

УДК 519.6

**Ю. О. Григор'єв**

Одеський національний морський університет

## МЕТОД НЬЮТОНА ТА ЙОГО ВІЗУАЛІЗАЦІЯ

Актуальність роботи. Математичне модулювання в різних галузях науки і техніки часто приводить до нелінійних рівнянь або систем таких рівнянь. Далеко не завжди ці рівняння можна розв'язати точними методами. Частіше доводиться застосовувати наближені методи. Одним із найбільш популярних серед них є метод Ньютона. У сучасних роботах метод Ньютона часто служить основою для розробки нових наближених методів, які прискорюють збіжність ітераційних процесів або застосовуються для розв'язання систем великих порядків.

Мета роботи. Візуалізувати роботу алгоритму розв'язання рівняння, а також системи рівнянь за методом Ньютона, щоб результати цієї роботи можна було використовувати при складанні електронних підручників з вивчення даного методу. Іншою метою є дослідження методу у разі, коли система має декілька розв'язків; вивчити можливість застосування методу для рівнянь з нескінченною кількістю розв'язків.

MSC: 65H05, 65H10.

Ключові слова: нелінійне рівняння, система нелінійних рівнянь, похідна, матриця Якобі, метод Ньютона.

DOI: 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).285581.

### Вступ

У даній роботі розглядається метод Ньютона [1] наближеного розв'язання рівняння

$$f(x) = 0. \quad (1)$$

Якщо рівняння містить лише одну змінну  $x$ , то наближені значення  $x_i$  кореня  $x^*$  обчислюють за формулою

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Тут  $x_0$  — початкове значення шуканого кореня. Метод Ньютона узагальнюють і для рівнянь у багатовимірних просторах:  $f : R^n \rightarrow R^m$ . Для цього у формулі (1) похідну  $f'(x_{i-1})$  замінюють матрицею Якобі, а ділення — оберненою матрицею. В цьому випадку формула набуває вигляду:

$$x_i = x_{i-1} - (f'(x_{i-1}))^{-1} f(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Метод Ньютона часто використовують у прикладних задачах при розв'язанні нелінійних рівнянь [2–6], а також цей метод часто служить основою для розробки нових наближених методів, які прискорюють збіжність ітераційних процесів або застосовують для розв'язання систем великих порядків. Так, для розв'язання систем  $n$  нелінійних рівнянь з  $n$  невідомими для великих значень  $n$  в роботі [7] запропоновано новий метод розв'язання з використанням блочних матриць Якобі. Метод Ньютона має квадратичний порядок збіжності. Для підвищення його порядку розроблено більше 200 різних багатокрокових ітераційних методів [8]. Звичайно метод Ньютона застосовують у випадках, коли матриця Якобі є квадратною, а визначник цієї матриці відмінний від нуля. У роботах [9–11] метод був узагальнений на випадок  $m \neq n$ . В роботі [9] було запропоновано обидві частини матричного рівняння (1) помножити на матрицю, що спряжена до якобіана. Таким чином, знаходився псевдорозв'язок рівняння (1). У роботах [10; 11] якобіан прямокутної форми подавався у вигляді добутку трьох матриць:

$$f'(x_{i-1}) = R_{i-1} J_{\sigma} S_{i-1},$$

де  $R_{i-1}$  та  $S_{i-1}$  — невироджені матриці, а

$$J_{\sigma} = \begin{pmatrix} I_{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тут  $\sigma$  — ранг матриця Якобі. Обернена матриця  $(f'(x_{i-1}))^{-1}$  замінювалась напівоберненою матрицею

$$J_{i-1}^{-} = S_{i-1}^{-1} J_{\sigma}^* R_{i-1}^{-1},$$

де  $J_{\sigma}^*$  — спряжена матриця. В результаті ітераційна схема прийняла вигляд:

$$x_i = x_{i-1} - J_{i-1}^{-} f(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots$$

В роботах [9; 11] одержано деякі достатні умови збіжності цього ітераційного процесу до точного розв'язку рівняння (1).

У даній роботі у випадках якобіана прямокутної форми підбирались матриці, що є оберненими до матриць Якобі з правої сторони. Першою метою роботи є візуалізація роботи алгоритму для того, щоб результати

можна було використовувати при складанні електронних підручників, наприклад, в книгах системи дистанційного навчання moodle. Мовою програмування Python складено код реалізації цього методу та складено код для його візуалізації, тобто для отримання анімації роботи алгоритму. Другою метою є дослідження роботи алгоритму у випадках, коли рівняння (або система рівнянь) має декілька розв'язків чи безліч розв'язків. В усіх випадках роботу алгоритму наочно було продемонстровано на рисунках.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

### 1. Метод Ньютона для рівняння з однією змінною

У цьому розділі розглянемо метод Ньютона наближеного розв'язання рівняння (1) з однією змінною. Розрахункова формула наближеного розв'язання цього рівняння має вигляд (2), де  $x_i$  — наближені значення шуканого кореня  $x^*$ ,  $x_0$  — його початкове значення. Для візуалізації роботи методу Ньютона розв'язання рівняння (1) ми взяли функцію

$$f(x) = x^3 - x^2 - 1$$

та початкову точку  $x_0 = 3$ . На рис. 1 зображено графік функції та ламану, що ілюструє роботу алгоритму Ньютона.

Анімацію роботи алгоритму Ньютона ми створили мовою Python, включивши інтерактивний режим відображення графіків, застосувавши команду `plt.ion()`. Виключається режим командою `plt.ioff()`. Для оновлення даних використовуємо команди

```
plt.draw()
```

```
plt.gcf().canvas.flush_events()
```

із затримкою 0.001 секунди:

```
time.sleep(0.001)
```

На рис. 2 представлено фрагмент коду.

Тут цикл ведеться від 0 до 46 з кроком 0.1.

При  $i = 0$  вимальовується точка  $x_0$  на рис. 1 (команди 64, 65).

При  $0 < i < 17$  вимальовуються відрізок  $x_0M_0$  (команди 66–69). Цей відрізок розбивається на частини довжини 0.1 і вимальовується кожна частина цього відрізка.

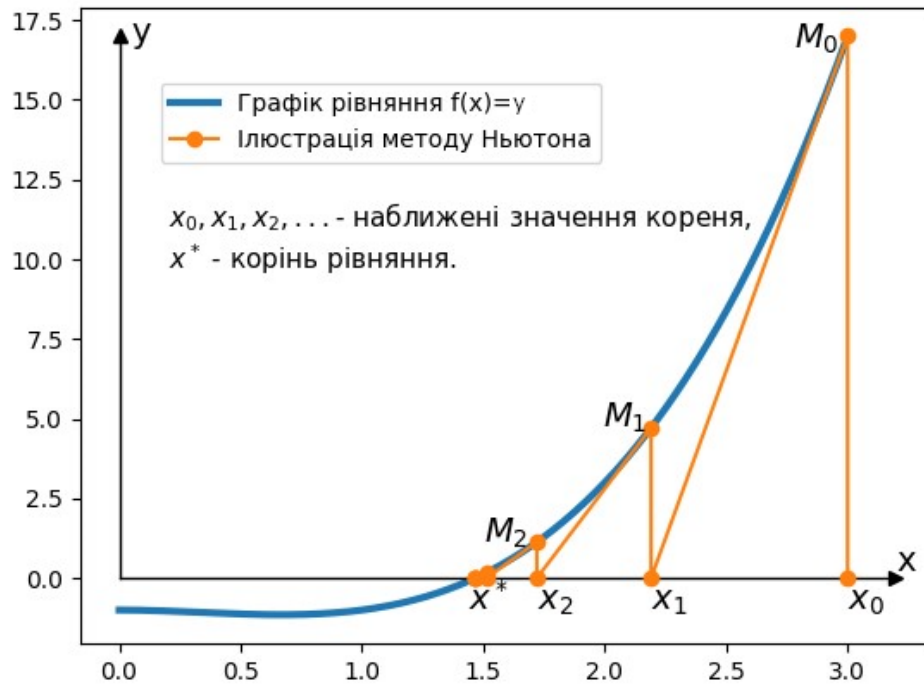


Рис. 1. Візуалізація роботи алгоритму Ньютона

При  $i = 17$  вимальовується точка  $M_0$  (команди 70–72).

При  $17 < i < 34$  вимальовуються кусочки відрізка  $M_0x_1$  (команди 73–79). Для цього ми побудували вектор  $\overline{M_0x_1}$  за координатами точок  $M_0$  та  $x_1$ , поділили на його довжину та отримали одиничний напрямний вектор  $\bar{e}_1$  відрізка  $M_0x_1$ . Координати цього вектора ми позначили через  $e1[0]$  та  $e1[1]$ :

$$\bar{e}_1 (e1[0], e1[1]).$$

На шляху  $M_0x_1$  вимальовуємо першу ділянку  $M_0P$  довжини 0.1. Щоб отримати координати точки  $P$ , користуємось векторною рівністю

$$\overline{OP} = \overline{OM_0} + 0.1\bar{e}_1,$$

де  $O$  — початок координат. Оскільки над векторами виконуються лінійні дії, то такі самі дії справедливі і для координат цих векторів:

$$x_p = x_0 + 0.1e1[0], \quad y_p = y_0 + 0.1e1[1],$$

де  $x_p, y_p$  — координати точки  $P$ ,  $x_0, y_0$  — координати точки  $M_0$ . Аналогічно вимальовуємо інші ділянки відрізка  $M_0x_1$ . В кодї це реалізовано командами 76 та 78. Так само вимальовуємо решту відрізків ламаної, що зображена на рис. 1.

```

63 for i in np.arange(0, 46, 0.1):
64     if i==0:
65         plt.plot(x[0], 0, 'o', color='orange', linewidth=4)
66     if i<17:
67         yp[0]=i
68         yp[1]=i+0.1
69         plt.plot(xp, yp, color='orange', linewidth=2)
70     if i==17:
71         line3.set_data(x[0], y[0])
72         plt.text(x[0]-0.22, y[0]-0.4, '$M_0$', fontsize=14)
73         yp[1]=y[0]
74     if i>17 and i<34:
75         xp[0]=xp[1]
76         xp[1]=xp[0]+0.1*e1[0]
77         yp[0]=yp[1]
78         yp[1]=yp[0]+0.1*e1[1]
79         plt.plot(xp, yp, color='orange', linewidth=2)

```

Рис. 2. Фрагмент коду створення анімації

Повністю код отримання анімації можна переглянути за посиланням:

<https://bit.ly/43fX85B>

Тут була використана програма написана мовою Python версії 3.10.5 та бібліотеки `time`, `numpy`, `matplotlib.pyplot`. Результат роботи алгоритму у форматі GIF можна переглянути за наступним посиланням:

<https://bit.ly/3PJrNr3>

## 2. Метод Ньютона для системи рівнянь

У цьому пункті розглянемо метод Ньютона для системи рівнянь. Якщо рівняння (1) задає систему рівнянь, то формулу (2) слід замінити формулою (3). Тут  $f'(x)$  — похідна Фреше (для багатовимірних просторів вона являє собою матрицю Якобі, що складається із частинних похідних функцій заданої системи),  $(f'(x))^{-1}$  — обернена матриця.

Приклад. За методом Ньютона розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 + y^2 - 9.1 = 0, \\ x^2 + y - 5 = 0. \end{cases}$$

Позначимо

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x^3 + y^2 - 9.1 \\ x^2 + y - 5 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$f'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix},$$

$(f'(\mathbf{x}))^{-1}$  — обернена матриця. Зауважимо, що обернена матриця існує, якщо визначник  $|f'(\mathbf{x})|$  відмінний від нуля, тобто

$$3x^2 - 4xy \neq 0.$$

Значить, обернена матриця не існує на прямих  $x=0$  та  $3x-4y=0$ . На цих прямих не можна брати початкові точки  $x = x_0, y = y_0$  для знаходження розв'язків системи за методом Ньютона. За початкову точку візьмемо  $x_0=3, y_0 = 5$ . При  $i = 0$  будемо мати

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 42.9 \\ 9 \end{pmatrix}, \\ f'(\mathbf{x}_0) &= \begin{pmatrix} 27 & 10 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad (f'(\mathbf{x}_0))^{-1} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 6 & -27 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

За формулою Ньютона (3) знайдемо перше наближення кореня

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 6 & -27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 42.9 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.57273 \\ 4.56364 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, підставляючи у формулу (3)  $\mathbf{x}_1$  замість  $\mathbf{x}_0$ , знайдемо  $\mathbf{x}_2$  — друге наближення кореня. Продовжуючи процес так далі, знайдемо на шостому кроці розв'язок системи

$$x_6 = 1.753, \quad y_6 = 1.927$$

з похибкою  $r = |f(x_6, y_6)| = 2.4 \cdot 10^{-5}$ .

На рис. 3 зображено графіки заданих рівнянь, маршрут отриманих наближень від заданої точки  $x_0 = 3, y_0 = 5$  до розв'язку системи  $x_6 = 1.753, y_6 = 1.927$  (червона ламана), а також лінії, на яких не можна брати початкові точки (штрихові лінії).

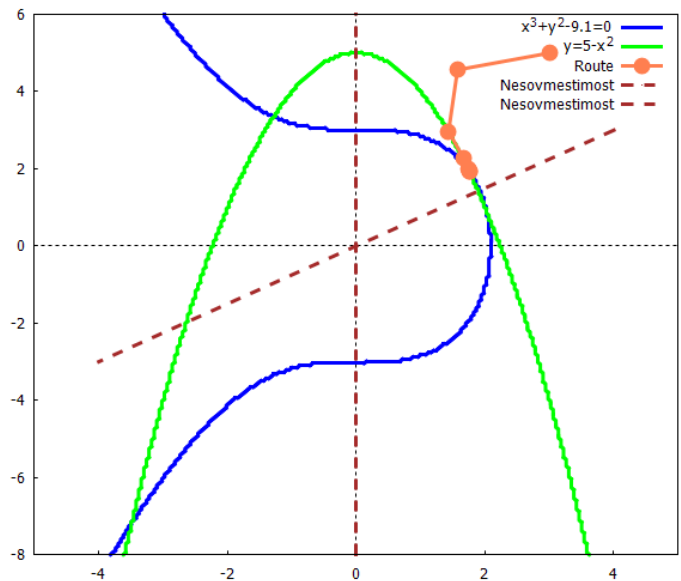


Рис. 3. Маршрут наближення від початкової точки (3,5)

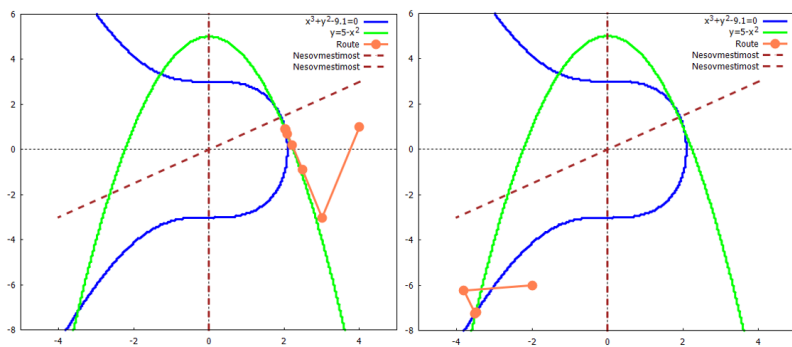


Рис. 4. Маршрути наближень від початкових точок (4,1) і (-2,-6)

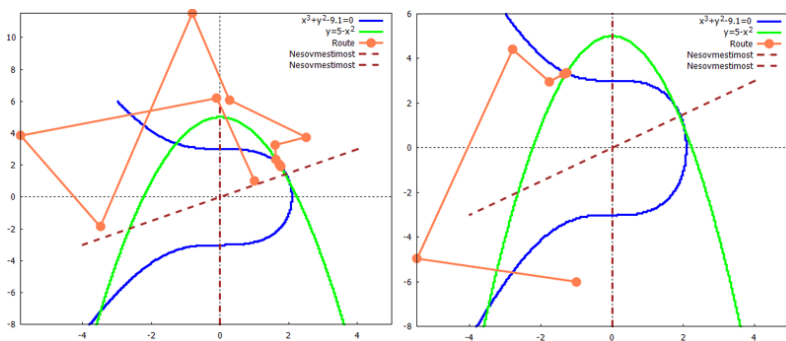


Рис. 5. Маршрути наближень від початкових точок (1,1) і (-1,-6)

На рис. 3 видно, що система рівнянь має чотири розв'язки. Взевши за початкову точку  $x_0 = 3, y_0 = 5$ , ми знайшли найближчий до цієї точки розв'язок. Взевши другу початкову точку  $x_0 = 4, y_0 = 1$ , знайдемо другий розв'язок  $x_7 = 2.022, y_7 = 0.9097$  (рис. 4 ліворуч). Взевши третю початкову точку  $x_0 = -2, y_0 = -6$ , знайдемо третій розв'язок  $x_4 = -3.491, y_4 = -7.186$  (рис. 4 праворуч). Взевши четверту початкову точку  $x_0 = -4, y_0 = 1$ , знайдемо четвертий розв'язок  $x_5 = -1.285, y_5 = 3.35$ . В розглянутих вище чотирьох випадках метод Ньютона приводив до розв'язку, найближче розташованого до вибраної початкової точки. Але, якщо початкова точка взята близько до лінії, де не можна брати початкові точки, то маршрут стає непередбачуваним і може привести не до найближчого розв'язку системи (рис. 5). На рис. 5 ліворуч за початкову точку було взято  $x_0 = 1, y_0 = 1$ , а праворуч за початкову точку було взято  $x_0 = -1, y_0 = -6$ . На правому рисунку друге наближення до кореня знаходиться недалеко від лінії, де не можна брати початкових точок.

### 3. Наближення до еліпса

У попередньому пункті ми розв'язали систему двох рівнянь з двома невідомими, яка мала чотири розв'язки. Цікаво, як буде вести себе метод Ньютона у випадку, коли рівняння має безліч розв'язків? У даному пункті ми розглянемо рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

при  $a = 5, b = 3$ . Коренями цього рівняння є всі точки еліпса. Знайдемо один із цих коренів, користуючись методом Ньютона. За початкову точку візьмемо  $x_0 = 6, y_0 = 5$ . Позначимо

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

Тоді

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Тут обернених матриць  $(f'(x))^{-1}$  у звичайному розумінні не існує. Але існує (і не одна) матриця, що є оберненою до отриманої матриці з правої



сторони. У якості такої візьмемо

$$(f'(x))^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{a^2}{2x} \\ \frac{b^2}{2y} \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що обернена матриця не існує на координатних осях  $x = 0$  та  $y = 0$ . На цих осях не можна брати початкових точок.

У вибраній початковій точці  $x_0 = 6$ ,  $y_0 = 5$  отримуємо

$$x_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f(x_0) = \frac{36}{25} + \frac{25}{9} - 1 = \frac{724}{225} = 3.218, \quad (f'(x_0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1.042 \\ 0.45 \end{pmatrix}.$$

За формулою Ньютона

$$x_1 = x_0 - (f'(x_0))^{-1} f(x_0)$$

знайдемо перше наближення

$$x_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.042 \\ 0.45 \end{pmatrix} 3.218 = \begin{pmatrix} 2.647 \\ 3.552 \end{pmatrix}.$$

На сьомому кроці отримуємо один із коренів рівняння:

$$x_7 = -0.122, \quad y_7 = 3.0$$

з похибкою  $f(x_7, y_7) = 3.8 \cdot 10^{-4}$ .

На рис. 6 ліворуч зображено графік еліпса та маршрут отриманих наближень від заданої точки  $x_0 = 6$ ,  $y_0 = 5$  до наближеного розв'язку рівняння  $x_7 = -0.122$ ,  $y_7 = 3.0$  (червона ламана).

Якщо за початкову точку візьмемо  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ , то дійдемо до іншого кореня рівняння  $x_4 = 4.442$ ,  $y_4 = 1.377$  (рис. 6, праворуч).

#### 4. Наближення до параболи

У даному пункті ми розглянемо рівняння параболи

$$x^2 - y = 0.$$

Коренями цього рівняння є всі точки параболи. Знайдемо один із цих коренів, користуючись методом Ньютона. За початкову точку візьмемо  $x_0 = -1$ ,  $y_0 = 7$ . Позначимо

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - y.$$

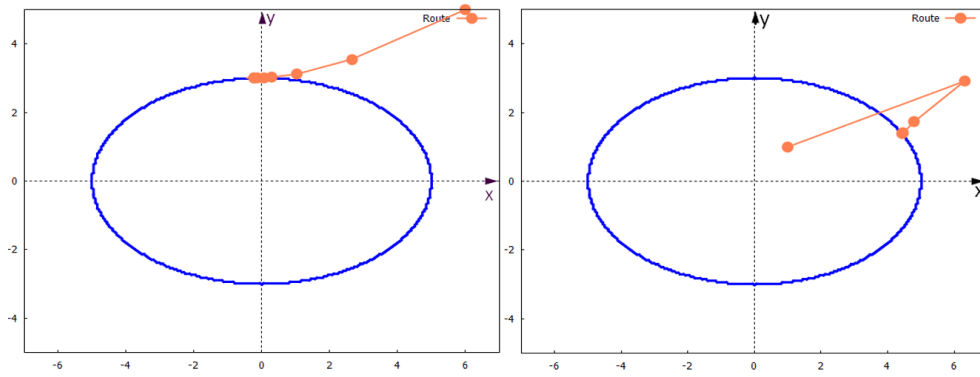


Рис. 6. Маршрути наближень від початкових точок (6,5) і (1,1)

Тоді

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \end{pmatrix}.$$

У якості оберненої з правої сторони візьмемо матрицю

$$(f'(x))^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2x} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що обернена матриця не існує на прямій  $x = 0$ . На цій прямій не можна брати початкових точок.

У вибраній початковій точці  $x_0 = -1$ ,  $y_0 = 7$  отримаємо

$$x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad f(x_0) = 1 - 7 = -6, \quad (f'(x_0))^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -0,5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

За формулою Ньютона (3) знайдемо перше наближення

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -0,5 \\ -1 \end{pmatrix} (-6) = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

На 3-му кроці ми отримали один із коренів рівняння:

$$x_3 = -2.269, \quad y_3 = 5.150$$

з похибкою  $f(x_3, y_3) = 3 \cdot 10^{-5}$ .

На рис. 7 ліворуч зображуємо графік параболи та маршрут отриманих наближень від заданої точки  $x_0 = -1$ ,  $y_0 = 7$  до наближеного розв'язку рівняння  $x_3 = -2.269$ ,  $y_3 = 5.150$  (червона ламана).

Якщо за початкову точку візьмемо  $x_0 = 3, y_0 = 1$ , то дійдемо до іншого кореня рівняння  $x_3 = 2.285, y_3 = 5.223$  (рис. 7, праворуч) з похибкою  $f(x_3, y_3) = 6 \cdot 10^{-8}$ .

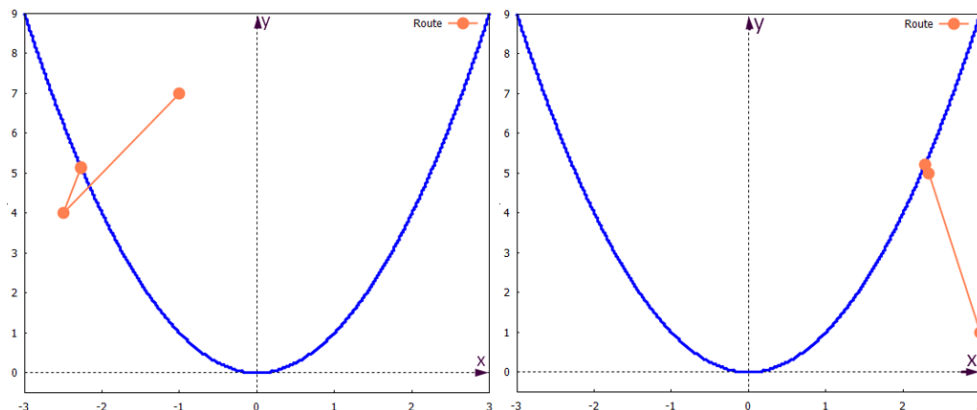


Рис. 7. Маршрути наближень від початкових точок  $(-1,7)$  і  $(3,1)$

### 5. Наближення до еліпсоїда

У даному пункті ми розглянемо рівняння еліпсоїда

$$4x^2 - 2xy + 3y^2 + 2yz + 2z^2 - x + y - z = 0.$$

Коренями цього рівняння є всі точки еліпсоїда. Знайдемо один із цих коренів, користуючись методом Ньютона. За початкову точку візьмемо  $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 1$ . Позначимо

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{x}) = 4x^2 - 2xy + 3y^2 + 2yz + 2z^2 - x + y - z.$$

Тоді

$$f'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 8x - 2y - 1 & -2x + 6y + 2z + 1 & 2y + 4z - 1 \end{pmatrix}.$$

У якості оберненої з правої сторони візьмемо матрицю

$$(f'(\mathbf{x}))^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{8x-2y-1} \\ \frac{1}{-2x+6y+2z+1} \\ \frac{1}{2y+4z-1} \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що обернена матриця не існує на площинах

$$8x - 2y - 1 = 0, \quad -2x + 6y + 2z + 1 = 0, \quad 2y + 4z - 1 = 0.$$

На цих площинах не можна брати початкових точок. У вибраній початковій точці  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 1$  отримаємо

$$(f'(x_0))^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

За формулою Ньютона (3) знайдемо перше наближення

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$x_1 = \frac{1}{9} \approx 0.111, \quad y_1 = -\frac{1}{9} \approx -0.111, \quad z_1 = \frac{8}{9} \approx 0.889.$$

На четвертому кроці ми отримали один із коренів рівняння:

$$x_4 = 0.194, \quad y_4 = -0.324, \quad z_4 = 0.777$$

з похибкою  $f(x_4, y_4, z_4) = 7 \cdot 10^{-4}$ .

На рис. 8 зображуємо графік еліпсоїда та маршрут отриманих наближень від заданої точки  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 1$  до наближеного розв'язку рівняння  $x_4 = 0.194$ ,  $y_4 = -0.324$ ,  $z_4 = 0.777$  (червона ламана).

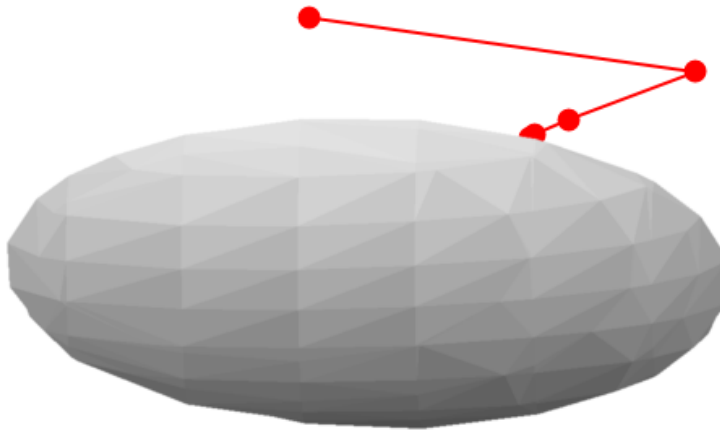


Рис. 8. Маршрут наближення від початкової точки  $(0,0,1)$

## 6. Метод Ньютона для невизначеної системи

У даному розділі застосуємо метод Ньютона до наступної системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0, \\ y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, що ця система має безліч розв'язків. Всі розв'язки системи лежать на ліній перетину параболоїда з площиною. Знайдемо деякі з цих розв'язків.

Позначимо

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$
$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - z \\ y + z - 2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$f'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

У якості оберненої з правої сторони візьмемо

$$(f'(\mathbf{x}))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2y+1} \\ 0 & \frac{2y}{2y+1} \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що обернена матриця не існує на площинах  $x = 0$  та  $2y + 1 = 0$ . На цих площинах не можна брати початкові точки. За початкову точку візьмемо  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ ,  $z_0 = 3$ . Отримаємо

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$
$$f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$(f'(\mathbf{x}))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

За формулою Ньютона (3) знайдемо перше наближення

$$\begin{aligned} x_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$x_1 = \frac{3}{2} = 1.5, \quad y_1 = \frac{1}{3} \approx 0.333, \quad z_1 = \frac{5}{3} \approx 1.667.$$

На третьому кроці ми отримали один із коренів системи:

$$x_3 = 1.247, \quad y_3 = 0.333, \quad z_3 = 1.667$$

з похибкою  $|f(x_4, y_4, z_4)| = 4 \cdot 10^{-4}$ .

Якщо за початкову точку візьмемо  $x_0 = 1, y_0 = -1, 5, z_0 = 3$ , то на третьому кроці отримаємо наступний корінь системи:

$$x_3 = 0.829, \quad y_3 = -1.75, \quad z_3 = 3.75$$

з похибкою  $|f(x_4, y_4, z_4)| = 4 \cdot 10^{-6}$ .

Взявши за початкову точку  $x_0 = 0.5, y_0 = -2, z_0 = 5$ , за чотири кроки прийдемо до наступного кореня системи:

$$x_4 = 0.943, \quad y_4 = -1.667, \quad z_4 = 3.667$$

з похибкою  $|f(x_4, y_4, z_4)| = 5 \cdot 10^{-7}$ .

Якщо ж початкову точку взяти подалі від розв'язків системи, наприклад,  $x_0 = 2, y_0 = 2, z_0 = 2$ , то отримаємо розбіжну послідовність точок.

## Висновки

Робота присвячена дослідженню та візуалізації методу Ньютона наближеного розв'язання рівнянь виду (1), де

$$f : R^n \rightarrow R^m.$$

У розділі 1 розглянуто приклад наближеного розв'язання за методом Ньютона одного рівняння з однією змінною. Мовою програмування Python складено код розв'язання цього прикладу. В результаті отримано файл у форматі gif, який наочно демонструє роботу алгоритму.

У розділах 2 — 6 роботу методу Ньютона було досліджено на випадок, коли рівняння (чи система рівнянь) має декілька розв'язків або безліч розв'язків. На прикладах було продемонстровано, що метод Ньютона працює і тоді, коли рівняння або система рівнянь мають навіть безліч розв'язків. В цих випадках у звичайному розумінні не існує матриць, обернених до матриць Якобі. Але існує багато матриць, обернених з правої сторони. Питання: яку з них краще вибрати, потребує подальшого теоретичного дослідження. В роботі праві обернені матриці ми підбирали навмання. Ця частина роботи була виконана в системі комп'ютерної математики wxMaxima. Результати наочно представлено на графіках.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Андруник В. А.** Чисельні методи в комп'ютерних науках: навчальний посібник / В.А. Андруник, В.А. Висоцька, В.В. Пасічник та ін. — Львів:—Новий світ—2000, 2020. — 470 с.
2. **Boichuk A. A.** Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems / A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko. — 2th ed. — Berlin, Boston: De Gruyter, 2016. — 298 p.
3. **Чуйко С. М.** Про узагальнення теореми Ньютона—Канторовича у банаховому просторі / С. М. Чуйко // Допов. Нац. акад. наук Укр. — 2018. — № 6. — С. 22–31.
4. **Chuiko S. M.** Autonomous Noetherian boundary-value problem in the critical case / S. M. Chuiko, I. A. Boichuk // Nonlinear Oscillations. — 2009. — Vol.12, № 3. — P. 417–428.
5. **Chuiko S. M.** On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem by the Newton—Kantorovich method / S. M. Chuiko, I. A. Boichuk, O. E. Pirus // J. Math. Sci. — 2013. — Vol. 189, № 5. — P. 867–881.
6. **Chuiko S. M.** On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method / S. M. Chuiko, O. E. Pirus // J. Math. Sci. — 2013. — Vol. 191, № 3. — P. 449–463.
7. **Хіміч О. М.** Гібридний алгоритм методу Ньютона для розв'язування систем нелінійних рівнянь з блочними матрицями / О. М. Хіміч, В. А. Сидорук, А. Н. Нестеренко // Проблеми програмування. — 2020. — № 2-3. — С. 208–217.
8. **Petkovic M. S.** Multipoint Methods for Solving Nonlinear Equations / M. S. Petkovic. — Amsterdam: Elsevier, 2013. — 344 p.

9. **Ben-Israel A.** A Newton-Raphson method for the solution of systems of equations / A. Ben-Israel // J. Math. Anal. Appl. – 1966. – Vol. 15. – P. 243–252.
10. **Chuiiko S. M.** To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem / S. M. Chuiiko // Вісн. Харків. нац. ун-ту. ім. В.Н. Каразіна. Сер.: Матем., прикл. матем. і механіка. – 2017. – Т. 85. № 1. – С. 62–68.
11. **Чуйко С.М.** Обобщение метода Ньютона–Канторовича для систем нелинейных вещественных уравнений / С. М. Чуйко // Допов. Нац. акад. наук Укр. – 2020. – № 3. – С. 3–9.



*Hryhoriev Yu.*

NEWTON'S METHOD AND ITS VISUALIZATION

*Summary*

Relevance of work. Mathematical modulation in various fields of science and technology often leads to nonlinear equations or systems of such equations. Far from always, these equations can be solved by exact methods. More often it is necessary to use approximate methods. One of the most popular of them is Newton's method. In modern works, Newton's method often serves as the basis for the development of new approximate methods that accelerate the convergence of iterative processes or are used to solve systems of large orders. The goal of the work. Visualize the work of the algorithm for solving the equation, as well as the system of equations according to Newton's method, so that the results of this work could be used when compiling electronic textbooks on the study of this method. Another goal is to study the method in the case when the system has several solutions; to study the possibility of using the method for equations with an infinite number of solutions.

*Key words: nonlinear equation, system of nonlinear equations, derivative, Jacobi matrix, Newton's method.*

**REFERENCES**

1. Andrunyk, V. A., Vysotska, V. A., Pasichnyk, V.V., Chyrun, L. B., Chyrun, L. V. (2020). *Chyselni metody v komp'uternykh naukakh: navchalnyi posibnyk [Numerical methods in computer science: a study guide]*. Lviv: Vydavnytstvo «Novyi svit–2000», 470 p.
2. Boichuk, A. A., Samoilenko, A. M. (2016). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*. 2th ed. Berlin, Boston: De Gruyter, 298 p.
3. Chuiko, S. M. (2018). Pro uzaghalnennya teoremy Niutona–Kantorovicha u banakhovomu prostori [A generalization of the Newton–Kantorovich theorem in a Banakh space]. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, №6, P. 22–31.
4. Chuiko, S. M., Boichuk, I. A. (2009). Autonomous Noetherian boundary-value problem in the critical case. *Nonlinear Oscillations*, Vol. 12, №3, P. 417–428.
5. Chuiko, S. M., Boichuk, I. A., Pirus, O. E. (2013). On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem by the Newton–Kantorovich method. *J. Math. Sci.*, Vol. 189, №5, P. 867–881.
6. Chuiko, S. M., Pirus, O. E. (2013). On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the Newton method. *J. Math. Sci.*, Vol. 191, №3, P. 449–463.

7. Khimich, A. N., Sidoruk, V. A., Nesterenko, A. N. (2020). Hibrydnyi alhorytm metodu Niutona dlia rozviazuvannia system neliniinykh rivnian z blochnymy matrytsiamy [Hybrid algorithm Newton method for solving systems of nonlinear equations with block Jacobi matrix]. *Programming problems*, №2-3, P. 208–217.
8. Petkovic M. S. (2013). *Multipoint Methods for Solving Nonlinear Equations*. Amsterdam: Elsevier, 344 p.
9. Ben-Israel A. (1966). A Newton-Raphson method for the solution of systems of equations. *J. Math. Anal. Appl*, Vol. 15, P. 243–252.
10. Chuiko S.M. (2017). To The generalization of the Newton-Kantorovich theorem. *Visn. Kharkiv. nats. un-tu. im. V.N. Karazina. Ser. matem., prykl. matem. i mekhanika*. Vol. 85. №1, P. 62–68.
11. Chuiko S. M. (2020). Obobschenie metoda Nyutona–Kantorovicha dlya sistem nelineynykh veschestvennykh uravneniy [A generalization of the Newton-Kantorovich method for systems of nonlinear real equations]. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, №3, P. 3–9.