УДК 517.9

О. Д. Кічмаренко, Н. В. Касімова, Т. Ю. Жук
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗІ ШВИДКОКОЛИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Стаття містить результати досліджень, виконаних за підтримки Національного Фонду Досліджень України, проект Ф81/41743

Розглядається задача оптимального керування зі швидкоосцилюючими змінними, лінійна за керуванням. При цьому об'єктом керування виступає диференціальне включення з Ліпшицевою за фазовою змінною багатозначною правою частиною. Багатозначність породжує свої специфічні проблеми, такі як замкненість, опуклість сім'ї розв'язків, існування граничних розв'язків, виділення розв'язків із заданими властивостями тощо. Проте добре розвинений апарат математичного аналізу, що застосовуються до дослідження багатозначних функцій дає можливість застосування методу усереднення до описаної вище задачі оптимального керування. У роботі доведено збіжність оптимальних керувань і оптимальних траєкторій розв'язків точної задачі до оптимального керування і траєкторії усередненої задачі. При цьому також обгрунтовано, що оптимальне керування усередненої задачі є "майже оптимальним" для точної задачі, тобто з точністю до малого параметру ε реалізується мінімум критерію якості.
MSC: 34G25, 49J30, 49K35, 49K99, 93C99.
Ключові слова: задача оптимального керування, диференціальне включення, малий параметр, метод усереднення.
DOI: 10.18524/2519-206X.2021.1(37).248020.

1. Вступ

Інтенсивний розвиток науки і техніки регулярно стимулює до відшукання ефективних методів керування різноманітними природними, економічними, соціальними, технічними процесами. Математичними моделями таких ситуацій є задачі оптимального керування різними класами еволюційних систем. Значна увага приділяється математичним моделям процесів у вигляді диференціальних рівнянь з малим параметром. Для їх розв'язання широко застосовують асимптотичні методи, зокрема, метод усереднення, строге математичне обгрунтування якого було запропоновано М.М. Кри-

Надійшла 04.10.2021

ловим та М.М. Боголюбовим.

На можливість застосування методу усереднення до розв'язування задач оптимального керування на асимптотично великих часових інтервалах вперше звернув увагу М.М. Моісеєв [1; 2]. В роботах Плотнікова та його школи (див., наприклад, [3]) дане строге обгрунтування застосування методу усереднення до задач керування. У [4; 5], розглядається підхід, пов'язаний з побудовою диференціального включення за вихідною задачею, яке потім досліджувалося методом усереднення. У роботі [6] спочатку проводилося усереднення правих частин системи за часом, який явно входить в праву частину, при цьому функція керування $u(t)$ вважається параметром. У роботах [7; 8] обгрунтовується підхід роботи [6] до розв'язування задач оптимального керування за відсутності умови асимптотичної сталості для функції керування.

Варто також відмітити, що метод усереднення успішно застосовується до дослідження функціонально-диференціальних рівнянь ([9]), різницевих рівнянь ([10]).

Оскільки диференціальне включення є природним узагальненням диференціального рівняння, то наступним кроком в розвитку асимптотичних методів було обгрунтування методу усереднення для диференціальних включень. Так, аналог першої теореми М.М. Боголюбова було отримано у роботах [11]. Цей результат був згодом перенесений на включення з періодичною правою частиною [12], диференціальні включення зі швидкими і повільними змінними [13], диференціальні включення з імпульсами [14]. Основна ідея даного підходу полягає в тому, що неавтономному диференціальному включенню за допомогою методу усереднення ставиться у відповідність автономне диференціальне рівняння. Це дає можливість застосування ефективних чисельних методів для розв'язування усередненої задачі керування.

В даній роботі розглядається задача оптимального керування зі швидкоосцилюючими змінними, лінійна за керуванням. Об'єктом керування є система диференціальних включень з Ліпшицевою за фазовою змінною правою частиною. Робота структурована наступним чином. До згаданого об'єкту застосовується метод усереднення і обгрунтовується збіжність оптимальних керувань і оптимальних траєкторій розв'язків точної задачі до оптимального керування і траєкторії усередненої задачі. При цьому також обгрунтовано, що оптимальне керування усередненої задачі є "майже оптимальним" для точної задачі, тобто з точністю до малого параметру ε реалізується мінімум критерію якості.

2. Основні результати

1. Постановка задачі.

Розглянемо задачу оптимального керування зі швидкоколивними змінними, лінійну за керуванням

$$\dot{x} \in f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) + f_1(x)u(t),\ x(0, u(0)) = x_0 \tag{1}$$

із критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \int\limits_0^T [A(t, x_\varepsilon(t)) + B(t, u(t))]\, dt + \Phi(x_\varepsilon(T)) \to inf \tag{2}$$

Також для задачі (1) розглянемо квадратичний за керуванням критерій

$$J_\varepsilon[u] = \int\limits_0^T [A(t, x_\varepsilon(t)) + u^2(t)]\, dt + \Phi(x_\varepsilon(T)) \to inf \tag{3}$$

Тут $\varepsilon > 0$ - малий параметр, $T > 0$ - задана стала, x - фазовий вектор в $\mathbb{R}^d$, $u(t) - m$-вимірний вектор керування, який належить деякій функціональній множині.

За умови існування рівномірного за $x \in \mathbb{R}^d$ середнього

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \int\limits_0^s f(t, x)\, dt = f_0(x), \tag{4}$$

де $f_0(x)$ - однозначне відображення, задачі оптимального керування (1), (2) ((3))зі швидкоколивними коефіцієнтами ставиться у відповідність на $[0, T]$ більш проста задача оптимального керування

$$\dot{y} = f_0(y) + f_1(u)u(t),\ y(0, u(0)) = x_0 \tag{5}$$

із критеріями якості

$$J_0[u] = \int\limits_0^T [A(t, y(t)) + B(t, u(t))]\, dt + \Psi(y(T)) \to inf \tag{6}$$

і

$$J_0[u] = \int_0^T [A(t, y(t)) + u^2(t)]\, dt + \Psi(y(T)) \to inf \tag{7}$$

2. Допоміжні поняття та твердження.

2.1. Метрика Хаусдорфа. Нехай A і B - непорожні, замкнені множини в метричному просторі $\mathbb{R}^n$. Розглянемо наступні величини, що характеризують близькість A і B:

$$\beta(A, B) = \sup_{a \in A} \rho(a, B), \beta(B, A) = \sup_{b \in B} \rho(b, A)$$

$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\} = \max\{\sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A)\} =$$

$$= \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \rho(b, a)\}$$

Зокрема, маємо, що $\alpha(A, B) = \alpha(B, A)$.

Означення 1 ([15])**.** Величину $\alpha(A, B)$ називають відхиленням множин A і B за Хаусдорфом або хаусдорфовою відстанню між A і B.

2.2. Деякі властивості багатозначних функцій. Кожній точці p із множини $D \in \mathbb{R}^d$ поставимо у відповідність непорожню замкнену множину $F(p) \subset \mathbb{R}^n$. Тоді $F(p)$ - багатозначна функція. Її графік – множина таких точок $(p, q) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, що $p \in D, q \in F(p)$.

Надалі використовуватимемо наступні позначення:

$$F(M) = \bigcup_{p \in M} F(p), |F(M)| = \sup_{y \in F(M)} |y|.$$

Означення 2 ([15])**.** Багатозначна функція F називається обмеженою на множині M, якщо $|F(M)| < \infty$, тобто якщо всі значення функції F в точках множини M містяться у деякій кулі.

Означення 3 ([15])**.** Багатозначна функція $F(p)$ називається:

- α - неперервною (або неперервною) в точці p, якщо

$$\alpha(F(p'), F(p)) \to 0, p' \to p;$$

- β - неперервною (або напівнеперервною зверху відносно включення) в точці p, якщо

$$\beta(F(p'), F(p)) \to 0, p' \to p.$$

Функція $F(p)$ називається α - або β - неперервною на множині D, якщо вона α - або β - неперервна в кожній точці цієї множини.

Зауваження 1 ([15])**.** Оскільки $\beta(A,B) \leq \alpha(A,B)$,то із α - непервності функції випливає її β - неперервність.

2.3. Необхідні поняття теорії диференціальних включень. Розглянемо диференціальне включення

$$\dot{x} \in F(t,x) \tag{8}$$

Означення 4 ([15])**.** Розв'язком диференціального включення (8) називається абсолютно неперервна функція $x(t)$, визначена на інтервалі або відрізку і майже скрізь задовольняє включення (8).

Означення 5 ([15])**.** Будемо казати, що багатозначна функція $F(t,x)$ в області G задовольняє основні умови, якщо при всіх $(t,x) \in G$ множина $F(t,x)$ - непорожня, обмежена, замкнена, опукла і F - β - непервна по t, x.

Теорема 1 ([15])**.** *Нехай $F(t,x)$ задовольняє основні умови в області G. Тоді для довільної точки $(t_0, x_0) \in G$ існує розв'язок задачі*

$$\dot{x} \in F(t,x), x(t_0) = x_0. \tag{9}$$

Якщо область G містить циліндр $z(t)(t_0 \leq t \leq t_0 + a, |x - x_0| \leq b)$, то розв'язок існує принаймні на відрізку

$$t_0 \leq t \leq t_0 + d, d = \min\{a, \frac{b}{m}\}, m = \sup_z |F(t,x)|.$$

Означення 6 ([16])**.** Нехай задана послідовність множин $F_i \in \mathrm{comp}\mathbb{R}^n$ - сукупність непорожніх компактних підмножин в $\mathbb{R}^n$.

- Верхньою топологічною границею послідовності $\{F_i\}$ називається сукупність всіх часткових границь таких послідовностей $\{f_i\}$, що $f_i \in F_i$ для всіх i. Позначається $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} F_i$.
- Нижньою топологічною границею послідовності $\{F_i\}$ називається сукупність всіх границь збіжних послідовностей $\{f_i\}$, що $f_i \in F_i$ для всіх i. Позначається $\underline{\lim\limits_{i\to\infty}} F_i$.

- Якщо обидві границі існують і

$$\underline{\lim}_{i\to\infty} F_i = \overline{\lim}_{i\to\infty} F_i = F,$$

то множина F називається границею послідовності $\{F_i\}$. В цьому випадку

$$\lim_{i\to\infty} \alpha(F_i, F) = 0.$$

Означення 7 ([16; 17])**.** Нехай $F : \mathbb{R}^1 \to \mathrm{comp}\,(\mathbb{R}^n)$ – деяке багатозначне відображення. Інтегралом від відображення $F(t)$ на відрізку часу $[t_0, t_1]$ називається множина

$$G = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt = \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt : f(t) \in F(t) \right\} \tag{10}$$

Теорема 2 (Теорема Красносельського-Крейна для диференціальних включень, [4; 14; 18])**.** *Нехай для диференціального включення*

$$\dot{x} \in F(t, x, \lambda), \tag{11}$$

де багатозначне відображення $F(t,x,\lambda)$, що приймає значення в conv$(\mathbb{R}^n)$ (підпростір із comp $(\mathbb{R}^n)$, що складаєтьъся із опуклих множин), визначене при $0 \le t \le T, x \in D, D$ - обмежена область в $\mathbb{R}^n, \lambda \in \Lambda$ - деяка множина значень параметра λ, що має $\lambda_0 \in \Lambda$ граничною точкою, виконуються наступні умові:

а) *багатозначне відображення $F(t,x,\lambda)$ рівномірно обмежене, неперервне по t, рівномірно неперервне по x рівномірно відносно t і λ: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall t \in [0,T], x \in D, x' \in D$ і $\lambda \in \Lambda$ виконується*

$$\alpha(F(t,x',\lambda) - F(t,x,\lambda)) < \varepsilon,$$

як тільки $|x' - x| < \delta$;

б) *багатозначне відображення $F(t,x,\lambda)$ - інтегрально неперервне по λ в точці λ_0, тобто для $0 \le t_1 \le t_2 \le T$ і довільного $x \in D$ виконуєтьcя умова*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \alpha\left(\int\limits_{t_1}^{t_2} F(s,x,\lambda)\,ds, \int\limits_{t_1}^{t_2} F(s,x,\lambda_0)\,ds \right) = 0, \tag{12}$$

де інтеграли розуміютьcя включення в сенсі Означення 7;

в) розв'зки $x(t, \lambda_0)$ включення

$$\dot{x} \in F(t, x, \lambda_0), \tag{13}$$

що задовольняють умову $x(0, \lambda_0) = x_0 \in D^1 \subset D$, визначені при $0 \le t \le T$ і лежать разом з деяким ρ-околом в області D.

Тоді кожному $\eta > 0$ відповідає такий окіл $U(\lambda_0)$ точки λ_0, що при $\lambda \in U(\lambda_0)$ для довільного розв'язку $x(t, \lambda)$ включення (11), визначеного при $0 \le t \le T$ і такого, що задовольняє початкову умову $x(0, \lambda) = x_0$, існує такий розв'язок $x(t, \lambda_0)$ включення (13), що справедлива нерівність $\| x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0) \| < \eta, 0 \le t \le T$.

2.4. Метод усереднення для диференціальних включень. Розглянемо диференціальне включення

$$\dot{x} \in \varepsilon X(t, x), \; x(0) = x_0, \tag{14}$$

де $x \in \mathbb{R}^n, X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n), \varepsilon > 0$ - малий параметр.

Включенню (14) поставимо у відповідність усереднене диференціальне включення

$$\dot{y} \in X_0(y), y(0) = x_0, \tag{15}$$

де

$$X_0(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T X(t, x)\, dt \tag{16}$$

Збіжність в (16) розуміється у сенсі метрики Хаусдорфа, а інтеграл від багатозначного відображення $X(t, x)$ розуміється в сенсі Означення 7.

2.5. Застосування методу усереднення до задачі оптимального керування (1), (2) ((3)).

Для параметрів задачі (1)–(2) ((3)) будемо вважати виконаними наступні умови:

Умова 1. Допустимими керуваннями є m – вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in L_p([0, T])$, $p > 1$, які приймають значення в замкненій, опуклій множині $V \subset \mathbb{R}^m$.

Для задачі (1) – (3) допустимими керуваннями будемо вважати m – вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in L_2([0, T])$, які приймають значення в замкненій опуклій множині $u \subset \mathbb{R}^m$.

Умова 2. Багатозначна функція $f(t,x)$ ($f : Q = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d\} \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^d)$) визначена і неперервна за сукупністю змінних в Q, а $d \times m$ - вимірна матриця $f_1(x)$ визначена при $x \in \mathbb{R}^d$ і виконані умови:

1) $f(t,x)$ в області Q задовольняє умову лінійного росту за x із константою M, тобто

$$|f(t,x)| \leq M(1 + |x|) \qquad \forall (t,x) \in Q;$$

2) $f(t,x)$ і $f_1(x)$ в області визначення задовольняють умову Ліпшиця за x із константами λ_1 та λ, відповідно, тобто

$$\alpha(f(t,x), f(t,x')) \leq \lambda_1 |x - x'|,$$

$$\|f_1(x) - f_1(x')\| \leq \lambda |x - x'|.$$

Умова 3. Рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d$ існує границя

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} \int\limits_0^s f(t,x)\, dt = f_0(x), \tag{17}$$

де інтеграл розуміється в сенсі Означення 7, а збіжність - в сенсі Означення 6, функція $f_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ - однозначна.

Умова 4. Скалярні функції $A(t,x)$ і $B(t,u)$ визначені при $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $u \in V$ і неперервні за сукупністю змінних причому:

1) $A(t,x) \geq 0$, $B(t,u) \geq a|u|^p$ для деякої сталої $a > 0$ і для кожного $t \in [0,T]$ функція $B(t,u)$ - опукла за $u \in V$;

2) функція $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$ - неперервна за x та невід'ємна.

Зауваження 2. В силу умов на $f(t,x)$ і $f_1(x)$ та теореми 1 маємо, що $\forall \varepsilon > 0$ і для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок задачі Коші (1) існує на [0,T].

При цьому $x(t,u)$ - абсолютно неперервна функція. Із умов 2, 3 випливає, що f_0 також задовольняє умову Ліпшиця з константою λ_1. Тому для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок задачі Коші (5) $y(t,u)$ існує, єдиний на $[0,T]$ і є абсолютно неперервною функцією. Тому критерії (2), (3), (6), (7) мають сенс при всіх допустимих керуваннях.

Сформулюємо наступний результат щодо рівномірної збіжності розв'язків задачі Коші.

Теорема 3. *Нехай виконані умови 1-3. Тоді якщо послідовність* $u_\varepsilon \xrightarrow{w} u_0$ *в* $L_p([0,T])$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то розв'язок* $x_\varepsilon(t)$ *залачі Коші* (1) *з* $u(t) = u_\varepsilon(t)$ *збігається рівномірно на* $[0,T]$ *до* $y(t)$ *- розв'язку відповідної задачі Коші* (5) *із керуванням* $u(t) = u_0(t)$, *тобто*

$$x_\varepsilon(t) \rightrightarrows y(t), \varepsilon \to 0 \tag{18}$$

рівномірно по $t \in [0,T]$.

Доведення. Множина звичайних розв'язків диференціального включення із (1) співпадає з множиною узагальнених розв'язків [19], яка визначається як множина неперервних функцій $x_\varepsilon(t)$, що задовольняють включення

$$x_\varepsilon(t) \in x_0 + \int\limits_0^t f(\frac{s}{\varepsilon}, x_\varepsilon(s))\,ds + \int\limits_0^t f_1(x_\varepsilon(s))u_\varepsilon(s)\,ds. \tag{19}$$

В силу умов 1 і 2 отримаємо, що

$$|x_\varepsilon(t)| \le |x_0| + \int\limits_0^t M(1 + |x_\varepsilon(s)|)\,ds + \int\limits_0^t (\|f_1(0)\| + \lambda|x_\varepsilon(s)|)|u_\varepsilon(s)|\,ds$$

або

$$|x_\varepsilon(t)| \le |x_0| + \int\limits_0^t (M + \|f_1(0)\||u_\varepsilon(s)|)\,ds + \int\limits_0^t (M + \lambda|u_\varepsilon(s)|)|x_\varepsilon(s)|\,ds. \tag{20}$$

Використавши нерівність Грануолла, будемо мати:

$$|x_\varepsilon(t)| \le (|x_0| + M + \|f_1(0)\|T^{1/q} \cdot \|u_\varepsilon\|_{L_p[0,T]})e^{MT + \lambda T^{1/q}\|u_\varepsilon\|_{L_p[0,T]}} \tag{21}$$

Зі слабкої збіжності u_ε до u_0 випливає сильна обмеженість u_ε, тобто

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|u_\varepsilon\|_{L_p[0,T]} < \infty,$$

а тому із (20) отримуємо, що $\exists L > 0:$

$$|x_\varepsilon(t)| \le L \tag{22}$$

для всіх $\varepsilon > 0$ і $t \in [0, T]$. Таким чином, маємо рівномірну обмеженість сім'ї $x_\varepsilon(t)$.

Обґрунтуємо рівностепеневу неперервність сім'ї $x_\varepsilon(t)$ на $[0, T]$.

Для довільних $t_1 < t_2,\ t_1, t_2 \in [0, T]$, використовуючи (20) і (22), маємо:

$$|x_\varepsilon(t_2) - x_\varepsilon(t_1)| \le \int\limits_{t_1}^{t_2} M(1+L)\,ds + \int\limits_{t_1}^{t_2} (\|f_1(0)\| + \lambda L)|u_\varepsilon(s)|\,ds \le$$

$$\le M(1+L)(t_2 - t_1) + (t_2 - t_1)^{1/q}(\|f_1(0)\| + \lambda L)\left(\int\limits_{t_1}^{t_2} |u_\varepsilon(s)|^p\,ds\right)^{1/p},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тоді в силу теореми Арцела існує підпослідовність $x_{\varepsilon_n}(t)$ послідовності $x_\varepsilon(t)$, яка рівномірно за $t \in [0, T]$ збігається до деякої функції $x_0(t)$ при $\varepsilon_n \to 0$. Із (19) маємо:

$$\begin{gathered}
x_{\varepsilon_n}(t) \in x_0 + \int\limits_0^t f\left(\tfrac{s}{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n}(s)\right)\,ds + \int\limits_0^t f_1(x_{\varepsilon_n}(s))u_{\varepsilon_n}(s)\,ds \pm \\
\pm \int\limits_0^t f_1(x_0(s))u_{\varepsilon_n}(s)\,ds = x_0 + \int\limits_0^t f\left(\tfrac{s}{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n}(s)\right)\,ds + \int\limits_0^t f_1(x_{\varepsilon_n}(s))u_{\varepsilon_n}(s)\,ds + \\
+ \int\limits_0^t (f_1(x_{\varepsilon_n}(s) - f_1(x_0(s))))u_{\varepsilon_n}(s)\,ds
\end{gathered} \tag{23}$$

В силу умови 2 для функції $f(t, x)$ маємо виконання умови а) теореми 2. Зокрема з пункту 1) умови 2 випливає рівномірна обмеженість $f(t, x)$, а із пункту 2) умови 2 маємо рівномірну неперервність $f(t, x)$ по x.

Перевіримо інтегральну неперервність функції $f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x(s)\right) =: Y(s, x(s), \varepsilon_n)$. За умови виконання (17), поклавши $f_0 = Y(s, x, 0)$, будемо мати:

$$\lim_{\varepsilon_n \to 0^+} \int\limits_0^t Y(s, x(s), \varepsilon_n)\,ds = \lim_{\varepsilon_n \to 0^+} \int\limits_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x(s)\right)\,ds = \lim_{\varepsilon_n \to 0^+} \int\limits_0^{\frac{t}{\varepsilon_n}} f(\theta, x)\,d\theta =$$

$$= t \lim_{\varepsilon_n \to 0^+} \frac{1}{t/\varepsilon_n} \int\limits_0^{\frac{t}{\varepsilon_n}} f(\theta, x)\,d\theta = t f_0(x) = \int\limits_0^t f_0(x)\,ds = \int\limits_0^t Y(s, x, 0)\,ds,$$

де границя від многозначних відображень розуміється в сенсі Означення 6.

Таким чином, маємо виконання умови б) теореми 2.

В силу умови 5 маємо виконання умови в) теореми 2.

Аналогічно до доведення теореми 2, проведеного, зокрема в [4; 18], можна показати, що

$$\alpha\left(\int_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n}(s)\right)\,ds, \int_0^t f_0(x_0(s))\,ds\right) \longrightarrow 0, \varepsilon_n \to 0 \tag{24}$$

Далі в силу слабкої збіжності маємо:

$$\lim_{\varepsilon_n\to 0}\int_0^t f_1(x_0(s))u_{\varepsilon_n}(s)\,ds = \int_0^t f_1(x_0(s))u_0(s)\,ds \tag{25}$$

Використавши пункт 2) із умови 2 для останнього інтегралу в (23), отримаємо оцінку

$$\begin{gathered}\left|\int_0^t (f_1(x_{\varepsilon_n}(s)) - f_1(x_0(s)))u_{\varepsilon_n}(s)\,ds\right| \leq \\ \leq \lambda\left(\int_0^t |x_{\varepsilon_n}(s) - x_0(s)|^q\,ds\right)^{1/q} \|u_{\varepsilon_n}\|_{L_p[0,T]} \longrightarrow 0, \varepsilon_n \to 0,\end{gathered} \tag{26}$$

в силу рівномірної обмеженості $\|u_{\varepsilon_n}\|_{L_p[0,T]}$. Перейдемо до границі в (23) при $\varepsilon_n \to 0$:

$$x_0(t) \in x_0 + \int_0^t f_0(x_0(s))\,ds + \int_0^t f_1(x_0(s))u_0(s)\,ds,$$

тобто $x_0(t)$ - розв'язок задачі Коші (5), а тому в силу єдиності розв'язку $x_0(t) \equiv y(t)$.

Отже, $x_{\varepsilon_n}(t) \rightrightarrows y(t)$ при $\varepsilon_n \to 0$. Тому довільна збіжна послідовність функцій із сім'ї збігається до одної і тієї ж границі. Тим самим маємо твердження теореми. □

В силу Зауваження 2 маємо, що для функціоналу (2) існує мінімізуюча послідовність $\{(x_\varepsilon^{(n)}(t), u_\varepsilon^{(n)}(t))\}_{n\geq 1}$. При цьому $x_\varepsilon^{(n)}(t) \rightrightarrows x_\varepsilon^*(t)$ на $[0,T]$ та $u_\varepsilon^{(n)} \to u_\varepsilon^*$ слабко в $L_p([0,T])$. В силу леми Мазура і властивостей множини

V маємо, що $u_\varepsilon^*(t) \in V \; \forall t \in [0,T]$. Тому згідно прямого методу варіаційного числення задача (1), (2) має розв'язок.

Далі, проводячи аналогічні міркування до [8, Theorem 2.8], одержимо наступний результат.

Теорема 4. *Нехай виконані умови 1-4. Тоді задачі* (1), (2) *і* (5), (6) *мають розв'язки* $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ *і* $(y^*(t), u^*(t))$ *відповідно. При цьому*

1) $J_\varepsilon^* \to J_0^*$, $\varepsilon \to 0$;

2) для будь-якого $\eta > 0$ *існує* ε_0, *таке, що для* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *маємо*

$$|J_\varepsilon^* - L_\varepsilon[u^*]| < \eta; \tag{27}$$

3) існує послідовність $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, *така, що*

$$x_{\varepsilon_n}^*(t) \rightrightarrows y(t) \tag{28}$$

рівномірно на $[0,T]$ *і*

$$u_{\varepsilon_n}^* \to u^* \tag{29}$$

слабко в $L_p([0,T])$.

Якщо при цьому усереднена задача має (5), (6) *має єдиний розв'язок, то збідності* (27) *і* (28) *мають місце для всіх* $\varepsilon \to 0$.

Зауваження 3. Аналогічний результат до теореми 4 можна одержати для задачі (1), (3). Більше того, для функціоналу (3) твердження (29) можна посилити, замінивши слабку збіжність сильною.

3. Висновки

У роботі розглядається задача оптимального керування зі швидкоколивними змінними диференціальним включенням, лінійним за керуванням. Для багатозначної правої частини розглядається умова не більш, ніж лінійного росту та Липшицевість за фазовою змінною. Багатозначність, як відомо, вносить свої труднощі при розгляді такого роду задач. Проте добре розвинений апарат математичного аналізу, що застосовуються до дослідження багатозначних функцій, дає можливість застосування методу усереднення до описаної вище задачі оптимального керування. Таким чином, у роботі обгрунтовано результати щодо рівномірної збіжності розв'язків задачі Коші вихідної задачі до розв'язку задачі Коші усередненої задачі та обгрунтовано збіжність оптимальних керувань і оптимальних траєкторій розв'язків точної задачі до оптимального керування і траєкторії усередненої задачі. При цьому також обгрунтовано, що оптимальне керування усередненої задачі є "майже оптимальним" для точної задачі, тобто з точністю до малого параметру ε реалізується мінімум критерію якості (Теореми 3, 4).

Список літератури

1. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. / Н. Н. Моисеев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
2. **Моисеев Н. Н.** Элементы теории оптимальных систем. / Н. Н. Моисеев. – М.:Наука, 1975. – 528 с.
3. **Плотников В. А.** Метод усреднения в задачах управления. / В. А. Плотников. – Киев-Одесса:Лыбидь, 1992. – 188 с.
4. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. – Одесса:Астропринт, 1999. – 356 с.
5. **Gaitsgory V** Averaging and near viability of singularly perturbed control systems / V. Gaitsgory //Journal of Convex Analysis. – 2006. – V. 2, No 13. – P. 329-352.
6. **Носенко Т. В** Метод усереднення в деяких задачах оптимального керування. / Т. А. Носенко, О. М. Станжицький . // Нелінійні коливання. – 2008. – Т. 11, No 4. – С. 512 – 519.
7. **Кічмаренко О. Д.** Застосування методу усереднення до задач оптимального керування для звичайних диференціальних рівнянь на півосі. / О. Д. Кічмаренко // Український математичний журнал. – 2018. – Т. 70, №5. – С. 642 – 654.
8. **Kichmarenko O. D.** Application of the averaging method to optimal control problem of system with fast parameters / O. D. Kichmarenko // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2017. – Vol.115, No 1. – P. 93 – 114.
9. **Hale J.** Theory of functional-differential equations / J. Hale. – New-York:SpringerVerlag, 1977 – 365 p.
10. **Перестюк М. О.** Застосування асимптотичних методів регулярно і сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь / О. М. Перестюк, І. І. Клевчук // Нелінійні коливання. – 2013. – Т. 16, №1. – С. 94 – 104.
11. **Плотников В. А.** Метод усреднения для дифференциальных включений и его приложение к задачам оптимального управления / В. А. Плотников // Дифференциальные уравнения. – 1979. – №8. – С. 1427 – 1433.
12. **Плотников В. А.** Усреднение дифференциальных включений / В. А. Плотников // Укр. мат. журнал. – 1979. – Т.31, №5. – С. 573 – 576.

13. **Филатов О. П.** Усреднение систем дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными / О. П. филатов, М. М. Хапаев // Мат. заметки. – 1990. – Т47, Вып.5. – С. 127 – 134.

14. **Перестюк Н. А.** Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / Н. А. Перестюк, В. А. Плотников, А. М. Самойленко, Н.В. Скрипник. – Киев:Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 428 с.

15. **Филлипов А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филлипов. – Москва:Наука, 1985. – 222 с.

16. **Благодатских В. И.** Дифференциальные включения и оптимальное управление / В. И. Благодатских, А. Ф. Филлипов // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы, Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института, Тр. МИАН СССР. – 1985. – Т. 169. – С. 194-252.

17. **Aumann R. J.** Integrals of set-valued functions / R. J. Aumann // J. Math. Anal. Appl. 1965. – Vol.12, No 1. – P. 1–12.

18. **Плотников В. А.** Усреднение дифференциальных включений с многозначными импульсами / В. А. Плотников, Л. И. Плотникова // Укр. мат. журнал. – 1995. – Т.47. №11. – С. 1526-1532.

19. **Dawidiwski M.** On some generalization of Bogolubov averaging theorem / M. Dawidiwski // Funct. et. Approx. (PRL). – 1979. – No7. – P. 55 –70.

Кичмаренко О. Д., Касимова Н. В., Жук Т. Ю.

Приближенное решение задачи оптимального управления дифференциальным включением с быстроосцилирующими коэффициентами

Резюме

Рассматривается задача оптимального управления из быстроосцилируемыми переменными, линейная по управлению. При этом объектом управления служит дифференциальное включение из Липшицевой по фазовой переменной многозначной правой частью. Многозначность порождает свои специфические проблемы, такие как замкнутость, опуклость семейства решений, существование граничных решений, выделения решений из заданными свойствами и т.п. Но хорошо развитый апарат математического анализа, который, который применяется к исследованию многозначных функций дает возможность применения метода усреднения к описаной выше задаче оптимального управления. В работе доказана сходимость оптимальных управлений и оптимальных траекторий решений точной задачи к оптимальному управлению и траеетории усредненной задачи. При этом также обосновано, что оптимальное управление усредненной задачи есть "почти оптимальным" для точной задачи, то есть с точностью к малому параметру ε реализуется минимум критерия качества.

Ключевые слова: задача оптимального управления, дифференциальное включение, малый параметр, метод усреднения.

Kichmarenko O. D., Kasimova N. V., Zhuk T. Yu.

Approximate solution of the optimal control problem for differential inclusion with fast oscillating coefficients

Summary

We consider the optimal control problem with fast oscillating variables, which is linear by control. At that we consider the differential inclusion with Lipschitz by phase variable multi-valued right hand side as an object of control. Muli-valued aspect generetes its specific difficulties such as closedness, convexity of family of solutions, existence of boundary solutions, highlighting of solutions with given properties etc. However, well developed apparatus of mathematical analysis which can be applied to investigation of multi-valued functions allows us to apply the averaging method to upper mentioned optimal control problem. In the paper we prove the convergence of optimal controls and optimal trajectories of solutions of initial exact problem to optimal control and trajectory of averaged problem. We also justify that optimal control of averaged problem is "almost optimal" for initial exact problem, i.e. within a small parameter ε the minimum of quality criterium can be realized.

Key words: optimal control problem, differential inclusion, small parameter, averaging method.

References

1. Moiseev, N. N. (1981). *Asimptoticheskie metodi nelinejnoj mehaniki [Asymptotic methods of nonlinear mechanics].* Moskow: Nauka, 400 p.

2. Moiseev, N. N. (1975). *Elementi teorii optimalnih system [Elements of optimal systems theory].* – Moskow: Nauka, 528 p.

3. Plotnikov, V. A. (1992). *Metod usredneniya v zadachah upravleniya [Averaging method in control problems].* – Kiev-Odessa:Lybid, 188 p.

4. Plotnikov, V. A., Plotnikov, A. V., Vityuk, A. N. (1999). *Differencialnie uravneniya s mnogoznachnoj pravoj chastyu. Asimptoticheskie metodi [Differential equations with multi-valued right-hand side. Asymptotic methods].* Odessa:Astroprint, 356 p.

5. Gaitsgory V (2006) *Averaging and near viability of singularly perturbed control systems. Journal of Convex Analysis*, Vol. 2, No 13., P. 329-352.

6. Nosenko, T. V., Stanzhitskiy, O. M. (2008). *Metod userednennya v deyakih zadachah optimalnogo keruvannya [Averaging method in some optimal control problems]. Nelinijni kolivannya*, Vol. 11, No 4. – P. 512 – 519.

7. Kichmarenko, O. D. (2018). *Zastosuvannya metodu userednennya do zadach opimalnogo keruvannya dlya zvichainih differencialnih rivnyan na pivosi [Application of the averaging method to optimal control problems for ordinary differential equations on sem-axis]. Ukrainskij matematichnij zhurnal*, Vol. 70, No 5. – P. 642 – 654.

8. Kichmarenko O. D. (2017). *Application of the averaging method to optimal control problem of system with fast parameters International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol.115, No 1. – P. 93 – 114.

9. Hale, J. (1977) *Theory of functional-differential equations.* New-York:SpringerVerlag, 365 p.

10. Perestyuk, M. O., Klevchuk, I. I. (2013). *Zastosuvannya asymptotichnih metodiv do regulyarno i syngulyarno zburenih differencialno-riznicevih rivnyan [Application of asymptotic methods to regular and singular perturbed differential-difference equations]. // Nelinijni kolyvannya*, Vol.16, No1. – P. 94 – 104.

11. Plotnikov, V. A. (1979). *Metod usredneniya dlya differencialnih vklucheni i ego prilogenie k zadacham optimalnogo upravleniya [Averaging method for differential inclusions and its application to optimal control problems]. Differencialnie uravneniya*, No 8. – P. 1427 – 1433.

12. Plotnikov, V. A. (1979). *Usrednenie differencialnih vklyuchenij [Averaging of differential inclusions]. Ukr. mat. zhurnal*, Vol.31, No5. – P. 573 – 576.

13. Filatov, O. P., Hapaev, M. M. (1990). *Usrednenie system differencialnih vklucheniy s bistrimi i medlennimi peremennimi [Averaging of systems of differential inclusions with fast and slow variables]. Mat. zametki*, Vol. 47, Issue 5. – P. 127 – 134.

14. Perestyuk, N. A., Plotnikov, V. A., Samoilenko, A. M., Skrypnik, N. V. (2007). *Impulsnie differencialnie uravneniya s mnogoznachnoj i razrivnoj pravoj chastyu [Impulse differential equations with multi-valued and discontinuous right-hand side].* Kyiv:In-t matematiki NAN Ukraini, 428 p.

15. Fillipov, A. F. (1985). *Differencialnie uravneniya s razrivnoj pravoj chastyu [Differential equations with discontinuous right hand side].* Moscow:Nauka, 222 p.

16. Blagodatskih, V. I., Fillipov, A. F. (1985). *Differencialnie vklyucheniya i optimalnoe upravlenie [Differential inclusions and optimal control]. Topologiya, obiknovennie differencialnie uravneniya, dinamicheskie systemi, Sbornik obzornih statej. 2. K 50-letiyu instituta, Tr. MIAN SSSR.* Vol. 169. – P. 194-252.

17. Aumann, R. J. (1965). *Integrals of set-valued functions J. Math. Anal. Appl.*, Vol.12, No 1. – P. 1–12.

18. Plotnikov, V. A., Plotnikova, L. I. (1995). *Usrednenie differencialnih vkluchenij s mnogoznachnimi impulsami [Averaging of differential inclusions with multi-valued impulses]. Ukr. mat. zhurnal*, Vol.47. No11. – P. 1526-1532.

19. Dawidiwski M. (1979). *On some generalization of Bogolubov averaging theorem Funct. et. Approx. (PRL).*, No7. – P. 55 –70.