Дослідження в математиці і механіці. – 2023. – Т. 28, вип. 1–2 (41–42). – С. 15–26

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

В. М. Євтухов, С. В. Голубєв
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОЧЛЕННИХ ДІФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЕКСПОНЕНЦІЙНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Для двочленого неавтономного звичайного диференціального рівняння четвертого порядку з експоненціальною нелінійністю виду $y^{(4)} = \alpha_0 p_0(t)[1 + r(t)]e^{\sigma y}$ де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma \neq 0$, функція $p_0(t)$ є неперервною або неперервно диференційованою і відмінною від нуля у деякому лівому околі ω ($\omega \leq +\infty$), $r(t)$ непрервна функція така, що $\lim_{t\uparrow\omega} r(t) = 0$, досліджується асимптотична поведінка при $t \uparrow \omega$ одного класу $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків. Для цього рівняння в роботі [1] були отримані необхідні та достатні умови існування таких ровязків в випадку коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$. При цьому доведення достатніх умов існування було здійснено при деяких додаткових умовах які є достатньо жорсткими. Мета даної роботи це спроба покращити результати отримані в роботі [1] для достатніх умов існування. Зроблена спроба поширення результатів цієї роботи на умови які є меньш жорсткими. На відміну від [1] при доведенні основного результату в цій роботі передбачається, що існує скінченна або нескінченна границя $\lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega(t)q'(t)$.

Досліджуване рівняння зводиться до системи рівнянь, для якої потрібно визначити існування зникаючих у нескінченності розв'язків. Цей факт встановлюється з використанням відомих результатів з роботи [2]. Разом з цим отримана відповідь на питання про кількість розв'язків рівняння зі знайденими асимптотичними зображеннями.
MSC: 34E05.
Ключові слова: неавтономні диференціальні рівняння, експоненціальна нелінійність, $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- розв'язки, асимптотична поведінка $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- розв'язків.
DOI: https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305248.

Вступ

Розглянемо двочленне неавтономне диференціальне рівняння четвертого порядку виду

$$y^{(4)} = \alpha_0 p_0(t)[1 + r(t)]e^{\sigma y} \ (\sigma \neq 0), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p_0 : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ – непрервна або неперервно диференційована функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $r : [a, \omega[\longrightarrow] - 1, +\infty[$-непрервна

Надійшла 12.02.2023

функція така, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} r(t) = 0. \tag{2}$$

Неважко помітити, що у цьому рівнянні функція $e^{\sigma y}$ $(\sigma \neq 0)$ є швидко змінною функцією при $y \to Y_0 = \pm\infty$ (по Карамата). При цьому в якості околів Δ_{Y_0} точок $Y_0 = \pm\infty$ можемо обирати проміжки

$$\Delta_{Y_0} = \left[\begin{array}{ll}]0, +\infty[, & \text{якщо} \quad Y_0 = +\infty, \\ ]-\infty, 0[, & \text{якщо} \quad Y_0 = -\infty. \end{array}\right.$$

Означення 1. Розв'язок y дифференціального рівняння (1) називается $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє наступні умови

$$y(t) \in \Delta_{Y_0} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0 = \pm\infty,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \left[\begin{array}{ll} \text{або} & 0, \\ \text{або} & \pm\infty, \end{array}\right. \quad (k = 1, 2, 3), \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{[y^{(3)}(t)]^2}{y^{(2)}(t) y^{(4)}(t)} = \lambda_0.$$

З цього означення, зокрема, випливає, що число

$$\nu_0 = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad Y_0 = +\infty, \\ -1, & \text{якщо} \quad Y_0 = -\infty. \end{cases}$$

визначає знаки будь-якого $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язку і його першої похідної в будь якому лівому околі ω. Для таких $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків в роботі [1] були доведені наступні дві теореми про необхідні та достатні умови їх існування у випадку коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$. Для їхнього формулювання введемо наступні допоміжні позначення.

Допоміжні позначення

$$K(\lambda_0) = \frac{(\lambda_0 - 1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)}, \quad \pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

$$J_0(t) = \int_{A_0}^{t} \pi_\omega^3(\tau) p_0(\tau)\, d\tau, \quad J_1(t) = \int_{A_1}^{t} \frac{p_0(\tau)}{J_0(\tau)}\, d\tau,$$

$$J_i(t) = \int\limits_{A_i}^{t} J_{i-1}(\tau)d\tau\ (i=2,3), \quad Y(t) = -\frac{1}{\sigma}\ln(\alpha_0(-\frac{1}{\sigma})K(\lambda_0)J_0(t)),$$

$$q(t) = \frac{Y'(t)}{\alpha_0 J_3(t)}.$$

де межа інтегрування

$$A_0 = \begin{cases} \omega, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^\omega \pi_\omega^3(\tau)p_0(\tau)\,d\tau < +\infty, \\ a, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^\omega \pi_\omega^3(\tau)p_0(\tau)\,d\tau = +\infty, \end{cases}$$

$$A_1 = \begin{cases} a_0, & \text{якщо} \quad \int\limits_{a_0}^\omega \frac{p_0(\tau)}{|J_0(\tau)|}\,d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \int\limits_{a_0}^\omega \frac{p_0(\tau)}{|J_0(\tau)|}\,d\tau < +\infty, \end{cases} \qquad a_0 \in [a,\omega[,$$

$$A_i = \begin{cases} a_0, & \text{якщо} \quad \int\limits_{a_0}^\omega |J_{i-1}(\tau)|d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \int\limits_{a_0}^\omega |J_{i-1}(\tau)|d\tau < +\infty \end{cases} \qquad (i=2,3),$$

Теорема 1 ([1]). *Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$. Тоді для існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків необхідно, щоб виконувалися нерівності*

$$\alpha_0\nu_0\lambda_0(2\lambda_0 - 1)(3\lambda_0 - 2) > 0, \quad \alpha_0\nu_1 K(\lambda_0)\pi_\omega(t) > 0,$$

$$\alpha_0\sigma K(\lambda_0)J_0(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a,\omega[\tag{3}$$

і наступні умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J_0'(t)}{J_0(t)} = \pm\infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J_1'(t)}{J_1(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} q(t) = 1 \tag{4}$$

причому кожний такий розв'язок допускає при $t \uparrow \omega$ наступні асимптотичні зображення

$$y(t) = -\frac{1}{\sigma}\ln(\alpha_0(-\frac{1}{\sigma})K(\lambda_0)J_0(t)) + o(1),$$

$$y^{(k)}(t) = \alpha_0 J_{4-k}(t)[1 + o(1)], (k = 1,2,3) \tag{5}$$

Теорема 2 ([1]). *Нехай* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$, *функція* p_0 *є неперервною і виконуються умови (3)-(4). Нехай крім того*

$$\lim_{t\uparrow\omega}(1-q(t))|Y(t)|^{\frac{3}{4}} = 0 \quad \textit{и виконується нерівність} \quad \alpha_0\sigma > 0 \tag{6}$$

Тоді диференціальне рівняння (1) має двопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ *розв'язків, які задовольняють при* $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення*

$$y(t) = Y(t) + o(1), \quad y^{'}(t) = \alpha_0 J_3(t)\left[1 + \frac{o(1)}{|Y(t)|^{\frac{3}{4}}}\right],$$

$$y^{''}(t) = \alpha_0 J_2(t)\left[1 + \frac{o(1)}{|Y(t)|^{\frac{1}{2}}}\right], \quad y^{'''}(t) = \alpha_0 J_1(t)\left[1 + \frac{o(1)}{|Y(t)|^{\frac{1}{4}}}\right] \tag{7}$$

У цій роботі здійснюється спроба зняти першу умову (6) яка є досить жорсткою та замінити на меньш жорстку умову.

Основні результати

Для диференціального рівняння (1) має місце наступне твердження

Теорема 3. *Нехай* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$, *функція* p_0 *неперервно диференційована і виконуються умови (3)-(4) та друга з умов (6). Нехай, крім того, існує скінченна або нескінченна границя* $\lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega(t)q'(t)$. *Тоді диференціальне рівняння (1) має двопараметричну сім'ю* $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ *розв'язків, які задовольняють при* $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення*

$$y(t) = Y(t) + o(1), \quad y^{'}(t) = \alpha_0 J_3(t)\left[q(t) + \frac{o(1)}{|Y(t)|^{\frac{3}{4}}}\right],$$

$$y^{''}(t) = \alpha_0 J_2(t)\left[1 + \frac{o(1)}{|Y(t)|^{\frac{1}{2}}}\right], \quad y^{'''}(t) = \alpha_0 J_1(t)\left[1 + \frac{o(1)}{|Y(t)|^{\frac{1}{4}}}\right] \tag{8}$$

Для доведення цієї теореми знадобиться наступне допоміжне твердження

Лема 1. *Нехай для функції*

$$\pi_\omega(t)q'(t) \tag{9}$$

існує скінченна або рівна $\pm\infty$ *границя. Тоді цією границею для функції (9) може бути тільки 0. Тобто*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega(t)q'(t) = 0. \tag{10}$$

Доведення. Припустимо противне. Дійсно, якби ця границя була відмінна від нуля, то мала б місто рівність

$$q'(t) = \frac{\xi(t)}{\pi_w(t)} \tag{11}$$

де функція ξ неперервна на деякому проміжку $[t_0, \omega[\ \subset\ ]a, \omega[$ і така, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} \xi(t) = \left[\begin{array}{ll} \text{або} & const \neq 0, \\ \text{або} & \pm\infty, \end{array} \right.$$

Крім того

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\pi_\omega(\tau)} = \ln|\frac{\pi_\omega(t)}{\pi_\omega(t_0)}| \to \pm\infty, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega$$

то після інтегрування (11) на проміжку від t_0 до t приходимо до висновку, що

$$q(t) \to \pm\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega$$

Однак, це суперечить третій умові (4). Отже, у разі існування скінченної або такої, що дорівнює $\pm\infty$ границі

$$\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t) q'(t) = 0.$$

Лемму доведено.

Доведення теореми 3.

Покажемо, що рівняння (1) за умов (3), другої з (6) та (10) має хоча б один $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язок, який задовольняє при $t \uparrow \omega$ асимптотичним зображенням (8) і з'ясуємо питання про кількість таких розв'язків. Для цього, спочатку, рівняння (1) за допомогою замін

$$y(t) = Y(t) + y_1(t), \quad y^{(k)}(t) = \alpha_0 J_{4-k}(t)[1 + y_{k+1}(t)], \quad (k = 1, 2, 3) \tag{12}$$

(таких же самих як і при доведенні теореми 2) зведемо до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = \alpha_0 J_3(t)\left[1 - q(t) + y_2\right], \\ \\ y_2' = \frac{J_3'(t)}{J_3(t)}(y_3 - y_2), \\ \\ y_3' = \frac{J_2'(t)}{J_2(t)}(y_4 - y_3), \\ \\ y_4' = \frac{J_1'(t)}{J_1(t)}\left[(1 + r(t))\frac{e^{\sigma(Y(t)+y_1}}{e^{\sigma Y(t)}} - 1 - y_4\right], \end{cases} \tag{13}$$

Уточнимо вигляд четвертого рівняння системи. Розкладаючи $\frac{e^{\sigma(Y(t)+y_1)}}{e^{\sigma Y(t)}}$ при фіксованому $t \in [t_1, \omega[$ за формулою Тейлора за змінною y_1 в околі нуля із залишковим членом у формі Лагранжа, отримаємо

$$\frac{e^{\sigma(Y(t)+y_1)}}{e^{\sigma Y(t)}} = 1 + y_1 + \frac{1}{2!}\frac{e^{\sigma(Y(t)+\xi_1)}}{e^{\sigma Y(t)}}y_1^2, \quad \text{де} \quad |\xi_1| < |y_1|$$

Тому останнє рівняння системи запишеться у вигляді

$$y_4' = \frac{J_1'(t)}{J_1(t)}\left[(1 + r(t))(1 + y_1 + \frac{1}{2}e^{\xi_1})y_1^2 - 1 - y_4\right]$$

Таким чином отримаємо систему диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} y_1' = \alpha_0 J_3(t)\left[1 - q(t) + y_2\right], \\ \\ y_2' = \frac{J_3'(t)}{J_3(t)}(y_3 - y_2), \\ \\ y_3' = \frac{J_2'(t)}{J_2(t)}(y_4 - y_3), \\ \\ y_4' = \frac{J_1'(t)}{J_1(t)}\left[r(t) + (1 + r(t))y_1 - y_4 + R(t, y_1)\right], \end{cases} \tag{14}$$

де функція

$$R(t, y_1) \quad \text{при деяких} \quad 0 < \delta < \frac{1}{2} \quad \text{і} \quad t_1 \in [a, \omega[\quad \text{задовольняє оцінці}$$

$$|R(t, y_1)| \leqslant y_1^2 \quad \text{при} \quad |y_1| \leqslant \delta, \quad t \in [t_1, \omega[$$

Далі отриману систему будемо розглядати на множині $\Omega = [t_1, \omega[\times \mathbb{R}^4_\delta$ де

$$\mathbb{R}^4_\delta = \left\{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \, : |y_i| \leq \delta, \; (i = 1, \ldots, 4)\right\}.$$

На відміну від теореми 2, застосуємо до системи (14) нове допоміжне перетворення де

$$y_1(t) = z_1(t),\ y_2(t) = z_2(t) + q(t) - 1,\ y_3(t) = z_3(t),\ y_4(t) = z_4(t) \tag{15}$$

сенс якого полягає у виключенні доданка $(1 - q(t))$ з першого рівняння системи.

Крім того введемо допоміжні функції $\xi_i(t)$ де $i = 1, \dots, 4$,

$$\xi_1(t) = \frac{\alpha_0 \pi_\omega(t) J_3(t)}{Y(t)}, \quad \xi_2(t) = \frac{\pi_\omega(t) J_3'(t)}{J_3(t)},$$

$$\xi_3(t) = \frac{\pi_\omega(t) J_2'(t)}{J_2(t)}, \quad \xi_4(t) = \frac{\pi_\omega(t) J_1'(t)}{J_1(t)}.$$

і перепишемо систему рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} z_1' = \frac{Y(t)}{\pi_\omega(t)} \{\xi_1(t) z_2\}, \\ z_2' = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left\{\xi_2(t)(z_3 - z_2) - \pi_\omega(t) q'(t)\right\}, \\ z_3' = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left\{\xi_3(t)(z_4 - z_3)\right\}, \\ z_4' = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \left\{\xi_4(t) \left[r(t) + (1 + r(t)) z_1 - z_4 + R(t, z_1)\right]\right\}, \end{cases} \tag{16}$$

За умовою (4) теореми 1 функції $\xi_i(t)$ при $i = 1, \dots, 4$ мають наступні границі

$$\lim_{t \uparrow \omega} \xi_1(t) = \frac{3\lambda_0 - 2}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \xi_2(t) = \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1},$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \xi_3(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \xi_4(t) = \frac{1}{\lambda_0 - 1}. \tag{17}$$

Щоб асимптотично при $t \uparrow \omega$ вирівняти множники у правій частині рівнянь системи (16), застосуємо до неї наступне перетворення

$$z_1(t) = \upsilon_1(t), \quad z_2(t) = |Y(t)|^{-\frac{3}{4}} \upsilon_2(t),$$

$$z_3(t) = |Y(t)|^{-\frac{1}{2}} \upsilon_3(t), \quad z_4(t) = |Y(t)|^{-\frac{1}{4}} \upsilon_4(t). \tag{18}$$

В результаті отримуємо систему квазілінійних диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} \upsilon_1' = h(t)[f_1(t) + c_{11}(t)\upsilon_1 + c_{12}(t)\upsilon_2 + c_{13}(t)\upsilon_3 + c_{14}(t)\upsilon_4], \\ \upsilon_2' = h(t)[f_2(t) + c_{21}(t)\upsilon_1 + c_{22}(t)\upsilon_2 + c_{23}(t)\upsilon_3 + c_{24}(t)\upsilon_4], \\ \upsilon_3' = h(t)[f_3(t) + c_{31}(t)\upsilon_1 + c_{32}(t)\upsilon_2 + c_{33}(t)\upsilon_3 + c_{34}(t)\upsilon_4], \\ \upsilon_4' = h(t)[f_4(t) + c_{41}(t)\upsilon_1 + c_{42}(t)\upsilon_2 + c_{43}(t)\upsilon_3 + c_{44}(t)\upsilon_4 + V(t, \upsilon_1)], \end{cases} \tag{19}$$

в якій функція $h(t)$ має вигляд

$$h(t) = \frac{|Y(t)|^{\frac{1}{4}}}{\pi_\omega(t)},$$

функції $f_i(t)$ де $i = 1, \dots, 4$ мають вигляд

$$f_1(t) = 0, \; f_2(t) = \pi_\omega q(t)' |Y(t)|^{-\frac{1}{4}} \operatorname{sign} Y(t), f_3(t) = 0, \; f_4(t) = \xi_4(t) r(t). \tag{20}$$

Крім того коефіцієнти системи $c_{ik}(t) \quad (i, k = 1, \dots, 4)$ (19) дорівнюють

$$c_{11}(t) = 0, \quad c_{12}(t) = \xi_1(t) \operatorname{sign} Y(t), \quad c_{13}(t) = 0, \quad c_{14}(t) = 0$$

$$c_{21}(t) = 0, \quad c_{22}(t) = 0, \quad c_{23}(t) = \xi_2(t), \quad c_{24}(t) = 0$$

$$c_{31}(t) = 0, \quad c_{32}(t) = 0, \quad c_{33}(t) = 0, \quad c_{34}(t) = \xi_3(t)$$

$$c_{41}(t) = \xi_4(t)(1 + r(t)), \quad c_{42}(t) = 0, \quad c_{43}(t) = 0, \quad c_{44}(t) = 0.$$

Функція $h(t)$ задовольняє умови

$$h(t) \neq 0, \quad \text{та при} \quad t_0 \leq t < \omega \qquad \int\limits_{t_0}^{\omega} |h(t)| \, dt = +\infty. \tag{21}$$

Функції $f_i(t)$ де $i = 1, \dots, 4$ згідно з (2), (10) та четвертої умови (17) задовольняють

$$\lim_{t \uparrow \omega} f_i(t) = 0 \quad \text{при} \quad (i = 1, \dots, 4). \tag{22}$$

За рахунок умов на фукнції $\xi_i(t)$ (17), для $c_{ik}(t)$ мають місце наступні граничні умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} c_{ik}(t) = c_{ik}^0 \quad \text{при} \quad (i, k = 1, \dots, 4). \tag{23}$$

Тому

$$c_{11}^0 = 0, \quad c_{12}^0 = \frac{3\lambda_0 - 2}{\lambda_0 - 1}\left(\frac{\nu_0}{\operatorname{sign}\sigma}\right) \quad \text{де} \quad \frac{\nu_0}{\operatorname{sign}\sigma} = \operatorname{sign} Y(t),$$

$$c_{13}^0 = 0, \quad c_{14}^0 = 0, \quad c_{21}^0 = 0, \quad c_{22}^0 = 0, \quad c_{23}^0 = \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1}, \quad c_{24}^0 = 0,$$

$$c_{31}^0 = 0, \quad c_{32}^0 = 0, \quad c_{33}^0 = 0, \quad c_{34}(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1},$$

$$c_{41}^0(t) = \frac{1}{\lambda_0 - 1}, \quad c_{42}^0 = 0, \quad c_{43}^0 = 0, \quad c_{44}^0 = 0. \tag{24}$$

Крім того функція $V(t, \upsilon_1)$ з (19), яка має вигляд

$$V(t, \upsilon_1) = \xi_4(t) R(t, \upsilon_1),$$

$$\text{та при деяких} \quad N > 0 \quad \text{та при} \quad 0 < \delta < \frac{1}{2} \quad \text{і} \quad t_1 \in [a, \omega[$$

задовольняє оцінці

$$|V(t, \upsilon_1)| \leqslant N\upsilon_1^2 \quad \text{при} \quad |\upsilon_1| \leqslant \delta, \quad t \in [t_1, \omega[.$$

Крім того з урахуванням оцінки на $R(t, \upsilon_1)$ маємо

$$\lim_{\upsilon_1 \to 0} \frac{V(t, \upsilon_1)}{|\upsilon_1|} = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad t \in [t_0, \omega[. \tag{25}$$

Гранична матриця C, елементами якої є c_{ik}^0 $(i, k = 1, \ldots, 4)$ має наступний вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3\lambda_0 - 2}{\lambda_0 - 1}\left(\frac{\nu_0}{\operatorname{sign}\sigma}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \\ \frac{1}{\lambda_0 - 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

З урахуванням знакових умов (3), характеристичне рівняння граничної матриці C має вигляд

$$\lambda^4 + \frac{\alpha_0}{\sigma} \frac{|3\lambda_0 - 2||2\lambda_0 - 1||\lambda_0|}{(\lambda_0 - 1)^4} = 0 \tag{27}$$

Це характеристичне рівняння має дві пари комплексно-спряжених коренів з дійсними частинами, відмінними від нуля. Тоді для системи рівнянь (19) виконуються всі умови з теореми 2.2 роботи [3]. Згідно з цією теоремою, дана система має двопараметричну сім'ю розв'язків $(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4)$:$[t_2, \omega[\to \mathbb{R}^4_\delta$ ($t_2 \in [t_0, \omega[$), які прямують до 0 при $t \uparrow \omega$. Кожному такому розв'язку, з урахуванням замін (12), (15), (18), відповідає розв'язок $y : [t_2, \omega[\to \mathbb{R}$ диференціального рівняння (1), для якого асимптотичні зображення (8) мають місце при $t \uparrow \omega$. Також легко перевірити, враховуючи ці асимптотичні зображення та форму рівняння (1), що побудовані нами розв'язки є $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язками які задовольняють умовам означення 1. Теорема повністю доведена.

Отримані в даній роботі результати доповнюють відомі результати робіт Євтухова В.М., Дрік Н.Г., Шинкаренко В.М., Харькова В.М.

Висновки

Отже, для двочленого неавтономного звичайного диференціального рівняння четвертого порядку з експоненціальною нелінійністю виду $y^{(4)} = \alpha_0 p_0(t)[1 + r(t)]e^{\sigma y}$ де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma \neq 0$, функція $p_0(t)$ є неперервною або неперервно диференційованою і відмінною від нуля у деякому лівому околі ω ($\omega \leq +\infty$), $r(t)$ непрервна функція така, що $\lim_{t\uparrow\omega} r(t) = 0$, досліджена асимптотична поведінка при $t \uparrow \omega$ одного класу $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків.

Досліджуване рівняння зведене до системи рівнянь, для якої потрібно визначити існування зникаючих у нескінченності розв'язків. Разом з цим отримана відповідь на питання про кількість розв'язків рівняння зі знайденими асимптотичними зображеннями.

Список літератури

1. **Євтухов В. М., Голубєв С. В.** Асимптотична поведінка розв'язків диференціальних рівнянь з експоненціальною нелінійністю / В. М. Євтухов, С. В. Голубєв // Дослідження в математиці і механіці. — 2022. — Т. 27, №1–2(38–39). — С. 25–39.

2. **Евтухов В. М., Самойленко А. М.** Умови існування розв'язків, що зникають в особливій точці, у дійсні неавтономних систем квазілінійних диференціальних рівнянь / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Укр. Мат. Ж. — 2010. — Т. 62, №1. — С. 52–80.

3. **Евтухов В. М.,Самойленко А. М.** Асимптотичні представлення розв'язків неавтономних звичайних диференціальних диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 5. — С. 628–650.

Evtukhov V. M., Golubev S. V.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF TWO-PART DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH EXPONENTIAL NONLINEARITY

Summary

For a two-term nonautonomous ordinary differential equation of the fourth order with an exponential nonlinearity of the form $y^{(4)} = \alpha_0 p_0(t)[1 + r(t)]e^{\sigma y}$ where $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma \neq 0$, the function $p_0(t)$ is continuous or continuously differentiable and nonzero in some left neighbourhood of ω ($\omega \leq +\infty$), $r(t)$ is a continuous function such that $\lim_{t\uparrow\omega} r(t) = 0$, the asymptotic behaviour at $t \uparrow \omega$ of one class of $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-solutions is studied. For this equation, in [1], the necessary and sufficient conditions for the existence of such solutions were obtained in the case when $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$. The proof of sufficient conditions for existence was carried out under some additional conditions that are quite strict. The aim of this paper is to improve the results obtained in [1] for sufficient conditions of existence. An attempt is made to extend the results of this paper to conditions that are less stringent. In contrast to [1], the proof of the main result in this paper assumes that there is a finite or infinite limit $\lim_{t\uparrow\omega} \pi_\omega(t)q'(t)$. The equation under study is reduced to a system of equations for which it is necessary to determine the existence of solutions vanishing at infinity. This fact is established using the known results of [2]. The question of the number of solutions of the equation with the found asymptotic images is also solved.
Key words: non-autonomous differential equations, exponential nonlinearity, $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- solutions, asymptotic behavior of $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- solutions.

REFERENCES

1. Evtukhov, V. M., Golubev, S. V. (2022). Asimptotychna povedinka rozv'yazkiv odnogo klasu neliniynykh dyferentsialnykh rivnyan chetvertogo poryadku [Asymptotic behaviour of solutions of one class of the fourth-order nonlinear differential equations.] *Research in Mathematics and Mechanics,* Vol. 27, Iss. 1–2(38–39), P. 25–39.

2. Evtukhov V.M., Samojlenko A.M. (2010). Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point. *Ukr.Mat. J,* Vol. 62, №1, P. 52–80.

3. Evtukhov V.M., Samojlenko A.M. (2011). Asymptotic representations of solutions of nonautonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities *Differential' nye Uravnenja,* Vol. 47, № 5, P. 628–650.