Дослідження в математиці і механіці. — 2022. — Т. 27, вип. 1–2 (39–40). — С. 40–47

УДК 517.925

В. В. Карапетров
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО ВИДУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ n-го ПОРЯДКУ

У даній роботі розглядається диференціальне рівняння n-го порядку $(r(t)u^{(m)})^{(n-m)} = \sum_{k=0}^{m} p_k u^{(k)}$, $n \geq 2$, для якого знайдені умови існування та асимптотичні зображення розв'язків при деяких умовах на функції p_k та функцію r. Розв'язки такого типу рівнянь при $m = 0$ розглядалися у роботі Хінтона, а при $s \equiv 1$ та $m = n - 1$ розглядалися у роботі Кігурадзе І.Т. Результати, отримні у даній роботі для вказаного рівняння, у деякому сенсі узагальнють результати, отримані в роботах Хінтона та І. Т. Кігурадзе. При отриманні асимптотичних зображень за допомогою замін рівняння перетворюється у еквівалентну систему квазалінійних диференціальних рівнянь, для якої виконуються відомі результати Левінсона, рівняння у деякому сенсі асимптотично еквівалентне до відповідного двочленного диференціального рівняння n-го порядку.
MSC: 34A34, 34C41, 34E99.
Ключові слова: диференціальні рівняння n-го порядку, асимптотичні зображення роз-в'язків, системи квазілінійних диференціальних рівнянь, квазіпохідні.
DOI: 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294141.

Вступ

Розглядається диференціальне рівняння

$$(r(t)u^{(m)})^{(n-m)} = \sum_{k=0}^{m} p_k u^{(k)}, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

де $p_k \in C_{loc}([a; +\infty[) \quad (k = 0, ..., m)$,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{p_0(t)}{q(t)} = \sigma, \quad \sigma = sign(p_0(a)), \tag{2}$$

$r(t)$ та $q(t)$ – додатні двічі неперервно диференційовні на проміжку $[a; +\infty[$ функції, $C_{loc}([a; +\infty[)$ – простір локально неперервних функцій на проміжку $[a; +\infty[$, $L([a; +\infty[)$ – Банаховий простір інтегрованих за Лебегом функцій.

Рівняння виду (1) при $m = 0$ розглядалися у роботі [2]:

$$(r(t)u^{(m)})^{(n-m)} \pm qy = 0, \quad n \geq 2.$$

Надійшла 11.06.2022

Рівняння виду (1) при $s \equiv 1$ та $m = n-1$ розглядалися у роботі [3]:

$$u^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t) u^{(k)}.$$

Для таких рівнянь було отримано асимптотичні зображення розв'язків при накладані різних умов на коефіцієнти.

Метою даної роботи є встановлення асимптотичних зображень розв'язків рівняння (1) при $t \to +\infty$.

Основні результати

Отримано наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай для рівняння (1) виконується умова (2), а також умови*

$$\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{1}{n}} \notin L([a;+\infty[), \tag{3}$$

$$\frac{r'}{r} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{-\frac{1}{n}} \in L([a;+\infty[), \quad \frac{q'}{q} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{-\frac{1}{n}} \in L([a;+\infty[), \tag{4}$$

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^2 \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{-\frac{1}{n}} \in L([a;+\infty[), \quad \left(\frac{q'}{q}\right)^2 \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{-\frac{1}{n}} \in L([a;+\infty[), \tag{5}$$

$$\frac{p_{k-1}(t)}{q(t)} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{k-1}{n}} \in L([a;+\infty[) \ (k = \overline{2,m}), \ \frac{p_m(t)}{r(t)q(t)} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{m}{n}} \in L([a;+\infty[). \tag{6}$$

Тоді рівняння (1) має фундаментальну систему розв'язків u_j ($j = \overline{1,n}$), які допускають асимптотичні зображення

$$u_j^{k-1} = q(t)^{-\alpha_k} \cdot r(t)^{-\beta_k} \cdot exp\left[\lambda_j \cdot \int_a^t \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{1}{n}}\right] \cdot [\lambda_j^{k-1} + o(1)], \quad (k, j = \overline{1,n}), \tag{7}$$

де λ_j^0 – корені рівняння

$$\lambda^n = \sigma. \tag{8}$$

Доведення.

Застосуємо до рівняння (1) перетворення:

$$\begin{cases} u^{(i)}(t) = z_{i+1}(t), \quad 0 \le i \le m-1, \\ u^{(m)}(t) = \dfrac{z_{m+1}(t)}{r(t)}, \\ (r(t)u^{(m)})^{(i-m)} = z_{i+1}(t), \quad m+1 \le i \le n-1, m \ne n-1. \end{cases} \tag{9}$$

Отримаємо систему квазілінійних рівнянь, еквівалентну до рівняння (1)

$$\begin{cases} z'_{(i)}(t) = z_{i+1}(t), \quad 1 \le i \le n-1, \quad i \ne m \\ z'_{(m)}(t) = \dfrac{z_{m+1}(t)}{r(t)}, \\ \qquad z'_n = p_0(t) z_1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} p_i(t) \cdot z_{i+1} + \dfrac{p_m(t)}{r(t)} \cdot z_{m+1}. \end{cases} \tag{10}$$

Запишемо систему (10) у матричній формі:

$$Z' = P \cdot Z; \tag{11}$$

де

$$P = (p_{ij})_1^n, \quad p_{ij} = \begin{cases} 1, \quad 1 \le i \le n-1, & i \ne m, \ j = i+1, \\ \dfrac{1}{r(t)}, & i = m, j = i+1, \\ p_{i-1}, & i = n, 1 \le j \le m, \\ \dfrac{p_m}{r}, & i = n, j = m+1, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{12}$$

До системи (11) застосуємо перетворення

$$Z(t) = Q(t) \cdot W(t), \tag{13}$$

де

$$Q(t) = diag\left[q^{\alpha_1} r^{\beta_1} \dots q^{\alpha_n} r^{\beta_n}\right].$$

У результаті перетворення (13) отримаємо систему

$$W' = \left[Q^{-1} P Q - Q^{-1} Q'\right] \cdot W. \tag{14}$$

Зауважимо, що

$$Q^{-1} = diag\left[\frac{1}{q^{\alpha_1} r^{\beta_1}} \dots \frac{1}{q^{\alpha_n} r^{\beta_n}}\right].$$

$$P \cdot Q = (a_{ij})_1^n, \quad a_{ij} = \begin{cases} q^{\alpha_{i+1}} \cdot r^{\beta_{i+1}}, \quad 1 \le i \le n-1, & i \ne m, \ j = i+1, \\ q^{\alpha_{m+1}} \cdot r^{\beta_{m+1}-1}, & i = m, j = i+1, \\ p_{i-1} \cdot q^{\alpha_i} \cdot r^{\beta_i}, & i = n, 1 \le j \le m, \\ p_m \cdot q^{\alpha_{m+1}} \cdot r^{\beta_{m+1}-1}, & i = n, j = m+1, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$Q^{-1}PQ = (b_{ij})_1^n, \; b_{ij} = \begin{cases} q^{\alpha_{i+1}-\alpha_i} \cdot r^{\beta_{i+1}-\beta_i}, \; 1 \le i \le n-1, \; i \neq m, \; j = i+1, \\ q^{\alpha_{m+1}-\alpha_m} \cdot r^{\beta_{m+1}-\beta_m-1}, \; i=m, \; j=i+1, \\ p_{i-1} \cdot q^{\alpha_i-\alpha_n} \cdot r^{\beta_i-\beta_n}, \; i=n, \; 1 \le j \le m, \\ p_m \cdot q^{\alpha_{m+1}-\alpha_n} \cdot r^{\beta_{m+1}-\beta_n-1}, \; i=n, \; j=m+1, \\ 0, \quad \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$Q^{-1}Q = \frac{q'}{q} \cdot D_1 + \frac{r'}{r} \cdot D_2, \quad D_1 = diag\left[\alpha_1, ..., \alpha_n\right], \quad D_2 = diag\left[\beta_1, ..., \beta_n\right].$$

Оберемо α_i та β_i таким чином, щоб

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 = ... = \alpha_{m+1} - \alpha_m = \alpha_n - \alpha_{n-1} = 1 + \alpha_1 - \alpha_n = \tau_\alpha,$$

$$\beta_2 - \beta_1 = \beta_3 - \beta_2 = ... = \beta_{m+1} - \beta_m - 1 = \beta_n - \beta_{n-1} = \beta_1 - \beta_n = \tau_\beta.$$

З останніх рівностей випливає, що $\tau_\alpha = \frac{1}{n}$, $\tau_\beta = -\frac{1}{n}$.
Тоді

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_n = \dfrac{1}{n} - 1, \\ \alpha_2 - \alpha_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{n-1}{n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m+1} - \alpha_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{n-m}{n}. \end{cases}$$

Нехай $Q^{-1}PQ = \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot [K + V]$, де $K = (k_{ij})_1^n$, $\quad V = (v_{ij})_1^n$,

$$k_{ij} = \begin{cases} 1, \; 1 \le i \le n-1, \, j = i+1, \\ \sigma, \, i=n, j=1, \\ 0, \, \text{otherwise}, \end{cases} \; v_{ij} = \begin{cases} \dfrac{p_0}{q} - \sigma, \; i=n, j=1, \\ \dfrac{p_{i-1}}{q} \cdot \left(\dfrac{q}{r}\right)^{\frac{i-1}{n}}, \; i=n, 2 \le j \le m, \\ \dfrac{p_m}{q} \cdot \left(\dfrac{q}{r}\right)^{\frac{m}{n}}, \; i=n, j=m+1, \\ 0, \, \text{otherwise}. \end{cases}$$

Отже, система (14) перетворюється на наступну систему

$$W' = \left[\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot [K+V] - \frac{q'}{q} \cdot D_1 + \frac{r'}{r} \cdot D_2\right] \cdot W. \tag{15}$$

До системи (15) застосуємо перетворення

$$h(t) = \int_a^t \left(\frac{q(\varsigma)}{r(\varsigma)}\right)^{\frac{1}{n}} d\varsigma. \tag{16}$$

Нехай також g-функція, обернена до функції h, для всіх $t > a$ $g(h(t)) = t$. Оскільки виконуються умови (3)-(5) теореми, то $h(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Також маємо $W(s) = Z(g(s))$. У результаті перетворення (16) отримаємо систему

$$W' = [K + V - \alpha(s) \cdot D_1 + \beta(s) \cdot D_2] \cdot W, \tag{17}$$

де

$$\alpha(s) = \left(\frac{q(t)}{r(t)}\right)^{-\frac{1}{n}} \frac{q'}{q}, \quad \beta(s) = \left(\frac{q(t)}{r(t)}\right)^{-\frac{1}{n}} \frac{r'}{r}.$$

З умов (3)—(5) теореми також випливає, що

$$\int_0^\infty |\alpha'(s)| ds = \int_a^\infty \left| \left(\left(\frac{q(t)}{r(t)}\right)^{-\frac{1}{n}} \frac{q'}{q} \right)' \right| ds < +\infty$$

та

$$\int_0^\infty \alpha^2(s) ds = \int_a^\infty \left(\left(\frac{q(t)}{r(t)}\right)^{-\frac{2}{n}} \left(\frac{q'}{q}\right)' \right)^2 ds < +\infty.$$

Аналогічні результати є справедливими і для $\beta(s)$.

Розглянемо тепер характеристичні числа матриці

$$[K + V - \alpha(s) \cdot D_1 - \beta(s) \cdot D_2]. \tag{18}$$

Позначимо їх як $\lambda_\tau + \gamma_\tau(s)$, $\tau = \overline{1,n}$, де $\gamma_\tau(s) \to 0$ при $s \to 0$, $\lambda_\tau (\tau = \overline{1,n})$— корені характеристичного рівняння матриці K, яке має вигляд (8):

$$\lambda^n = \sigma.$$

Самі корені мають вигляд

$$\lambda_\tau = \begin{cases} exp[\dfrac{i\Pi(2\tau - 1)}{n}, & \sigma = -1, \\ exp[\dfrac{2\Pi \cdot i(\tau - 1)}{n}, & \sigma = 1. \end{cases}$$

З означення $\gamma_\tau(s)$ випаливає, що

$$0 = det\left[K + V - \alpha(s)\cdot D_1 - \beta(s)\cdot D_2 - (\lambda_\tau + \gamma_\tau(s))\cdot I\right] =$$

$$= \frac{p_0}{q} + \sum_{k=1}^{m}\frac{p_k}{q}\cdot\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{k}{n}}\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i\alpha(s) + \beta_i\beta(s) + (\lambda_\tau + \gamma_\tau(s))) +$$

$$+ \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i\alpha(s) + \beta_i\beta(s) + (\lambda_\tau + \gamma_\tau(s))). \tag{19}$$

У результаті розкладання правої частини рівняння (19) маємо

$$\sigma = (\lambda_\tau + \gamma_\tau(s))^n - (\lambda_\tau + \gamma_\tau(s))^{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_i\alpha(s) + \beta_i\beta(s)) +$$

$$+ ... + (-1)^n\prod_{1}^{n}(\alpha_i\alpha(s) + \beta_i\beta(s)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\frac{p_k}{q}\cdot\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{k}{n}}\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i\alpha(s) + \beta_i\beta(s) + (\lambda_\tau + \gamma_\tau(s))) + \frac{p_0}{q} - \sigma. \tag{20}$$

Зауважимо, що

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 0. \tag{21}$$

Оскільки $\alpha(s) \to 0$, $\beta(s) \to 0$, $\gamma(s) \to 0$, при $s \to +\infty$ виконується (21) та умови (6) теореми випливає, що існує таке число M, що

$$|(\lambda_\tau + \gamma_\tau(s))^n - \sigma| \leq M(|\alpha(s)| + |\beta(s)|)^2. \tag{22}$$

З (22) також випливає, що існує число A, що

$$|\gamma_\tau(s)| \leq A(|\alpha(s)| + |\beta(s)|)^2. \tag{22}$$

Отже, $\tau(s) \in L([a; +\infty[)$ та виконуються умови теореми 8.1 з роботи [1]) та наслідку 6.5 з роботи [3]).

Отже, рівняння (1) має фундаментальну систему розв'язків u_j ($j = \overline{1, n}$), які допускають асимптотичні зображення (7). Теорему повністю доведено.

Висновки

Шляхом заміни рівняння (1) зводиться до еквівалентної системи квазілінійних диференціальних рівнянь, завдяки чому побудовано асимптотичне зображення розв'язків рівняння(1) при $t \to +\infty$.

Список літератури

1. **Coddington E. A.** Theory of Ordinary Differential Equations / E. A. Coddington, N. Levinson. – New York–Toronto–London, McGraw-Hill, 1955.
2. **Hinton Don B.** Asymptotic behavior of solutions of $(ry^{(m)})^{(k)} \pm qy = 0$. / Don B.Hinton // Journal of Differential Equations. – 1968. – Vol. 4, №5. – P. 590–596.
3. **Кігурадзе І. Т.** Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / І. Т. Кігурадзе. – Тбілісі: Вид-во Тбіліс. ун-ту, 1975. – 352 с.

Karapetrov V. V.

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF THE SOLUTIONS OF SOME TYPE n-TH ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary

In this work there is considered the n order differential equation $(r(t)u^{(m)})^{(n-m)} = \sum_{k=0}^{m} p_k u^{(k)}$, for which the existence conditions and asymptotic representations of solutions under certain conditions on the function p_k and the function r are found. Solutions of this type of equation for $m = 0$ were considered in the work of Hinton, and for $s \equiv 1$ and $m = n - 1$ were considered in the work of I.T. Kiguradze. The results obtained in this work for the indicated equation in some sense generalize the results obtained in the works of Hinton and I. T. Kiguradze. For obtaining asymptotic images using substitutions, the equation is transformed into an equivalent system of quasi-linear differential equations for which the well-known Levinson results are satisfied, the equation is in some sense asymptotically equivalent to the corresponding binomial differential equation of the nth order.

Key words: n-th order differential equations, asymptotic representations of solutions, systems of quasi-linear differential equations, quasiderivatives.

REFERENCES

1. Coddington E. A. and Levinson N. (1955). Theory of Ordinary Differential Equations *McGraw-Hill, New York–Toronto–London*
2. Hinton Don B. (1968). Asymptotic behavior of solutions of $(ry^{(m)})^{(k)} \pm qy = 0$. *Journal of Differential Equations*, Vol. 4, №5, P. 590-596.
3. Kiguradze I.T. (1975). Nekotorye singulyarnye kraevye zadachi dlya obyknovennykh differentsialnykh uravneniy. [Some singular boundary value problems for ordinary differential equations]. *Tbilisi: Tbilisi Publishing House. un-ta,* 325 p.