$ — дотичний вектор відповідної базисної кривої $x^i(t)$,

$$\xi^k_1 \equiv \nabla_t \xi^k = \frac{d\xi^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}\xi^i\xi^j$$

— коваріантна похідна вздовж базисної кривої $x^i(t)$ відносно ріманової зв'язності ∇ на базі M^2. Отже, вздовж кожної базисної кривої

$$h \equiv \frac{1}{2}g_{ij}\xi^i(t)\xi^j(t) = const. \quad (9)$$

Обчислюючи геодезичну кривину базисних кривих $x^i(t)$, отримаємо внаслідок (5), (9)

$$k_g^2(t) = \frac{\langle\xi,\xi\rangle\langle\xi_1,\xi_1\rangle - \langle\xi,\xi_1\rangle^2}{\langle\xi,\xi\rangle^3} = g_{ij}\xi^i_1(t)\xi^j_1(t)\left[g_{ij}\xi^i(t)\xi^j(t)\right]^{-2} =$$

$$= (2h)^{-2}\left[\rho^2\left(\sqrt{G}\right)^2_{11}\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 + \rho^2 G^{-1}\left(\sqrt{G}\right)^2_{11}\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2\right] =$$

$$= \rho^2(2h)^{-2}G^{-1}\left(\sqrt{G}\right)^2_{11}\left[G\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2\right]\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 =$$

$$= \rho^2K^2(2h)^{-1}\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2.$$

Так як параметр вибраний натуральним, то

$$g^*_{\alpha\beta}\xi^\alpha(t)\xi^\beta(t) = g_{ij}\xi^i(t)\xi^j(t) + \rho\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 = 1.$$

Значить, вздовж геодезичних

$$2h + \rho a^2 = 1, \quad (10)$$

$$a \equiv \frac{d\Theta}{dt} = \frac{dx^3}{dt} + \left(\sqrt{G}\right)_1 \frac{dx^2}{dt} = const. \tag{11}$$

Таким чином,

$$k_g = \frac{e\rho a}{\sqrt{2h}} K. \tag{12}$$

Неважко переконатись в тому, що внаслідок (11) рівняння (8) витікає з перших двох рівнянь (6), (7).

Рівняння (11) дає проміжний інтеграл геодезичних та означає, що дотичний вектор $\frac{dx^i}{dt}$ вздовж базисної кривої $x^i(t)$ робить простий гвинтовий рух: $\Theta = at + a_0, \quad a, a_0 - const$. В свою чергу, рівняння (12) показує, що базисна крива являється ізопериметричною екстремаллю повороту простору (M^2, g) с ізопериметричної сталою $c = \frac{e\rho a}{\sqrt{2h}}$.

Таким чином, результату П. Надя [10] можемо надати наступне формулювання

Теорема 1. *Якщо крива $x^\alpha(t)$ являється геодезичною в сферичному дотичному розшаруванні $T_\rho M^2$ з метрикою Сасакі dt^2, тоді на базисному многовиді M^2 ненулевої гаусової кривини K базисна крива $x^i(t)$ є ізопериметричною екстремаллю повороту з ізопериметричною сталою $c = \frac{e\rho a}{\sqrt{2h}}, \quad e = \pm 1$, її дотичний вектор $\frac{dx^i}{dt}$ здійснює вздовж неї поступовий рух зі сталою довжиною $\sqrt{h}$ та простий гвинтовий поворот $\Theta = at + a_0$ зі сталою швидкістю a.*

3. Геодезичний потік на $T_\rho M^2$

Розглянемо кодотичне розшарування $T^*\left(T_\rho M^2\right)$ з локальними координатами x^α, p_α та природною канонічною симплектичною структурою $w = dp_\alpha \wedge dx^\alpha$. Візьмемо функцію Гамільтона

$$H(x,p) = \frac{1}{2} g^{*\alpha\beta} p_\alpha p_\beta$$

та відповідний їй гамільтонів потік $\dot{x} = sgradH$ відносно симплектичної структури w на $T^*\left(T_\rho M^2\right)$. Так як H — перший інтеграл цього потоку, то одиничний кодотичний пучок $T_1^*\left(T_\rho M^2\right) = \{x^* \in T^*\left(T_\rho M^2\right) : \|p\| = 1\}$ інваріантний відносно потоку $sgradH$. Обмеження цього потока на $T_1^*\left(T_\rho M^2\right)$ буде геодезичним потоком на $T_\rho M^2$. За природного ізоморфізму $T^*\left(T_\rho M^2\right) \longrightarrow T\left(T_\rho M^2\right)$ траєкторії геодезичного потоку $sgradH$ переходять у криві, які складаються з дотичних векторів в $T_\rho M^2$.

Нехай Φ^t — локальна 1-параметрична група перетворень, породжена потоком $sgradH$. Окремі перетворення з Φ^t переводять пару $(x(0), p(0))$ в пару $(x(t), p(t)) = \Phi^t(x(0), p(0))$, де для отримання $x(t)$ необхідно провести геодезичну через точку $x(0)$ в напрямку ковектора $p(0)$ і тоді $x(t)$ відстоїть від $x(0)$ на відстані t вздовж цієї геодезичної, а ковектор $p(t)$ дотичний цієї геодезичної в $x(t)$ та спрямований так же, як і $p(0)$. Таким чином, при отриманні $x(t) = (x^\alpha(t))$ на базі необхідно проводити ізопериметричну екстремаль повороту через вихідну точку $x^i(0)$. З цією метою інтегруємо систему (6), (7) з урахуванням проміжного інтегралу (11) та сталу a визначимо початковими даними:

$$a = \frac{dx^3(0)}{dt} + \left(\sqrt{G}\right)_1 \frac{dx^2(0)}{dt}.$$

Нарешті, для визначення компоненти траєкторії $x^3(t)$, інтегруємо рівняння (11) за вищевказаною сталої a.

Як відомо, гамільтоніан $H(x, p)$ являється основним першим інтегралом геодезичного потоку. З (11) маємо ще один перший інтеграл

$$a = p_\alpha \left(g^{*3\alpha} + \left(\sqrt{G}\right)_1 g^{*2\alpha}\right) = p^{-1} p_3.$$

Аналогічно, з (9) отримаємо перший інтеграл

$$h = \frac{1}{2} g_{ij} g^{*i\alpha} g^{*j\beta} p_\alpha p_\beta,$$

але в силу (10) інтеграли H, a, h залежні: $2H = 2h + \rho a^2$.

В випадку, коли многовид (M^2, g) локально ізометричний поверхні обернення, можливо вказати додатковий інтеграл потоку, який витікає з знайденого нами узагальненого інтегралу Клеро. Дійсно, нехай многовид (M^2, g) локально ізометричний поверхні обернення з меридіаном $f(r)$, де r — відстань до вісі обернення. Тоді

$$dl^2 = F^2 + r^2 (dx^2)^2, \quad F = \sqrt{1 + f^2},$$

де x^2 — довгота точки. Вводячи нову координату $x^1 : dx^1 = F dr$, отримаємо метрику dl^2 в вигляді

$$dl^2 = (dx^1)^2 + r^2 (dx^2)^2,$$

тобто координати x^1, x^2 напівгеодезичні та $r(x^1) = \sqrt{G}$. Неважко переконатись в тому, що $\sin\varphi = F^{-1} = \left(\sqrt{G}\right)_1$. Так як ізопериметрична стала для базисної траєкторії рівна $c = \dfrac{e\rho a}{\sqrt{2h}} = \dfrac{ep_3}{\sqrt{2h}}$, то тим самим узагальнений інтеграл Клеро (2) набуває вигляд

$$k = \sqrt{G}\sin x^3 + \frac{p_3}{\sqrt{2h}}.$$

Враховуючи, що $\sin x^3 = \sqrt{\dfrac{G}{2h}}\dfrac{dx^2}{dt}$, отримаємо

$$k = \frac{G}{\sqrt{2h}} g^{*2\alpha} p_\alpha + \frac{p_3}{\sqrt{2h}}\left(\sqrt{G}\right)_1 = \frac{p_2}{\sqrt{2h}}.$$

Звідси витікає, що в даному випадку друга компонента p_2 імпульсу також являється інтегралом геодезичного потоку.

Розглянемо дужку Пуасона канонічної симплектичної структури

$$\{F_1, F_2\} = \sum_\alpha \frac{\partial F_1}{\partial p_\alpha}\frac{\partial F_2}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial F_2}{\partial p_\alpha}\frac{\partial F_1}{\partial x^\alpha}.$$

Так як в розглянутому випадку гамільтоніан H не залежить відразу від двох змінних x^2, x^3, то неважко перевірити, що інтеграли H, p_2, p_3 знаходяться у інволюції, тобто

$$\{H, p_2\} = \{H, p_3\} = \{p_2, p_3\} = 0.$$

Очевидно, що вказані три інтеграли незалежні та розв'язні відносно імпульсів p_1, p_2, p_3. Отже, виконана Теорема Ліувилля [1; 2] і функції H, p_2, p_3 утворюють повне інволютне сімейство інтегралів гамільтонових рівнянь

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}.$$

Тим самим має місце

Теорема 2. *Якщо рімановий многовид $\left(M^2, g\right)$ локально ізометричний поверхні обернення, то геодезичний потік сферичного дотичного розшарування $T_\rho M^2$ з метрикою Сасакі цілком інтегрований.*

Як витікає з результатів роботи [8], відповідна квадратура для базисних траєкторій (які не є паралелями) має в координатах радіус-довгота наступний вигляд

$$x^2 = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{ec + c_1 F}{r(r^2 - (ecF^{-1} + c_1)^2)^{\frac{1}{2}}} dr + x_0^2.$$

При $c = 0$ ця квадратура співпадає з відомою квадратурою для геодезичних кривих на поверхні обернення [14].

Висновки

В даній роботі розглянуто геодезичний потік на сферичному дотичному розшаруванні двомірного ріманового многовиду з метрикою Сасакі та показано, що, якщо базисний многовид локально ізометричний поверхні обертання, то відповідна потоку гамільтонова система цілком інтегрована за Ліувіллем. Звідси, як наслідок, знаходяться траєкторії потоку в квадратурах.

Список літератури

1. **Фоменко А.Т.** Симплектична геометрія. Методи та додатки / А. Т. Фоменко. — М.: МГУ, 1988. — 413 с.
2. **Трофімов В.В.** Алгебра та геометрія інтегрованих диференціальних рівнянь. / В.В. Трофімов, А.Т.Фоменко. — М.: Факторіал, 1995. — 448 с.
3. Праці семінару з векторного та тензорного аналізу з їх додатками до геометрії, механіки та фізики. Наукове видання. — М.: МГУ, 1993. — Т. 25, № 1. — 127 с.
4. Праці семінару з векторного та тензорного аналізу з їх додатками до геометрії, механіки та фізики. Наукове видання. — М.: МГУ, 1993. — Т. 25, № 2. — 151 с.
5. **Лейко С.Г.** Варіаційні задачі для функціоналів повороту та спин-відображення псведоріманових просторів / С. Г. Лейко // Ізв. Вузов. Математика. — 1990. — № 10. — С. 9–17.
6. **Лейко С.Г.** Поворотні дифеоморфізми на поверхнях евклідова простору / С. Г. Лейко // Мат. замітки. — 1990. — Т. 47, № 3. — С. 52–57.
7. **Лейко С.Г.** Екстремалі функціоналів повороту кривих псевдо ріманова простору та траєкторії спин-частин в гравітаційних полях / С. Г. Лейко // Докл. РАН. — 1992. — Т. 325, № 4. — С. 659–664.
8. **Лейко С.Г.** Ізопериметричні екстремалі повороту на поверхнях у евклідовому просторі E^3 / С. Г. Лейко // Ізв. вузов. Математика. — 1996. — № 6. — С. 25–32.
9. **Лейко С.Г.** Механічна інтерпретація ізопериметричних екстремалей повороту на поверхнях / С. Г. Лейко // Вісник Одеського держ. ун-ту. — 1999. — Т.4, №4. — С. 102–105.

10. **Nagy P.** On the tangent sphere bundle of Riemannian 2-manifold / P. Nagy // 1977. — № 29. — P. 203–208.
11. **Sasaki S.** On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifold / S. Sasaki // 1 Tohoku Math. J. — 1958. — № 10. — P. 338–354.
12. **Sasaki S.** On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifold / S. Sasaki // 2 Tohoku Math. J. – 1962. – № 14. — P. 146–155.
13. **Бляшке В.В.** Диференціальна геометрія. / В.В. Бляшке. — М.- Л. ОНТИ-НКТП СССР, 1935. — 332 с.
14. **Каган В.Ф.** Основи теорії поверхонь у тензорному викладенні. / В.Ф. Каган. Ч.1. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. — 512 с.

Leiko S.

L-INTEGRAL FOR ISOPERIMETRIC EXTREMALS OF ROTATION

Summary

In this paper, the geodetic flux on a spherical tangent bundle of a two-dimensional Riemannian manifold with the Sasaki metric is considered and it is shown that, if the basis manifold is locally isometric of the surface of rotation, then the Hamiltonian system corresponding to the flow is fully integrated according to Liouville. Hence, as a consequence, the flow trajectories are in quadratures.

Key words: pseudo-Riemannian spaces, rotation extremals, Clairaut integral, variational problem.

References

1. Fomenko, A.T. (1988). *Symplektychna geometriya. Metody ta dodatky [Symplektychna heometriia. Metody ta dodatky].* M.: MGU, 413 p.
2. Trofimov, V.V., Fomenko, A.T. (1995). *Alhebra ta heometriia intehrovanykh dyferentsialnykh rivnian.* M.: Faktorial, 448 p.
3. *Pratsi seminaru z vektornoho ta tenzornoho analizu z yikh dodatkamy do heometrii, mekhaniky ta fizyky.* (1993). Naukove vydannia, M.: MHU, Vol. 25, №1, 127 p.
4. *Pratsi seminaru z vektornoho ta tenzornoho analizu z yikh dodatkamy do heometrii, mekhaniky ta fizyky.* (1993). Naukove vydannia, M.: MHU, Vol. 25, №2, 151 p.
5. Leiko, S.H. (1990). Variatsiini zadachi dlia funktsionaliv povorotu ta spyn-vidobrazhennia psvedorimanovykh prostoriv. *Izv. Vuzov. Matematyka*, №10, P. 9–17.
6. Leiko, S.H. (1990). Povorotni dyfeomorfizmy na poverkhniakh evklidova prostoru. *Mat. zamitky*, Vol. 47, №3, P. 52–57.
7. Leiko, S.H. (1992). Ekstremali funktsionaliv povorotu kryvykh psevdo rimanova prostoru ta traiektorii spyn-chastyn v hravitatsiinykh poliakh. *Dokl. RAN*, Vol. 325, № 4, P. 659–664.
8. Leiko, S.H. (1996). Izoperymetrychni ekstremali povorotu na poverkhniakh u evklidovomu prostori E^3 . *Izv. vuzov. Matematyka*, № 6, P. 25–32.
9. Leiko, S.H. (1999). Mekhanichna interpretatsiia izoperymetrychnykh ekstremalei povorotu na poverkhniakh. *Visnyk Odeskoho derzh. un-tu*, T.4, №4, P. 102–105.
10. Nagy, P. (1977). On the tangent sphere bundle of Riemannian 2-manifold. № 29, P. 203–208.
11. Sasaki, S. (1958). On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifold. *1 Tohoku Math .J.*, № 10, P. 338–354.

12. Sasaki, S. (1962). On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifold. *2 Tohoku Math. J.*, № 14, P. 146–155.

13. Bliashke, V.V. (1935). *Dyferentsialna heometriia*. M.-L. ONTY-NKTP SSSR, 332 p.

14. Kahan, V.F. (1947). *Osnovy teorii poverkhon u tenzornomu vykladenni, Ch.1*. M.-L.: HYTTL, 512 p.