УДК 517.925

Г. Є. Самкова, Д. Є. Ліманська
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

ДЕЯКІ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПРЯМОКУТНИМИ МАТРИЦЯМИ, ЯКІ ЧАСТКОВО РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНИХ, НАВКОЛО ПОЛЮСА

Стаття містить результати досліджень, виконаних за підтримки Національного Фонду досліджень України, проект Ф81/41743

У сучасній теорії звичайних диференціальних рівнянь та систем рівнянь з невідомою комплекснозначною функцією комплексної змінної чільне місце займають системи рівнянь, які не розв'язані або частково розв'язані відносно похідних. Вивчається система звичайних диференціальних рівнянь, які частково розв'язні відносно похідних, з прямокутними матрицями навколо полюса. У статті наведені умови приведення системи звичайних диференціальних рівнянь, яка частково розв'язна відносно похідних, до системи звичайних диференціальних рівнянь спеціального вигляду. Доведена теорема з достатніми умовами існування хоча б одного розв'язку задачі Коші, у якого частина компонентів є аналітичними функціями у областях з нерухомою особливою на межі, а решта компонентів є функціями, вибраними з певного класу функцій.

MSC: 39A45.
Ключові слова: система звичайних диференціальних рівнянь, яка частково розв'язна відносно похідних, задача Коші, нерухома особлива точка, ізольована особлива точка, полюс.
DOI: 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294144.

Вступ

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$A(z)Y' = B(z)Y + f(z, Y, Y'), \qquad (1)$$

де матриці $A : D_1 \to \mathbb{C}^{p\times n}, B : D_{10} \to \mathbb{C}^{p\times n}, p < n, D_1 = \{z : |z| < R_1, R_1 > 0,\ D_{10} = D_1\backslash\{0\}$, матриця $A = A(z)$ — аналітична в області D_1, а матриця $B = B(z)$ – аналітична в області D_{10}. Вектор-функція $f : D_1\times G_1\times G_2 \to \mathbb{C}^p$, де області $G_k \subset \mathbb{C}^n, 0 \in G_k, k = 1; 2$, вектор-функція $f = f(z, Y, Y')$ є аналітичною в області $D_{10} \times G_{10} \times G_{20}, G_{k0} = G_k\backslash\{0\}, k = 1; 2$, та має в точці $(0, 0, 0)$ ізольовану особливу точку, а отже, точка $(0, 0, 0)$ є усувною особливою точкою для функції багатьох змінних $f = f(z, Y, Y')$

Надійшла 04.10.2022

[1]. Довизначимо вектор-функцію f у точці $(0, 0, 0)$ так, щоб вона стала аналітичною функцією в області $D_1 \times G_1 \times G_2$. Нехай розклад вектор-функції $f = f(z, Y, Y^{'})$ у збіжний степеневий ряд в околі точки $(0, 0, 0)$ не має вільних та лінійних членів.

Основні результати

Систему (1) досліджуємо у припущенні, що $rang A(z) = p$ при $z \in D_1$.

Введемо функцію $Y = col((Y_1 \quad Y_2)), Y_1 = col(Y_{11}(z), \ldots, Y_{1p}(z)), Y_2 = col(Y_{21}(z), \ldots, \ldots, Y_{2n-p}(z)), Y_1 : D_1 \to \mathbb{C}^p, Y_2 : D_{10} \to \mathbb{C}^{n-p}$. Без обмеження спільності будемо вважати, що матриці $A(z), B(z)$ та вектор-функція $f = f(z, Y, Y^{'})$ мають вигляд

$$A(z) = (A_1(z)\, A_2(z)),$$

$$B(z) = (B_1(z)\, B_2(z)),$$

$$f(z, Y, Y^{'}) = f^*(z, Y_1, Y_2, Y_1^{'}, Y_2^{'}),$$

$$A_1 : D_1 \to \mathbb{C}^{p \times p},$$

$$A_2 : D_{10} \to \mathbb{C}^{p \times (n-p)},$$

$$B_1 : D_{10} \to \mathbb{C}^{p \times p},$$

$$B_2 : D_{10} \to \mathbb{C}^{p \times (n-p)},$$

$det A_1(z) \neq 0$ при $z \in D_1$,

$$f^* : D_1 \times G_{11} \times G_{12} \times G_{21} \times G_{22} \to \mathbb{C}^p,$$

$$G_{j1} \times G_{j2} = G_j, G_{j1} \subset \mathbb{C}^p, G_{j2} \subset \mathbb{C}^{n-p}, j = 1, 2$$

та розвинення вектор-функції $f^* = f^*(z, Y_1, Y_2, Y_1^{'}, Y_2^{'})$ у збіжний степеневий ряд в околі точки $(0, 0, 0, 0, 0)$ не має вільних та лінійних членів.

Позначимо

$$A_1^{-1}(z)B_2(z)Y_2 - A_1^{-1}(z)A_2(z)Y_2^{'} + A_1^{-1}(z)f^*(z, Y_1, Y_2, Y_1^{'}, Y_2^{'}) =$$

$$= F^*(z, Y_1, Y_2, Y_1^{'}, Y_2^{'}).$$

Тоді система (1) набуде вигляду

$$Y_1^{'} = A_1^{-1}(z)B_1(z)Y_1 + F^*(z, Y_1, Y_2, Y_1^{'}, Y_2^{'}). \tag{2}$$

За умовою вектор-функція $F^* = F^*(z, Y_1, Y_2, Y_1', Y_2')$ є аналітичною в області $D_1 \times G_{110} \times G_{120} \times G_{210} \times G_{220}, G_{jk0} = G_{jk} \backslash \{0\}, j, k = 1, 2$, тобто у точці $(0, 0, 0, 0, 0)$ має ізольовану особливу точку, отже точка $(0, 0, 0, 0, 0)$ є усувною особливою точкою для функції F^* [1]. Довизначимо вектор-функцію F^* у точці $(0, 0, 0, 0, 0)$ так, що б вона стала аналітичною функцією в області $D_1 \times G_{11} \times G_{12} \times G_{21} \times G_{22}$. Не обмежуючи спільності, будемо вважати, що $F^*(0, 0, 0, 0, 0) = 0$.

Під H_u^{n-p} будемо розуміти клас $(n-p)$– вимірних аналітичних в області D_{10} функцій, що мають в точці $z = 0$ полюс порядку $u, u \in \mathbb{N}$.

Розглянемо випадок, коли $A_1^{-1}(z)B_1(z)$– аналітична матриця в області D_{10} та у точці $z = 0$ має полюс порядку $r, r \in \mathbb{N}$, а вектор-функція $Y_2 \in H_u^{n-p}$. Тоді функція $Y_2 = Y_2(z)$ може бути зображена у вигляді збіжного ряду Лорана при $z \in D_{10}$.

$$Y_2(z) = z^{-u} Y_2^*(z), = \sum_{k=0}^{\infty} B_k z^{k-u},$$

де $B_k \in \mathbb{C}^{n-p}, k = 0, 1, 2, \ldots, Y_2^*(z)$ – аналітична вектор-функція в області D_1 така, що $Y_2^*(0) = B_0 \neq 0$. Оскільки $B_0 \neq 0$, то вектор-функція $Y_2'(z)$ у точці $z = 0$ має полюс порядку $u + 1$.

Оскільки вектор-функція $F^* = F^*(z, Y_1, Y_2, Y_1', Y_2')$ — аналітична в області $D_1 \times G_{11} \times G_{12} \times G_{21} \times G_{22}$, то $F^* = F^*(z, Y_1, Y_2, Y_1', Y_2')$ можна уявити в околі точки $(0, 0, 0, 0, 0)$ у вигляді збіжного степеневого ряду

$$F^*(z, Y_1, Y_2, Y_1', Y_2') = \sum_{a+|j|+|k|+|b|+|d|=1, |k|+|d| \neq 0} C_{ajkbd} z^a Y_1^j Y_2^k (Y_1')^b (Y_2')^d +$$

$$+ \sum_{a+|j|+|k|+|b|+|d|=2}^{\infty} C_{ajkbd} z^a Y_1^j Y_2^k (Y_1')^b (Y_2')^d,$$

де $C_{ajkbd} \in \mathbb{C}^p$, $j = (j_1, \ldots, j_p)$, $|j| = j_1 + \cdots + j_p$, $(Y_1)^j = (Y_{11})^{j_1} \ldots (Y_{1p})^{j_p})$, $b = (b_1, \ldots, b_p)$, $|b| = b_1 + \cdots + b_p$, $(Y_1')^b = (Y_{11}')^{b_1} \ldots (Y_{1p}')^{b_p}$, $k = (k_1, \ldots, k_{n-p})$, $|k| = k_1 + \cdots + k_{n-p}$, $(Y_2)^k = (Y_{21})^{k_1} \ldots (Y_{2n-p})^{k_{n-p}}$, $d = (d_1, \ldots, d_{n-p})$, $|d| = d_1 + \cdots + d_{n-p}$, $(Y_2')^d = (Y_{21}')^{d_1} \ldots (Y_{2n-p}')^{d_{n-p}}$.

Припустимо, що існують $q \in \mathbb{N}$ та $s \in \mathbb{N}$ такі, що

1. для деяких $a_0 \in \mathbb{N}, j_0 = (j_{01}, \ldots, j_{0p}), j_{0h} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, h = (1, p), b_0 = (b_{01}, \ldots, b_{0p}), b_{0h} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, h = \overline{1, p}$, що при $|k| = q, |d| = s, C_{a_0 j_0 k b_0 d} \neq 0$;

2. для будь-яких $h, m \in \mathbb{N}$,та $\mu = 1, 2, \ldots, n-p, c = 1, 2, \ldots, n-p$, $C_{aj(k+he_\mu)b(d+me_c)} = 0$, якщо $|k| = q, |d| = s, e_\mu$ — $(n-p)$ — вимірний μ-ий одиничний орт.

Отже елементи розкладання функції F^* в околі точки $(0,0,0,0,0)$ в степеневий ряд, який містить максимальні ступені вектор-функцій Y_2 та Y_2' з відмінними від нуля коефіцієнтами, матимуть вигляд

$$C_{ajkbd} z^a Y_1^j Y_2^k (Y_1')^b (Y_2')^d = C_{ajkbd} z^{a-uq-(u+1)s} Y_1^j (Y_2^*)^k (Y_1')^b (z Y_2^{*'} - u Y_2^*)^d,$$

при $a = 0, 1, 2 \ldots, |j| = 0, 1, 2, \ldots, |b| = 0, 1, 2, \ldots, |k| = q, |d| = s$. Принаймні такі складові будуть при $a = a_0, j = j_0, b = b_0$. Позначимо через $l = uq + (u+1)s$, та

$$\tilde{a_0} = \min_{\{a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\} : C_{a_0 j_0 k b_0 f} \neq 0\}} a_0.$$

У такому випадку можливі дві логічні ситуації:
1) $\tilde{a_0} - l \geq 0$. Тоді для довільної фіксованої функції $Y_2 \in H_r^{n-p}$, $F^*(z, Y_1, Y_2, Y_1', Y_2') = F^{(5)}(z, Y_1, Y_1')$, де $F^{(5)} = F^{(5)}(z, Y_1, Y_1')$ — аналітична функція у точці $(0,0,0)$, і система (2) приводиться до системи

$$z^r Y_1' = \check{P}^{(5)}(z) Y_1 + z^r H^{(5)}(z, Y_1, Y_1'),$$

де $\check{P}^{(5)}(z)$ — аналітична матриця у області D_1, $H^{(5)} = H^{(5)}(z, Y_1, Y_1')$ — аналітична вектор-функція у області $D_1 \times G_{11} \times G_{21}$. Цей випадок розглянуто у роботі [3, с. 33].
2) $\tilde{a_0} - l < 0$, тоді вектор-функція $F^* = F^*(z, Y_1, Y_2, Y_1', Y_2')$ може бути зображена у вигляді

$$F^*(z, Y_1, Y_2, Y_1', Y_2') =$$

$$= z^{-l} \sum_{a+|j|+|k|+|b|+|d|=1, |k|+|d| \neq 0} C_{ajkbd} z^a Y_1^j (Y_2^*)^k (Y_1')^b (z Y_2^{*'}) - r Y_2^*)^d +$$

$$+ \sum_{a+|j|+|k|+|b|+|d|=2}^{\infty} C_{ajkbd} z^a Y_1^j (Y_2^*)^k (Y_1')^b (z Y_2^{*'} - r Y_2^*)^d = z^{-l} F^{**}(z, Y_1, Y_2^*, Y_1', Y_2^{*'}),$$

де F^{**} — аналітична в області $D_1 \times G_{11} \times G_{12} \times G_{21} \times G_{22}$ вектор-функція. Без обмеження спільності, при $Y_2 \in H_u^{n-p}$, та функціях $Y_2^*(z), Y_2^{*'}(z)$ аналітичних в області D_1 позначимо $F^{**}(z, Y_1, Y_2^*, Y_1', Y_2^{*'}) = H^{(6)}(z, Y_1, Y_1')$, причому $H^{(6)}(0,0,0)=0$. Система (2) при $r_0 = max(l,r)$ приводиться до системи вигляду

$$z^{r_0}Y_1' = z^{r_0-r}\check{P}^{(6)}(z)Y_1 + z^{r_0-l}H^{(6)}(z,Y_1,Y_1'), \tag{3}$$

де матриця $A_1^{-1}(z)B_1(z) = z^{-r}\check{P}^{(6)}(z), \check{P}^{(6)}(z)$ — аналітична у області D_1, вектор-функція $H^{(6)} : D_1 \times G_{11} \times G_{12} \to \mathbb{C}^p, H^{(6)} = H^{(6)}(z,Y_1,Y_1')$ — аналітична у області $D_1 \times G_{11} \times G_{21}, H^{(6)} = col(H_1^{(6)},\dots,H_p^{(6)})$.

Таким чином, у даному випадку будемо досліджувати питання існування аналітичних розв'язків системи (3) з початковою умовою

$$Y_1(z) \to 0, z \to 0, z \in D_{10}, \tag{4}$$

та які задовольняють додатковій умові

$$Y_1'(z) \to 0, z \to 0, z \in D_{10}. \tag{5}$$

1. Допоміжна лема про зведення системи (3) до системи спеціального вигляду.

Означення 1. Говоримо, що вектор-функція $z^{r_0-l}H^{(6)}(z,Y_1,Y_1')$ має властивість V_3 в околі точки $(0,0,0)$, якщо у цій області компоненти вектор-функції $z^{r_0-l}H^{(6)}(z,Y_1,Y_1')$ можливо розкласти у збіжні ряди вигляду

$$z^{r_0-l}H_j^{(6)}(z,Y_1,Y_1') = z^{r_0-l}\sum_{s+|d|+|q|=2}^{\infty} C_{sdq}^{(6.j)} z^s Y_1^d (z^{r_0}Y_1')^q, j=\overline{1,p},$$

де $C_{sdq}^{(6.j)} \in \mathbb{C}, C_{sdq}^{(6)} = col(C_{sdq}^{(6.1)},\dots,C_{sdq}^{(6.p)})$.

Лема. *Якщо у системі (3) вектор-функція* $z^{r_0-l}H^{(6)}(z,Y_1,Y_1')$ *має властивість* V_3 *в околі точки* $(0,0,0)$, *то система (3) може бути однозначно приведена до системи вигляду*

$$z^{r_0}Y_1' = z^{r_0-r}P^{(6)}(z)Y_1 + z^{r_0-l}F^{(6)}(z,Y_1), \tag{6}$$

де $P^{(6)} = P^{(6)}(z)$ *— аналітична матриця в області* $\tilde{D}_1 \subseteq D_1, 0 \in \tilde{D}_1, F^{(6)} = F^{(6)}(z,Y_1)$ *— аналітична вектор-функція в області* $\tilde{D}_1 \times \tilde{G}_{11} \subseteq D_1 \times G_{11}$, $(0,0) \in D_1 \times \tilde{G}_{11}, F^{(6)}(0,0) = 0$.

2. Система (6) вздовж відрізку.

Згідно з методом аналітичного продовження розв'язків [5] систему (6) вивчимо вздовж двох сімей кривих, а потім виконаємо аналітичне продовження розв'язків з кривої однієї сім'ї за допомогою кривих другої сім'ї на деяку область.

Для довільних фіксованих $t_1 \in (0, R_1], v_1, v_2 \in \mathbb{R}, v_1 < v_2$, вводиться множина $\tilde{I}(t_1) = \{(t, v) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, t_1), v \in (v_1, v_2)\}$. При $z = z(t, v) = te^{iv}$, множина $\tilde{I}(t_1) \subset \mathbb{R}^2$ ставиться у відповідність до множини $I(t_1) \subset \mathbb{C}$: $I(t_1) = \{z = te^{iv} \in \mathbb{C} : t \in (0, t_1), v \in (v_1, v_2)\}$.

Означення 2. Нехай $p, g : \tilde{I}(t_1) \to [0, +\infty)$. Говоримо, що функція p має властивість Q_1 відносно функції g при $v = v_0 \in (v_1, v_2)$, якщо функція $p=$ $= p(t, v_0)$ є функцією вищого порядку малості відносно функції $g = g(t, v_0)$ при $t \to +0$.

Означення 3. Нехай $p, g : \tilde{I}(t_1) \to [0, +\infty)$. Говоримо, що функція p має властивість Q_2 відносно функції g на множині $\tilde{I}(t_1)$, якщо існують такі $C_1 \geq 0, C_2 \geq 0$, що на множині $\tilde{I}(t_1)$ виконуються нерівності

$$C_1 \cdot g(t, v) \leq p(t, v) \leq C_2 \cdot g(t, v).$$

Вводяться допоміжні вектор-функції $\varphi(z) = col(\varphi_1(z), \ldots, \varphi_p(z)), \varphi$: $I(t_1) \to \mathbb{C}^p$,та $\psi(t, v) = col(\psi_1(t, v), \ldots, \psi_p(t, v)), \psi_j : \tilde{I}(t_1) \to [0; +\infty), j = \overline{1, p}$, при $z = z(t, v) = te^{iv}, \psi_j(t, v) = |\varphi_j(z(t, v))|, j = \overline{1, p}$, функції $\psi_j, j = \overline{1, p}$ — є дійснозначними функціями дійсних змінних t, v. Розглядається аналітична на множині $I(t_1)$ вектор-функція $\varphi = \varphi(z)$ така, що для будь-яких $z \in I(t_1)$ для відповідних функцій $\psi_j = \psi_j(t, v), j = \overline{1, p}$, при $(t, v) \in \tilde{I}(t_1)$ виконано умови:

$$\psi_j(t, v) > 0, (\psi_j(t, v))_t' > 0, (\psi_j(t, v))_v' \geq 0$$

та рівномірно відносно $v \in (v_1, v_2)$ виконано умови:

$$\psi_j(+0, v) = 0, (\psi_j(+0, v))_t' = 0, j = \overline{1, p}.$$

Розглянемо комплексну змінну $z = te^{iv}$, де $t > 0, t, v \in \mathbb{R}$. Зафіксуємо $v = v_0, v_0 \in (v_1, v_2)$ і розглянемо систему (6) на відрізку $L_{v_0}(t_1) = \{(t, v) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, t_1), v = v_0 \in (v_1, v_2)\}, v_0$ — фіксоване число.

Позначимо $Y_1(z(t,v_0)) = \tilde{Y}_1(t), \tilde{Y}_1(t) = \tilde{Y}_{11}(t) + i\tilde{Y}_{12}(t)$, $\tilde{Y}_{1j}(t) = = col(\tilde{Y}_{1j1}(t), \dots, \tilde{Y}_{1jp}(t)), j = 1,2$, функції $\tilde{Y}_{11}(t), \tilde{Y}_{12}(t)$ — є дійснозначними функціями дійсної змінної t. $P^{(6)}(z(t,v_0)) = \left[\tilde{p}^{(6)}_{jk}(t)\right]^p_{j,k=1} = \tilde{P}^{(6)}_1(t) + i\tilde{P}^{(6)}_1(t), \tilde{P}^{(6)}_s(t) = \left[\tilde{p}^{(6)}_{jks}(t)\right]^p_{j,k=1}, s = 1,2$, де $\tilde{p}^{(6)}_{jk}(t) = \tilde{p}^{(6)}_{jk1}(t) + i\tilde{p}^{(6)}_{jk2}(t), j,k = \overline{1,p}$, функції $\tilde{p}^{(6)}_{jks}(t), j,k = \overline{1,p}$ — є дійснозначними функціями дійсної змінної t та елементами матриць $\tilde{P}^{(6)}_s(t), s = 1,2$.

При фіксованому $v = v_0, v_0 \in (v_1, v_2)$ вектор-функцію $F^{(6)} = F^{(6)}(z(t,v), Y_1(z(t,v)))$ уявимо як $F^{(6)}(z(t,v_0), Y_1(z(t,v_0))) = \tilde{F}^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}), \tilde{F}^{(6)}(t, \tilde{Y}_1) = = col(\tilde{F}^{(6)}_1(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}), \dots, \tilde{F}^{(6)}_p(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12})), \tilde{F}^{(6)}_j(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}) = \tilde{F}^{(6)}_{1j}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}) + + i\tilde{F}^{(6)}_{2j}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}), j = \overline{1,p}$, де $\tilde{F}^{(6)}_{1j}, \tilde{F}^{(6)}_{2j}, j = \overline{1,p}$ – є дійснозначними функціями дійсних змінних.

Система (6) буде зведена до вигляду

$$t^{r_0}(\tilde{Y}'_{11} + i\tilde{Y}'_{12}) = t^{r_0-r}(\tilde{P}^{(6)}_1 + i\tilde{P}^{(6)}_2)(\tilde{Y}_{11} + i\tilde{Y}_{12})e^{(1-r)iv_0} + t^{r_0-l}e^{(1-l)iv_0} \cdot$$

$$\cdot (Re\tilde{F}^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}) + iIm\tilde{F}^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12})). \tag{7}$$

Дорівняємо ліворуч і праворуч в системі (7) дійсні та уявні частини вектор-функцій, отримаємо систему $2p$ рівнянь та введемо такі матриці та вектор-функцію

$$\tilde{P}^{(6)}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{P}^{(6)}_1(t) & -\tilde{P}^{(6)}_2(t) \\ \tilde{P}^{(6)}_2(t) & \tilde{P}^{(6)}_1(t) \end{pmatrix};$$

$$\tilde{f}^{(6)}\left(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}\right) = \begin{pmatrix} Re\tilde{F}^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}) \\ Im\tilde{F}^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}) \end{pmatrix};$$

$$\tilde{Q}_5(v_0) = \begin{pmatrix} cos((r-1)v_0)E & sin((r-1)v_0)E \\ -sin((r-1)v_0)E & cos((r-1)v_0)E \end{pmatrix};$$

$$\tilde{Q}_6(v_0) = \begin{pmatrix} cos((l-1)v_0)E & sin((l-1)v_0)E \\ -sin((l-1)v_0)E & cos((l-1)v_0)E \end{pmatrix};$$

де E — одинична матрица $p \times p$.

Тоді система (7) зведеться до системи

$$t^{r_0}\begin{pmatrix} \tilde{Y}'_{11}(t) \\ \tilde{Y}'_{12}(t)) \end{pmatrix} = t^{r_0-r}\tilde{P}^{(6)}(t)\tilde{Q}_5(v_0)\begin{pmatrix} \tilde{Y}_{11}(t) \\ \tilde{Y}_{12}(t) \end{pmatrix} +$$

$$+ t^{r_0-l}\tilde{Q}_6(v_0)\tilde{f}^{(6)}(t, \tilde{Y}_{11}, \tilde{Y}_{12}). \tag{8}$$

Таким чином, система (6) вздовж відрізка $L_{v_0}(t_1)$ при довільному фіксованому $v_0 \in (v_1, v_2)$ зведеться до системи дійсних диференціальних рівнянь (8).

3. Система (6) вздовж дуги кола.

Розглянемо комплексну змінну $z = te^{iv}$, де $t > 0, t, v \in \mathbb{R}$. Зафіксуємо $t = t_0, t_0 \in (0, t_1)$ і розглянемо систему (6) вздовж дуги кола $O_{t_1}(t_0) = \{(t, v) \in \mathbb{R}^2 : t = t_0, v \in (v_1, v_2)\}$, при фіксованому $t_0 \in (0, t_1)$.

Позначимо $Y_1(z(t_0, v)) = \hat{Y}_1(v), \hat{Y}_1(v) = \hat{Y}_{11}(v) + i\hat{Y}_{12}(v), \hat{Y}_{1j}(v) =$ $= col(\hat{Y}_{1j1}(v), \ldots, \hat{Y}_{1jp}(v)), j = 1, 2$, функції $\hat{Y}_{11}(v), \hat{Y}_{12}(v)$ – є дійснозначними функціями дійсної змінної v. $P^{(6)}(z(t_0, v)) = [\hat{p}_{jk}^{(6)}(v)]_{j,k=1}^{p} = \hat{P}_1^{(6)}(v) + i\hat{P}_2^{(6)}(v), \hat{P}_s^{(6)}(v) = [\hat{p}_{jks}^{(6)}(v)]_{j,k=1}^{p}, s = 1, 2$, де $\hat{p}_{jk}^{(6)}(v) = \hat{p}_{jk1}^{(6)}(v) + i\hat{p}_{jk2}^{(6)}(v), j, k = \overline{1, p}$, функції $\hat{p}_{jks}^{(6)}(v),\ j, k = \overline{1, p}$ — є дійснозначними функціями дійсної змінної v та елементами матриць $\hat{P}_s^{(6)}(v), s = 1, 2$.

Вектор-функцію $F^{(6)}(z(t, v), Y_1(z(t, v)))$ при фіксованому $t = t_0$, $t_0 \in (0, t_1)$ уявимо як $F^{(6)}(z(t_0, v), Y_1(z(t_0, v))) = \hat{F}^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12})$,
$\hat{F}^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}) = col(\hat{F}_1^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}), \ldots, \hat{F}_p^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}))$,
$\hat{F}_j^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}) = \hat{F}_{1j}^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}) + i\hat{F}_{2j}^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}),\ \ j = \overline{1, p}$,
де $\hat{F}_{1j}^{(6)}, \hat{F}_{2j}^{(6)}, j = \overline{1, p}$ – є дійснозначними функціями дійсних змінних.

Система (6) буде зведена до вигляду

$$t_0^{r_0-1}(\hat{Y}_{11}' + i\hat{Y}_{12}') = it_0^{r_0-r}(\hat{P}_1^{(6)}(v) + i\hat{P}_2^{(6)}(v))(\hat{Y}_{11} + i\hat{Y}_{12})e^{(1-r)iv} +$$
$$+ it_0^{r_0-l}e^{(1-l)iv}(Re\hat{F}^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}) + iIm\hat{F}^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12})). \tag{9}$$

Дорівняємо ліворуч і праворуч в системі (9) дійсні та уявні частини векторфункцій, отримаємо систему $2p$ рівнянь та введемо такі матриці та векторфункцію

$$\hat{P}^{(6)}(v) = \begin{pmatrix} \hat{P}_1^{(6)}(v) & -\hat{P}_2^{(6)}(v) \\ \hat{P}_2^{(6)}(v) & \hat{P}_1^{(6)}(v) \end{pmatrix};$$

$$\hat{f}^{(6)}\left(t, \tilde{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}\right) = \begin{pmatrix} Re\hat{F}^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}) \\ Im\hat{F}^{(6)}(v, \hat{Y}_{11}, \hat{Y}_{12}) \end{pmatrix};$$

$$\hat{Q}_5(v) = \begin{pmatrix} sin((r-1)v)E & -cos((r-1)v)E \\ cos((r-1)v)E & sin((r-1)v)E \end{pmatrix};$$

$$\hat{Q}_6(v) = \begin{pmatrix} sin((l-1)v)E & -cos((l-1)v)E \\ cos((l-1)v)E & sin((l-1)v)E \end{pmatrix}.$$

Тоді система (9) зведеться до системи

$$t_0^{r_0-1}\begin{pmatrix} \hat{Y}'_{11}(v) \\ \hat{Y}'_{12}(v) \end{pmatrix} = t_0^{r_0-r}\hat{P}^{(6)}(v)\hat{Q}_5(v)\begin{pmatrix} \hat{Y}_{11}(v) \\ \hat{Y}_{12}(v) \end{pmatrix} +$$

$$t_0^{r_0-l}\hat{Q}_6(v)\hat{f}^{(6)}(v,\hat{Y}_{11},\hat{Y}_{12}). \qquad (10)$$

Таким чином, система (6) вздовж дуги кола $O_{t_1}(t_0)$ при довільному фіксованому $t_0 \in (0,t_1)$ зведеться до системи дійсних диференціальних рівнянь (10).

Введено допоміжні властивості S_6, M_6 відносно аналітичної вектор-функції $\varphi = \varphi(z)$, де $\varphi(z) = col(\varphi_1(z),\ldots,\varphi_p(z)), \psi_j(t,v) = |\varphi_j(z(t,v))|, j = \overline{1,p}$.

Означення 4. Говоримо, що матриця $P^{(6)}(z)$ має властивість S_6 відносно вектор-функції $\varphi = \varphi(z)$, якщо виконуються умови:

1. Для кожного $v_0 \in (v_1,v_2)$ функції $t^{r_0}(\psi_j(z(t,v)))'_t$ мають властивість Q_1 відповідно відносно функцій $t^{r_0-r}|\tilde{p}_{jj}^{(6)}(t)|\psi_j(z(t,v)), j = \overline{1,p}$ при $v = v_0$;

2. Функції $t^{r_0-1}(\psi_j(t,v))'_v$ мають властивість Q_2 відповідно відносно функцій $t^{r_0-r}|\hat{p}_{jj}^{(6)}(v)|\psi_j(t,v), j = \overline{1,p}$ на множині $\tilde{I}(t_2)$ для деякого $t_2 \in (0,t_1)$;

3. Для кожного $v_0 \in (v_1,v_2)$ функції $t^{r_0-r}|\tilde{p}_{jk}^{(6)}(t)|\psi_k(t,v)$ мають властивість Q_1 відповідно відносно функцій $t^{r_0}(\psi_j(t,v))'_t, j,k = \overline{1,p}, j \neq k$ при $v = v_0$;

4. Функції $t^{r_0-r}|\hat{p}_{jk}^{(6)}(v)|\psi_k(t,v)$ мають властивість Q_2 відповідно відносно функцій $t^{r_0-1}(\psi_j(t,v))'_v, j,k = \overline{1,p}, j \neq k$ на множині $\tilde{I}(t_2)$ для деякого $t_2 \in (0,t_1)$.

Позначимо множини $\tilde{\Omega}_j(\delta,\varphi(z(t,v_0))) = \{(t,\tilde{Y}_{11},\tilde{Y}_{12}) : \tilde{Y}_{11j}^2 + \tilde{Y}_{12j}^2 < < \delta_j^2(\psi_j(t,v_0))^2, t \in (0,t_1)\}, j = \overline{1,p}$. Множина $\tilde{\Omega}(\delta,\varphi(z(t,v_0)))$ може бути розглянута як перетин множин $\tilde{\Omega}_j, \tilde{\Omega}(\delta,\varphi(z(t,v_0))) = \bigcap_{j=1}^p \tilde{\Omega}_j(\delta,\varphi(z(t,v_0)))$. Частину межі множин $\tilde{\Omega}_j, j \in \{1,2,\ldots,p\}$ будемо позначати як

$$\partial\tilde{\Omega}_j(\delta,\varphi(z(t,v_0))) = \{(t,\tilde{Y}_{11},\tilde{Y}_{12}) : \tilde{Y}_{11j}^2 + \tilde{Y}_{12j}^2 = \delta_j^2(\psi_j(t,v_0))^2, \tilde{Y}_{11k}^2 + \tilde{Y}_{12k}^2 <$$

$$< \delta_k^2(\psi_k(t,v_0))^2, k=\overline{1,p}, k\neq j, t\in(0,t_1)\}.$$

$$\hat{\Omega}_j(\tau,\varphi(z(t_0,v))) = \{(v,\hat{Y}_{11},\hat{Y}_{12}) : \hat{Y}_{11j}^2+\hat{Y}_{12j}^2 < \tau_j^2(\psi_j(t_0,v))^2, v\in(v_1,v_2)\},$$

$$j=\overline{1,p}.$$

Множина $\hat{\Omega}(\tau,\varphi(z(t_0,v)))$ може бути розглянута як перетин множин $\hat{\Omega}_j$, $\hat{\Omega}(\tau,\varphi(z(t_0,v))) = \bigcap_{j=1}^p \hat{\Omega}_j(\tau,\varphi(z(t_0,v)))$. Частину межі множин $\hat{\Omega}_j, j\in\{1,2,\ldots,p\}$ будемо позначати як

$$\partial\hat{\Omega}_j(\tau,\varphi(z(t_0,v))) = \{(v,\hat{Y}_{11},\hat{Y}_{12}) : \hat{Y}_{11j}^2+\hat{Y}_{12j}^2 =$$

$$= \tau_j^2(\psi_j(t_0,v))^2, \hat{Y}_{11k}^2+\hat{Y}_{12k}^2 <$$

$$< \tau_k^2(\psi_k(t_0,v))^2, k=\overline{1,p}, k\neq j, v\in(v_1,v_2)\}.$$

Означення 5. Говоримо, що вектор-функція $F^{(6)} = F^{(6)}(z,Y_1)$ має властивість M_6 відносно вектор-функції $\varphi=\varphi(z)$, якщо виконуються умови:

1. Для кожного $v_0\in(v_1,v_2)$ при $(t,\tilde{Y}_{11},\tilde{Y}_{12})\in\tilde{\Omega}(\delta,\varphi(z(t,v_0)))$ функції $t^{r_0-l}\tilde{F}_{kj}^{(6)}(t,\tilde{Y}_{11},\tilde{Y}_{12})$ мають властивість Q_1 відповідно відносно функцій $t^{r_0-r}|\tilde{p}_{jj}^{(6)}(t)|\psi_j(t,v), j=\overline{1,p}, k=1,2$ при $v=v_0$;
2. Для будь-яких $(v,\hat{Y}_{11},\hat{Y}_{12})\in\hat{\Omega}(\tau,\varphi(z(t_0,v)))$ функції $t^{r_0-l}\hat{F}_{kj}^{(6)}(v,\hat{Y}_{11},\hat{Y}_{12})$ мають властивість Q_2 відповідно відносно функцій $t^{r_0-r}|\hat{p}_{jj}^{(6)}(v)|\psi_j(t,v)), j=\overline{1,p}, k=1,2$ на множині $\tilde{I}(t_2)$ для деякого $t_2\in(0,t_1)$.

Введемо області $\Lambda_{+.k}^{(6)}(t_2), k\in\{+,-\}$, які визначаються наступним чином

$$\Lambda_{+.+}^{(6)}(t_2) = \{(t,v) : cos((r-1)v-\tilde{\alpha}_{jj}^{(6)}(t))>0, sin((r-1)v-\hat{\alpha}_{jj}^{(6)}(v))>0, j=\overline{1,p},$$

$$t\in(0,t_2), v\in(v_1,v_2)\};$$

$$\Lambda_{+.-}^{(6)}(t_2) = \{(t,v) : cos((r-1)v-\tilde{\alpha}_{jj}^{(6)}(t))>0, sin((r-1)v-\hat{\alpha}_{jj}^{(6)}(v))<0, j=\overline{1,p},$$

$$t\in(0,t_2), v\in(v_1,v_2)\};$$

де функції $\tilde{\alpha}_{jj}^{(6)}(t), \hat{\alpha}_{jj}^{(6)}(v), j=\overline{1,p}$ визначені у [3].

Не обмежуючи спільності, будемо вважати, що $\Lambda_{+.k}^{(6)}(t_2)\neq\oslash, k\in\{+,-\}$.

Означення 6. Говоримо, що система (6) належить класу $C_{+.k}^{(6)}, k\in\{+,-\}$, якщо матриця $P^{(6)}(z)=P^{(6)}(te^{iv})$ така, що $(t,v)\in\Lambda_{+.k}^{(6)}(t_2), k\in\{+,-\}$.

4. Формулювання основних результатів.

Введемо області

$$G^{(6)}_{+.k}(t_2) = \{z = z(t, v) : 0 < |z| < t_2, (t, v) \in \Lambda^{(6)}_{+.k}(t_2)\}, k \in \{+, -\}.$$

Теорема 1. *Нехай* $p < n, A(z)$ *— аналітична матриця в області* D_1 *та* $rangA(z) = p$ *при* $z \in D_1$*. Нехай систему (1) можливо привести до вигляду (2). Система (2) при* $Y_2 \in H^{n-p}_u$ *може бути приведена до системи (3). Вектор-функція* $z^{r_0-l}H^{(6)}(z, Y_1, Y_1')$ *має властивість* V_3 *в околі точки* $(0, 0, 0)$*. Крім того, для системи (6) виконуються умови:*

1. *Матриця* $P^{(6)}(z)$ *— аналітична матриця в області* D_1 *і має властивість* S_6 *відносно аналітичної вектор-функції* $\varphi = \varphi(z)$*;*
2. *Вектор-функція* $F^{(6)} = F^{(6)}(z, Y_1)$ *— аналітична в області* $D_1 \times G_1$*,* $F^{(6)}(0, 0) = 0$ *і має властивість* M_6 *відносно вектор-функції* $\varphi = \varphi(z)$*;*
3. *Система (6) належить одному з класів* $C^{(6)}_{+.k}, k \in \{+, -\}$*.*

Тоді для кожного $k \in \{+, -\}$*, для деякого* $t^* \in (0, t_2)$ *і для кожного* $Y_2 \in H^{n-p}_u$ *існують розв'язки системи (1)* $Y(z)$*, перші компоненти котрих задовольняють початковим умовам* $Y_1(z_0) = Y_{10}$ *при* $z_0 \in G^{(6)}_{+.k}(t^*), Y_{10} \in \{Y_1 : |Y_{1j}(z_0)| < \delta_j|\varphi_j(z_0)|, \delta_j > 0, j = \overline{1, p}\}$*, аналітичні в області* $G^{(6)}_{+.k}(t^*)$ *і для цих* p *компонент розв'язків у зазначеній області справедливі оцінки*

$$|Y_{1j}(z)|^2 < \delta_j^2|\varphi_j(z)|^2, j = \overline{1, p}. \tag{11}$$

Доведення. За умовою систему (1) можливо привести до вигляду (3). Вектор-функція $z^{r_0-l}H^{(6)}(z, Y_1, Y_1')$ має властивість V_3 в околі точки $(0, 0, 0)$. Застосуємо Лему 1, згідно з якою система (3) може бути однозначно приведена до системи (6).

1. Розглянемо систему (6) на відрізку $L_{v_0}(t_1)$ при фіксованому значенні $v_0 \in (v_1, v_2)$. Нехай $\tilde{T}^{(6)}$ — вектор поля напрямків системи (8) в довільній фіксованій точці $(t, \tilde{Y}_{11}(t), \tilde{Y}_{12}(t)) \in \partial\tilde{\Omega}_j(\delta, \varphi(z(t, v_0))), j \in \{1, \ldots, p\}$.

$$\left(t^{r_0}\tilde{T}^{(6)}, \frac{\bar{N}_j}{2}\right) = -t^{r_0}\delta_j^2\psi_j(t, v_0)(\psi_j(t, v_0))'_t + t^{r_0-r}(\tilde{p}^{(6)}_{jj1}(t)cos((r-1)v_0)+$$

$$+\tilde{p}^{(6)}_{jj2}(t)sin((r-1)v_0))\delta^2_j(\psi_j(t,v_0))^2+t^{r_0-r}\sum_{k=1,k\neq j}^{p}((\tilde{p}^{(6)}_{jk1}(t)cos((r-1)v_0)+$$

$$+\tilde{p}^{(6)}_{jk2}(t)sin((r-1)v_0))\times(\tilde{Y}_{11k}\tilde{Y}_{11j}+\tilde{Y}_{12k}\tilde{Y}_{12j})+t^{r_0-r}\sum_{k=1}^{p}((\tilde{p}^{(6)}_{jk1}(t)sin((r-1)v_0)-$$

$$-\tilde{p}^{(6)}_{jk2}(t)cos((r-1)v_0))\times(\tilde{Y}_{12k}\tilde{Y}_{11j}-\tilde{Y}_{11k}\tilde{Y}_{12j})+t^{r_0-l}(\tilde{F}^{(6)}_{1j}cos((l-1)v_0)+\tilde{F}^{(6)}_{2j}\cdot$$

$$\cdot sin((l-1)v_0))\tilde{Y}_{11j}+t^{r_0-l}(-\tilde{F}^{(6)}_{1j}sin((l-1)v_0)+\tilde{F}^{(6)}_{2j}cos((l-1)v_0))\tilde{Y}_{12j},\, j=\overline{1,p}.$$

Оскільки, за умовою, матриця $P^{(6)}$ має властивість S_6, а вектор-функція $F^{(6)}=F^{(6)}(z,Y_1)$ має властивість M_6 відносно вектор-функції $\varphi=\varphi(z)$, то

$$\left(t^{r_0}\tilde{T}^{(6)},\frac{\bar{N}_j}{2}\right)\to\sqrt{(\tilde{p}^{(6)}_{jj1}(t))^2+(\tilde{p}^{(6)}_{jj2}(t))^2}(cos((r-1)v_0-\tilde{\alpha}^{(6)}_{jj}(t))),$$

$$j=\overline{1,p},t\to+0.$$

Оскільки система (6) належить одному з класів $C^{(6)}_{+.k}, k\in\{+,-\}$, то існує таке t^*, що при $t\in(0,t^*)$ справедливо $(t^{r_0}\tilde{T}^{(6)},\bar{N}_j/2)>0, j=\overline{1,p}$. Отже при $t\in(0,t^*)$ поверхня $\partial\tilde{\Omega}_j(\delta,\varphi(z(t,v_0)))$ є поверхнею без контакту для системи (8), причому при спаданні змінної t інтегральна крива входить в область $\tilde{\Omega}_j(\delta,\varphi(z(t,v_0)))$.

Згідно з топологічним принципом Важевського [6], через кожну точку множини $\tilde{\Omega}(\delta,\varphi(z(t,v_0)))\cup\partial\tilde{\Omega}(\delta,\varphi(z(t,v_0)))\cap(t=t^{**}), t^{**}\in(0,t^*)$ проходить хоча б одна гладка інтегральна крива системи (8), і всі інтегральні криві даної системи, що проходять через точки $\tilde{\Omega}_j(\delta,\varphi(z(t,v_0)))\cup\partial\tilde{\Omega}_j(\delta,\varphi(z(t,v_0)))\cap(t=t^{**}),\quad t^{**}\in(0,t^*)$, залишаються в області $\tilde{\Omega}_j(\delta,\varphi(z(t,v_0)))$ при $(t,v_0)\in\Lambda^{(6)}_{+.k}(t^*), k\in\{+,-\}, v_0\in(v_1,v_2)$. Причому виконані нерівності

$$|Y_{1sj}(z(t,v_0))|^2<\delta^2_j(\psi_j(t,v_0))^2, j=\overline{1,p}, s=1,2 \tag{12}$$

при $(t,v_0)\in\Lambda^{(6)}_{+.k}(t^*), k\in\{+,-\}$.

2. Розглянемо систему (6) вздовж дуги кола $O_{t_1}(t_0)$ при фіксованому значенні $t_0\in(0,t_1)$. Нехай $\hat{T}^{(6)}$ — вектор поля напрямків системи (10) в довільній фіксованій точці $(t,\hat{Y}_{11}(t),\hat{Y}_{12}(t))\in\partial\hat{\Omega}_j(\tau,\varphi(z(t_0,v))), j\in\{1,\ldots,p\}$.

Розглянемо скалярний добуток

$$\left(t^{r_0-1}\hat{T}^{(6)}, \frac{\bar{N}_j}{2}\right) = -t_0^{r_0-1}\tau_j^2\psi_j(t_0,v)(\psi_j(t_0,v))_v' + t_0^{r_0-r}(\hat{p}_{jj1}^{(6)}(v)sin(((r-1)v)-$$

$$-\hat{p}_{jj2}^{(6)}(v)cos(((r-1)v))\tau_j^2(\psi_j(t_0,v))^2 + t_0^{r_0-r}\sum_{k=1,k\neq j}^{p}(\hat{p}_{jk1}^{(6)}(v)sin((r-1)v) - \hat{p}_{jk2}^{(6)}(v)\cdot$$

$$\cdot cos(((r-1)v)) \times (\hat{Y}_{11k}\hat{Y}_{11j} + \hat{Y}_{12k}\hat{Y}_{12j}) +$$

$$+t_0^{r_0-r}\sum_{k=1}^{p}(\hat{p}_{jk1}^{(6)}(v)cos(((l-1)v) + \hat{p}_{jk2}^{(6)}(v)\cdot$$

$$\cdot sin(((l-1)v)) \times (\hat{Y}_{11k}\hat{Y}_{12j} - \hat{Y}_{12k}\hat{Y}_{11j}) + t^{r_0-l}(\hat{F}_{1j}^{(6)}sin((l-1)v)-$$

$$-\hat{F}_{2j}^{(6)}cos((l-1)v))\hat{Y}_{11j} + t^{r_0-l}(\hat{F}_{1j}^{(6)}cos((l-1)v)+$$

$$+\hat{F}_{2j}^{(6)}sin((l-1)v))\hat{Y}_{12j}, j = \overline{1,p}.$$

Оскільки, за умовою, матриця $P^{(6)}$ має властивість S_6, а вектор-функція $F^{(6)} = F^{(6)}(z, Y_1)$ має властивість M_6 відносно вектор-функції $\varphi = \varphi(z)$, то

$$\left(t^{r_0-1}\hat{T}^{(6)}, \frac{\bar{N}_j}{2}\right) \to \sqrt{\left(\hat{p}_{jj1}^{(6)}(v)\right)^2 + \left(\hat{p}_{jj2}^{(6)}(v)\right)^2} sin((r-1)v - \hat{\alpha}_{jj}^{(6)}(v)),$$

$j = \overline{1,p}$, при $t_0 \to +0, v \in (v_1, v_2)$. Отже, $sign(\left(t^{r_0-1}\hat{T}^{(6)}, \frac{\bar{N}_j}{2}\right)) =$ $= sign(sin((r-1)v - \hat{\alpha}_{jj}^{(6)}(v))), j = \overline{1,p}, v \in (v_1, v_2)$. Без обмеження спільності для кожного фіксованого $t_0 \in (0, t^*)$ поверхня $\partial\hat{\Omega}(\tau, \varphi(z(t_0, v))) \in \Lambda_{+.k}^{(6)}(t^*), k \in \{+,-\}$ є поверхнею без контакту для системи (10).

Оскільки система (6) належить одному з класів $C_{+.k}^{(6)}, k \in \{+,-\}$, то будь-яка інтегральна крива системи (10), що проходить через точку множини $\hat{\Omega}(\tau, \varphi(z(t_0, v))) \cap (v = v_0), v_0 \in (v_1, v_2)$, якщо $(t_0, v_0) \in \Lambda_{+.+}^{(6)}(t^*)$, залишається в області $\hat{\Omega}(\tau, \varphi(z(t_0, v)))$ при спаданні v, а якщо $(t_0, v_0) \in \Lambda_{+.-}^{(6)}(t^*)$, залишається в області $\hat{\Omega}(\tau, \varphi(z(t_0, v)))$ при зростанні v.

Понад того виконані нерівності

$$|Y_{1sj}(z(t_0, v))|^2 < \tau_j^2|\psi_j(t_0, v)|^2, j = \overline{1,p}, s = 1,2 \tag{13}$$

при $(t_0, v) \in \Lambda_{+.k}^{(6)}(t^*), k \in \{+,-\}$.

3. Аналогічно доведенню Теореми 1.1 [2] припустимо, що виконуються нерівність $\delta_j^2 < \tau_j^2, j = \overline{1,p}$.

В першому етапі доведення цієї теореми отримано, що вздовж кривої $L_{v_0}(t), v_0 \in (v_1, v_2)$ при $t \in (0, t^*)$ існує хоча б один неперервний диференційовний розв'язок системи

$$|Y_{1sj}(z)|^2 < \delta_j^2 |\varphi_j(z)|^2, j = \overline{1,p}, s = 1,2,$$

який задовольняє оцінкам (12). Позначимо множину таких розв'язків $\{Y_{1.v_0}(z(t,v))\}$.

Виберемо розв'язок $Y_{1.v_0}(z(t,v))$ з множини $\{Y_{1.v_0}(z(t,v))\}$ та здійснимо його аналітичне продовження з $L_{v_0}(t^*), (t,v) \in \Lambda_{+.k}^{(6)}(t^*)$ при фіксованому $v_0 \in (v_1, v_2)$ на область, яка містить $L_{v_0}(t^*)$, зі збереженням оцінки (12).

З другого етапу доказу цієї теореми випливає, що при виконанні нерівності (13) розв'язок $Y_{1.v_0}(z(t,v))$ при фіксованому v_0 можна продовжити з відрізка $L_v(t^*)$ вздовж кривих O_{t_0} на множину $\hat{\Omega}(\tau, \varphi(z(t_0, v))) \cap (v = v^*)$ при $t \in (0, t^*)$, при цьому аналітичне продовження позначимо $Y_1(z)$. Отримаємо множину розв'язків $\{Y_1(z)\}$.

У підсумку, будь-який розв'язок $Y_1(z)$ може бути аналітично продовжений в області $G_{+.k}^{(6)}(t^*) \times \{Y : |Y_{rj}| < \delta_j |\varphi_j(z_0)|, j = \overline{1,p}, s = 1,2\}$, причому в даній області виконано нерівність (11).

А значить, для кожного $Y_2 \in H_u^{n-p}$ система (1) має хоча б один розв'язок $Y(z)$, перші компонент якого є аналітичними функціями в області $G_{+.k}^{(6)}(t^*)$ і для цих p компонент розв'язка у зазначеній області виконуються оцінки (11).

Теорема доведена.

Висновки

Таким чином, було детально вивчено систему (1) у припущенні, що матриці $A(z), B(z)$ — прямокутні матриці розмірності $p \times n, p < n$, і $rangA(z) = p$ при $z \in D_1$. Тоді система (1) буде приведена до вигляду (2). Розглянуті випадки, коли матриця $A_1^{-1}(z)B_1(z)$ — аналітична в області D_{10} та у точці $z = 0$ має полюс порядку r, а Y_2 взято з класу функцій H_u^{n-p} та доведено теорему про існування розв'язків для задачі Коші (2), (4) у припущенні, що виконується додаткова умова (5). А саме, коли матриця $A_1^{-1}(z)B_1(z)$ — аналітична в області D_{10} та у точці $z=0$ має полюс, а Y_2 взято з класу функцій H_u^{n-p}, а матриця $A_1^{-1}(z)B_1(z)$ — аналітична в області D_{10} та у точці $z=0$ має полюс, знайдено достатні умови існування хоча б одного розв'язку задачі Коші (2)–(4), перші компоненти якого є аналітичними функціями у областях $G_{+.k}^{(6)}(t^*), k\in\{+,-\}$, у припущенні, що виконується додаткова умова (5).

Список літератури

1. **Gunning R.** Analytic functions of several complex variables / R. Gunning, H. Rossi. — Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1965. — 318 p.
2. **Limanska D.** On the existence of analytic solutions of certain types of systems, partially resolved relatively to the derivatives in the case of a pole / D. Limanska, G. Samkova // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. — 2018. — Vol. 74. — P. 113–124.
3. **Limanska D.** The asymptotic behavior of solutions of certain types of the differential equations partially solved relatively to the derivatives with a singularity in the zero-point / D. Limanska, G. Samkova // Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications. — 2018. — Vol. 53. — P. 21–40.
4. **Самкова Г.** Об исследовании некоторой полуявной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц / Г. Самкова, Н. Шарай // Нелінійні коливання. — 2002. — Vol. 5. — P. 224–236.
5. **Vladimirov V.** Methods of the Theory of Functions of Many Complex Variables / V. Vladimirov. — New York: Dover Publications, Inc, 2007. — 384 p.
6. **Wazewski T.** Une method topologique de l'examen du phenomene asymtoti quereletivement aux equations differenti elle sordinaires / T. Wazewski // Attidella academia zarionaledei lincei.Rediconti. – 1947. — Vol. 3. — P. 210–215.

Samkova G., Limanska D.

THE SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL QUESTIONS WITH RECTANGULAR MATRICES THAT IS PARTIALLY SOLVED TO THE DERIVATIVES NEAR THE POLE

Summary

In modern theory of ordinary differential equations and systems of equations with an unknown complex-valued function of a complex variable, a prominent place is occupied by systems of equations that are either unsolved or partially solved with respect to derivatives. The system of ordinary differential equations, which is partially solved with respect to the derivatives, with rectangular matrices around the pole has been studied. The article presents conditions for transforming a system of ordinary differential equations, which is partially solvable with respect to derivatives, to a system of ordinary differential equations with a special form. The theorem with sufficient conditions of the existence at least one solution of the Cauchy problem is proven, some components of the solution are analytic functions in domains with the fixed singularity on the boundary, and the remaining components are functions chosen from a certain class of functions.

Key words: system of ordinary differential equations, that is partially resolved relatively to the derivatives, Cauchy's problem, fixed singularity, isolated singularity, pole.

REFERENCES

1. Gunning R., Rossi H. (1965). *Analytic functions of several complex variables.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 318 p.

2. Limanska D., Samkova G. (2018). On the existence of analytic solutions of certain types of systems, partially resolved relatively to the derivatives in the case of a pole. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, Vol. 74, P. 113–124.

3. Limanska D., Samkova G. (2018). The asymptotic behavior of solutions of certain types of the differential equations partially solved relatively to the derivatives with a singularity in the zero-point. *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications,* Vol. 53, P. 21–40.

4. Samkova G., Sharay N. (2002). Ob isledovanii nekotoroy poluyavnoy sistemy differencialnyh uravneniy v sluchae peremennogo puchka matric [On the study of some semi-explicit system of differential equations in the case of a variable matrices pencil]. *Нелінійні коливання*, Vol. 5, P. 224–236.

5. Vladimirov V. (2007). *Methods of the Theory of Functions of Many Complex Variables.* New York: Dover Publications, Inc., 384 p.
6. Wazewski T. (1947). Une method topologique de l'examen du phenomene asymtoti quereletivement aux equations differenti elle sordinaires. *Attidella academia zarionaledei lincei.Rediconti,* Vol. 3, P. 210–215.