УДК 517.929.2:517.925.4

В. Є. Круглов
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

МЕТОД ЛАНЦЮГІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ СКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ ТА ДЕЯКІ ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

В цій роботі наведено схему методу ланцюгів стосовно розв'язання скінченного лінійного різницевого рівняння, і приведено формулу загального розв'язку цього рівняння. Як наслідок, наведено формулу загального розв'язку різницевого рівняння зі сталими коефіцієнтами, яка цілком залежить тільки від коефіцієнтів цього рівняння. Розглянуті розв'язки лінійних диференціальних рівнянь у вигляді узагальненого степеневого ряду, коефіцієнти якого знаходяться методом ланцюгів. Внаслідок перестановки елементів степеневого ряду розв'язок рівняння містить нову функцію, а саме: гіпергеометричну функцію дробового порядку.
MSC: 39A06.
Ключові слова: ланцюг, різницеве рівняння, гіпергеометрична функція дробового порядку.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305254.

Вступ

Ця стаття є огляд робіт автора, в яких розроблено метод ланцюгів для розв'язання лінійного різницевого рівняння і застосовано його для побудови розв'язків деяких лінійних диференціальних рівнянь.

Основні результати

1. Схема методу ланцюгів.

Розглянемо лінійне різницеве рівняння порядку n

$$l_{n+k} = a_{1k}l_{n+k-1} + a_{2k}l_{n+k-2} + \ldots + a_{nk}l_k, a_{nk} \neq 0, k = 0, 1, \ldots, \qquad (1)$$

де $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$ — відомі функції цілочисельного аргументу k.

Використовується покрокове розв'язання рівняння (1), тобто на кожному черговому кроці використання рівняння (1) враховуються розв'язки, які були знайдені на попередніх кроках, і запис коефіцієнтів рівняння (1) у вигляді a_{jk} не дає можливості встановити закономірності, які існують між цими коефіцієнтами.

Надійшла 10.04.2023

Тому позначимо

$$a_{jk} = a_{n+k-j}^{(j)}, j = \overline{1,n},$$

і тоді рівняння (1) має вигляд

$$l_{n+k} = l_{n+k-1}a_{n+k-1}^{(1)} + l_{n+k-2}a_{n+k-2}^{(2)} + \ldots + l_k a_k^{(n)}, k = 0, 1, \ldots. \tag{2}$$

Загальний розв'язок рівняння (2) визначається формулою

$$l_{n+k} = \varphi_{n-1,n+k}l_{n-1} + \varphi_{n-2,n+k}l_{n-2} + \ldots + \varphi_{0,n+k}l_0, k = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

де $l_{n-1}, l_{n-2}, \ldots, l_0$ – довільні сталі, цілочисельні функції $\varphi_{i,n+k}, i = \overline{0, n-1}$, утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (2), і які будуються в явному вигляді, та їх структура визначається формулами

$$\begin{aligned}
&\varphi_{0,n+k} = a_0^{(n)} f_{k,n+k},\\
&\varphi_{1,n+k} = a_1^{(n-1)} f_{k,n+k} + a_1^{(n)} f_{k-1,n+k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_{i,n+k} = a_i^{(n-i)} f_{k,n+k} + a_i^{(n-i+1)} f_{k-1,n+k} + \ldots + a_i^{(n)} f_{k-i,n+k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_{n-1,n+k} = a_{n-1}^{(1)} f_{k,n+k} + a_{n-1}^{(2)} f_{k-1,n+k} + \ldots + a_{n-1}^{(n)} f_{k-n+1,n+k}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Функції $f_{k,n+k}, f_{k-1,n+k}, \ldots, f_{k-p,n+k}, p = min(n,k)$, пов'язані рівністю

$$f_{k,n+k} = a_n^{(1)} f_{k-1,n+k} + a_n^{(2)} f_{k-2,n+k} + \ldots + a_n^{(p)} f_{k-p,n+k}, \tag{5}$$

при цьому $f_{0,n+k} \equiv 1, f_{j,n+k} \equiv 0$, якщо $j < 0$.

У побудові функції $f_{k,n+k}$ використовуються ті коефіцієнти рівняння (2), які виникають на k-му кроці рекурсії, а саме

$$M_{n,n+k} = (a_n^{(1)}, a_{n+1}^{(1)}, \ldots, a_{n+k-1}^{(1)}; a_n^{(2)}, a_{n+1}^{(2)}, \ldots, a_{n+k-2}^{(2)}; \ldots;$$

$$a_n^{(s)}, a_{n+1}^{(s)}, \ldots, a_{n+k-s}^{(s)}),$$

де $s = min(k,n)$.

Елементи $a_i^{(j)}, j = \overline{1,n}$, назвемо елементами рангу j; елементи набору $M_{n,n+k}$, які мають найменші нижні індекси, тобто $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(s)}$, назвемо начальними елементами набору, а елементи, у яких сума нижнього індексу з верхнім дорівнює $n+k$ – кінцевими елементами набору. Елемент $a_{n+k-s}^{(s)}$ може бути одночасно начальним і кінцевим.

За результатами рекурсії з'являються добутки, які утворені елементами набору $M_{n,n+k}$, і які мають наступну структуру: довільні два сусідніх множників в кожному з добутків задовольняють правилу множення – $\ldots a_k^{(i_1)} a_{k+i_1}^{(i_2)} \ldots, i_1, i_2 = \overline{1,n}$ (i_1 та i_2 можуть бути рівними).

Ланцюгом, який складається з елементів набору $M_{n,n+k}$, називають добуток максимально можливої кількості елементів з цього набору, але для довільних двох сусідніх множників в цьому добутку повинно використовуватися сформульоване вище правило множення.

Звідси випливає, що довільний ланцюг починається з якого-небудь начального елементу набору $M_{n,n+k}$ і завершується одним з кінцевих елементів цього набору.

Структура довільного ланцюга така

$$a_n^{(i_1)} a_{n+i_1}^{(i_2)} a_{n+i_1+i_2}^{(i_3)} \cdot \ldots \cdot a_{n+i_1+i_2+\ldots+i_{r-1}}^{(i_r)}, \;\; n + i_1 + \ldots + i_{r-1} + i_r = n + k.$$

Порядком ланцюга називають суму рангів усіх множників, які утворюють цей ланцюг. З елементів набору $M_{n,n+k}$ можна скласти ланцюги тільки порядку k, бо $i_1 + i_2 + \ldots + i_r = k$.

Функція $f_{k,n+k}$ – це сума усіх ланцюгів порядку k, які можна скласти з елементів набору $M_{n,n+k}$. Підрахуємо тепер кількість доданків у функції $f_{k,n+k}$.

Нехай ланцюг порядку k має x_1 елементів рангу один, x_2 елементів рангу два, і т.д., x_n елементів рангу n. Тоді $k = x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n$. Тоді кількість усіх ланцюгів порядку k, які можна скласти з елементів набору $M_{n,n+k}$, дорівнює

$$Q_k^{(n)} = \sum_{x_1+2x_2+\ldots+nx_n=k} \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)!}{x_1! x_2! \ldots x_n!}.$$

Аналогічно будується функція $f_{k-1,n+k}$. Це сума ланцюгів порядку $k-1$, які утворюються з елементів набору $M_{n+1,n+k} = (a_{n+1}^{(1)}, \ldots, a_{n+k-1}^{(1)}; a_{n+1}^{(2)}, \ldots, a_{n+k-2}^{(2)}; \ldots; a_{n+1}^{(p)}, \ldots, a_q^{(p)})$, і кількість таких ланцюгів

$$Q_{k-1}^{(n)} = \sum_{x_1+2x_2+\ldots+nx_n=k-1} \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)!}{x_1! x_2! \ldots x_n!},$$

і т.д. Кількість ланцюгів порядку $k-m$(тобто доданків у функції $f_{k-m,n+k}$), які утворюються з елементів набору $M_{n+m,n+k} = (a_{n+m}^{(1)}, \ldots, a_{n+k-1}^{(1)};$

$a^{(2)}_{n+m}, \ldots, a^{(2)}_{n+k-2}; \ldots; a^{(p)}_{n+m}, \ldots, a^{(p)}_{q})$, дорівнює

$$Q^{(n)}_{k-m} = \sum_{x_1+2x_2+\ldots+nx_n=k-m} \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)!}{x_1!x_2!\ldots x_n!}.$$

Розв'язок рівняння (2) дається формулами (3), (4).

Нехай

$$a_{jk} = a^{(j)}_{n+k-j} \equiv a_j, k = 0, 1, \ldots,$$

тобто маємо справу з різницевим рівнянням зі сталими коефіцієнтами

$$l_{n+k} = a_1 l_{n+k-1} + a_2 l_{n+k-2} + \ldots + a_n l_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

Тепер у будь-якому ланцюгу порядок множення його елементів за правилом втрачає сенс, і структура ланцюга така: $a_1^{x_1} a_2^{x_2} \ldots a_n^{x_n}$, тоді

$$f_{k,n+k} = \sum_{x_1+2x_2+\ldots+nx_n=k} \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)!}{x_1!x_2!\ldots x_n!} a_1^{x_1} a_2^{x_2} \ldots a_n^{x_n} = R^{(n)}_k,$$

$$f_{k-m,n+k} = \sum_{x_1+2x_2+\ldots+nx_n=k-m} \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)!}{x_1!x_2!\ldots x_n!} a_1^{x_1} a_2^{x_2} \ldots a_n^{x_n} = R^{(n)}_{k-m},$$

Рівняння (5) можна записати таким чином

$$\begin{gathered} R^{(n)}_k = a_1 R^{(n)}_{k-1} + a_2 R^{(n)}_{k-2} + \ldots + a_n R^{(n)}_{k-n}, k > n; \\ R^{(n)}_k = a_1 R^{(n)}_{k-1} + \ldots + a_{k-1} R^{(n)}_1, k = \overline{1, n} \end{gathered} \tag{7}$$

$$R^{(n)}_0 = 1, R^{(n)}_1 = a_1, R^{(n)}_k = 0, \text{якщо } k < 0. \tag{8}$$

Рівняння (4) можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} &\varphi_{0,n+k} = a_n R^{(n)}_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_{i,n+k} = a_{n-i} R^{(n)}_k + \ldots + a_n R^{(n)}_{k-i}, i = \overline{1, n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_{n-1,n+k} = R^{(n)}_{k+i} = a_1 R^{(n)}_k + \ldots + a_n R^{(n)}_{k-n+1}. \end{aligned}$$

Загальний розв'язок рівняння (6) подається формулою

$$l_{n+k} = \sum_{i=1}^{n} (a_i R^{(n)}_k + a_{i+1} R^{(n)}_{k-1} + \ldots + a_n R^{(n)}_{k-n+i}) l_{n-i}, k = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

де числа $R_k^{(n)}$, якщо $k = \overline{1,n}$ або $k > n$, знаходяться за формулами (7), (8).

Можна довести, що серед розв'язків (9) знаходяться відомі розв'язки типу $k^m \lambda^s$, де λ – корінь характеристичного рівняння

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Приклад наведено в [1], де розглянуто рівняння $l_{k+2} = al_{k+1} + bl_k$.

Розв'язок його подається формулою

$$l_{2+k} = (al_1 + bl_0) \sum_{m=0}^{[k/2]} C_{k-m}^m a^{k-2m} b^m + bl_1 \sum_{m=0}^{[k/2]} C_{k-m-1}^m a^{k-2m-1} b^m.$$

З цієї формули випливає:

1) якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2$ та $l_1 = \lambda_1$, $l_0 = 1$, то $l_{2+k} = \lambda_1^{2+k}$,

2) якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a}{2}$ та $l_1 = \lambda_1 = \frac{a}{2}, l_0 = 1$, то $l_{2+k} = \left(\frac{a}{2}\right)^{2+k} \lambda_1^{2+k}$,

а при $l_1 = \lambda_1, l_0 = 0 \quad l_{2+k} = (2+k)\lambda_1^{2+k}$.

2. Застосування методу ланцюгів до розв'язування лінійних диференціальних рівнянь.

В комплексній площині вивчаються диференціальні рівняння, відповідно в [3], [4], [5]

$$t^2(A_1t^2 + B_1t + C_1)u'' + t(A_2t^2 + B_2t + C_2)u' + (A_3t^2 + B_3t + C_3)u = 0, C_1 \neq 0, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (A_it^2 + B_it + C_i)t^i u^{(i)} = 0, C_n \neq 0, \tag{11}$$

де A_i, B_i, C_i — відомі числа: дійсні або комплексні;

$$t^2 P_1(t)u'' + tP_2(t)u' + P_3(t)u = 0, \tag{12}$$

де функції $P_i(t), i = \overline{1,3}$, аналітичні в околі фуксової нульової точки і для них в цьому околі мають місце розвинення

$$P_i(t) = a_{i_0} + a_{i_1}t + a_{i_2}t^2 + \ldots, \;\; a_{i_0} \neq 0. \tag{13}$$

При розв'язуванні цих рівнянь використовується єдиний підхід, а саме: розв'язок рівняння в околі фуксової точки $t = 0$ відшукується у вигляді узагальненого степеневого ряду (розв'язок Фробеніуса)

$$u(t) = t^\rho (l_0 + l_1t + l_2t^2 + \ldots), \;\; l_0 \neq 0. \tag{14}$$

де параметри ρ, l_i потрібно знайти.

Відомо [6], що цей ряд абсолютно збігається в кільці $0 < |t| < R$, де R — відстань від точки $t = 0$ до найближчої особливої точки диференціального рівняння.

Висновки

Для рівнянь (10)–(12) відносно параметрів l_i отримані різницеві рівняння третього порядку. Для розв'язку цих різницевих рівнянь використовується метод ланцюгів. В подальшому, враховуючи досить громіздку структуру параметрів l_i, і для того, щоб ряд (14) став більш прозорим, робимо перегрупування членів ряду. В наслідок це дозволило ряд (14) записати як лінійну комбінацію стандартних гіпергеометричних рядів і введеному в цих роботах гіпергеометричного ряду дробового порядку, а саме

$$F_{q/k}(a_1, a_2; 1, b_1; t) = \sum_{m=0} \frac{(a_1 + q/k)_m (a_2 + q/k)_m}{(1 + q/k)_m (b_1 + q/k)_m} t^m, q = \overline{1, k-1},$$

де $(a)_m = a(a+1)\dots(a+m-1)$.

Стоїть задача: вивчити властивості гіпергеометричного ряду дробового порядку.

Список літератури

1. **Kruglov V. E.** Construction of a fundamental system of solutions of a linear finite-order difference equation / V. E. Kruglov // UMJ — 2009. — V. 61(6). — P. 923–944.
2. **Kruglov V. E.** On n-arithmetical triangles constructed for polynomial coefficients / V. E. Kruglov // RM. — 2016. — Vol. 60(8). — P. 29.
3. **Kruglov V. E.** Solution of a second-order Poincare–Perron-type equation and differential equations that can be reduced to it / V. E. Kruglov // UMJ. — 2008. — Vol. 60(7). — P. 1055–1071.
4. **Kruglov V. E.** Solution of the linear differential equation of n-th order with four singular points / V. E. Kruglov // Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. — 2010. — Vol. 32. — P. 23–35.
5. **Kruglov V. E.** Solution of a linear second-order differential equation with coefficients analytic in the vicinite of a fuchsian zero point / V. E. Kruglov // UMJ. — 2013. — V. 64(10). — P. 1572–1585.
6. **Ince E. L.** Ordinary differential equations / E. L. Ince. — L., 1927. — 558 p.

Kruglov V. E.

THE CHAIN METHOD FOR SOLVING A FINITE-ORDER LINEAR DIFFERENCE EQUATION AND SOME OF ITS APPLICATIONS

Summary

A scheme of the chain method for solving a finite linear difference equation is given in this paper, and a formula for this equation's general solution of is given. As a result, the formula for the general solution of a difference equation with constant coefficients is given. This formula depends entirely only on the coefficients of this equation. Considered solutions of linear differential equations in the form of a generalized power series, the coefficients of which are found by the chain method. As a result of permuting the elements of the power series, the solution of the equation contains a new function, namely: a hypergeometric function of fractional order.
Key words: chain, difference equation, hypergeometric function of fractional order.

REFERENCES

1. Kruglov V. E. (2009). Construction of a fundamental system of solutions of a linear finite-order difference equation. *UMJ,* Vol. 61(6), P. 923–944.
2. Kruglov V. E. (2016). On n-arithmetical triangles constructed for polynomial coefficients. *RM,* Vol. 60(8), P. 29.
3. Kruglov V. E. (2008). Solution of a second-order Poincare–Perron-type equation and differential equations that can be reduced to it. *UMJ,* Vol. 60(7), P. 1055–1071.
4. Kruglov V. E. (2010). Solution of the linear differential equation of n-th order with four singular points. *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.,* Vol. 32, P. 23–35.
5. Kruglov V. E. (2013). Solution of a linear second-order differential equation with coefficients analytic in the vicinite of a fuchsian zero point. *UMJ,* Vol. 64(10), P. 1572–1585.
6. Ince E. L. (1927). *Ordinary differential equations.* L, 558 p.