Дослідження в математиці і механіці. – 2023. – Т. 28, вип. 1–2 (41–42). – С. 47–63

УДК 514.07

О. Лесечко, А. Соловйов
Одеська державна академія будівництва та архітектури,
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

КОНФОРМНО-ПЛАСКІ КЕЛЕРОВІ ПРОСТОРИ

Досліджуються геометричні властивості келерових просторів, які допускають конформні відображення, відмінні від гомотетичних відображень, на пласкі псевдоріманові простори. В роботі доведено, що не існує не пласких конформно-пласких келерових просторів, розмірність яких відмінна від чотирьох. Показано, що чотиривимірні конформнопласкі простори можуть бути вкладені в шестимірні пласкі псевдоріманові простори. В конформно-пласких келерових просторах побудовано ідемпотентний коваріантно сталий не пропорційний метричному тензор і, таким чином, доведено, що вказані простори є звідними псевдорімановими просторами.

Дослідження ведуться локально, тензорними методами без обмежень на сигнатуру та знаковизначенність метричного тензору келерового простору. В роботі широко застосовується спеціальна операція (спряження), що введена для келерових просторів, та її властивості для тензорів Рімана та Річчі.

MSC: 53B35.
Ключові слова: псевдоріманові простори, тензор Річчі, тензор Рімана, келерові простори, конформні відображення, конформно-пласкі келерові простори.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305257.

Вступ

Простори, які допускають конформні відображення на евклідові простори при умові, що в них існує поле коваріантно сталого кососиметричного афінора, вперше дослідив П.А. Широков [1]. Суттєвою умовою в цих дослідженнях була знаковизначенність метричного тензора простору. Пізніше, але вже як окремий об'єкт дослідження, псевдоріманові простори з кососиметричним коваріантно сталим афінором вивчав Е. Келер [2]. Такий тип спеціальних псевдоріманових просторів зразу привернув увагу дослідників завдяки широкому колу застосувань, і самі простори дістали назву келерових просторів. Технічні труднощі, що виникають при дослідженні келерових просторів, дозволяє долати спеціальна операція, яка має назву — спряження [3].

Надійшла 02.03.2023

Метою роботи є дослідження умов, яким задовольняють метричний тензор та інші внутрішні об'єкти келерового конформно-плаского простору, зокрема, тензори Рімана та Річчі.

Дослідження в статті ведуться локально, тензорними методами без обмежень на знак та сигнатуру метричного тензора.

Основні результати

1. Келерові простори

Келеровим простором K_n $(n = 2N)$ називається псевдоріманів простір з метричним тензором $g_{ij}(x)$, у якому існує структура $F_i^h(x)$, що задовольняє співвідношенням [4; 5]:

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = -\delta_i^h; \qquad F_{(ij)} = 0; \qquad F_{i,j}^h = 0, \tag{1}$$

де $F_{ij} \equiv g_{i\alpha} F_j^\alpha$, кома — знак ковариантної похідної по зв'язності K_n.

Зауважимо, що келерові простори вперше вивчалися П. А. Широковим, які він назвав А-просторами. Потім ці простори вивчав Є. Келер . В літературі, як правило, ці простори називають келерові.

Задля зручності введемо в K_n операцію спряження :

$$A_{\bar{i}\cdots}^{\cdots} \equiv A_{\alpha\cdots}^{\cdots} F_i^\alpha; \qquad B_{\cdots}^{\bar{i}\cdots} \equiv B_{\cdots}^{\alpha\cdots} F_\alpha^i. \tag{2}$$

Тут A і B довільні тензори будь-якої валентності. В силу (1) та (2) мають місце наступні властивості:

$$\begin{gathered} A_{\bar{\bar{i}}} = -A_i; \qquad B^{\bar{\bar{i}}} = -B^i; \\ A_{\bar{\alpha}} B^\alpha = A_\alpha B^{\bar{\alpha}}; \qquad A_{\bar{\alpha}} B^{\bar{\alpha}} = -A_\alpha B^\alpha; \\ (A_{\bar{i}})_{,\,j} = A_{\bar{i}\,,\,j}; \qquad (B^{\bar{i}})_{,\,j} = B^{\bar{i}}{}_{,\,j}. \end{gathered} \tag{3}$$

Метричний тензор та символи Кронекера задовольняють співвідношенням:

$$g_{\bar{i}\,\bar{j}} = g_{ij}; \qquad g_{\bar{i}j} = -g_{i\bar{j}}; \qquad \delta_{\bar{i}}^h = \delta_i^{\bar{h}} = F_i^h; \qquad \delta_{\bar{i}}^{\bar{h}} = -\delta_i^h. \tag{4}$$

Тензори Рімана и Річчі додатково до відомих тотожностей задавольняють слідуючим властивостям:

$$R_{\bar{h}\bar{i}jk} = R_{hijk}; \qquad R_{\bar{\alpha}jk}^\alpha = 2R_{j\bar{k}}; \qquad R_{\bar{i}\,\bar{j}} = R_{ij}. \tag{5}$$

До внутрішніх об'єктів K_n відносять об'єкти, що визначаються з метричного тензора g_{ij} та структури F_i^h.

Розглянемо келерові простори зі спеціальним видом тензора Рімана.

2. Конформно-пласкі простори.

Конформно-пласким називають псевдоріманів простір V_n, в якому виконуються умови [6]

$$R_{hijk} = P_{hk}g_{ij} - P_{hj}g_{ik} + P_{ij}g_{hk} - P_{ik}g_{hj}, \tag{6}$$

$$P_{ij,k} - P_{ik,j} = 0, \tag{7}$$

тут

$$P_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(R_{ij} - \frac{1}{2(n-1)}Rg_{ij}\right). \tag{8}$$

Подіємо операцією спряження по індексах i, j в формулі (8), переконаємось, що

$$P_{ij} = P_{\bar{i}\bar{j}}; \quad P_{\bar{i}j} + P_{i\bar{j}} = 0. \tag{9}$$

Подіємо операцією спряження по індексам j, k в рівняння (6) та віднімемо отримане від (6)

$$P_{hk}g_{ij} - P_{hj}g_{ik} + P_{ij}g_{hk} - P_{ik}g_{hj} - P_{h\bar{k}}g_{i\bar{j}} + P_{h\bar{j}}g_{i\bar{k}} - P_{i\bar{j}}g_{h\bar{k}} + P_{i\bar{k}}g_{h\bar{j}} = 0. \tag{10}$$

Згорнемо по індексам i, j

$$(n-4)P_{hk} - Pg_{hk} = 0, \tag{11}$$

тут $P = P_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$.

Із (11) переконаємось, що $P = 0$, а значить, $R = 0$ та має місце

Теорема 1. *Конформно-пласкі келерові простори мають нульову скалярну кривину.*

При $n > 4$ має місце наступна властивість

Теорема 2. *Не існує конформно-пласких келерових просторів K_n, $n > 4$, відмінних від пласких.*

Доведемо, що виконується

Теорема 3. *Конформно-пласкі келерові простори K_n, $n = 4$ мають коваріантно сталий тензор Рімана.*

Доведення.

Подіємо операцією спряження по індексам i, j в рівнянні (7), отримаємо

$$P_{ij,k} - P_{\bar{i}k,\bar{j}} = 0. \tag{12}$$

Просиметруємо по індексам i, k та переконаємось, що

$$P_{ij,k} + P_{kj,i} = 0. \tag{13}$$

Перепозначимо індекси i та j та додамо до (7), будемо мати

$$P_{ij,k} = 0. \tag{14}$$

А це веде до

$$R_{hijk,l} = 0. \tag{15}$$

Що й треба було довести.

Псевдоріманові простори, в яких тензор Рімана є коваріантно сталим, називають *симетричними* [7].

Зауважимо, що із (8) для $n = 4$ витікає

$$P_{ij} = \frac{1}{2} R_{ij} \tag{16}$$

і тоді (6) прийме вигляд

$$R_{hijk} = \frac{1}{2}(R_{hk}g_{ij} - R_{hj}g_{ik} + R_{ij}g_{hk} - R_{ik}g_{hj}). \tag{17}$$

Псевдоріманові простори, в яких тензор Річчі коваріантно сталий, називають *Річчі симетричними.* Симетричні псевдоріманові простори є Річчі симетричними [5; 8].

Умови інтегрування для Річчі симетричних просторів

$$R_{\alpha i} R^{\alpha}_{jkl} + R_{\alpha j} R^{\alpha}_{ikl} = 0. \tag{18}$$

Підставляючи значення тензора Рімана, отримаємо

$$R_{\alpha i} R^{\alpha}_{l} g_{jk} - R_{\alpha i} R^{\alpha}_{k} g_{jl} + R_{\alpha j} R^{\alpha}_{l} g_{ik} - R_{\alpha j} R^{\alpha}_{k} g_{il} = 0. \tag{19}$$

Згорнемо по індексам j, k

$$4R_{\alpha i}R^{\alpha}_{l} = \rho g_{il}, \tag{20}$$

де $\rho = R_{\alpha\beta}R^{\alpha}_{\gamma}g^{\beta\gamma}$.

Коваріантно диференціюючи останнє переконаємось, що $\rho = const$.

Таким чином,

Наслідок 1. *В конформно-пласких келерових просторах, відмінних від пласких, тензор Річчі задовольняє умовам (26).*

Як відомо, клас конформно-пласких просторів не перевищує двох.

Розглянемо простори першого класу.

3. Простори першого класу.

Простором V_n *першого класу* називають гіперповерхню плаского простору.

Його тензорні ознаки, необхідні та достатні умови мають вигляд

$$R_{hijk} = \epsilon(b_{hk}b_{ij} - b_{hj}b_{ik}), \tag{21}$$

тут $\epsilon = \pm 1; \quad b_{hi} = b_{ih}$,

$$b_{ij,k} = b_{ik,j}. \tag{22}$$

Згортаючи (15), отримаємо

$$R_{ij} = \epsilon(bb_{ij} - b_{\alpha j}b^{\alpha}_{i}), \tag{23}$$

де $b = b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}; \quad b^{i}_{j} = b_{\alpha j}g^{\alpha i}$.

Запишемо (23) в вигляді

$$b_{\alpha i}b^{\alpha}_{j} = bb_{ij} - \epsilon R_{ij}. \tag{24}$$

Домножимо (21) на b^{h}_{m} та згорнемо по h

$$b^{\alpha}_{m}R_{\alpha ijk} = \epsilon(b^{\alpha}_{m}b_{\alpha k}b_{ij} - b^{\alpha}_{m}b_{\alpha j}b_{ik}). \tag{25}$$

Після врахування (21) та (24) дістанемо

$$b^{\alpha}_{m}R_{\alpha ijk} = bR_{mijk} - R_{mk}b_{ij} + R_{mj}b_{ik}. \tag{26}$$

Подіємо операцією спряження по індексам j, k та віднімемо отримане від рівняння (26)

$$R_{mj}b_{ik} - R_{mk}b_{ij} - R_{m\bar{j}}b_{i\bar{k}} + R_{m\bar{k}}b_{i\bar{j}} = 0. \tag{27}$$

Згорнемо по індексам m, j

$$R_{\alpha k}b_i^\alpha = \frac{R}{2}b_{ik}. \tag{28}$$

Для конформно-пласких келерових просторів першого класу доведено

Теорема 4. *Не існує конформно-пласких келерових просторів першого класу відмінних від пласких.*

Доведення.

Рівняння (28) прийме вигляд

$$R_{\alpha i}b_j^\alpha = 0. \tag{29}$$

Домножуючи (21) на R_j^i таке, що $R_j^i = R_{\alpha j}g^{\alpha i}$, та згортаючи по i, отримаємо

$$R_i^\alpha R_{\alpha jkl} = 0. \tag{30}$$

Врахуємо (17)

$$R_{\alpha i}R_l^\alpha g_{jk} - R_{\alpha i}R_k^\alpha g_{jl} + R_{il}R_{jk} - R_{ik}R_{jl} = 0. \tag{31}$$

Згорнемо по індексам j, k

$$R_{\alpha i}R_l^\alpha = 0. \tag{32}$$

Тоді (31) прийме вигляд

$$R_{il}R_{jk} - R_{ik}R_{jl} = 0. \tag{33}$$

Подіємо операцією спряження по індексам j, k

$$R_{il}R_{jk} - R_{i\bar{k}}R_{\bar{j}l} = 0. \tag{34}$$

Симетруючи по індексам i та k, дістанемо

$$R_{il}R_{jk} + R_{kl}R_{ji} = 0. \tag{35}$$

Перепозначимо індекси i та l та додамо до (33), це дозволить переконатись, що $R_{ij} = 0$.

Таким чином, теорему доведено.

Наслідок 2. *Клас конформно-пласких келерових просторів дорівнює двом.*

Розглянемо властивості конформно-пласких келерових просторів, які витікають із того, що вони допускають конформні відображення на пласкі псевдоріманові простори.

4. Конформні відображення

Нехай V_n $(n > 2)$ псевдоріманів простір з метричним тензором $g_{ij}(x)$ і $\bar{V}_n$ також псевдоріманів простір з метричним тензором $\bar{g}_{ij}(x)$. *Конформним відображенням* називають взаємно-однозначну відповідність між точками просторів V_n і $\bar{V}_n$ таке, що

$$\bar{g}_{ij}(x) = e^{2\sigma(x)} g_{ij}(x), \tag{36}$$

тут σ - деяка функція [9].

Якщо σ - стала, то відображення називають *гомотетією.* Надалі, якщо це не обумовлено, ми обмежимося розглядом відображень відмінних від гомотетичних.

З (36) отримаємо

$$\bar{g}^{ij} = e^{-2\sigma} g^{ij}.$$

Мають місце формули:

$$\bar{\Gamma}^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \delta^h_i \sigma_j + \delta^h_j \sigma_i - \sigma^h g_{ij}; \tag{37}$$

для тензора Рімана

$$\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_k \sigma_{ij} - \delta^h_j \sigma_{ik} + g^{h\alpha}(\sigma_{\alpha h} g_{ij} - \sigma_{\alpha j} g_{ik}) + \Delta_1 \sigma (\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}); \tag{38}$$

для тензора Річчі

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + (n-2)\sigma_{ij} + (\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma) g_{ij}; \tag{39}$$

для скалярної кривини

$$\bar{R} = e^{-2\sigma}(R + 2(n-1)\Delta_2 \sigma + (n-1)(n-2)\Delta_1 \sigma). \tag{40}$$

Тут і надалі $\quad \sigma_i \equiv \dfrac{\partial \sigma}{\partial x^i} \equiv \sigma_{,i}, \qquad \sigma^h = \sigma_\alpha g^{\alpha h},$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{,ij} - \sigma_{,i}\sigma_{,j}. \tag{41}$$

$\Delta_1\sigma$ і $\Delta_2\sigma$ - перший і другий символи Бельтрамі, що визначаються

$$\Delta_1\sigma = g^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta}; \qquad \Delta_2\sigma = g^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha\beta},$$

кома "," — знак коваріантної похідної по зв'язності V_n.

Об'єкти конформно відповідного V_n простору $\bar{V}_n$ позначатимемо рискою.

Введемо в розгляд інваріант S такий, що

$$\sigma = -ln|S|, \tag{42}$$

тоді (36) наберуть вигляду

$$\bar{g}_{ij}(x) = S^{-2}g_{ij}.$$

Послідовно диференціюючи (42), отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{,\,i} &= -\frac{1}{S}S_{,\,i}; \\ \sigma_{,\,ij} &= -(S\cdot S_{,\,ij} - S_{,\,i}S_{,\,j})\cdot S^{-2}; \\ \sigma_{ij} &= -S_{,\,ij}\cdot S^{-1}. \end{aligned}$$

Крім того

$$\Delta_1\sigma = \Delta_1 S\cdot S^{-2}; \qquad \Delta_2\sigma = (\Delta_1 S - S\Delta_2 S)\cdot S^{-2}.$$

Для конформно-пласких келерових просторів, відмінних від пласких, з (46) отримаємо

$$\Delta_2\sigma + \Delta_1\sigma = 0 \tag{43}$$

або

$$\Delta_1 S = \frac{S}{2}\Delta_2 S.$$

Тоді для тензора Річчі

$$R_{ij} + 2(\sigma_{,ij} - \sigma_{,i}\sigma_{,j}) + \Delta_1\sigma g_{ij} = 0 \tag{44}$$

або

$$R_{ij} - 2S^{-1}S_{,ij} + \Delta_1 S S^{-2}g_{ij} = 0$$

та

$$R_{ij} = \frac{2}{S}S_{,ij} - \frac{\Delta_1 S}{S^2}g_{ij}. \tag{45}$$

Домножимо рівняння (17) на σ^α:

$$2\sigma_{,\alpha}R^\alpha_{ijk} = \sigma_\alpha R^\alpha_k g_{ij} - \sigma_\alpha R^\alpha_j g_{ik} + \sigma_{,k}R_{ij} - \sigma_{,j}R_{ik}. \tag{46}$$

На останнє рівняння подіємо операцією спряження по індексам j, k та віднімемо отриманий вираз, тоді дістанемо

$$\sigma_{,\alpha}R^\alpha_k g_{ij} - \sigma_{,\alpha}R^\alpha_j g_{ik} + \sigma_{,k}R_{ij} - \sigma_{,j}R_{ik} - \sigma_\alpha R^\alpha_{\bar{k}} g_{i\bar{j}} +$$
$$+\sigma_{,\alpha}R^\alpha_{\bar{j}} g_{i\bar{k}} - \sigma_{,\bar{k}}R_{i\bar{j}} + \sigma_{,\bar{j}}R_{i\bar{k}} = 0. \tag{47}$$

Отримаємо наступний вираз після того, як просиметруємо по i, j попередню рівність

$$2\sigma_{,k}R_{ij} - \sigma_{,j}R_{ik} - \sigma_{,i}R_{jk} + 2\sigma_{,\alpha}R^\alpha_k g_{ij} - \sigma_{,\alpha}R^\alpha_j g_{ik} -$$
$$-\sigma_{,\alpha}R^\alpha_i g_{jk} - \sigma_{,\bar{j}}R_{\bar{i}k} - \sigma_{,\bar{i}}R_{\bar{j}k} - \sigma_{,\alpha}R^\alpha_{\bar{j}} g_{\bar{i}k} - \sigma_{,\alpha}R^\alpha_{\bar{i}} g_{\bar{j}k} = 0. \tag{48}$$

Домножимо на вектор $\sigma^k, \sigma^k = \sigma_{,\alpha}g^{\alpha k}$

$$\sigma_{,\alpha}\sigma^\alpha R_{ij} - \sigma_{,j}R^\alpha_i\sigma_{,\alpha} - \sigma_{,i}R^\alpha_j\sigma_{,\alpha} - \sigma_{,\alpha}\sigma^\beta R^\alpha_\beta g_{ij} - \sigma_{,\bar{j}}R^\alpha_{\bar{i}}\sigma_{,\alpha} - \sigma_{,\bar{i}}R^\alpha_{\bar{j}}\sigma_\alpha = 0. \tag{49}$$

Якщо $\Delta_1 \neq 0$, то

$$R_{ij} = \frac{1}{\Delta_1\sigma}(\sigma_{,j}R^\alpha_i\sigma_\alpha + \sigma_{,i}R^\alpha_j\sigma_\alpha + \sigma_{,\bar{j}}R^\alpha_{\bar{i}}\sigma_{,\alpha} + \sigma_{,\bar{i}}R^\alpha_{\bar{j}}\sigma_\alpha - \sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta}R^{\alpha\beta}g_{ij}). \tag{50}$$

Таким чином,

Теорема 5. *Тензор Річчі конформно-пласких келерових просторів задовольняє умовам (44) якщо вектор σ_i не ізотропний.*

Отже, конформно-пласкі келерові простори є узагальнено квазі-ейнштеновими псевдорімановими просторами [10].

Псевдоріманів простір V_n з метричним тензором g_{ij} називають *локально звідним*, якщо в деякому околі кожної його точки M є можливість вибрати таку систему координат $y^1, y^2, \ldots, y^n$, відносно якої основна матрична форма має вигляд

$$I = g_{pq}(y^r)dy^p dy^q + g_{\sigma\mu}(y^\nu)dy^\sigma dy^\mu, \tag{51}$$

$$(p, q, r = 1, 2, \ldots, m;\ \sigma, \mu, \nu = m+1, m+2, \ldots, n).$$

Тут g_{pq} залежать лише від $y^1, y^2, \ldots, y^m$, а $g_{\sigma\mu}$ — тільки від y^{m+1}, $y^{m+2}, \ldots, y^n$.

В подальшому, локально звідні простори будемо називати просто звідними.

Таким чином, звідний псевдоріманів простір $V_n(g_{ij})$, згідно з означенням, являє собою добуток двох псевдоріманових просторів $\overset{1}{V}_m(g_{pq})$ та $\overset{2}{V}_{n-m}(g_{\sigma\mu})$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{pq} & | & 0 \\ - & & - \\ 0 & | & g_{\sigma\mu} \end{pmatrix} \tag{52}$$

Кожен із просторів $\overset{1}{V}_m$ та $\overset{2}{V}_{n-m}$ може в свою чергу приводитись чи не приводитись, і тому формулу (51) можна записать у вигляді

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{r} ds_k^2 \quad (r > 1),$$

де ds_k^2 — квадратична форма простору V_{m_k} $\quad (m_1 + m_2 + \ldots + m_n = n)$.

Псевдоріманів простір V_n звідний тоді і тільки тоді, коли в ньому існує симетричний тензор $a_{ij} = cg_{ij}$ (при деякому сталому c), що задовольняє умовам

$$a_{i\alpha} a_j^{\alpha} = a_{ij} \tag{53}$$

та

$$a_{ij,k} = 0, \tag{54}$$

де $a_j^i = a_{\alpha j} g^{\alpha i}$.

Рівняння (56) та (53) це інваріантна (відносно вибору системи координат) умова, необхідна та достатня для того, щоб псевдоріманів простір V_n був звідним.

В такому вигляді її сформулював П.А. Широков [11].

Тензор a_{ij}, що задовольняє умові (53), називають *ідемпотентним*, а умові (54) — *коваріантно сталим.*

Вимогу ідемпотентності можна замінити на побажання, щоб матриця тензора a_{ij} мала прості елементарні дільники та дійсні корені (це довів

Г. Кручкович [14, p.163-201]). В такому вигляді ознака наводиться в якості вправи в книзі Л. П. Ейзенхарта "Ріманова геометрія"[13], але без вимоги існування дійсних коренів. Як легко переконатись, без цього ознака є помилковою.

Умови інтегрованості для рівняння (54) з урахуванням тотожності Річчі будуть

$$a_{\alpha i}R^{\alpha}_{jkl} + a_{\alpha j}R^{\alpha}_{ikl} = 0. \tag{55}$$

Циклюючи останнє по $(i,\ k,\ l)$, отримаємо

$$a_{\alpha i}R^{\alpha}_{jkl} + a_{\alpha k}R^{\alpha}_{jli} + a_{\alpha l}R^{\alpha}_{jik} = 0. \tag{56}$$

Згортаючи по індексам $(j,\ k)$, будемо мати

$$a_{\alpha i}R^{\alpha}_{l} - a_{\alpha l}R^{\alpha}_{i} = 0. \tag{57}$$

Тут

$$R^{i}_{j} = R_{\alpha j}g^{\alpha i}. \tag{58}$$

Про тензори a_{ij} та b_{ij}, для яких виконуються умови

$$a^{\alpha}_{i}b_{\alpha j} = a^{\alpha}_{j}b_{\alpha i}, \tag{59}$$

кажуть, що вони комутують.

Теорема 6. *В звідних псевдоріманових просторах V_n, існує ідемпотентний тензор, що комутує з тензором Річчі V_n.*

Для конформно-пласких просторів із (55) отримаємо

$$a_{\alpha i}P^{\alpha}_{l}g_{jk} - a_{\alpha i}P^{\alpha}_{k}g_{jl} + a_{il}P_{jk} - a_{ik}P_{jl} + a_{\alpha j}P^{\alpha}_{l}g_{ik} -$$

$$- a_{\alpha j}P^{\alpha}_{k}g_{il} + a_{jl}P_{ik} - a_{jk}P_{il} = 0. \tag{60}$$

Проальтернуємо по індексам j та l з урахуванням леми

$$a_{\alpha i}P^{\alpha}_{l}g_{jk} - a_{\alpha i}P^{\alpha}_{j}g_{lk} - a_{\alpha j}P^{\alpha}_{k}g_{il} + a_{l\alpha}P^{\alpha}_{k}g_{ij} +$$

$$+ a_{il}P_{jk} - a_{ij}P_{lk} + a_{lk}P_{ij} - a_{jk}P_{il} = 0. \tag{61}$$

Перепозначимо індекси i та l

$$a_{\alpha l}P^{\alpha}_{i}g_{jk} - a_{\alpha l}P^{\alpha}_{j}g_{ik} - a_{\alpha j}P^{\alpha}_{k}g_{il} + a_{i\alpha}P^{\alpha}_{k}g_{lj} +$$

$$+a_{il}P_{jk} - a_{lj}P_{ik} + a_{ik}P_{lj} - a_{jk}P_{il} = 0. \tag{62}$$

Додамо рівняння (62) та (60)

$$a_{\alpha l}P_i^{\alpha}g_{jk} - a_{\alpha j}P_k^{\alpha}g_{il} + a_{il}P_{jk} - a_{jk}P_{il} = 0. \tag{63}$$

Згорнемо (63) по індексам j та k

$$a_{\alpha l}P_i^{\alpha} = \hat{a}g_{il} - \frac{P}{n}a_{il} + \frac{a}{n}P_{il}, \tag{64}$$

тут $\hat{a} = a_{\alpha\beta}P^{\alpha\beta} \cdot \dfrac{1}{n}; \qquad a = a_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}.$

Підставимо рівняння (64) в (63)

$$a_{il}\left(P_{jk} - \frac{P}{n}g_{jk}\right) - a_{jk}\left(P_{il} - \frac{P}{n}g_{il}\right) + \frac{a}{n}P_{il}g_{jk} - \frac{a}{n}P_{jk}g_{il} = 0. \tag{65}$$

Так як $P_{jk} - \dfrac{P}{n}g_{jk} \neq 0,$ то можемо підібрати вектор ξ^i такий, що $\left(P_{\alpha\beta} - \dfrac{P}{n}g_{\alpha\beta}\right)\xi^{\alpha}\xi^{\beta} = 1$. Домножимо (68) на $\xi^j\xi^k$ та згорнемо по індексам j та k

$$a_{il} = \overset{1}{\tau}P_{il} + \overset{2}{\tau}g_{il}, \tag{66}$$

тут

$$\overset{1}{\tau} = \xi^{\alpha}\xi^{\beta}\left(a_{\alpha\beta} - \frac{a}{n}g_{\alpha\beta}\right);$$
$$\overset{2}{\tau} = \xi^{\alpha}\xi^{\beta}\left(\frac{a}{n}P_{\alpha\beta} - \frac{P}{n}a_{\alpha\beta}\right).$$

Таким чином, має місце

Теорема 7. *В конформно-пласких просторах V_n тензор a_{ij}, що задовольняє рівнянням (55) є лінійною комбінацією тензора P_{ij} та метричного тензора g_{ij}.*

Для келерових конформно-пласких просторів після врахування рівнянь (16) умови (66) приймуть вид

$$a_{ij} = \frac{\overset{1}{\tau}}{2}R_{ij} + \overset{2}{\tau}g_{ij}. \tag{67}$$

Тоді умова ідемпотентності тензора a_{ij} матиме вигляд

$$\left(\frac{\overset{1}{\tau}}{2}R_{\alpha i} + \overset{2}{\tau}g_{\alpha i}\right)\left(\frac{\overset{1}{\tau}}{2}R_j^{\alpha} + \overset{2}{\tau}\delta_j^{\alpha}\right) = \frac{\overset{1}{\tau}}{2}R_{ij} + \overset{2}{\tau}g_{ij}. \tag{68}$$

Врахувавши (20) отримаємо

$$\left(\overset{1}{\tau}\,\overset{2}{\tau} - \frac{\overset{1}{\tau}}{2}\right) R_{ij} + \left(\frac{1}{16}\overset{1}{\tau}^{2} \cdot \rho + \overset{2}{\tau}^{2}\right) g_{ij} = 0. \tag{69}$$

Згорнувши, переконаємось, що

$$\frac{1}{16}\overset{1}{\tau}^{2} \cdot \rho + \overset{2}{\tau}^{2} - \overset{2}{\tau} = 0 \tag{70}$$

та

$$\overset{1}{\tau}\left(\overset{2}{\tau} - \frac{1}{2}\right) = 0. \tag{71}$$

Так як $\overset{1}{\tau} \neq 0$, то із останнього витікає $\overset{2}{\tau} = \dfrac{1}{2}$.

Тоді із рівняння (70) отримаємо

$$\overset{1}{\tau}^{2} \cdot \rho = 4.$$

Тобто

$$\overset{1}{\tau} = \frac{2}{\sqrt{\rho}}.$$

Визначимо сталу ρ через внутрішні об'єкти келерового простору. Для цього згорнемо рівняння (20), тоді

$$\rho = R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}. \tag{72}$$

Тепер рівняння (67) прийме остаточний вигляд

$$a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}}} R_{ij} + \frac{1}{2} g_{ij}. \tag{73}$$

Таким чином, нами побудований в конформно-пласкому келеровому просторі коваріантно сталий ідемпотентний тензор, а значить має місце

Теорема 8. *Конформно-пласкі келерові простори належать до звідних псевдоріманових просторів.*

Висновки

Доведено, що існують лише чотирьохвимірні келерові простори. Ці простори є симетричними псевдорімановими просторами з нульовою скалярною кривиною. По вигляду, який за необхідністю має тензор Річчі вказаних просторів, їх можна віднести до спеціальних майже ейнштейнових просторів. Конформно-пласкі келерові простори не можуть бути реалізовані в якості гіперповерхні плаского псевдорімановного простору. Їх клас за необхідністю дорівнює двом.

Метричний тензор конформно-пласких келерових просторів в спеціальній системі координат допускає реалізацію у вигляді $V_2 \times V_2$. Тензорна ознака зведення, необхідна і достатні умова, полягає в існуванні коваріантно сталого не пропорційного метричному тензору ідемпотентного тензора. Доведено, що такий тензор є лінійною комбінацією тензора Річчі та метричного тензора. Умови ідемпотентності дозволили обчислити коефіцієнти цієї лінійної комбінації.

Список літератури

1. **Широков П. А.** Постійні поля векторів і тензорів другого порядку в ріманових просторах / П. А. Широков // Ізв.Каз.ун. — 1925. — Т.2, №25. — С. 256–280.
2. **Kähler E.** Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metric / E. Kähler // Sem. Hamburg. Univ. — 1933. — Vol.9. — P. 173–186.
3. **Lesechko O.** Conformally flat Kähler spaces / O. Lesechko, O. Latysh, and T. Spychak // AIP Conference Proceedings. — 2020. — Vol. 2302. — 040004. https://doi.org/10.1063/5.0034024.
4. **Fedorova A.** The only Kähler manifold with degree of mobility at least 3 is (CP(n), g Fubini-Study) / A. Fedorova, V. Kiosak, V. Matveev, S. Rosemann // Proceedings of the London Mathematical Society. — 2012. https://doi.org/10.1112/plms/pdr053.
5. **Mikeš J.** Geodesic mappings of manifolds with affine connection / J. Mikeš, V. Kiosak, O. Vanžurova. — Palacký University Press, Olomouc, 2008.
6. **Hinterleitner I.** φ(Ric)-Vector Fields on Conformally Flat Spaces / I. Hinterleitner, V. Kiosak // Proceedings of American Institute of Physics. — 2009. — Vol.1191. — P. 98–103. https://doi.org/10.1063/1.3275604.
7. **Kiosak V.** Holomorphically Projective Mappings of Special Kähler Manifolds / V. Kiosak, O. Savchenko, T. Shevchenko // AIP Conference Procedings. — 2018. — Vol.2025. – 08004. https://doi.org/10.1063/1.5064924.

8. **Кіосак В.** Геодезичні Річчі-симетричні псевдоріманові простори / В. Кіосак, Л. Кусік, В. Ісаєв // Праці Міжнародного центру геометрії. — 2022. — Т.15, №2. — С. 110–120. https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224

9. **Kiosak V.** On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces / V. Kiosak, O. Savchenko, O. Gudyreva // AIP Conference Procedings. — 2019. — Vol.2164. — 040001. https://doi.org/10.1063/1.5130793.

10. **Hinterleitner I.** Special Einstein's equations on Kähler manifolds / I. Hinterleitner, V. Kiosak // Archivum Mathematicum. — 2010. — Vol.46, №5. — P. 333–337.

11. **Широков П. А.** Про конкурентні напрямки в риманових просторах / П. А. Широков // Ізв.Каз.ун. — 1939. — Т.3, №7. — С. 77-87.

12. **Каган В. Ф.** Субпроективні простори / В. Ф. Каган. — М.: Фізматліт, 1961.

13. **Ейзенхарт Л. П.** Ріманова геометрія / Л. П. Ейзенхарт. — М.: ІЛ, 1948.

Lesechko O., Soloviov A.

Conformally flat Kählerian spaces

Summary

We study the geometric properties of Kähler spaces admitting conformal mappings, other than homothetic mappings, to flat pseudo-Riemannian spaces. It is proved that there are no non-flat conformally flat Kählerian spaces with dimensions other than four. It is shown that four-dimensional conformally flat spaces can be embedded in six-dimensional flat pseudo-Riemannian spaces. An idempotent covariantly stable metric tensor is constructed in conformally flat Kählerian spaces and thus it is proved that these spaces are reduced pseudo-Riemannian spaces.

The study is carried out locally, using tensor methods without restrictions on the signature and signification of the metric tensor of the Kählerian space. In this paper, we make extensive use of a special operation (conjugation) introduced for Kählerian spaces and its properties for Riemann and Ricci tensors.
Key words: pseudo-Riemannian spaces, Ricci tensor, Riemann tensor, Kählerian spaces, conformal mappings, conformally flat Kählerian spaces.

References

1. Shirokov,P.A. (1925). Postiyni polya vectoriv i tenzoriv drugogo poryadku v rimanovukh prostorakh [Constant fields of vectors and tensors of second order on Riemannian spaces]. *Izv.Kaz.f.m.o.,* Vol. 2, №25, P. 256–280.

2. Kähler, E. (1933). Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metric. *Sem. Hamburg. Univ.,* Vol. 9, P. 173–186.

3. Lesechko, O., Latysh, O., Spychak, T. (2020). Conformally flat Kähler spaces. *AIP Conference Proceedings.* Vol. 2302, 040004. https://doi.org/10.1063/5.0034024.

4. Fedorova, A., Kiosak, V., Matveev, V., Rosemann, S. (2012). The only Kähler manifold with degree of mobility at least 3 is (CP(n), g Fubini-Study), *Proceedings of the London Mathematical Society.* https://doi.org/10.1112/plms/pdr053.

5. Mikeš, J., Kiosak, V., Vanžurova, O. (2008). *Geodesic mappings of manifolds with affine connection*, Palacký University Press, Olomouc.

6. Hinterleitner, I., Kiosak, V. (2009). φ(Ric)-Vector Fields on Conformally Flat Spaces. *Proceedings of American Institute of Physics,* Vol. 1191, P. 98–103. https://doi.org/10.1063/1.3275604.

7. Kiosak, V., Savchenko, O., Shevchenko, T. (2018). Holomorphically Projective Mappings of Special Kähler Manifolds. *AIP Conference Procedings,* Vol. 2025, 08004. https://doi.org/10.1063/1.5064924.

8. Kiosak, V., Kusik, L., Isaiev, V. (2022). Geodezychni Richi-symetrychni psevdorimanovi prostory [Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces]. *Proceedings of the International Geometry Center,* Vol. 15, P. 110–120. https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224

9. Kiosak, V., Savchenko, O., Gudyreva, O. (2019). On the conformal mappings of special quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Procedings,* Vol. 2164, 040001. https://doi.org/10.1063/1.5130793.

10. Hinterleitner, I., Kiosak, V.(2010). Special Einstein's equations on Kähler manifolds.*Archivum Mathematicum,* Vol. 46, №5, P. 333–337.

11. Shirokov,P.A. (1939). Pro konkurentni napryamky v rimanovykh prostorakh [On competitive directions in Riemannian spaces]. *Izv.Kaz.f.m.o.,* Vol. 3, №7, P. 77–87.

12. Kagan, V. (1961). *Subproektyvni prostory [Subprojective spaces].* Moscow:Fizmatgiz.

13. Eisenhart, L. (1997). *Riemanova geometriya [Riemannian geometry].* Princeton University Press.