УДК 517.929.8

А. О. Латиш
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

УСЕРЕДНЕННЯ В ЛІНІЙНИХ ЗА КЕРУВАННЯМ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ В ДИСКРЕТНОМУ ЧАСІ ІЗ ЗМІННИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Для дискретних рівнянь керованого руху із змінним запізненням у стані системи та з параметром керування, що входить лінійно, обгрунтовано можливість застосування методу усереднення. Для задачі оптимального керування на траєкторіях такої системи з термінальним критерієм доведено теорему про близькість значень критерія неусередненої задачі оптимального керування на оптимальному керуванні усередненої задачі з оптимальним значенням критерія неусередненої (вихідної) задачі. Тобто оптимальне керування усередненої задачі є асимптотично оптимальним керуванням для вихідної задачі. Розроблено числово-асимптотичний метод розв'язання адачі оптимального керування системою в дискретному часі, яка містить змінне запізнення в стані та лінійно залежить від параметра керування.

MSC: 4637563475835.
Ключові слова: метод усереднення, рівняння керованого руху, задача оптимального керування, запізнення, дискретні рівняння.
DOI: 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294142.

Вступ

Метод усереднення широко застосовується до дослідження різноманітних систем. М. М. Крилов і М. М. Боголюбов в першій половині минулого століття розробили асимптотичний метод, який знайшов своє застосування не тільки в нелінійній механіці, а й у різних галузей прикладних наук. Книга [2] присвячена огляду асимптотичних методів нелінійної механіки. Різницеві рівняння є моделями систем у дискретному часі. Для таких рівнянь також було обгрунтовано можливість застосування методу усереднення [1], для дискретних систем із запізненням метод усереднення обгрунтовано в [6]. Можливість застосування методу усереднення до задач оптимального керування вперше наголосив М. М. Моісеєв. В роботах В. О. Плотнікова та учнів його наукової школи метод усереднення застосовується до нових класів задач керування [3; 5; 7; 8]. У згаданих роботах

Надійшла 04.10.2022

пропонується усереднювати рівняння керованого руху та спеціальним чином будувати керування усередненої системи. Тобто, керування вихідної та усередненої систем мають різну вимірність, різну природу. Для дискретних керованих систем та для дискретних керованих систем із запізненням такого роду метод усереднення запропоновано в [4; 9]. В даній роботі пропонується обгрунтування методу усереднення для дискретних керованих систем, які лінійно залежать від параметра керування та містять змінне запізнення в стані, пропонується обгрунтування матоду усереднення, коли керування вихідної й усередненої системи обираються із однієї множини допустимих керувань. Для задачі оптимального керування на траєкторіях такої системи з термінальним критерієм доведено теорему про близькість значень критерія неусередненої задачі оптимального керування на оптимальному керуванні усередненої задачі з оптимальним значенням критерія неусередненої (вихідної) задачі. Розроблено числово-асимптотичний метод розв'язання задачі оптимального керування системою в дискретному часі, яка містить змінне запізнення в стані та лінійно залежить від параметра керування.

Основні результати

1. Постановка лінійної за керуванням задачі оптимального керування системами в дискретному часі зі змінним запізненням.

Розглянемо лінійну за керуванням задачу оптимального керування зі змінним запізненням відносно стану, яка лінійно залежить від керування та описується системою рівнянь в дискретному часі

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon \cdot \lfloor f(i, x_i, x_{s(i)}) + A(i, x_i, x_{s(i)}) \cdot u_i \rfloor, x_0 = x^0 \qquad (1)$$

і термінальним критерієм якості

$$J(u) = \Phi(x_N) \to \min_{u \subset U}, \qquad (2)$$

де ціле значення i — поточний момент дискретного часу, що належить множині $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, так як $N = \lfloor L/\varepsilon \rfloor$, $L = const, \varepsilon > 0$ — малий параметр, $\lfloor c \rfloor$ — ціла частина числа c; $x_i \in D \subset (R^n)$ — поточий n-вимірний стан системи, який належить множині D; $u_i \in U \subset comp(R^r)$ — поточне r-вимірне керування, яке обирається з компактної множини U, задана цілозначна функція $s(i) \in I_s = \{0, 1, 2, ..., i\}$ визначає момент дискретного часу впливу змінного запізнення на поточний i-ий стан системи, очевидно, що $s(i) \leqslant i$ для будь-якого $i \in I$; $f(i, x_i, x_{s(i)})$ — задана n-вимірна функція, $A(i, x_i, x_{s(i)})$ — задана $n \times r$-матриці; $\Phi(x_i)$ — задана скалярна функція; x^0 — заданий початковий стан системи.

Означення 1. Допустимими керуваннями системи (1) назвемо функції $u = \{u_i \in U, i \in I\}$ із компактної множини U, для яких знайдеться значення $\varepsilon_0 > 0$, не залежне від $u \in U$, таке, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ відповідний розв'язок $x = \{x_i, i \in I\}$ системи рівнянь (1) визначений для будь-якого $i \in I$ та належить замкнутій множині D.

Означення 2. Оптимальним керуванням задачі (1), (2) назвемо таке допустиме керування $u^* = \{u_i^* \in U, i \in I\}$, на якому критерій якості (1) приймає мінімальне значення $J(u^*) = \underset{u \in U}{min} J(u)$.

Потрібно знайти таке допустиме керування $u^* = \{u_i^* \in U, i \in I\}$ і відповідну йому траєкторію $x^* = \{x_i^*, i \in I\}$, яка є розв'язком системи рівнянь (1), при цьому критерій якості (2) приймає мінімальне значення $J(u^*) = \underset{u \in U}{min} J(u)$.

2. Усереднення в лінійних за керуванням задачах керування системами в дискретному часі зі змінним запізненням.

Для розв'язання задачі керування системою (1) застосуємо метод усереднення. Припустимо, що рівномірно відносно цілого $q \geqslant 0$ та $w^1, w^2 \in D$ існують функції $f_0(w^1, w^2), A_0(w^1, w^2)$, які задовольняють умови

$$\lim_{h \to \infty} \left\| \frac{1}{h} \sum_{j=q}^{q+h-1} f\left(j, w^1, w^2\right) - f_0\left(w^1, w^2\right) \right\| = 0 \tag{3}$$

$$\lim_{h \to \infty} \left\| \frac{1}{h} \sum_{j=q}^{q+h-1} A\left(j, w^1, w^2\right) - A_0\left(w^1, w^2\right) \right\| = 0 \tag{4}$$

Системі (1) поставимо у відповідність усереднену систему

$$y_{i+1} = y_i + \varepsilon \cdot \left\lfloor f_0\left(y_i, y_{s(i)}\right) + A_0\left(y_i, y_{s(i)}\right) \cdot \nu_i \right\rfloor, y_0 = x^0, \tag{5}$$

де $y_i \in D \subset R^n$ — поточний n-вимірний стан системи; $\nu_i \in U \subset comp(R^r)$ — поточне r-вимірне керування усередненної задачі, що обирається із тієї ж компактної множини U.

Доведемо, що для будь-якого допустимого керування системи (1) або будь-якого допустимого керування усередненної системи (5), що відповідає обраному керуванню, траєкторії обох задач будуть близькі на скінченному асимптотично великому проміжку дискретного часу.

Теорема 1. *Нехай в області* $Q = \{i \in I; x_i \in D; u_i \in U\}$ *для систем* (1) *і* (5) *виконані наступні умови:*

1) функція $f(i, w^1, w^2)$ *та матричнозначна функція* $A(i, w^1, w^2)$ *рівномірно обмежені сталою* $M > 0$ *і для всіх* $i \in I$ *задовольняють умову Ліпшиця за* w^1, w^2 *зі сталою* $\lambda > 0$*;*

2) рівномірно відносно цілого значення $q \geqslant 0$ *та* $w^1, w^2 \in D$ *існують функції* $f_0(w^1, w^2), A_0(w^1, w^2)$*, які задовольняють відношення* (3)*,* (4)*;*

3) функція $s(i)$ *приймає цілі значення із множини* $I_s = \{0, 1, 2, ..., i\}$ *для будь-якого* $i \in I$ *та задоволняє умову Ліпшиця зі сталою* $\lambda > 0$*;*

4) для будь-якого керування $\nu = \{\nu_i \in U, i \in I\}$ *усередненої системи* (5) *відповідний йому розв'язок* $y = \{y_i, i \in I\}$*,* $y_0 = x^0 \in D' \subset D$ *визначений для будь-якого* $i \in I$ *та разом зі своїм* ρ*-околом належить області* D.

Тоді для будь-якого $\eta > 0$ *і* $L > 0$ *існує таке* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$*, що для всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *і будь-якого* $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$*,* $N = \lfloor L/\varepsilon \rfloor$ *справедливі наступні твердження:*

1) будь-яке допустиме керування $u = \{u_i \in U, i \in I\}$ *системи* (1) *є допустимим керуванням усередненої системи* (5)*, при цьому для відповідних цьому керуванню розв'язків* $x = \{x_i, i \in I\}$ *системи* (1) *і* $y = \{y_i, i \in I\}$ *усередненої системи* (5) *зі спільною початковою умовою* $x_0 = y_0 = x^0 \in D' \subset D$ *справедлива оцінка:*

$$\|x_i - y_i\| \leq \eta; \tag{6}$$

2) будь-яке допустиме керування $\nu = \{\nu_i \in U, i \in I\}$ *усередненої системи* (5) *є допустимим керуванням системи* (1)*, при цьому для відповідних цьому керуванню розв'язків* $y = \{y_i, i \in I\}$ *усередненої системи* (5) *і* $x = \{x_i, i \in I\}$ *вихідної системи* (1) *із загальною початковою умовою* $y_0 = x_0 = x^0 \in D' \subset D$ *справедлива оцінка* (6).

Доведення. Доведемо перше твердження теореми. Нехай $u = \{u_i \in U, i \in I\}$ довільне допустиме керування системи (1), $x = \{x_i, i \in I\}$ — відповідний розв'язок цієї системи, який визначений для всіх $i \in I$ і належить замкнутій множині D. Нехай $y = \{y_i, i \in I\}$ — відповідний цьому ж керуванню розв'язок усередненої системи (5) зі спільною початковою умовою $x_0 = y_0 = x^0 \in D' \subset D$, та який за умовою 4) теореми визначений для всіх $i \in I$ і разом зі своїм p-околом належить області D. Це означає, що керування $u = \{u_i \in U, i \in I\}$ є допустимим і для усередненної системи.

Визначимо властивості функцій $f_0(w^1, w^2), A_0(w^1, w^2)$, що входять в усереднену систему (5). Із побудови (3), (4) при виконанні умови 1) теореми виходить, що всі вони обмежені сталою $M > 0$ і задовольняють умову Ліпшиця за w^1, w^2 зі сталою $\lambda > 0$.

Оберемо довільне значення $\eta > 0$ і зафіксуємо його. Оцінимо різницю між розв'язками початкової системи (1) і відповідної усередненної системи (5) в довільний момент дискретного часу $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = \lfloor L/\varepsilon \rfloor$. Для цього оберемо ціле значення $T(\varepsilon)$, яке має такі властивості

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T(\varepsilon) = +\infty, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \cdot T(\varepsilon) = 0, \tag{7}$$

На множині $I = \{0, 1, 2, ..., N\}$ зафіксуємо моменти часу kh, віддалені один від одного на відстані $T(\varepsilon)$. При цьому отримаємо час, який повільно змінюється

$$k \in I_k = \{0, 1, 2, ..., N_k\}, \quad N_k = \lfloor L/\varepsilon T \rfloor. \tag{8}$$

Для довільного значення дискретного часу $i \in I$ знайдеться момент повільного часу $k \in I_k$ такий, що $i \in [kh, (k+1)h - 1)$ і буде справедлива нерівність

$$\|x_{i+1} - y_{i+1}\| \leqslant \|x_{i+1} - x_{kh}\| + \|x_{kh} - y_{kh}\| + \|y_{kh} - y_{i+1}\|. \tag{9}$$

В отриманій нерівності оцінимо кожен доданок окремо. Для першого доданку в (9) при виконанні умов 1) теореми отримаємо

$$\|x_{i+1} - y_{i+1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{i} \left[f\left(j, x_j, x_{s(j)}\right) + A\left(j, x_j, x_{s(j)}\right) \cdot u_j \right] \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{j=kh}^{i} (M + M \|u_j\|).$$

Значення $u_i \in U$ допустимого керування $u = \{u_i \in U, i \in I\}$ системи (1) обираються із компактної множини U, тому знайдеться така стала $K \geqslant 0$, що для будь-якого $i \in I$ буде справедлива оцінка

$$\|u_i\| \leqslant K, \tag{10}$$

звідси для першого доданку в (9) виходить, що

$$\|x_{i+1} - x_{kh}\| \leqslant \varepsilon h M(1+K). \tag{11}$$

Аналогічно для третього доданку в (9) при виконанні умови 1) теореми і властивостей функцій, що входять в усереднену систему, отримаємо

$$\begin{gathered}\|y_{i+1} - y_{kh}\| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{i} \left[f_0\left(y_j, y_{s(j)}\right) + A_0\left(y_j, y_{s(j)}\right) \cdot u_j \right] \right\| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon h M(1+K).\end{gathered} \tag{12}$$

У нерівності (9) залишилось оцінити другий додаток. Для цього системи (1) і (5) при $k \in I_k$ представимо у виді

$$x_{(k+1)h} = x_{kh} + \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left[f\left(j, x_j, x_{s(j)}\right) + A\left(j, x_j, x_{s(j)}\right) \cdot u_j \right],$$

$$y_{(k+1)h} = y_{kh} + \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left[f_0\left(y_j, y_{s(j)}\right) + A_0\left(y_j, y_{s(j)}\right) \cdot u_j \right].$$

Розглянемо відповідну різницю і перетворимо її з урахуванням обмеження (10) наступним чином

$$\begin{gathered}\left\|x_{(k+1)h} - y_{(k+1)h}\right\| \leqslant \|x_{kh} - y_{kh}\| + \\ +\varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left[f\left(j, x_j, x_{s(j)}\right) - f_0\left(y_j, y_{s(j)}\right) \right] \right\| + \\ +\varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left[A\left(j, x_j, x_{s(j)}\right) \cdot u_j - A_0\left(y_j, y_{s(j)}\right) \cdot u_j \right] \right\| \leqslant\end{gathered}$$

$$\leqslant \|x_{kh}-y_{kh}\|+\varepsilon\left\|\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left[f\left(j,x_j,x_{s(j)}\right)-f_0\left(y_j,y_{s(j)}\right)\right]\right\|+$$

$$+\varepsilon K\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left\|A\left(j,x_j,x_{s(j)}\right)-A_0\left(y_j,y_{s(j)}\right)\right\|. \qquad (13)$$

У відношенні (13) оцінимо кожен доданок. Для другого доданку з урахуванням виконання умови 1) теореми при всіх $k\in I_k$ отримаємо

$$\varepsilon\left\|\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left[f\left(j,x_j,x_{s(j)}\right)-f_0\left(y_j,y_{s(j)}\right)\right]\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left\|f\left(j,x_j,x_{s(j)}\right)-f\left(j,x_{kh},x_{s(kh)}\right)\right\|+$$

$$+\varepsilon\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left\|f\left(j,x_{kh},x_{s(kh)}\right)-f\left(j,y_{kh},y_{s(kh)}\right)\right\|+$$

$$+\varepsilon\left\|\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left[f\left(j,y_{kh},y_{s(kh)}\right)-f_0\left(y_{kh},y_{s(kh)}\right)\right]\right\|+$$

$$+\varepsilon\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left\|f_0\left(y_{kh},y_{s(kh)}\right)-f_0\left(y_j,ys(j)\right)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\lambda\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left(\|x_j-x_{kh}\|+\left\|x_{s(j)}-x_{s(kh)}\right\|\right)+$$

$$+\varepsilon\lambda\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left(\|x_{kh}-y_{kh}\|+\left\|x_{s(kh)}-y_{s(kh)}\right\|\right)+$$

$$+\varepsilon\left\|\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}f\left(j,y_{kh},y_{s(kh)}\right)-h\cdot f_0\left(y_{kh},y_{s(kh)}\right)\right\|+$$

$$+\varepsilon\lambda\sum_{j=kh}^{(k+1)h-1}\left(\|y_{kh}-y_j\|+\left\|y_{s(kh)}-y_{s(j)}\right\|\right). \qquad (14)$$

Оцінимо окремо деякі вирази, що входять в (14). При виконанні умов 1), 3) теореми та обмеження (10) для будь-якого $s(j) \leqslant j$, $j \in [kh, (k+1)\,h)$, $k \in I_k$ отримаємо

$$\left\|x_{s(j)} - x_{s(kh)}\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \left\| \sum_{min(s(j),s(kh)) \leqslant t < max(s(j),s(kh))} \left[f\left(t, x_t, x_{s(t)}\right) + A\left(t, x_t, x_{s(t)}\right) \cdot u_t\right] \right\| \leqslant$$
$$\leq \varepsilon M\,(1+K) \cdot \|s(j) - s(kh)\| =$$
$$= \varepsilon \lambda_s M\,(1+K) \cdot \|j - kh\| \leq \varepsilon h \lambda_s M\,(1+K)\,. \tag{15}$$

Аналогічно отримаємо оцінку для виразу

$$\left\|y_{s(j)} - y_{s(kh)}\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \left\| \sum_{min(s(j),s(kh)) \leqslant t < max(s(j),s(kh))} \left[f_0\left(y_t, y_{s(t)}\right) + A_0\left(y_t, y_{s(t)}\right) \cdot u_t\right] \right\| \leqslant$$
$$\leq \varepsilon M\,(1+K) \cdot \|s(j) - s(kh)\| =$$
$$= \varepsilon \lambda_s M\,(1+K) \cdot \|j - kh\| \leq \varepsilon h \lambda_s M\,(1+K)\,. \tag{16}$$

При виконанні умови 2) теореми маємо існування границі (3), а це означає, що знайдеться монотонно спадна функція $\psi(h)$, яка задовольняє відношення $\lim\limits_{h\to\infty} \psi(h) = 0$ і така, що для третього доданку в (14) при будь-якому $k \in I_k$ виконується нерівність

$$\varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} f\left(j, y_{kh}, y_{s(kh)}\right) - h \cdot f_0\left(y_{kh}, y_{s(kh)}\right) \right\| \leq \varepsilon h \psi(h). \tag{17}$$

Враховуючи отримані оцінки (11), (12), (15)–(17), із нерівності (14) при всіх $k \in I_k$ буде слідувати оцінка другого доданку в (13) у виді

$$\varepsilon \left\| \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left[f\left(j, x_j, x_{s(j)}\right) - f_0\left(y_j, y_{s(j)}\right)\right] \right\| \leqslant$$
$$\leqslant 2\varepsilon\lambda \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left(\varepsilon h M\,(1+K) + \varepsilon h \lambda_s M\,(1+K)\right) +$$

$$+\varepsilon\lambda \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left(\|x_{kh} - y_{kh}\| + \left\|x_{s(kh)} - y_{s(kh)}\right\|\right) + \varepsilon\lambda\psi(h) \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon h\lambda\varepsilon hM\,(1+K)\,(1+\lambda_s) + \varepsilon h\psi(h) +$$

$$+\varepsilon h\lambda \left(\|x_{kh} - y_{kh}\| + \left\|x_{s(kh)} - y_{s(kh)}\right\|\right). \tag{18}$$

У відношенні (13) оцінимо третій доданок. При виконанні умов 1), 2) теореми, з урахуванням оцінок (11), (12), (15), (16) й існування границі (4), для будь-якого $k \in I_k$ отримаємо

$$\varepsilon K \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left\|A\left(j, x_j, x_{s(j)}\right) - A_0\left(y_j, y_{s(j)}\right)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon K \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left\|A\left(j, x_j, x_{s(j)}\right) - A\left(j, x_{kh}, x_{s(kh)}\right)\right\| +$$

$$+\varepsilon K \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left\|A\left(j, x_{kh}, x_{s(kh)}\right) - A\left(j, y_{kh}, y_{s(kh)}\right)\right\| +$$

$$+\varepsilon K \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left\|A\left(j, y_{kh}, y_{s(kh)}\right) - A_0\left(y_{kh}, y_{s(kh)}\right)\right\| +$$

$$+\varepsilon K \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left\|A_0\left(y_{kh}, y_{s(kh)}\right) - A_0\left(y_j, y_{s(j)}\right)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\lambda K \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left(\|x_j - x_{kh}\| + \left\|x_{s(j)} - x_{s(kh}\right\|\right) +$$

$$+\varepsilon\lambda K \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left(\|x_{kh} - y_{kh}\| + \left\|x_{s(kh)} - y_{s(kh}\right\|\right) +$$

$$+\varepsilon hK \cdot \frac{1}{h} \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left\|A\left(j, y_{kh}, y_{s(kh)}\right) - A_0\left(y_{kh}, y_{s(kh)}\right)\right\| +$$

$$+\varepsilon\lambda K \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \left(\|y_{kh} - y_j\| + \left\|y_{s(kh)} - y_{s(j}\right\|\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon h\lambda K\varepsilon hM\,(1+K)\,(1+\lambda_s) + \varepsilon hK\psi(h) +$$

$$+\varepsilon h\lambda K\left(\|x_{kh}-y_{kh}\|+\left\|x_{s(kh)}-y_{s(kh)}\right\|\right). \tag{19}$$

Отже, виходячи з оцінок (18)–(19) для доданків в (13), отримаємо

$$\begin{gathered}\left\|x_{(k+1)h}-y_{(k+1)h}\right\|\leqslant\|x_{kh}-y_{kh}\|+\\ +2\varepsilon h\lambda K\varepsilon hM(1+2K)(1+\lambda)+\varepsilon h\psi(h)+\\ +\varepsilon h\lambda\left(\|x_{kh}-y_{kh}\|+\left\|x_{s(kh)}-y_{s(kh)}\right\|\right)+\\ +4\varepsilon h\lambda K\varepsilon hM\left(1+2K\right)\left(1+\lambda_s\right)+2\varepsilon hK\psi(h)+\\ +2\varepsilon h\lambda K\left(\|x_{kh}-y_{kh}\|+\left\|x_{s(kh)}-y_{s(kh)}\right\|\right)\leqslant\\ \leqslant\|x_{kh}-y_{kh}\|+2\varepsilon h\lambda\varepsilon hM(1+2K)^2\left(1+\lambda_s\right)+\varepsilon h\left(1+2K\right)\psi(h)+\\ +\varepsilon h\lambda\left(1+2K\right)\left(\|x_{kh}-y_{kh}\|+\left\|x_{s(kh)}-y_{s(kh)}\right\|\right). \end{gathered} \tag{20}$$

Введемо позначення

$$\delta_k=\max_{0\leqslant j\leqslant kh}\|x_j-y_j\|, \tag{21}$$

тоді нерівність (20) можна представити у вигляді нерівності

$$\begin{gathered}\left\|x_{(k+1)h}-y_{(k+1)h}\right\|\leqslant\\ \leqslant\left(1+2\varepsilon h\lambda\left(1+2K\right)\right)\cdot\delta_k+2\varepsilon h\lambda\varepsilon hM(1+2K)^2\left(1+\lambda_s\right)+\varepsilon h\left(1+K\right)\psi(h),\end{gathered}$$

яка виконується для будь-якого $k\in\{0,1,...,N_k-1\}$, отже

$$\begin{gathered}\delta_{N_k}\leqslant\left(1+2\varepsilon h\lambda\left(1+2K\right)\right)\cdot\delta_{N_{k-1}}+\\ +\varepsilon h\left(1+2K\right)\cdot\left[2\varepsilon h\lambda M\left(1+2K\right)\left(1+\lambda_s\right)+\psi(h)\right].\end{gathered} \tag{22}$$

Далі отримаємо

$$\begin{gathered}\delta_{N_k}\leqslant\varepsilon h\left(1+2K\right)\cdot\left[2\varepsilon h\lambda M\left(1+K\right)\left(1+\lambda_s\right)+\psi(h)\right]\times\\ \times\frac{\left(1+2\varepsilon h\lambda\left(1+K\right)\right)^{N_k-1}-1}{\left(1+2\varepsilon h\lambda\left(1+K\right)\right)-1}\leqslant\\ \leqslant\left[\varepsilon hM\left(1+K\right)\left(1+\lambda_s\right)+\frac{\psi(h)}{2\lambda}\right]\left(e^{2\lambda L(1+K)}-1\right).\end{gathered} \tag{23}$$

З урахуванням оцінок (11), (12), (23) для доданків, що входять в праву частину нерівності (9), і позначення (21) для всіх $i \in [kh, (k+1)h-1)$, $k \in I_k$ справедливим є

$$\|x_{i+1} - y_{i+1}\| \leqslant 2\varepsilon hM(1+K) +$$
$$+ \left[\varepsilon hM(1+K)(1+\lambda_s) + \frac{\psi(h)}{2\lambda}\right]\left(e^{2\lambda L(1+K)} - 1\right). \tag{24}$$

Враховуючи поведінку функції $\psi(h)$, $\lim\limits_{h\to\infty}\psi(h) = 0$, і властивості (7), для правої частини отриманої нерівності буде справедливе співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\varepsilon hM(1+K) + \left[\varepsilon hM(1+K)(1+\lambda_s) + \frac{\psi(h)}{2\lambda}\right]\left(e^{2\lambda L(1+K)} - 1\right)\right) = 0.$$

Це означає, що для довільно обраних $\eta > 0$ і $L > 0$ знайдеться таке $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і будь-якого $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = \lfloor L/\varepsilon \rfloor$ із нерівності (24) буде випливати оцінка (6). За умовою теореми розв'язок $y = \{y_i, i \in I\}$ усередненої системи (5) разом зі своїм p-околом належить області D. Вимагатимемо, щоб розв'язок $x = \{x_i, i \in I\}$ системи (1) знаходився в тому самому p-околі розв'язку усередненої системи $\|x_{i+1} - y_{i+1}\| \leqslant \eta < p$, а значить також належав області D, не виходячи за її межі.

Перша частина теореми доведена.

Доведемо друге твердження теореми. Нехай $\nu = \{\nu_i \in U, i \in I\}$ — допустиме керування усередненої системи (5), а $y = \{y_i, i \in I\}$ — відповідний йому розв'язок, який за умовою теореми разом зі своїм p-околом належить області D. Нехай $x = \{x_i, i \in I\}$ — відповідний цьому ж керуваню розв'язок системи (1), який задовольняє спільну початкову умову $y_0 = x_0 = x^0 \in D' \subset D$. Оцінка різниці для розв'язків початкової системи (1) і усередненої системи (5), що відповідають допустимому керуванню $\nu = \{\nu_i \in U, i \in I\}$ для усередненої системи, проводиться так само, як і в першій частині доведення. Вимога $\|x_{i+1} - y_{i+1}\| \leqslant \eta < p$ для будь-якого $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = \lfloor L/\varepsilon \rfloor$ означає, що розв'язок $x = \{x_i, i \in I\}$ початкової системи (1) знаходиться в p-околі розв'язку $y = \{y_i, i \in I\}$ усередненої системи (5) і за умовою 4) теореми не виходить за межу області D для жодного моменту дискретного часу $i \in I$. Це означає, що керування $\nu = \{\nu_i \in U, i \in I\}$ усередненої системи (5) дійсно є допустимим і для початкової системи (1), а для відповідних розв'язків цих систем справедлива оцінка (6) теореми. Тим самим доведено друге твердження теореми. Теорема доведена.

3. Усереднення в лінійних за керуванням задачах оптимального керування в дискретному часі зі змінним запізненням.

Для задачі оптимального керування (1), (2), в яку керування входить лінійно, розглянемо відповідну усереднену задачу оптимального керування. Задача описується автономною системою рівнянь (5) в дискретному часі $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = \lfloor L/\varepsilon \rfloor$, яка містить змінне запізнення в стані, і термінальний критерій якості

$$J_0(\nu) = \Phi(y_N) \to \min_{v \subset U}. \tag{25}$$

Через $\nu^* = \{\nu_i^* \in U, i \in I\}$ позначимо оптимальне керування задачі (5), (25), на якому критерій якості (25) приймає мінімальне значення $J_0(\nu^*) = \min_{\nu \subset U} J_0(\nu)$. Встановимо відношення між оптимальним розв'язком вихідної задачі (1), (2) і оптимальним розв'язком усередненої задачі (5), (25).

Теорема 2. *Нехай в області* $Q = \{i \in I; x_i \in D; u_i \in U\}$ *для задач оптимального керування* (1), (2) *і* (5), (25) *виконані умови теореми 1. Крім того: 5) функція* $\Phi(x)$ *задовольняє умови Ліпшица зі сталою* $\lambda > 0$. *Тоді оптимальний розв'язок усередненої задачі* (5), (25) *є асимптотично оптимальним розв'язком задачі* (1), (2), *тобто для будь-яких* $\eta > 0$ *і* $L > 0$ *знайдеться таке* $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, *що для всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *справедливі оцінки*

$$|J^* - J_0^*| \leqslant \eta, \quad J(\nu^*) - J^* \leqslant \eta, \tag{26}$$

де $J^* = J(u^*)$ *і* $J_0^* = J_0(\nu^*)$ *— оптимальне значення критеріїв якості задачі* (1), (2) *і усередненої задачі* (5), (25) *відповідно,* $J(\nu^*)$ *— значення критерія якості задачі* (1), (2) *на оптимальному керуванні усередненої задачі* (5), (25).

Доведення. Із постановки задач виходить, що множина допустимих керувань U вихідної системи (1) є не пустою компактною множиною, а множина відповідних розв'язків D системи (1) є замкненою. При виконанні умови 1) теореми виходить, що множина D є обмеженою, а значить також компактною, і для задачі оптимального керування виду (1), (2) в дискретному часі $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = \lfloor L/\varepsilon \rfloor$ завжди існує оптимальне керування $u^* = \{u_i^* \in U, i \in I\}$ і відповідний оптимальний розв'язок $x^* = \{x_i^*, i \in I\}$ для будь-якого початкового стану системи. При цьому критерій якості (2) на оптимальному керуванні приймає скінченне значення $J^* = J(u^*) = \min\limits_{u \in U} J(u)$. Аналогічно для усередненої задачі оптимального керування виду (5), (25) в дискретному часі $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = \lfloor L/\varepsilon \rfloor$ існує оптимальне керування $\nu^* = \{\nu_i^* \in U, i \in I\}$ і відповідний розв'язок $y^* = \{y_i^*, i \in I\}$ і відповідне скінченне значення критерія якості $J_0^* = J_0(\nu^*) = \min\limits_{\nu \in U} J_0(\nu)$. Виконання умов теореми для будь-якого допустимого значення керування $u = \{u_i \in U, i \in I\}$ вихідної системи (1) означає, що умови теореми виконуються і для оптимального керування $u^* = \{u_i^* \in U, i \in I\}$ з відповідним оптимальним розв'язком $x^* = \{x_i^*, i \in I\}$ задачі (1), (2). Отже, на підставі теореми 1 для обраних $\eta_0 > 0$ і $L > 0$ знайдеться $\varepsilon_0 (\eta_0, L) > 0$, таке, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ і будь-якого $i \in I = \{0, 1, 2, ..., N\}$, $N = \lfloor L/\varepsilon \rfloor$ оптимальне керування $u^* = \{u_i^* \in U, i \in I\}$ вихідної задачі (1), (2) є допустимим керуванням усередненої задачі (5), (25), а для відповідних йому розв'язків $x^* = \{x_i^*, i \in I\}$ вихідної задачі (1), (2) і $\overline{y} = \{\overline{y}_i, i \in I\}$ усередненої задачі (5), (25) зі спільною початковою умовою $x_0^* = \overline{y}_0 = x^0 \in D' \subset D$ справедлива оцінка

$$\|x_i^* - \overline{y}_i\| \leqslant \eta_0.$$

Нерівність виконується для будь-якого $i \in I$, значить і для $i = N$, тому при виконані умови 5) теореми отримаємо

$$|J(u^*) - J_0(u^*)| = |\Phi(x_N^*) - \Phi(\overline{y}_N)| \leqslant \lambda \cdot \|x_N^* - \overline{y}_N\| \leqslant \lambda \eta_0 = \eta. \qquad (27)$$

Аналогічно оптимальне керування $\nu^* = \{\nu_i^* \in U, i \in I\}$ усередненої задачі (5), (25) є допустимим керуванням задачі (1), (2), а для відповідних йому розв'язків $y^* = \{y_i^*, i \in I\}$ усередненої задачі (5), (25) і $\overline{x} = \{\overline{x}_i, i \in I\}$ задачі (1), (2) зі спільною початковою умовою $y_0^* = \overline{x}_0 = x^0 \in D' \subset D$ справедливі оцінки

$$\|y_i^* - \overline{x}_i\| \leqslant \eta_0,$$

$$|J_0(\nu^*) - J(\nu^*)| = |\Phi(y_N^*) - \Phi(\overline{x}_N)| \leqslant \lambda \cdot \|y_N^* - \overline{x}_N\| \leqslant \lambda\eta_0 = \eta. \qquad (28)$$

На оптимальному керуванні критерій якості приймає мінімальне значення, тому для будь-якого іншого допустимого керування відповідних задач виконуються нерівності

$$J(\nu^*) \geqslant J(u^*), \quad J_0(u^*) \geqslant J_0(\nu^*). \qquad (29)$$

Для оптимальних значень критеріїв якості задачі (1), (2) і усередненої задачі (5), (25) може виконуватись одна із двох нерівностей

$$J(u^*) \geqslant J_0(\nu^*) \quad \text{або} \quad J(u^*) < J_0(\nu^*).$$

У першому випадку із (29), (28) маємо

$$J(\nu^*) \geqslant J(u^*) \geqslant J_0(\nu^*) \geqslant J(\nu^*) - \eta, \quad \text{звідси} \quad |J(u^*) - J_0(\nu^*)| \leqslant \eta.$$

У другому випадку із (29), (28) маємо

$$J_0(u^*) \geqslant J_0(\nu^*) > J(u^*) \geqslant J_0(u^*) - \eta, \quad \text{звідси} \quad |J_0(\nu^*) - J(u^*)| \leqslant \eta.$$

Отже, в обох випадках справедлива перша нерівність в (26), із якої з урахуванням нерівності (29) випливає друга нерівність в (26).

Теорема доведена.

Отже оптимальне керування усередненної системи є асимптотично оптимальним для вихідної системи.

4. Числово-асимптотичний метод розв'язання задачі оптимального керування системою в дискретному часі зі змінним запізненням та такою, що лінійно залежить від параметра керування.

Таким чином, доведені теореми обгрунтовують числово-асимптотичний метод розв'язання задачі оптимального керування системою в дискретному часі зі змінним запізненням та такою, що лінійно залежить від параметра керування (1), (2), реалізація якого здійснюється наступним чином:

1. Для керованої функціонально-диференціальної системи (1) будуємо усереднену систему (5).
2. Розв'язуємо усереднену задачу оптимального керування (5), (25), знаходимо оптимальне керування ν^* усередненої задачі.

3. Будуємо траєкторію $x(t, \nu^*)$ вихідної системи (1), яка відповідає керуванню ν^*.

4. Для асимптотично оптимального керування ν^* знаходимо значення функціоналу якості (2), яке згідно з теоремою 2 відрізняється від оптимального значення на малу величину η.

Висновки

Отже, в роботі доведено можливість застосування методу усереднення для задачі оптимального керування ситемою у дискртному часі, що лінійно залежить від керування та містить змінне запізнення у стані. Розроблено числово асимптотичний метод розв'язання задачі оптимального керування такою системою.

Список літератури

1. **Данилов В. И., Мартынюк Д. И., Паньков В. Г.** Вторая теорема Н. Н. Боголюбова для систем разностных уравнений / В. И. Данилов, Д. И. Мартынюк, В. Г. Паньков // Украинский математический журнал. — 1996. — Т. 48, № 4. — С. 464–475. doi: 10.1007/BF02390612
2. **Митропольський Ю. О.** Методи нелінійної механіки / Ю. О. Митропольський. — К.: Наукова думка, 2005. — 527 с.
3. **Плотников В. А.** Метод усреднения в задачах управления / В. А. Плотников. — Киев;Одесса: Лыбидь, 1992. — 188 с.
4. **Плотников В. А., Плотникова Л. И., Яровой А. Т.** Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления / В. А. Плотников, Л. И. Плотникова, А. Т. Яровой // Нелінійні коливання. — 2004. — Т.7, №2. — С. 241–254.
5. **Dashkovskiy S., Kichmarenko O., Sapozhnikova K.** Approximation of Solutions to the Optimal Control Problems for Systems with Maximum / S. Dashkovskiy, O. Kichmarenko, K. Sapozhnikova // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — Vol. 243, № 2. — P. 192–203. doi: 10.1007/s10958-019-04535-z
6. **Kichmarenko O. D., Karpycheva M. L.** General averaging scheme for discrete equations with variable delay / O. D. Kichmarenko, M. L. Karpycheva // Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 226, №3. — P. 270–284. doi: 10.1007/s10958-017-3533-y
7. **Kichmarenko O. D.** Schemes of Complete Averaging in the Problem of Optimal Control Over a Functional-Differential System / O. D. Kichmarenko // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — Vol. 243, №3. — P. 421–432. doi: 10.1007/s10958-019-04548-8

8. **Kichmarenko O. D.** Application of the averaging method to optimal control problem of system with fast parameters / O. D. Kichmarenko // Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2017. — Vol. 115, № 1. — P. 93–114, doi: 10.12732/ijpam.v115i1.8.

9. **Kichmarenko O., Karpycheva M.** Averaging method for controlled discrete systems with variable delays / O. Kichmarenko, M. Karpycheva // Contemporary Analysis and Applied Mathematics. – 2016. – Vol. 4, №1. — P. 41–47.

10. **Kolmanovskii V. B., Shaikhet L. E.** Controlof systems with after-effect / V. B. Kolmanovskii, L. E. Shaikhet // Amer. Math. Society., Providence, 1992. — 157 p.

Latysh A.

An averaging in linear by control optimal control problem on discret time with variable delay

Summary

For discrete equations of controlled motion with a varying delay in the state of the system and with a linearly input control parameter, the possibility of applying the averaging method has been proved. For the optimal control problem on the trajectories of such a system with a terminal criterion, the theorem on the proximity of the values of the criterion of the non-averaged optimal control problem on the optimal control of the averaged problem with the optimal value of the criterion of the non-averaged (initial) problem has been proved. That is, the optimal control of the averaged problem is asymptotically optimal control for the original problem. A numerically asymptotic method for solving the optimal control problem of a system in discrete time, which contains a varying delay in the state and linearly depends on the control parameter, has been developed.

Key words: averaging method, equations of controlled motion, optimal control problem, delay, discrete equations.

References

1. Martynyuk, D. I., Danilov, V. Y. & Pan'kov, V.G. (1996). Vtoraya teorema N.N. Bogolyubova dlya sistem raznostnykh uravneniy [Second Bogolyubov theorem for systems of difference equations]. *Ukr Math J.* Vol. 48, №4, P. 516–529. doi: 10.1007/BF02390612

2. Mytropolskyi, Yu. O. (2005). *Metody nelineynoy mehaniki [Methods in Nonlinear Mechanics].* Kyiv: Naukova Dumka, 527 p.

3. Plotnikov, V. A. (1992). *Metod usredneniya v zadachakh upravleniya [Averaging Method in Problems of Control].* Kiev: Lybid, 188 p.

4. Plotnikov, V. A., Plotnikova, L. I., Yarovoi, A. T. (2004). Metod usredneniya diskretnykh sistem i ego prilozheniye k zadacham upravleniya [Averaging method for discrete systems and its application to controlproblems]. *Nonlinear Oscillations,* Vol. 7, №2, P. 240–253.

5. Dashkovskiy, S., Kichmarenko, O., Sapozhnikova, K. (2019). Approximation of Solutions to the Optimal Control Problems for Systems with Maximum. *Journal of Mathematical Sciences,* Vol. 243, №2, P. 192–203. doi: 10.1007/s10958-019-04535-z

6. Kichmarenko, O. D., Karpycheva, M. L. (2017). General averaging scheme for discrete equations with variable delay. *Journal of Mathematical Sciences,* Vol. 226, №3, P.270–284.doi: 10.1007/s10958-017-3533-y

7. Kichmarenko, O. D. (2019). Schemes of Complete Averaging in the Problem of Optimal Control Over a Functional-Differential System *Journal of Mathematical Sciences,* Vol. 243, №3, P.421–432. doi: 10.1007/s10958-019-04548-8

8. Kichmarenko, O. D.(2017). Application of the averaging method to optimal control problem of system with fast parameters. *Journal of Pure and Applied Mathematics,* Vol. 115, №1, P. 93–114, doi: 10.12732/ijpam.v115i1.8.

9. Kichmarenko, O., Karpycheva, M. (2016). Averaging method for controlled discrete systems with variable delays. *Contemporary Analysis and Applied Mathematics,* Vol. 4, №1, P. 41–47.

10. Kolmanovskii, V.B. and Shaikhet, L.E. (1992). *Control of systems with after-effect.* Providence: Amer. Math.Society, 157 p.