Дослідження в математиці і механіці. — 2022. — Т. 27, вип. 1–2 (39–40). — С. 25–39

УДК 517.925

В. М. Євтухов, С. В. Голубєв
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для двочленого неавтономного звичайного диференціального рівняння четвертого порядку з експоненціальною нелінійністю та неперервним і відмінним від нуля у деякому лівому околі ω ($\omega \le +\infty$) коефіцієнтом $p(t)$ досліджується асимптотична поведінка при $t \uparrow \omega$ одного з можливих типів $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків. Спочатку з використанням апріорних асимптотичних властивостей розглянутих $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків встановлюються необхідні умови їх існування, а також асимптотичні зображення цих розв'язків та їх похідних до третього порядку включно. Питання про фактичне існування розв'язків з отриманими асимптотичними зображення вирішується шляхом його зведення до питання про існування зникаючих в особливій точці розв'язків у системи квазілінійних диференціальних рівнянь, до якої рівняння зводиться за допомогою деяких перетворень, що визначаються з урахуванням виду встановлених асимптотичних зображень. При цьому також вирішується і питання про кількість розв'язків рівняння зі знайденими асимптотичними зображеннями.
MSC: 34E05.
Ключові слова: неавтономні диференціальні рівняння, експоненціальна нелінійність, $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- розв'язки, асимптотична поведінка $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- розв'язків.
DOI: 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).293952.

Вступ

Після розробки методів дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціальних рівнянь другого та третього порядку зі степеневими та правильно змінними нелінійностями проявилася зацікавленість дослідників до встановлення асимптотики розв'язків двочлених неавтономних диференціальних рівнянь n-го порядку зі швидко змінною нелініністю виду

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \varphi(y),$$

Надійшла 30.06.2022 © Євтухов В. М., Голубєв С. В., 2022

де $\alpha_0 \in \{-1;1\}$, $p : [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ — неперервна функція, $a < \omega \leq +\infty$ та $\varphi : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0,+\infty[$ — двічі неперервно диференційовна функція така, що

$$\varphi'(y) \neq 0,\ y \in \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & +\infty, \text{ саме} \end{cases} \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi(y)\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)} = 1,$$

Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} — однобічний окіл Y_0.

Важливим окремим випадком таких рівнянь є рівняння з експоненціальною нелінійністю. Для цих рівнянь в работах Євтухова В. М., Дрік Н. Г. [1], Євтухова В. М., Шинкаренко В. М. [2], Євтухова В. М., Харькова В. М. [3] були розроблені методи дослідження асимптотичної поведінки класу розв'язків, які визначаються через експоненціальну нелінійність, що є не зовсім природним. Найбільш природним уявляється встановлення асимптотичних властивостей тих розв'язків, які досліджувалися раніше при розгляді диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями, а саме так званих $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків (див., наприклад, роботу [4]).

Означення 1 ([5])**.** Розв'язок y вказаного диференціального рівняння n-порядку називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє наступні умови

$$y(t) \in \Delta_{Y_0} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \left[\begin{array}{ll} \text{або} & 0, \\ \text{або} & \pm\infty, \end{array} \right. \quad (k = 1, 2, ...n-1), \qquad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n-2)}(t) y^{(n)}(t)} = \lambda_0.$$

В даній роботі розглядається двочлене неавтономне диференціальне рівняння четвертого порядку виду

$$y^{(4)} = \alpha_0 p_0(t)[1 + r(t)]e^{\sigma y} \ (\sigma \neq 0), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p_0 : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — неперервна, або неперервно диференційовна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $r : [a, \omega[\longrightarrow] - 1, +\infty[$ — неперервна функція така, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} r(t) = 0. \tag{2}$$

В цьому рівнянні функція $\varphi(y) = e^{\sigma y}$ $(\sigma \neq 0)$ є швидко змінною функцією тільки при $y \to Y_0 = \pm\infty$. При цьому у якості околів Δ_{Y_0} точок $Y_0 = \pm\infty$

можемо обирати проміжки

$$\Delta_{Y_0} = \left[\begin{array}{ll}]0, +\infty[, & \text{якщо} \quad Y_0 = +\infty, \\ ]-\infty, 0[, & \text{якщо} \quad Y_0 = -\infty \end{array} \right. \tag{3}$$

Таким чином, для рівняння (1) отримуємо наступне

Означення 2. Розв'язок y диференціального рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язком, де $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє наступні умови

$$y(t) \in \Delta_{Y_0} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0 = \pm\infty, \tag{4}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \left[\begin{array}{ll} \text{або} & 0, \\ \text{або} & \pm\infty, \end{array} \right. \quad (k = 1, 2, 3), \qquad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(3)}(t)]^2}{y^{(2)}(t) y^{(4)}(t)} = \lambda_0. \tag{5}$$

З цього означення зокрема випливає, що число

$$\nu_0 = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad Y_0 = +\infty, \\ -1, & \text{якщо} \quad Y_0 = -\infty \end{cases} \tag{6}$$

визначає знаки будь-якого $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язку і його першої похідної в деякому лівому околі ω.

Метою роботи є встановлення необхідних і достатніх умов існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків у випадку, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ (не особливий випадок), а також асимптотичних зображень при $t \uparrow \omega$ для таких розв'язків та їх похідних до третього порядку включно із визначенням їх кількості.

Вибір у даному дослідженні рівняння четвертого порядку пов'язаний з тим, що отримані раніше для рівнянь другого і третього порядків [7]; [8] результати про поведінку $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків не можуть бути безпосередньо поширеними на рівняння n-го порядку без попереднього детального дослідження рівняння четвертого порядку.

При встановленні необхідних умов існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків буде використаний відомий результат Євтухова В. М. про апріорні асимптотитчні властивості таких розв'язків, який випливає з роботи [5].

Лема 1 ([5], Розділ 3, §10)**.** *Якщо* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$, *то кожний* $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$*-розв'язок диференціального рівняння (1) задовольняє наступні граничні умови:*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{a_{0k}}{\lambda_0 - 1} \ (k = 1, \dots, 4), \quad \textit{де} \quad a_{0k} = (4-k)\lambda_0 + k - 3, \tag{7}$$

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \textit{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \textit{якщо} \quad \omega < +\infty \end{cases}$$

Крім того, в роботі буде використовуватись одне відоме твердження про існування зникаючих в особливій точці розв'язків у системи квазілінійних диференціальних рівнянь виду

$$v_i' = h(t) \left[f_i(t) + \sum_{k=1}^{4} c_{ik}(t) v_k + V_i(t, v_1, \dots, v_4) \right] \ (i = 1, \dots, 4), \tag{8}$$

в якому функції

$$h, f_i : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, 4) \quad c_{ik} : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R} \ \ (i, k = 1, \dots, 4)$$

є неперервними і задовольняють умови:

$$h(t) \neq 0, \quad \text{при} \quad t_0 \leq t < \omega \quad \int_{t_0}^{\omega} |h(t)|\, dt = +\infty, \tag{9}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_i(t) = 0 \ (i = 1, \dots, 4), \quad \lim_{t\uparrow\omega} c_{ik}(t) = c_{ik}^0 \ \ (i, k = 1, \dots, 4), \tag{10}$$

а функції V_i неперервні на множині

$$[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_b, \quad \text{де} \quad \mathbb{R}_b = \left\{ (v_1, \dots, v_4) \in \mathbb{R}^4 \ : |v_i| \leq b \ (i = 1, \dots, 4), \ b > 0 \right\}$$

і задовольняють умову

$$\lim_{|v_1| + \dots + |v_4| \to 0} \frac{V_i(t, v_1, \dots, v_4)}{|v_1| + \dots + |v_4|} = 0 \ (i = 1, \dots, 4) \ \text{рівномірно за} \ t \in [t_0, \omega[. \tag{11}$$

З теореми 2.2 роботи [6] випливає наступний результат для системи (8).

Лема 2 ([6], Теорема 2.2)**.** *Нехай виконуються умови (9)–(11) і гранична матриця коефіцієнтів* $C_0 = \left(c_{ik}^0\right)_{i,k=1}^2$ *не має характеристичних коренів з нульовою дійсною частиною. Тоді у системи диференціальних рівнянь*

(8) існує хоча б один розв'язок $(v_i)_{i=1}^4 : [t_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}^4$ $(t_0 \le t_1 < \omega)$, *що прямує до нуля при* $t \uparrow \omega$. *Більше того, існує* m*-параметрична сім'я таких розв'язків, якщо серед коренів характеристичного рівняння матриці* C_0 *існує* m *коренів (з урахуванням кратних), дійсні частини, яких мають знак протилежний знаку функції* h *на проміжку* $[t_0, \omega[$.

Далі, при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ уведемо додаткові допоміжні позначення

$$K(\lambda_0) = \frac{(\lambda_0 - 1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)}, \quad J_0(t) = \int_{A_0}^{t} \pi_\omega^3(\tau) p_0(\tau)\, d\tau,$$

де

$$A_0 = \begin{cases} \omega, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^\omega |\pi_\omega(\tau)|^3 p_0(\tau)\, d\tau < +\infty, \\ a, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^\omega |\pi_\omega(\tau)|^3 p_0(\tau)\, d\tau = +\infty, \end{cases}$$

$$J_1(t) = \int_{A_1}^{t} \frac{p_0(\tau)}{J_0(\tau)}\, d\tau, \quad J_i(t) = \int_{A_i}^{t} J_{i-1}(\tau) d\tau, \quad (i = 2, 3)$$

де

$$A_1 = \begin{cases} a_0, & \text{якщо} \quad \int\limits_{a_0}^\omega \frac{p_0(\tau)}{|J_0(\tau)|}\, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \int\limits_{a_0}^\omega \frac{p_0(\tau)}{|J_0(\tau)|}\, d\tau < +\infty, \end{cases} \qquad a_0 \in [a, \omega[,$$

$$A_i = \begin{cases} a_0, & \text{якщо} \quad \int\limits_{a_0}^\omega |J_{i-1}(\tau)| d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \int\limits_{a_0}^\omega |J_{i-1}(\tau)| d\tau < +\infty \end{cases} \qquad (i = 2, 3).$$

$$Y(t) = -\frac{1}{\sigma} \ln(\alpha_0(-\frac{1}{\sigma}) K(\lambda_0) J_0(t)), \quad q(t) = \frac{Y'(t)}{\alpha_0 J_3(t)}.$$

Основні результати

Теорема 1. *Нехай* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$. *Для існування у диференціального рівняння (1)* $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$*-розв'язків необхідно, щоб виконувались нерівності*

$$\alpha_0 \nu_0 \lambda_0 (2\lambda_0 - 1)(3\lambda_0 - 2) > 0, \quad \alpha_0 \nu_1 K(\lambda_0) \pi_\omega(t) > 0, \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[, \tag{12}$$

і наступні умови

$$\alpha_0\sigma K(\lambda_0)J_0(t)<0 \quad \text{\textit{при}} \quad t\in]a,\omega[, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_0'(t)}{J_0(t)}=\pm\infty, \tag{13}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_1'(t)}{J_1(t)}=\frac{1}{\lambda_0-1}, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_2'(t)}{J_2(t)}=\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1} \tag{14}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_3'(t)}{J_3(t)}=\frac{2\lambda_0-1}{\lambda_0-1}, \quad \lim_{t\uparrow\omega}q(t)=1, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\alpha_0\pi_\omega(t)J_3(t)}{Y(t)}=\frac{3\lambda_0-2}{\lambda_0-1},$$

причому кожний такий розв'язок допускає при $t\uparrow\omega$ наступні асимптотичні зображення

$$y(t)=-\frac{1}{\sigma}\ln(\alpha_0(-\frac{1}{\sigma})K(\lambda_0)J_0(t))+o(1),$$

$$y^{(k)}(t)=\alpha_0J_{4-k}(t)[1+o(1)], \quad (k=1,2,3). \tag{15}$$

Доведення. Нехай $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$ і $y:[t_0,\omega[\longrightarrow\Delta_{Y_0}$ – $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язок диференціального рівняння (1). Тоді згідно з (1), умовами (5), (7) і уведеними позначеннями

$$\operatorname{sign}y(t)=\nu_0, \quad \operatorname{sign}y'(t)=\nu_1, \quad \operatorname{sign}y''(t)=\alpha_0\lambda_0,$$

$$\operatorname{sign}y'''(t)=\alpha_0[(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)], \quad \operatorname{sign}y^{(4)}(t)=\alpha_0. \tag{16}$$

При цьому, як вже було встановлено, виконується умова (12).

Крім того, з (7) випливає, що

$$y^{(4)}(t)=\frac{y^{(4)}(t)}{y'''(t)}\frac{y'''(t)}{y''(t)}\frac{y''(t)}{y'(t)}\frac{y'(t)}{y(t)}y(t)\sim\frac{\lambda_0(2\lambda_0-1)(3\lambda_0-2)}{(\lambda_0-1)^4}\frac{y(t)}{\pi_\omega^4(t)} \text{ при } t\uparrow\omega,$$

$$y^{(4)}(t)=\frac{y^{(4)}(t)}{y'''(t)}\frac{y'''(t)}{y''(t)}\frac{y''(t)}{y'(t)}y'(t)\sim\frac{\lambda_0(2\lambda_0-1)}{(\lambda_0-1)^3}\frac{y'(t)}{\pi_\omega^3(t)} \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega$$

і тому з (1) дістаємо

$$\frac{y(t)}{e^{\sigma y(t)}}=\frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^4}{\lambda_0(2\lambda_0-1)(3\lambda_0-2)}\pi_\omega^4(t)p_0(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega \tag{17}$$

і

$$\frac{y'(t)}{e^{\sigma y(t)}}=\frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0-1)}\pi_\omega^3(t)p_0(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{18}$$

З цих співвідношень зокрема отримуємо наступні знакові умови

$$\nu_0 = \alpha_0 \mathrm{sign}[\lambda_0(2\lambda_0-1)(3\lambda_0-2)], \quad \nu_1 = \alpha_0 \mathrm{sign}\,[\lambda_0(\lambda_0-1)(2\lambda_0-1)\pi_\omega(t)],$$

і тоді виконуються нерівності (12), а також згідно з уже встановленим маємо, що

$$\nu_0 = \nu_1.$$

Далі, інтегруючи асимптотичне співвідношення (18) на проміжку від t_0 до t, знаходимо

$$\int\limits_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{ds}{e^{\sigma s}} = \frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0-1)} \int\limits_{t_0}^{t} \pi_\omega^3(t) p_0(\tau)[1+o(1)]d\tau, \quad \text{де} \quad s = y(t). \tag{19}$$

Враховуючи, що в (19) $y(t) \to Y_0 = \pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, а також правило обрання границь інтегрування A_0 в інтегралі J_0, знаходимо

$$-\frac{1}{\sigma}e^{-\sigma y}\Big|_{y(t_0)}^{y(t)} = \frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0-1)} \int\limits_{t_0}^{t} \pi_\omega^3(t) p_0(\tau)[1+o(1)]d\tau$$

$$e^{-\sigma y(t)} = \alpha_0(-\frac{1}{\sigma})K(\lambda_0)J_0(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{20}$$

звідки ми отримуємо першу умову з (13). Прологарифмуємо вираз (20)

$$-\sigma y(t) = \ln(\alpha_0(-\frac{1}{\sigma})K(\lambda_0)J_0(t)[1+o(1)]) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{21}$$

і отримаємо перше з асимптотичних співвідношень (15) для $y(t)$. Використовуючи властивості (17), отримаємо, що

$$y(t) = \frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^4}{\lambda_0(2\lambda_0-1)(3\lambda_0-2)} \frac{\pi_\omega(t)J_0'(t)}{e^{-\sigma y(t)}}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{22}$$

або з урахуванням отриманого значння $y(t)$

$$y(t) = \frac{\alpha_0(\lambda_0-1)^4}{\lambda_0(2\lambda_0-1)(3\lambda_0-2)} \frac{\pi_\omega(t)J_0'(t)}{\alpha_0(-\frac{1}{\sigma})K(\lambda_0)J_0(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{23}$$

або

$$y(t) = \frac{\lambda_0-1}{3\lambda_0-2} \frac{\pi_\omega(t)J_0'(t)}{(-\frac{1}{\sigma})J_0(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{24}$$

де $\pi_\omega(t)J_0'(t) > 0$, $\operatorname{sign} J_0 = \operatorname{sign}\pi_\omega$. Оскільки при $t \uparrow \omega$, $y(t) \to Y_0 = \pm\infty$, то звідси випливає справедливість другої граничної умови (13).
Далі отримаємо асимптотичні співвідношення для похідних першого, другого та третього порядку для розв'язку, визначеного першою формолою (15). Підставляючи перше асимптотичне співвідношення з (15) у праву частину рівняння (1), дістанемо, що

$$y^{(4)}(t) = \alpha_0 p_0(t) e^{\sigma Y(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{25}$$

Інтегруючи (25) на проміжку від t_0 до t з урахуванням правила обрання нижньої границі інтегрування A_1 в інтегралі $J_1(t)$, ми отримаємо асимптотичне співвідношення

$$y'''(t) = \alpha_0 J_1(t)[1 + o(1)], \quad t \uparrow \omega, \tag{26}$$

тобто має місце друге з асимптотичних співвідношень (15) при $k = 3$. Звідси з урахуванням правил обрання границь інтегрування A_2 та A_3 в інтегралів $J_2(t)$ і $J_3(t)$ в результаті інтегрування на проміжку від t_0 до t співвідношення (26) таким же чином встановлюємо справедливість інших асимптотичних співвідношень (15) при $k = 2$ і $k = 1$. З отриманих асимптотичних співвідношень (15) і того факту, що $y(t) \sim Y(t)$, з урахуванням граничних умов (7) безпосередньо випливають перше, друге та третє граничні співвідношення з (14).
Доведемо справедливість четвертої умови (14). Оскільки

$$q(t) = \frac{Y'(t)}{\alpha_0 J_3(t)} = \frac{e^{-\sigma Y(t)} \frac{J_0'(t)}{J_0(t)}}{\alpha_0 J_3(t)} = \frac{\alpha_0 K(\lambda_0) J_0'(t)}{\alpha_0 J_3(t)} = \frac{\alpha_0 K(\lambda_0) \pi_\omega^3(t) p_0(t)}{\alpha_0 J_3(t)}$$

і згідно з першою і третьою граничною умовою з (14)

$$J_3(t) = \frac{J_3(t)}{J_2(t)} \frac{J_2(t)}{J_1(t)} \frac{J_1(t)}{J_1'(t)} J_1'(t) =$$

$$= \frac{J_3(t)}{J_3'(t)} \frac{J_2(t)}{J_2'(t)} \frac{J_1(t)}{J_1'(t)} J_1'(t) \sim \frac{(\lambda_0 - 1)^3}{(2\lambda_0 - 1)\lambda_0} \pi_\omega^3(t) p_0(t) = K(\lambda_0) \pi_\omega^3(t) p_0(t) \text{ при } t \uparrow \omega,$$

звідси отримаємо то $q(t) \sim 1$ при $t \uparrow \omega$, тобто має місце четверта з граничних умов з (14). Далі доведемо справедивість граничної умови п'ять з (14) Для доведення застосуємо правило Лопіталя у формі Штольця. При цьому з урахуванням четветої з умов (14) дістанемо, що

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y'(t)}{\alpha_0(\pi_\omega(t)J_3(t))'}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y'(t)}{\alpha_0 J_3(t)\left[\frac{3\lambda_0-2}{\lambda_0-1}+o(1)\right]}=\frac{\lambda_0-1}{3\lambda_0-2},$$

що доводить справедливість п'ятої з граничних умов (14).

Теорему повністю доведено.

Теорема 2. *Нехай* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$ *і виконуються умови (12)-(14). Нехай, крім того*

$$\lim_{t\uparrow\omega}(1-q(t))|Y(t)|^{\frac{3}{4}}=0 \quad i \quad \alpha_0\sigma>0. \tag{27}$$

Тоді диффеpенціальне рівняння (1) має двопараметричну сімъ'ю $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$ *розв'язків, що задовольняють при* $t\uparrow\omega$ *асимптотичні зображення*

$$y(t)=Y(t)+o(1), y^{'}(t)=\alpha_0 J_3(t)\left[1+\frac{o(1)}{|Y(t)|^{\frac{3}{4}}}\right], y^{''}(t)=\alpha_0 J_2(t)\left[1+\frac{o(1)}{|Y(t)|^{\frac{1}{2}}}\right],$$

$$y^{'''}(t)=\alpha_0 J_1(t)\left[1+\frac{o(1)}{|Y(t)|^{\frac{1}{4}}}\right]. \tag{28}$$

Доведення. Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$ і виконуються умови (12)-(14) і (27). Покажемо, що у цьому випадку рівняння (1) має хоча б один $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язок, що задовольняє при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (15), і з'ясуємо питання про кількість таких розв'язків. Для цього спочатку рівняння (1) за допомогою замін

$$y(t)=Y(t)+y_1(t), \quad y^{(k)}(t)=\alpha_0 J_{4-k}(t)[1+y_{k+1}(t)], \quad (k=1,2,3) \tag{29}$$

зведемо до системи диференціальних рівнянь

$$y_1'=\alpha_0 J_3(t)\left[1-q(t)+y_2\right], \quad y_2'=\frac{J_3'(t)}{J_3(t)}(y_3-y_2),$$

$$y_3'=\frac{J_2'(t)}{J_2(t)}(y_4-y_3), \quad y_4'=\frac{J_1'(t)}{J_1(t)}\left[(1+r(t))\frac{e^{\sigma(Y(t)+y_1}}{e^{\sigma Y(t)}}-1-y_4\right]. \tag{30}$$

Цю систему будемо розглядати на множині

$$\Omega=[t_1,\omega[\times D, \quad \text{де} \quad D=\left\{(y_1,y_2,y_3,y_4)\in\mathbb{R}^4_{\frac{1}{2}}\ :|y_i|\le\frac{1}{2},\ (i=1,\dots,4)\right\}$$

і число $t_1 \in [a, \omega[$ обрано таким чином, що

$$Y(t) + y_1 \subset \Delta_{Y_0} \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[\quad \text{і} \quad |y_1| \le \frac{1}{2}.$$

На даній множині праві частини системи неперервні і мають неперервні частині похідні до другого порядку включно за змінними y_i $(i = 1, \dots, 4)$. Використовуючи останій факт, уточнимо вигляд четвертого рівняння системи. Розкладаючи $\frac{e^{\sigma(Y(t)+y_1)}}{e^{\sigma Y(t)}}$ при фіксованому $t \in [t_1, \omega[$ за формолую Тейлора по змінній y_1 в околі нуля з залишковим членом у формі Лагранжа, будемо мати

$$\frac{e^{\sigma(Y(t)+y_1)}}{e^{\sigma Y(t)}} = 1 + y_1 + \frac{1}{2!}\frac{e^{\sigma(Y(t)+\xi_1)}}{e^{\sigma Y(t)}} y_1^2, \quad \text{де} \quad |\xi_1| < |y_1|.$$

Тому останнє рівняння системи запишеться у вигляді

$$y_4' = \frac{J_1'(t)}{J_1(t)}\left[(1 + r(t))(1 + y_1 + \frac{1}{2!}e^{\xi_1})y_1^2 - 1 - y_4\right]. \tag{31}$$

Оскільки $|\xi_i| < |y_1|$ і $|y_1| \to 0$, то існує δ таке, що четверте рівняння системи (30) може бути записаним у вигляді

$$y_4' = \frac{J_1'(t)}{J_1(t)}\left[r(t) + (1 + r(t))y_1 - y_4 + R(t, y_1)\right],$$

$$\text{де} \quad |R(t, y_1| \leqslant y_1^2 \quad \text{при} \quad |y_1| \leqslant \delta \quad \text{для деякого} \quad 0 < \delta < \frac{1}{2}. \tag{32}$$

Надалі отриману систему будемо розглядати на множині $\Omega_0 = [t_1, \omega[\times \mathbb{R}^4_\delta$. Згідно з теоремою 1 маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \xi_1(t) = \frac{3\lambda_0 - 2}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \xi_2(t) = \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1},$$
$$\lim_{t\uparrow\omega} \xi_3(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \xi_4(t) = \frac{1}{\lambda_0 - 1}. \tag{33}$$

З урахуванням виду функції $\xi_i(t)$, перепишемо систему (30) у вигляді

$$\begin{aligned}
y_1' &= \tfrac{Y(t)}{\pi_\omega(t)}\left\{\xi_1(t)(1 - q(t)) + y_2\right\},\\
y_2' &= \tfrac{1}{\pi_\omega(t)}\left\{\xi_2(t)(y_3 - y_2)\right\},\\
y_3' &= \tfrac{1}{\pi_\omega(t)}\left\{\xi_3(t)(y_4 - y_3)\right\},\\
y_4' &= \tfrac{1}{\pi_\omega(t)}\left\{\xi_4(t)\left[r(t) + (1 + r(t))y_1 - y_4 + R(t, y_1)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{34}$$

З метою асимптотично вірівняти множники при $t \uparrow \omega$ в правій частині рівнянь системи (37) застосуємо до неї додаткове перетворення

$$y_1(t) = \upsilon_1(t), \quad y_2(t) = |Y(t)|^{-\frac{3}{4}}\upsilon_2(t),$$

$$y_3(t) = |Y(t)|^{-\frac{1}{2}}\upsilon_3(t), \quad y_4(t) = |Y(t)|^{-\frac{1}{4}}\upsilon_4(t). \tag{35}$$

В результаті цього перетворення отримаємо систему диференціальних рівнянь (8), в якій

$$h(t) = \frac{|Y(t)|^{\frac{1}{4}}}{\pi_\omega(t)} \quad (h(t) \neq 0), \quad f_1(t) = \xi_1(t)(1 - q(t))|Y(t)|^{\frac{3}{4}} \operatorname{sign} Y(t),$$

$$f_2(t) = 0, \quad f_3(t) = 0, \quad f_4(t) = \xi_4(t)r(t), \tag{36}$$

$$c_{11}(t) = 0, \quad c_{12}(t) = \xi_1(t) \operatorname{sign} Y(t), \quad c_{13}(t) = 0, \quad c_{14}(t) = 0,$$

$$c_{21}(t) = 0, \quad c_{22}(t) = 0, \quad c_{23}(t) = \xi_2(t), \quad c_{24}(t) = 0,$$

$$c_{31}(t) = 0, \quad c_{32}(t) = 0, \quad c_{33}(t) = 0, \quad c_{34}(t) = \xi_3(t),$$

$$c_{41}(t) = \xi_4(t)(1 + r(t)), \quad c_{42}(t) = 0, \quad c_{43}(t) = 0, \quad c_{44}(t) = 0,$$

а також

$$V(t, \upsilon_1) = \xi_4(t)R(t, \upsilon_1). \tag{37}$$

В силу умов (33) і (27) та вигляду функції $Y(t)$ випливає, що в цій системі $\lim_{t\uparrow\omega} f_i(t) = 0$, де $(i = 1, .., 4)$ і $\int\limits_{t_1}^{\omega} \frac{|Y(t)|^{\frac{1}{4}}}{\pi_\omega(t)}\, dt = +\infty$, тобто виконується умова (9) і перша умова з (10). Також тут функція $V(t, \upsilon_1)$ згідно з умовами на функцію $R(t, \upsilon_1)$ (32) задовольняє умові (11). Крім того в силу умов (33) і вигляду функції $Y(t)$, і що $\operatorname{sign} Y(t) = \frac{\nu_0}{\operatorname{sign}\sigma}$, гранична матриця коефіцієнтів $(c_{i,k=1}^4(t))$ при $t \uparrow \omega$ має наступний вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3\lambda_0 - 2}{\lambda_0 - 1}(\frac{\nu_0}{\operatorname{sign}\sigma}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\lambda_0 - 1}{\lambda_0 - 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1} \\ \frac{1}{\lambda_0 - 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З урахуванням (13) характеристичне рівняння цієї сталої матриці має наступний вигляд

$$\lambda^4 = \frac{\alpha_0}{\operatorname{sign}\sigma} \frac{|3\lambda_0 - 2||2\lambda_0 - 1||\lambda_0|}{(\lambda_0 - 1)^4}. \tag{38}$$

Знайдемо корені цього рівняння. У випадку, коли $\frac{\alpha_0}{\operatorname{sign}\sigma} = 1$, характеристичне рівняння може бути записаним у виді

$$\left(\lambda^2 - \sqrt{\frac{|3\lambda_0 - 2|(|2\lambda_0 - 1|)|\lambda_0|}{(\lambda_0 - 1)^4}}\right)\left(\lambda^2 + \sqrt{\frac{|3\lambda_0 - 2|(|2\lambda_0 - 1|)|\lambda_0|}{(\lambda_0 - 1)^4}}\right) = 0$$

і воно має два дійсних кореня

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt[4]{|3\lambda_0 - 2||2\lambda_0 - 1||\lambda_0|}}{|\lambda_0 - 1|} \tag{39}$$

і два комплексно спряжених кореня

$$\lambda_{3,4} = \pm i\frac{\sqrt[4]{|3\lambda_0 - 2||2\lambda_0 - 1||\lambda_0|}}{|\lambda_0 - 1|}. \tag{40}$$

Таким чином, оскільки виконується умова $\frac{\alpha_0}{\operatorname{sign}\sigma} > 0$, то в цьому випадку характеристичне рівняння (38) має чотири комплексноспряжені корені з відмінною від нуля дійсною частиною.

Тоді на основі леми 2 система диференціальних рівнянь (8) має дво-параметричну сім'ю розв'язків v_i, де $(i = 1, 2, 3, 4)$ на проміжку $[t_0, \omega[\to \mathbb{R}^4$, які прямують до 0 при $t \uparrow \omega$. Кожному такому розв'язку з урахуванням замін (29) і (35) відповідає розв'язок $y(t) : [t_0, \omega[\to \mathbb{R}$ диференціального рівняння (1), для якого мають місце асимптотичні зображення (28).

Неважко також перевірити з урахуванням цих асимптотичних зображень і вигляду рівняння (1), що побудовані нами розв'язки є $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язками.

Теорему повністю доведено.

Зауваження 1. Питання про існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків у диференціального рівняння (1) у випадку, коли $\frac{\alpha_0}{\operatorname{sign}\sigma} < 0$, залишається відкритим і воно потребує додаткового дослідження складного випадку, коли серед коренів характеристичного рівняння е два чисто уявних кореня.

Висновки

В данній роботі для рівняння зі швидкозмінною нелінійністю отримані необхідні і достатні умови існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків у випадку, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ (не особливий випадок), і вирішено питання про кількість таких розв'язків.

Список літератури

1. **Evtukhov V.M., Drik N.G.** Asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation / V. M. Evtukhov, N. G. Drik // Georgian Math. J. – 1996. – Vol. 3, №2. – P. 101–120.
2. **Евтухов В.М., Шинкаренко В.Н.** Асимптотические представления решений двучленных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью / В. М. Евтухов, В. Н. Шинкаренко // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, №3. – С. 308–322.
3. **Евтухов В.М.,Харьков В.М.** Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / В. М. Евтухов, В. М. Харьков // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, №9. – С. 1311–1323.
4. **Евтухов В.М.,Самойленко А.М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Укр. мат. ж. – 2010. – Т. 62, №1. – С. 52–80.
5. **Евтухов В.М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов. дис. ... д. физ.-мат. наук. – Киев, 1997. – 295 с.
6. **Евтухов В.М.,Самойленко А.М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, №5. – С. 628–650.
7. **Евтухов В.М., Черникова А.Г.** Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстроменяющейся нелинейностью / В. М. Евтухов, А. Г. Черникова // Укр. мат. ж. – 2017. – Т. 69, №10. – С. 1345–1363.
8. **Evtukhov V.M., Sharay N.V.** Asymmptotic behaviour of solutions of third order differential equations with rapidly varying nonlinearrities / V. M. Evtukhov, N. V. Sharay // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2019. – Vol. 77. – P. 1–15.

Evtukhov V. M., Golubev S. V.

Asymptotic behaviour of solutions of one class of the fourth-order nonlinear differential equations

Summary

The asymptotic behaviour as $t \uparrow \omega$ of one of the possible types of $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-solutions of a binomial non-autonomous fourth-order ordinary differential equation with exponential nonlinearity and a continuous and non-zero in some left neighbourhood ω ($\omega \leq +\infty$) coefficient $p(t)$ is investigated. First, using a priori asymptotic properties of the considered $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-solutions, necessary conditions for their existence are established, as well as asymptotic representations of these solutions and their derivatives up to the third order. The question of the actual existence of solutions with the obtained asymptotic representations is solved by reducing it to the question of the existence of solutions that vanish at a specific point of a system of quasilinear differential equations. This system is obtained as a result of some transformations of the original equation, taking into account the kind of established asymptotic representations. In addition, the question of the number of solutions with found asymptotic representations is also resolved.

Key words: non-autonomous differential equations, exponential nonlinearity, $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- solutions, asymptotic behavior of $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- solutions.

References

1. Evtukhov, V.M., Drik, N.G. (1996). Asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation. *Georgian Math. J.*, Vol. 3, №2, P. 101–120.
2. Evtukhov, V.M., Shinkarenko, V.N.) (2008). Asimptotycheskie predstavlenia resheniy dvuchlennykh neavtonomnykh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy n-go poraydka s exponencialnoy nelineynostyu [Asymptotic Representations of Solutions of Two-Term Nonautonomous nth-Order Ordinary Differential Equations with Exponential Nonlinearity]. *Differential'nye Uravnenja,* Vol. 44, № 3, P. 308–328.
3. Evtukhov, V.M., Harkov, V.M. (2007). Asimptotycheskie predstavlenia resheniy suschestvenno nelineynykh differentsialnykh uravneniy vtorogo poryadka [Asymptotic representations of solutions of second-order essentially nonlinear differential equations]. *Differential' nye Uravnenja,* Vol. 43, №10, P. 1311–1323.
4. Evtukhov, V.M., Samojlenko, A.M. (2010). Usloviya suschestvovaniya ischezayuschkh v osoboy tochke resheniy u veschestvennykh neavtonomnykh sistem kvazilineynykh differenstialnykh uravneniy [Conditions for the existence of solutions of real

nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point]. *Ukr.Mat. J,* Vol. 62, №1, P. 52–80.

5. Evtukhov, V.M. (1997). Asimptotycheskie predstavlenia resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentialnykh uravneniy [Asymptotic representations of solutions of non-autonomous ordinary differential equations]. *Diss.... d-ra fiz.-mat.nauk, Kiev.*
6. Evtukhov, V.M., Samojlenko, A.M. (2011). Asimptotycheskie predstavlenia resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentialnykh uravneniy s pravilno menyayuschimisya nelineynostyami [Asymptotic representations of solutions of nonautonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities]. *Differential'nye Uravnenja,* Vol. 47, №5, P. 628–650.
7. Evtukhov, V.M.,Chernikova, A.G. (2017). Asimptotycheskoe povedenie resheniy obyknovennykh differenstialnykh uravneniy vtorogo poryadka s bystromeyayuscheisya nelineynostyu [Asymptotic behavior of the solutions of second-order ordinary differential equations with rapidly changing nonlinearities]. *Ukrann. Mat. Zh,* Vol. 69, №10, P. 1345–1363.
8. Evtukhov, V.M., Sharay, N.V. (2019). Asymmptotic behaviour of solutions of third order differential equations with rapidly varying nonlinearrities. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics,* Vol. 77, P. 1–15.