Дослідження в математиці і механіці. — 2021. — Т. 26, вип. 1(37). — С. 55–62

УДК 517.5

О. Г. Ровенська
Донбаська державна машинобудівна академія

НАБЛИЖЕННЯ ПОВТОРНИМИ СУМАМИ ФЕЙЄРА КЛАСІВ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Роботу присвячено питанням наближення у рівномірній метриці періодичних функцій високої гладкості тригонометричними поліномами, що породжуються лінійними методами підсумовування рядів Фур'є. У роботі систематизовано відомі факти щодо наближення класів інтегралів Пуассона середніми арифметичними сум Фур'є та подано нові результати, отримані для їх частинних випадків. Вивчено апроксмаивні властиві тригонометричних поліномів, які утворюються повторним застосуванням методу підсумовування Валле Пуссена на класах аналітичних періодичних функцій дійсної змінної. Знайдено асимптотичні формули для верхніх граней відхилень повторних сум Фейєра на класах інтегралів Пуассона. Отримані формули є асимптотично точними без додаткових умов.

MSC: 42A10.
Ключові слова: асимптотична рівність, лінійний метод, сума Фейєра, інтеграл Пуассона.
DOI: 10.18524/2519-206X.2021.1(37).248032.

1. Вступ

Нехай $L_{2\pi}$ — простір сумовних 2π-періодичних функцій, $f \in L_{2\pi}$,

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

— ряд Фур'є функції f, $a_0(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$, $k \in \mathbb{N}$ — коефіцієнти Фур'є функції $f \in L_{2\pi}$. Найбільш простим прикладом лінійного процесу апроксимації неперервних періодичних функцій дійсної змінної може служити наближення цих функцій елементами послідовностей часткових сум ряду Фур'є $S_n(f;x)$. Проте, послідовності $S_n(f;x)$ не є рівномірно збіжними на всьому класі $C_{2\pi}$ неперервних періодичних функцій. У зв'язку із цим, важливе місце серед наближуючих поліномів для періодичних функцій посідають оператори, які утворюються певними перетвореннями часткових сум ряду Фур'є цих функцій та дозволяють побудувати послідовності три-

Надійшла 11.06.2021

гонометричних поліномів, які рівномірно збігалися б для кожної функції $C_{2\pi}$.

Для $p \in \mathbb{N}$ суми Валле Пуссена функції $f \in L_{2\pi}$ задаються співвідношенням

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x)$$

і мають апроксимативні властивості, істотно залежні від параметра p. У випадку $p = n$ ці многочлени є сумами Фейєра функції $f \in L_{2\pi}$

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x).$$

Послідовність поліномів $\sigma_n(f;x)$ рівномірно збігається до своєї функції для будь-якої $f \in C_{2\pi}$.

Нехай $C^q_{\beta,\infty}$ — класи неперервних, 2π–періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P^q_\beta(t) dt$$

з відомим ядром Пуассона

$$P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad q \in (0;1),$$

де функція $\varphi(t)$, задовільняє умову $\operatorname{ess\,sup}|\varphi(t)| \leq 1$. Класи $C^q_{\beta,\infty}$ називаються класами інтегралів Пуассона. Функції $f \in C^q_{\beta,\infty}$ є звуженням на дійсну вісь функцій $F(z) = F(x+iy)$, аналітичних у смузі

$$|y| \leq \ln\frac{1}{q}.$$

Питання наближення класів інтегралів Пуассона лінійними методами інтенсивно вивчалися протягом останніх десятиліть. В роботі [1] встановлено асимптотичну рівність для верхніх граней відхилень сум Фур'є по класах $C^q_{\beta,\infty}$

$$\mathcal{E}_n\left(C^q_{\beta,\infty}; S_n\right) = \sup_{f \in C^q_{\beta,\infty}} \|f(x) - S_n(f;x)\|_C =$$

$$= \frac{8q^n}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-q^2\sin^2 t}} + O(1)\frac{q^n}{n}.$$

Залишковий член цієї рівності уточнено в роботі [9]. Подібні задачі для сум Валле Пуссена та Фейєра розв'язано в роботах [3; 7; 8; 10; 12]. В роботах [4; 5; 11] розглянуто питання наближення класів $C^q_{\beta,\infty}$ повторними сумами Валле Пуссена, які для $p_1, p_2, ..., p_r \in \mathbb{N}$ задаються співвідношеннями

$$V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k_1=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{k_2=k_1-p_2+1}^{k_1} \dots \frac{1}{p_r} \sum_{k_r=k_{r-1}-p_r+1}^{k_{r-1}} S_{k_r}(f;x).$$

При певному виборі параметрів p_1, $p_2, ..., p_r$ ці поліноми збігаються з сумами $S_n(f;x)$, $V_{n,p}(f;x)$ і $\sigma_n(f;x)$. За умови $r=2$ і $p_1+p_2=n$ маємо

$$V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{n-p_1} \sum_{m=k-n+p_1+1}^{k} S_m(f;x).$$

У цьому випадку індекс m величини $S_m(f;x)$ змінюється від 0 до $n-1$, тому такі суми природно назвати повторними сумами Фейєра і позначати $\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ [6].

Вивчення аппроксимативних властивостей поліномів $\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ є природнім продовженням згаданих досліджень. Мета роботи полягає в одержанні асимптотичної рівності для величини

$$\mathcal{E}\left(C^q_{1,\infty};\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}\right) = \sup_{f\in C^q_{1,\infty}} ||f(x)-\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)||_C.$$

2. Основні результати

Має місце таке твердження.

Теорема. *Для* $q\in(0;1)$, $n\to\infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \frac{q^4+4q^2}{\pi p_1 p_2(1-q^2)^2} + O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}}{p_1 p_2(1-q)^5}. \qquad (1)$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена щодо* p_1, p_2, q.

Доведення. Для величини

$$\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x) = f(x) - V^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x), \quad r\in\mathbb{N}$$

в роботі [2] доведено рівність

$$\delta^{(r)}_{n,\overline{p}}(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^q_\beta(x+t)\left(\sigma^{(r)}_1\cos\frac{\beta\pi}{2}-\sigma^{(r)}_2\sin\frac{\beta\pi}{2}\right)dt, \tag{2}$$

де

$$\sigma^{(r)}_1=\frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C^\nu_{r+1}q^{n-\Sigma^\alpha_p+r+\nu}\cos(n-\Sigma^\alpha_p+r-\nu)t,$$

$$\sigma^{(r)}_2=\frac{Z_q^{2(r+1)}(t)}{\prod\limits_{i=1}^{r}p_i}\sum_{\alpha\subset\overline{r}}(-1)^{(r-|\alpha|)}\sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu C^\nu_{r+1}q^{n-\Sigma^\alpha_p+r+\nu}\sin(n-\Sigma^\alpha_p+r-\nu)t,$$

$Z^2_q(x)=1-2q\cos x+q^2$, $|\alpha|$ — кількість елементів множини α, $\Sigma^\alpha_p=\sum\limits_{j\in\alpha}p_j$.

Оскільки

$$\int\frac{dt}{(1-2q\cos t+q^2)^3}=O(1)(1-q)^{-5},$$

то, на підставі (2), для $\beta=1$, $r=2$, $p_1+p_2=n$ маємо

$$\delta^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)=\frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f^q_\beta(x+t)}{(1-2q\cos t+q^2)^3}((q^3-3q)\sin t+\sin 2t)dt+O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}.$$

На основі отриманих інтегральних зображень можна перейти до вивчення норм відхилень по класу аналітичних функцій дійсної змінної. В силу інвариантності класу $C^q_{\beta,\infty}$ відносно зсуву за аргументом маємо

$$\mathcal{E}\left(C^q_{1,\infty};\sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}\right)=\sup_{f\in C^q_{1,\infty}}\left|\frac{q}{\pi p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f^q_\beta(x+t)}{(1-2q\cos t+q^2)^3}((q^3-3q)\sin t+\sin 2t)dt+\right.$$

$$\left.+O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}\right|\le$$

$$\le\frac{q}{\pi p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|(q^3-3q)\sin t+\sin 2t|}{(1-2q\cos t+q^2)^3}dt+O(1)\frac{q^{p_1}+q^{p_2}}{p_1p_2(1-q)^5}.$$

Позначимо через $f^q_\beta(t)$ функцію, яка на періоді співпадає з функцією

$$\operatorname{sign}\ ((q^3-3q)\sin t+\sin 2t),\quad q\in(0;1),$$

а через $f_0(x)$ — функцію, яка є згорткою функції $f^q_\beta(t)$ з відповідним ядром $P^q_\beta(t)$. Враховуючи, що

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(t)dt = 0, \quad \text{essup}|f^q_\beta(t)| \le 1,$$

маємо, що знайдена функція $f_0(x) \in C^q_{\beta,\infty}$ забезпечує виконання рівності

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}; \sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \frac{q}{\pi p_1 p_2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{|(q^3 - 3q)\sin t + \sin 2t|}{(1 - 2q\cos t + q^2)^3} dt + O(1)\frac{q^{p_1} + q^{p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}. \quad (5)$$

Обчислимо визначений інтеграл у рівності (5). Маємо

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}; \sigma^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \frac{2q^2(3q - q^3)}{\pi p_1 p_2}[J_2(0) + J_2(\pi) - 2J_2(\arccos\frac{3q - q^3}{2}) +$$

$$+ \frac{4q^2}{\pi p_1 p_2}[2J_1(\arccos\frac{3q - q^3}{2}) - J_1(0) + J_1(\pi)],$$

де

$$J_1(t) = \int \frac{\cos t \sin t dt}{(1 - 2q\cos t + q^2)^3} \quad J_2(t) = \int \frac{\sin t dt}{(1 - 2q\cos t + q^2)^3}.$$

Оскільки

$$J_1(t) = \frac{1}{4q^2}(1 - 2q\cos t + q^2)^{-1} - \frac{1 + q^2}{8q^2}(1 - 2q\cos t + q^2)^{-2} + C,$$

$$J_2(t) = -\frac{1}{4q}(1 - 2q\cos t + q^2)^{-2} + C,$$

то, виконуючи перетворення, отримуємо

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty}; \sigma^{(2,0)}_{n,p}) = \frac{q^4 + 4q^2}{\pi p_1 p_2 (1 - q^2)^2} + O(1)\frac{q^{p_1} + q^{p_2}}{p_1 p_2 (1-q)^5}.$$

Теорему доведено.

3. Висновки

Формула (1) є асимпотично точною без будь-яких додаткових умов. Отриманий результат може бути цікавим з точки зору обчислювальної математики та моделювання.

Список літератури

1. **Никольский С. М.** Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – Т. 10, № 3. – С. 207–256.
2. **Новиков О. А.** Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена / О. А. Новиков, О. Г. Ровенская // Вестник Одеского национального университета. Матем. и мех. – 2015. – Т. 19, вып. 3(23). – С. 14–26.
3. **Ровенская О. Г.** О приближении средними Фейера классов аналитических периодических функций / О. Г. Ровенская, О. А. Новиков // Чебышевский сборник. – 2020. Т. 21, № 4. – С. 218–226.
4. **Ровенская О. Г.** Приближение аналитических функций повторными суммами Валле Пуссена / О. Г. Ровенская // Компьютерные исследования и моделирование. – 2019. – Т. 11, № 3. – С. 367-377.
5. **Ровенская О. Г.** Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена / О. Г. Ровенская, О. А. Новиков // Нелинейные колебания. – 2010. – Т. 13, № 1. – С. 96–99.
6. **Ровенская О. Г.** Наближення класів інтегралів Пуассона повторними сумами Фейера / О. Г. Ровенская // Буковинський математичний журнал. – 2020. Т. 8, № 2.
7. **Рукасов В. И.** Приближение аналитических периодических функций суммами Валле Пуссена / В. И. Рукасов, С. О. Чайченко // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 12. – С. 1653–1668.
8. **Сердюк А. С.** Приближение интегралов Пуассона суммами Валле Пуссена / А. С. Сердюк // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 1. – С. 97–107.
9. **Стечкин С. Б.** Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций / С. Б. Стечкин // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1980. – Т. 145. – С. 126–151.
10. **Novikov O. O.** Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer sums / O. O. Novikov, O. G. Rovenska, Yu. A. Kozachenko // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2018. – Vol. 87. – P. 4–12.
11. **Novikov O.** Approximation of classes of Poisson integrals by repeated Fejer sums / O. Novikov, O. Rovenska // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 38, № 3. – P. 502-–509.
12. **Novikov O. O.** Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums / O. O. Novikov, O. G. Rovenska // Matematychni Studii. – 2017. – V. 47, № 2. – P. 196–201.

Ровенская О. Г.

Приближение повторными суммами Фейера классов аналитических функций

Резюме

Работа посвящена исследованию вопросов приближения в равномерной метрике периодических функций высокой гладкости тригонометрическими полиномами, которые порождаются линейными методами суммирования рядов Фурье. В работе систематизированы известные результаты, касающиеся приближения классов интегралов Пуассона средними арифметическими сумм Фурье, и представлены новые факты, полученные для их частных случаев. Изучены аппроксимативные свойства тригонометрических полиномов, которые образуются повторным применением метода суммирования Валле Пуссена на классах аналитических периодических функций действительной переменной. Найдены асимптотические формулы для верхних граней уклонений повторных сумм Фейера на классах интегралов Пуассона. Полученные формулы являются асимптотически точными без дополнительных условий.

Ключевые слова: асимптотическое равенство, линейный метод, сумма Фейера, интеграл Пуассона.

Rovenska O. G.

Approximation of classes of analytic functions by repeated Fejer sums

Summary

The paper is devoted to the approximation by arithmetic means of Fourier sums of classes of periodic functions of high smoothness. The paper presents known results related to the approximation of classes of Poisson integrals by arithmetic means of Fourier sums and new facts obtained for particular cases. In the paper is studied the approximative properties of repeated Fejer sums on the classes of periodic analytic functions of real variable. Under certain conditions, we obtained asymptotic formulas for upper bounds of deviations of repeated Fejer sums on classes of Poisson integrals. The obtained formulas are asymptotically exact without any additional conditions.

Key words: asymptotic equality, linear method, Fejer sum, Poisson integral.

References

1. Nikolsky, S. M. (1946) O priblizhenii funkcij trigonometricheskimi polinomami v srednem [Approximation of functions by trigonometric polynomials in the mean]. *Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, Vol. 10, no. 3, P. 207–256.

2. Novikov O. A., Rovenskaya O. G. (2014) Priblizhenie klassov integralov Puassona r-povtornumi summami Valle Pussena [Approximation of classes of Poisson integrals by r-repeated de la Vallee Poussin sums]. *Vestn. Odessk. Nac. Un. Mat. Meh.*, Vol. 19, No. 3(23), P. 14–26.

3. Rovenska, O. G., Novikov, O. O. (2020) O priblizhenii srednimi Fejera klassov periodicheskih analiticheskih funkcij [On the approximation by Fejer means of classes of periodic analytical functions]. *Chebyshevskij sbornik*, Vol. 21, no 4, P. 218–226.

4. Rovenska, O. G. (2019) Priblizhenie analiticheskih funkcij povtornymi summami Valle Pussena [Approximation of analytic functions by repeated de la Vallee Poussin sums]. *Komp'juternye issledovanija i modelirovanie* [Computer Research and Modeling], Vol. 11, no 3, P. 367–377.

5. Rovenska, O. G., Novikov, O. O. (2010) Approximation of Poisson integrals by repeated de la Vallee Poussin sums. *Nonlinear Oscillations*, Vol. 13, P. 108–111.

6. Rovenska, O. (2020) Nabluzhennya klassiv integraliv Puassona povtornumu sumamu Fejera [Approximation of classes of Poisson integrals by repeated Fejer sums]. *Bukovinian Mathematical Journal*, Vol. 8, no 2.

7. Rukasov, V. I., Chaichenko, S. O. (2002) Approximation of the classes of analytical functions by de la Vallee-Poussin sums. *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 54, P. 2006–2024.

8. Serdyuk, A. S. (2004) Approximation of Poisson integrals by de la Vallee Poussin sums. *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 56, P. 122–134.

9. Stechkin, S. B. (1980) Ocenka ostatka rjada Fur'e dlja differenciruemyh funkcij [Estimation of the remainder of Fourier series for the differentiable functions]. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova*, Vol. 145, P. 126–151.

10. Novikov, O. O., Rovenska, O. G., Kozachenko, Yu. A. (2018) Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer sums. *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 87, P. 4–12.

11. Novikov, O., Rovenska, O. (2017) Approximation of classes of Poisson integrals by repeated Fejer sums. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, Vol. 38, no 3, P. 502-–509.

12. Novikov, O. O., Rovenska, O. G. (2017) Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums. *Matematychni Studii*, Vol. 47, no 2, P. 196–201.