Дослідження в математиці і механіці. — 2022. — Т. 27, вип. 1–2 (39–40). — С. 83–95

УДК 517.925

О. О. Чепок
Державний заклад "Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К.Д. Ушинського"

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ЯКЕ МІСТИТЬ ДОБУТОК РІЗНОГО ТИПУ НЕЛІНІЙНОСТЕЙ ВІД НЕВІДОМОЇ ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ПОХІДНОЇ

Дослідження асимтотичних зображень розв'язків диференціальних рівняння, зокрема другого порядку, які містять у правій частині нелінійності різних видів, грають важливу роль у розвитку якісної теорії диференціальних рівнянь. У роботі розглянуто тип диференціальних рівнянь другого порядку, які містять у правій частині добуток правильно змінної функції від невідомої функції та швидко змінної функції від похідної невідомої функції при прямуванні відповідних аргументів до нуля або нескінченності. Отриманно необхідні та достатні умови існування повільно змінних $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-розв'язків таких рівнянь. Також отримані асимптотичні зображення таких розв'язків та їх похідних першого порядку. Зауважимо, що при накладанні додаткових умов на коефіцієнти характеристичного рівняння таких $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-розв'язків рівняння існує однопараметрична сім'я. Подібні результати були отримані раніше при розгляді рівнянь другого порядку, які містять у правій частині добуток швидко змінної функції від невідомої функції та правильно змінної функції від похідної невідомої функції при прямуванні аргументів до нуля або нескінченності. Для рівнянь, які розглядаються у даній роботі, подібні результати є новими.
MSC: 34A34, 34C41, 34E99.
Ключові слова: нелінійні диференціальні рівняння другого порядку, асимптотичні зображення розв'язків, $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-розв'язки, швидко змінні функції, правильно змінні функції, повільно змінні перші похідні.
DOI: 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294309.

Вступ

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y')\varphi_1(y), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}, p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(i \in \{0, 1\})$ є неперервними функціями, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — або проміжок $[y_i^0, Y_i[^*$, або — $]Y_i, y_i^0]$.

Надійшла 11.06.2022

Крім того, будемо вважати, що функція $\varphi_1 \colon \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$ є правильно змінною (див. [1, с. 17]) порядку σ_1 при прямуванні аргументу до Y_0, а функція $\varphi_0 \colon \Delta_{Y_1} \to]0,+\infty[$ двічі неперервно диференційовна на Δ_{Y_1} та така, що

$$\lim_{\substack{y\to Y_1\\ y\in\Delta_{Y_1}}} \varphi_0(y) \in \{0,+\infty\},\ \varphi_0'(y)\neq 0 \text{ при } y\in\Delta_{Y_1},\ \lim_{\substack{y\to Y_1\\ y\in\Delta_{Y_1}}} \frac{\varphi_0(y)\varphi_0''(y)}{\big(\varphi_0'(y)\big)^2} = 1. \quad (2)$$

З умов (2) випливає, що функція φ_0 та її похідна першого порядку є швидко змінними при прямуванні аргументу до Y_1 (див. [6, с. 91–92]).

У силу властивостей функції φ_0 та теореми 3.10.8 з роботи [1] функція φ_0 та її похідна першого порядку належать класу функцій Γ, який був введений Л. Ханом (див., наприклад, [1, с. 75]), а також класу $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, який був введений у роботі [3] як узагальнення класу Γ.

Для рівнянь типу (1) розглянемо наступний клас ров'язків.

Означення 1 ([5])**.** Розв'язок y рівняння (1), визначений на $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$, називається $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-розв'язком ($-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$), якщо справедливими є наступні твердження

$$y^{(i)} : [t_0,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \ \ (i=0,1), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \quad (3)$$

У роботі [2] було встановлено умови існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-розв'язків у випадку $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

Метою даної роботи є встановлення необхідних і достатніх умов існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0,Y_1,\pm\infty)$-розв'язків, а також асимптотичних зображень при $t\uparrow\omega$ для цих розв'язків та їх похідних першого порядку.

Зауважимо, що у роботі [5] встановлено такі апріорні асимптотичні співвідношення $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-розв'язків, що розглядаються:

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = [1+o(1)], \quad \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = o(1) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \quad (4)$$

де

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{якщо } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Наведемо означення.

*При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ вважаємо, що $y_i^0 > 0$ ($y_i^0 < 0$) відповідно.

Означення 2. Нехай $Y \in \{0, \infty\}$, Δ_Y — деякий однобічний окіл Y. Неперервно диференційовна функція $L : \Delta_Y \to]0; +\infty[$ називається нормалізованою повільно змінною функцією при $y \to Y \quad (y \in \Delta_Y)$ (див. [6, с. 2–3]), якщо

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{yL'(y)}{L(y)} = 0.$$

Означення 3. Говорять, що повільно змінна при $y \to Y \quad (y \in \Delta_Y)$ функція $\theta : \Delta_Y \to]0; +\infty[$ задовільняє умову S при прямуванні аргументу до Y (див., наприклад, у [5]), якщо для будь-якої нормалізованої повільно змінної при $y \to Y \quad (y \in \Delta_Y)$ функції $L : \Delta_Y \to]0; +\infty[$ має місце співвідношення

$$\theta(yL(y)) = \theta(y)(1 + o(1)) \quad \text{при } y \to Y \quad (y \in \Delta_Y).$$

Основні результати

Отримано наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай $\sigma_1 \neq 1$, функція $\varphi_1(y')|y'|^{-\sigma_1}$ задовольняє умову S при $y' \to Y_1 \quad (y' \in \Delta_{Y_1})$. Тоді кожен $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ — розв'язок диференціального рівняння (1) може бути представлений у вигляді*

$$y(t) = \pi_\omega(t)L(t), \tag{5}$$

де $L : [t_0, \omega[\to R$ — двічі неперервно диференційовна функція така, що

$$y_0^0 \pi_\omega(t)L(t) > 0, \quad L'(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[\quad (t_0 \leq t_1 < \omega), \tag{6}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} L(t) \in \{0; \pm\infty\}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t)L(t) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} = 0. \tag{7}$$

При цьому у випадку існування скінченної або нескінченної границі

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)} \tag{8}$$

мають місце наступні співвідношення

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)} = -1, \quad \alpha_0 L'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[(t_0 \leq t_1 < \omega), \tag{9}$$

$$p(t) = \frac{\alpha_0 L'(t)}{|\pi_\omega(t)L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(\pi_\omega(t)) \cdot \varphi_0\left(L(t)\left[1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}\right]\right)}[1 + o(1)]$$
$$\text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{10}$$

Доведення. Нехай функція $y : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_0}$ $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ є розв'язком рівняння (1). Тоді даний розв'язок та його похідні першого та другого порядків зберігають знак на деякому проміжку $[t_1, \omega[(t_0 \le t_1 < \omega)$ та виконуються умови (4). У силу першої з умов (4) існує ([7, с. 15]) така нормалізована повільно змінна при $t \uparrow \omega$ функція $L(t) : [t_0, \omega[\longrightarrow R$, яка задовольняє першу з умов (6) та останню з умов (7), а також для якої має місце рівність (5).

З (4) та (5) випливає, що

$$y'(t) = L(t)\left[1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}\right] = L(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{11}$$

звідки, зважаючи на (3), виконуються перша та друга умови (7) теореми.

З (5), (11), оскільки y є розв'язком рівняння (1), то має місце рівність

$$2L'(t) + \pi_\omega(t)(t)L''(t) = \alpha_0 p(t)\varphi_0(\pi_\omega(t)L(t))\varphi_1(y'(t)). \tag{12}$$

У випадку існування скінченної або нескінченної границі (8), використовуючи правило Лопіталя у формі Штольца, з урахуванням умов (6) та (7), маємо

$$0 = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} = 1 + \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega L''(t)}{L'(t)}, \tag{13}$$

звідки випливає перша з умов (9). З (12) та (13), маємо при $t \uparrow \omega$

$$\alpha_0 p(t)\varphi_0\left(L(t)\left[1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}\right]\right)\varphi_1(\pi_\omega(t)L(t)) = L'(t)\left[2 + \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}\right] =$$

$$= L'(t)[1 + o(1)].$$

Оскільки функція $\theta_1(y') = \varphi_1(y')|y'|^{-\sigma_1}$ задовольняє умову S та виконується (11), то

$$\alpha_0 p(t)\varphi_0\left(L(t)\left[1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}\right]\right)|\pi_\omega(t)L(t)|^{\sigma_1}\theta_1(\pi_\omega(t)) =$$

$$= L'(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отже, справедливими є друга з умов (9) та асимптотичне зображення (10). Теорема доведена.

Означення 4. Будемо говорити, що виконується умова N, якщо для деякої неперервно диференційовної функції $L(t) : [t_0, \omega[\longrightarrow R(t_0 \in [a, \omega[)$, яка задовольняє умови (5)–(7) та (9), має місце зображення

$$p(t) = \frac{\alpha_0 L'(t)}{|\pi_\omega(t)L(t)|^{\sigma_1}\theta_1(\pi_\omega(t)) \cdot \varphi_0\left(L(t)\left[1+\frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}\right]\right)}[1+r(t)], \qquad (14)$$

де $r(t) : [t_0, \omega[\longrightarrow]-1; +\infty[$ – неперервна функція, яка прямує до нуля при $t \uparrow \omega$.

Введемо позначення

$$\mu_0 = \text{sign}\varphi_0'(y'), \quad \theta_1(y) = \varphi_1(y)|y|^{-\sigma_1}, \quad X(t) = L(t) \cdot e_1(t),$$

$$H(t) = \frac{L^2(t)\varphi_0'(X(t))}{\pi_\omega(t)L'(t)\varphi_0(X(t))}, \quad q_1(t) = \left.\frac{\left(\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)}\right)'}{\left(\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)}\right)^2}\right|_{y=X(t)},$$

$$e_1(t) = 1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}, \quad e_2(t) = 2 + \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}.$$

Для цих функцій, у силу (2) та (7), виконуються наступні твердження:

1)

$$\lim_{t\uparrow\omega} e_1(t) = \lim_{t\uparrow\omega} e_2(t) = 1 \qquad (15)$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} H(t) = \pm\infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega} q_1(t) = 0, \qquad (16)$$

2) якщо існує границя

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \cdot \frac{H'(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}},$$

тоді

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \cdot \frac{H'(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}} = 0. \qquad (17)$$

Дійсно, твердження (15) бепосередньо випливають з умов (7) та (9). Твердження (16) випливають зі справедливості тверджень:

$$H(t) = \frac{L(t)}{\pi_\omega(t)L'(t)} \cdot \frac{X(t)\varphi_0'(X(t))}{\varphi_0(X(t))} \cdot \frac{1}{e_1(t)},$$

$$\frac{\varphi_0(X(t))\varphi_0''(X(t))}{\left(\varphi_0'(X(t))\right)^2} = 1 + \frac{\left(\dfrac{\varphi_0'(X(t))}{\varphi_0'(X(t))}\right)'}{\dfrac{\varphi_0'(X(t))}{\varphi_0'(X(t))}}.$$

Твердження (17) доводиться аналогічно до відповідного твердження, наведеного у роботі Євтухова В.М. та Чернікової А.Г. [3].

Справедливою є теорема

Теорема 2. *Нехай $\sigma_1 \neq 1$, функція θ_1 задовольняє умову S, виконується умова N та*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}|H(t)|^{\frac{1}{2}} = \gamma_0, \quad 0 < \gamma_0 < \infty. \tag{18}$$

Тоді за умови

$$\alpha_0\mu_0\gamma_0 > 0 \tag{19}$$

диференціальне рівняння (1) має однопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-розв'язків, для кожного з яких мають місце наступні асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$:

$$y(t) = \pi_\omega(t) \cdot L(t)(1 + o(1)), \tag{20}$$

$$y'(t) = X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot |H(t)|^{\frac{1}{2}} \cdot o(1). \tag{21}$$

Доведення. До рівняння (1) застосуємо перетворення

$$y(t) = \pi_\omega(t) \cdot L(t) \cdot [1 + z_1(t)],$$

$$y'(t) = X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot z_2(t).$$

Отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$z_1' = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \cdot [-e_1 z_1 + 1 + K(t)e_1(t)z_2], \tag{22}$$

$$\begin{gathered} z_2' = L'(t) \cdot e_2(t) \cdot \frac{\varphi_0'(X(t))}{\varphi_0(X(t))} \times \\ \times \left[\frac{\alpha_0 p(t)|\pi_\omega(t) \cdot L(t)|^{\sigma_1}\theta_1(\pi_\omega(t))\varphi_0(Y_2(t, z_2)) \cdot N(t, z_1)}{L'(t)} \times \right. \\ \left. \times [1 + z_1]^{\sigma_1} - 1 + z_2 \cdot q_1(t) \right], \end{gathered} \tag{23}$$

де

$$K(t) = \frac{\varphi_0(X(t))}{X(t)\varphi_0'(X(t))}, \quad N(t, z_1) = \frac{\theta_1(Y_1(t, z_1))}{\theta_1(\pi_\omega(t)},$$

$$Y_1(t, z_1) = \pi_\omega(t) \cdot L(t) \cdot [1 + z_1(t)], \quad Y_2(t, z_2) = X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot z_2(t).$$

Оскільки функція $Y_1(t, z_1)$ є правильно змінною порядку 1, функція θ_1 задовольняє умову S, то

$$\lim_{t\uparrow\omega} N(t, z_1) = 1 \text{ рівномірно за } \quad z_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \tag{24}$$

У силу умови N

$$\frac{\alpha_0 p(t)|\pi_\omega(t)L(t)|^{\sigma_1}\theta_1(\pi_\omega(t))\varphi_0(Y_2(t, z_2))}{L'(t)} = \frac{\varphi_0(Y_2(t, z_2))}{\varphi_0(X(t))}[1 + r(t)]. \tag{25}$$

Розкладаючи праву частину (25) при фіксованому $t \in [t_1; \omega[$ за формулою Маклорена з залишком у формі Лагранжа, маємо,

$$\frac{\varphi_0(Y_1(t, z_1))}{\varphi_0(X(t))} \cdot [1 + r(t)] = [1 + r(t)] \cdot (1 + z_2) + R(t, z_2),$$

де

$$R(t, z_2) = [1 + r(t)] \cdot \frac{\varphi_0''\left(X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi\right)\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot z_2^2,$$

$$|\xi| < |z_2|.$$

Оскільки

$$Y(t, z_1) = X(t)\left[1 + \frac{1}{\frac{X(t))\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))}}\xi\right],$$

то з умов (2) та (7) випливає, що

$$\varphi_0''\left(X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi\right) = \frac{\varphi_0'^2\left(X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi\right)}{\varphi_0\left(X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi\right)} \cdot [1 + d_1(t, z_2)],$$

де

$$\lim_{t\uparrow\omega} d_1(t, z_2) = 0 \text{ рівномірно за } \quad z_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

За лемою 1.2. з [3], оскільки φ_0,$\varphi_0' \in \Gamma_{Y_1}(Z_1)$ з додатковою функцією $g = \frac{\varphi_0}{\varphi_0'}$, то справедливою є рівність

$$\varphi_0''\left(X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi_0'(X(t))} \cdot \xi\right) = \frac{\varphi_0'^2(X(t))}{\varphi_0(X(t))} e^{\xi}[1 + d_1(t, z_2)],$$

де

$$\lim_{t\uparrow\omega} d_1(t, z_2) = 0 \text{ рівномірно за } \quad z_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують такі $t_1 \in [t_0; \omega[$ та $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$, що

$$|R(t, z_2)| \leq (1 + \varepsilon)|z_2|^2 \quad \text{при} \quad t \in [t_1; \omega[, |z_1| \leq \delta. \tag{26}$$

Вибираємо довільним чином число $\varepsilon > 0$ та розглянемо систему (22)–(23) на множині

$$\Omega = [t_1; \omega[\times D, \quad \text{де } D = \{(z_1; z_2) \in R^2, \quad |z_1| \leq \delta, \quad |z_2| \leq \frac{1}{2}\}.$$

Система (22)–(23) на Ω має вид

$$z_1' = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \cdot [A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + 1], \tag{27}$$

$$z_2' = L'(t)e_2(t) \cdot \frac{\varphi_0'(X(t))}{\varphi_0(X(t))} \times$$
$$\times \left[A_{21}(t)z_1 + A_{22}(t)z_2 + R_1(t, z_1, z_2) + R_2(t, z_1, z_2)\right], \tag{28}$$

де

$$A_{11}(t) = -e_1(t), \quad A_{12} = K(t)e_1(t), \quad A_{21}(t) = \sigma_1, \quad A_{22}(t) = 1,$$

$$R_1(t, z_1, z_2) = \left(\frac{(1 + r_1)N(t, z_1)}{e_2(t)} - 1\right)(1 + \sigma_1 z_1 + z_2) + q_1 z_2,$$

$$R_2(t, z_1, z_2) = \frac{(1 + r_1)N(t, z_1)}{e_2(t)} \left(\sigma_1 z_1 z_2 + (1 + z_2)\left((1 + z_1)^{\sigma_1} - 1 - \sigma_1 z_1\right)\right) +$$
$$+ R(t, z_2) \cdot \frac{(1 + z_2)(1 + z_1)^{\sigma_1} N(t, z_1)}{e_2(t)}.$$

Зауважимо, що з урахуванням (2) та (15),

$$\lim_{t\uparrow\omega} A_{11} = -1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} A_{12} = 0.$$

Крім того,

$$\lim_{t\to+\infty} R_1(t; z_1; z_2) = 0 \text{ рівномірно за } \quad z_1, z_2 : \ |z_i| < \frac{1}{2}, \ i = 1, 2.$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{R_2(t; z_1; z_2)}{|z_1| + |z_2|} = 0 \ .$$

Застосуємо до системи (27)–(28) додаткове перетворення

$$z_1(t) = v_1(t), \tag{29}$$

$$z_2(t) = |H(t)|^{\frac{1}{2}} v_2(t). \tag{30}$$

У результаті отримаємо

$$v_1' = \frac{1}{\pi_\omega(t)} \cdot [c_{11}(t)v_1 + c_{12}v_2 + 1], \tag{31}$$

$$v_2' = h(t)\Bigg[c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{L(t)}{L'(t)} \cdot \frac{H'(t)\mathrm{sign}H(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}} v_2 +$$

$$+\frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \cdot R_1(t, v_1, |H(t)|^{\frac{1}{2}} v_2(t)) + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \cdot R_2(t, v_1, |H(t)|^{\frac{1}{2}} v_2(t))\Bigg], \tag{32}$$

де

$$h(t) = \frac{L'(t)e_2(t)}{L(t)} |H(t)|^{\frac{1}{2}}, \quad c_{11} = -e_1(t), \quad c_{12} = K(t)e_1(t)|H(t)|^{\frac{1}{2}} \tag{33}$$

$$c_{21} = \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} A_{21}, \quad c_{22} = \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \cdot |H(t)|^{\frac{1}{2}} \cdot A_{22}.$$

З (6), (7) маємо

$$\int_{t_1}^{t} h(\tau)d\tau = \pm\infty. \tag{33}$$

Зауважимо, що

$$K(t)e_1(t)|H(t)|^{\frac{1}{2}} = \frac{\varphi_0(X(t))}{L(t)\varphi_0'(X(t))} |H(t)|^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{|H(t)|^{\frac{1}{2}}}{H(t)} \cdot \frac{L(t)}{\pi_\omega(t)L'(t)} = \frac{1}{|H(t)|^{\frac{1}{2}} \mathrm{sign}H(t)} \cdot \frac{L(t)}{\pi_\omega(t)L'(t)}.$$

Отже

$$\lim_{t\uparrow\omega} c_{11}(t) = -1.$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} c_{12} = \lim_{t\uparrow\omega} K(t)e_1(t)\mathrm{sign}H(t)|H(t)|^{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha_0\mu_0}{\gamma_0}$$

З (14)–(16), (22) та (23) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} c_{22} = \alpha_0\mu_0\gamma_0 \quad \lim_{t\uparrow\omega} c_{21} = 0. \tag{34}$$

З (17) маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{1}{2} \cdot \frac{L(t)}{L'(t)} \cdot \frac{H'(t)\mathrm{sign}H(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}} = 0. \tag{35}$$

Отже характеристичне рівняння граничної матриці коефіцієнтів при v_1 та v_2

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{\alpha_0\mu_0}{\gamma_0} \\ 0 & \alpha_0\mu_0\gamma_0 \end{pmatrix}$$

має вид

$$(\rho - \alpha_0\mu_0\gamma_0)(\rho + 1) = 0.$$

З умов теореми випливає, що у цього рівняння рівно два дійсних корені різних знаків.

Отримуємо, що для системи диференціальних рівнянь(31)–(32) виконано всі умови теореми 2.2 з [4]. Відповідно до цієї теореми система (31)–(32) має однопараметричну сім'ю розв'язків $\{v_i\}_{i=1}^2 : [t*, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(t* \geq t_1)$, які прямують до нуля при $t \uparrow \omega$. Цим розв'язкам відповідають розв'язки $y : [t*, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(t* \geq t_1)$ рівняння (1), що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (20)–(21).

З виду цих зображень маємо, що отримані розв'язки є $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-розв'язками рівняння (1). Теорема повністю доведена.

Висновки

Отже для диференціальних рівнянь другого порядку, які містять у правій частині добуток правильно змінної функції від невідомої функції та швидко змінної функції від похідної невідомої функції при аргументах, що прямують, відповідно, до нуля або нескінченності, побудовано асимптотичні зображення розв'язків та їх похідних першого порядку. Отриманно необхідні та достатні умови існування повільно змінних $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$.

Список літератури

1. **Bingham N. H.** Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications / N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels — Cambridge: Cambridge university press, 1987. — 494 p.
2. **Чепок О.О.** Асимптотичні зображення правильно змінних $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння другого порядку, яке містить добуток різного типу нелінійностей від невідомої функції та її похідної / О. О. Чепок // Нелінійні коливання. — 2022. — Т. 25, №1. — С. 133–144. ISSN 1562-3076.
3. **Evtukhov V.** Asymptotic Behavior of Slowly Varying Solutions of Second-Order Ordinary Binomial Differential Equations with Rapidly Varying Nonlinearity / V. Evtukhov, A. Chernikova // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — Vol. 236. — P. 284–299. doi: 10.1007/s10958-018-4111-7.
4. **Evtukhov V.** Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point / V. Evtukhov, A. Samoilenko // Ukrainian Mathematical Journal. — 2010. — Vol. 62. — P. 56–86. doi: 10.1007/s11253-010-0333-7.
5. **Evtukhov V.** Asymptotic Representations of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities / V. Evtukhov, A. Samoilenko // Differential Equations. — 2011. — Vol. 47, №5. — P. 627–649.
6. **Maric V.** Regular Variation and differential equations / V. Maric. — (Lecture notes in mathematics, 1726) Springer. — 2000. — 127 p.
7. **Seneta E.** Regularly varying functions. Lecture Notes in Mathematics / E. Seneta. — Berlin: Springer-Verlag, 1976. — VIII, 116 p. doi: 10.1007/BFb0079658

Chepok O. O.

Asymptotic representations of the $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-solutions of the second order differential equation, which contains the product of different types of nonlinearities from an unknown function and its derivative

Summary

The study of asymptotic representations of solutions of differential equations, in particular, of the second order differential equations, which contain nonlinearities of various types in the right-hand side, play an important role in the development of the qualitative theory of differential equations. This paper considers the type of differential equations of the second order, which contain in the right part the product of a regularly varying function from an unknown function and a rapidly varying function from the derivative of an unknown function when the corresponding arguments tend to zero or infinity. Necessary and sufficient conditions for the existence of slowly varying $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ solutions of such equations have been obtained. Asymptotic representations of such solutions and their first-order derivatives are also obtained. Note that when additional conditions are imposed on the coefficients of the characteristic equation, such $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-solutions of the equation exist as a one-parameter family. Similar results were obtained earlier when considering second-order equations, which contain in the right-hand side the product of a rapidly varying function from an unknown function and a regularly varying function from the derivative of an unknown function when the arguments tend to zero or infinity. For the equations considered in this paper, similar results are new.

Key words: nonlinear second-order differential equations, asymptotic representations of solutions, $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-solutions, rapidly varying functions, regularly varying functions, slowly varying first-order derivatives.

References

1. Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. (1987). *Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications.* Cambridge: Cambridge university press, 494 p.
2. Chepok, O. (2022). Asymptotychni zobrazhennia pravylno zminnykh $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-rozviazkiv dyferentsialnoho rivniannia druhoho poriadku, yake mistyt dobutok riznoho

typu neliniinostei vid nevidomoi funktsii ta yii pokhidnoi.[Asymptotic representations of regularly varying $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-solutions of a differential equation of the second order containing the product of different types of nonlinearities of the unknown function and its derivative] *Neliniini Kolyvannya,* Vol. 25, №1, P. 133–144.

3. Evtukhov, V., Chernikova, A. (2019). Asymptotic Behavior of Slowly Varying Solutions of Second-Order Ordinary Binomial Differential Equations with Rapidly Varying Nonlinearity. *Journal of Mathematical Sciences,* Vol. 236, P. 284–299. doi: 10.1007/s10958-018-4111-7.

4. Evtukhov, V., Samoilenko, A. (2010). Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point. *Ukrainian Mathematical Journal,* Vol. 62, P. 56–86. doi: 10.1007/s11253-010-0333-7.

5. Evtukhov, V., Samoilenko, A. (2011). Asymptotic Representations of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities. *Differential Equations,* Vol. 47, №5, P. 627–649

6. Maric V. (2000). *Regular Variation and differential equations.* Springer (Lecture notes in mathematics, 1726), 127 p.

7. Seneta E. (1976). *Regularly varying functions. Lecture Notes in Mathematics.* Berlin: Springer-Verlag, VIII 116 p. doi: 10.1007/BFb0079658