Дослідження в математиці і механіці. — 2021. — Т. 26, вип. 1(37). — С. 20–37

УДК 517.583+511.174

Гладун С. Е.

КУБИЧЕСКИЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЭЙЛЕРА И ТЭТА-ФУНКЦИИ РАМАНУДЖАНА

В статье рассматривается элементарный метод, базирующийся на свойствах кубических тэта-функций, в связи с получением новых формул, в которых через эйлерово произведение выражаются степенные ряды с коэффициентами, равными значениям функции суммы нечетных степеней делителей (или с коэффициентами, равными значениям теоретико-числовой тау-функции) на арифметической прогрессии разности 3. В качестве следствий получены несколько числовых равенств в стиле Рамануджана, а также асимптотическая формула поведения степенного ряда вблизи конца интервала сходимости. Приведена общая формула для так называемого кубического степенного ряда через кубические тэта-функции Рамануджана, и проведен анализ случаев, когда в эту зависимость входит рационально лишь бесконечное эйлерово произведение. Для получения этой зависимости использована знаменитая теорема Рамануджана о рядах Эйзенштейна, а также применен вариант параметрического метода, в котором одну из главных ролей играет выражение параметра через кубическую тэта-функцию.

MSC: 11A25, 30B10, 33E05.

Ключевые слова: кубические степенные ряды, произведение Эйлера, тэта-функции Рамануджана, ряды Эйзенштейна.

DOI: 10.18524/2519-206X.2021.1(37).248015.

1. Введение

Хорошо известно, что идеи, возникающие на стыке различных математических направлений, являются весьма плодотворными. Важность классической теории тэта-функций для теории чисел была доказана еще во времена Эйлера и Якоби в их работах по разбиениям и представлениям натуральных чисел в виде сумм квадратов. В данной заметке автор попытался очередной раз привлечь внимание любителей математики к наследию индийского математика Рамануджана и к работам его последователей, и показал, что даже с помощью элементарных рассуждений можно развить их результаты, а также получить любопытные следствия из них. Основы теории эллиптических функций альтернативных базисов были заложены в работах Рамануджана [1, с. 89], многие важные теоремы которых, не опуб-

Получена 22.09.2021

ликованные ранее, были систематизированы и изданы исследователями и последователями его творчества в так называемых "Lost Notebooks" всего несколько лет назад, см., например, [2] . Особое внимание Рамануджан уделял связанным с тождествами для тэта-функций модулярным уравнениям, в которых он был и остается непревзойденным мастером. Его работы настолько глубоки и уникальны, что вызывают особый интерес и объединяют математиков всего мира. Гений Рамануджана заключался еще и в том, что он указал ту область математики, в которой сокрыты неисчерпаемые богатства теорем, и следование по этому пути неизбежно приводит нас к истине.

На данную работу автора вдохновила удивительная формула Рамануджана для функции числа разбиений на арифметической прогрессии с разностью 5. Формула упоминалась в [3, стр. 130, (6.7.1)]. Полное доказательство этой формулы Рамануджан опубликовать не успел из-за своей преждевременной смерти. Короткая схема приведена в [4, стр. 212-213].

Времена формул еще не прошли, хотя идет эра вычислительной техники. По мнению автора, формулы индийского трагичного математического гения никогда не утратят своей актуальности. Именно в эпоху суперкомпьютеров они демонстрируют, что математика все больше роднится с искусством. В формулах Рамануджана присутствуют глубина, внутренняя красота и неповторимость, являющиеся характеристиками каждого настоящего искусства такого, как живопись, скульптура, архитектура, музыка, поэзия или искусство программирования. Особенно поражает воображение то, что во времена таких математиков, как Эйлер, Гаусс или Рамануджан компьютеры вообще были не нужны, так как эти ученые просто могли заменить компьютер.

Методика получения новых формул, предлагаемых в данной статье, частично базируется на результатах монографий [1] и [2], а также дополняет идею работы [5]. Таким образом, автором предложен тэта-биномиальный метод, который может служить для получения широкого класса формул, содержащих кубические тэта-функции Рамануджана и функцию суммы нечетных степеней делителей на арифметической прогрессии с разностью 3. Кроме этого, в статье показано, как метод применяется для исследования свойств теоретико-числовой функции Рамануджана $\tau(n)$. Для вывода общих закономерностей применен вариант параметрического метода, свойственный теории тэта-функций.

Формулы для числа представлений натуральных чисел суммами бинарных квадратичных форм вида m^2+mn+n^2 получены в источниках [6], [7] и [8]. Множество интересных тождеств для обобщенной функции суммы делителей и рядов типа Ламберта, а также их приложений представлено в работе [9]. На сегодняшний день тэта-функции Рамануджана являются очень популярным объектом для изучения учеными разных стран. Наверное, это связано с таинственной судьбой самого Рамануджана, жизни и творчеству которого посвящено огромное число книг и статей, см., например, работы [10-13]. В данной работе освещается только теоретико-числовая сторона вопроса.

Основные результаты

Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$, $\sigma(n) := \sum_{d|n} d$ и $\sigma_k(n) := \sum_{d|n} d^k$- функции суммы делителей и суммы k-х степеней делителей натурального числа n. Тройка кубических тэта-функций представляется рядами [1, с. 93]:

$$a(q) := \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{m^2+mn+n^2}, \quad b(q) := \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \omega^{m-n} q^{m^2+mn+n^2},$$
$$c(q) := \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{(m+1/3)^2+(m+1/3)(n+1/3)+(n+1/3)^2},$$

где $\omega = e^{2\pi i/3}$. Всюду мы полагаем $q = e^{\pi i\tau}$, где $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ и $q^\lambda = e^{\lambda\pi i\tau}$.

Для дальнейшего нам понадобятся также ряды Эйзенштейна [1, с. 105]:

$$L(q) := 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^n},$$
$$M(q) := 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3q^n}{1-q^n},$$
$$N(q) := 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5q^n}{1-q^n}.$$

Перейдем к рассмотрению основных результатов работы. Итак, в круге $|q| < 1$ справедлива теоретико-числовая формула:

$$\frac{\sigma_3(2) + \sigma_3(5)q + \sigma_3(8)q^2 + \sigma_3(11)q^3 + \cdots}{\sigma(2) + \sigma(5)q + \sigma(8)q^2 + \sigma(11)q^3 + \cdots} = 3a^2(q). \qquad (1)$$

Используя результат работы [5], формулу (1) можно переписать в виде:

$$\sigma_3(2)+\sigma_3(5)q+\sigma_3(8)q^2+\sigma_3(11)q^3+\cdots$$
$$=9a^2(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^6}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^2}. \quad (2)$$

Для доказательства нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Для кубической тэта-функции $a(q)$ справедливо тождество:*

$$a(q)+\omega a(\omega q)+\omega^2 a(\omega^2 q)=0.$$

Доказательство. Воспользовавшись определением тэта-функции $a(q)$, получим следующую цепочку равенств:

$$a(q)+\omega a(\omega q)+\omega^2 a(\omega^2 q)=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{m^2+mn+n^2}$$
$$+\omega\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\omega^{m^2+mn+n^2}q^{m^2+mn+n^2}+\omega^2\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\omega^{2(m^2+mn+n^2)}q^{m^2+mn+n^2}$$
$$=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{m^2+mn+n^2}\left\{1+\omega^{m^2+mn+n^2+1}+\omega^{2(m^2+mn+n^2+1)}\right\}.$$

Так как $m^2+mn+n^2+1\not\equiv 0 \pmod 3$, то теперь утверждение леммы очевидно. □

Теорема 1. *Справедлива формула* (1).

Доказательство. Согласно [1, с. 94, (2.9)] запишем

$$c(q^3)=\frac{a(q)-a(q^3)}{2}. \quad (3)$$

Доказательство этой важной формулы, лежащей в основе всего метода, можно найти в работе братьев Борвейнов [13]. Возведя левую и правую части равенства (3) в четвертую степень по формуле бинома Ньютона, получим:

$$c^4(q^3)=\frac{a^4(q)-4a^3(q)a(q^3)+6a^2(q)a^2(q^3)-4a(q)a^3(q^3)+a^4(q^3)}{16}. \quad (4)$$

Подставим в формулу (4) вместо q значения ωq и $\omega^2 q$:

$$\omega c^4(q^3) = \frac{a^4(\omega q) - 4a^3(\omega q)a(q^3) + 6a^2(\omega q)a^2(q^3) - 4a(\omega q)a^3(q^3) + a^4(q^3)}{16}, \tag{5}$$

$$\omega^2 c^4(q^3) = \frac{a^4(\omega^2 q) - 4a^3(\omega^2 q)a(q^3) + 6a^2(\omega^2 q)a^2(q^3) - 4a(\omega^2 q)a^3(q^3) + a^4(q^3)}{16}. \tag{6}$$

Умножив равенство (5) на ω, а равенство (6) - на ω^2, и, сложив полученные выражения с (4), получим:

$$\begin{gathered}\left\{a^4(q) + \omega a^4(\omega q) + \omega^2 a^4(\omega^2 q)\right\} - 4a(q^3)\left\{a^3(q) + \omega a^3(\omega q) + \omega^2 a^3(\omega^2 q)\right\} \\ +6a^2(q^3)\left\{a^2(q) + \omega a^2(\omega q) + \omega^2 a^2(\omega^2 q)\right\} = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Далее, согласно [2, с. 403], запишем:

$$a^4(q) = 1 + 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3 q^n}{1-q^n} + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)^3 q^{3n}}{1-q^{3n}}. \tag{8}$$

Доказательство формулы (8), использующее модулярные уравнения третьей степени, можно найти в монографии [14, с. 460-462, Запись 3(i)]. Запишем еще два равенства, следующие из этой формулы:

$$\omega a^4(\omega q) = \omega + 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3 \omega^{n+1} q^n}{1-\omega^n q^n} + 8\omega\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)^3 q^{3n}}{1-q^{3n}}, \tag{9}$$

$$\omega^2 a^4(\omega^2 q) = \omega^2 + 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3 \omega^{2n+2} q^n}{1-\omega^{2n} q^n} + 8\omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)^3 q^{3n}}{1-q^{3n}}. \tag{10}$$

Сложив равенства (8), (9) и (10), получим

$$a^4(q) + \omega a^4(\omega q) + \omega^2 a^4(\omega^2 q) = 3\cdot 24\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(3n-2)^3 q^{6n-4}}{1-q^{9n-6}}. \tag{11}$$

Возведя обе части равенства (3) в куб, будем иметь следующее:

$$c^3(q^3) = \frac{a^3(q) - 3a^2(q)a(q^3) + 3a(q)a^2(q^3) - a^3(q^3)}{8}. \tag{12}$$

Проведя для формулы (12) рассуждения, аналогичные тем, что были ранее, получим:

$$a^3(q) + \omega a^3(\omega q) + \omega^2 a^3(\omega^2 q) - 3a(q^3)\left\{a^2(q) + \omega a^2(\omega q) + \omega^2 a^2(\omega^2 q)\right\} = 0.$$

Поскольку, согласно [5, с. 567, (16)]

$$a^2(q) + \omega a^2(\omega q) + \omega^2 a^2(\omega^2 q) = 12c^2(q^3),$$

то можно записать

$$a^3(q) + \omega a^3(\omega q) + \omega^2 a^3(\omega^2 q) = 36a(q^3)c^2(q^3). \tag{13}$$

Для функции суммы кубов делителей запишем ряд Ламберта:

$$\sigma_3(1)q+\sigma_3(2)q^2+\sigma_3(3)q^3+\sigma_3(4)q^4+\cdots = \frac{1^3q}{1-q}+\frac{2^3q^2}{1-q^2}+\frac{3^3q^3}{1-q^3}+\frac{4^3q^4}{1-q^4}+\cdots \tag{14}$$

Равенство (14) влечет за собой (см. [5, с. 566]):

$$\sigma_3(2) + \sigma_3(5)q^3 + \sigma_3(8)q^6 + \sigma_3(11)q^9 + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(3n-2)^3 q^{6n-6}}{1-q^{9n-6}}. \tag{15}$$

Из формул (11) и (15) выводим

$$a^4(q) + \omega a^4(\omega q) + \omega^2 a^4(\omega^2 q) = 3 \cdot 24 \left\{\sigma_3(2) + \sigma_3(5)q^3 + \sigma_3(8)q^6 + \cdots\right\} q^2. \tag{16}$$

Используя равенства (13) и (16), формулу (7) можно переписать в виде:

$$3 \cdot 24 \left\{\sigma_3(2) + \sigma_3(5)q^3 + \sigma_3(8)q^6 + \cdots\right\} q^2 \\ - 4a(q^3) \cdot 36a(q^3)c^2(q^3) + 6a^2(q^3) \cdot 12c^2(q^3) = 0.$$

Используя [5, с. 568, (22)], получим

$$\sigma_3(2) + \sigma_3(5)q^3 + \sigma_3(8)q^6 + \cdots = 3a^2(q^3) \left\{\sigma(2) + \sigma(5)q^3 + \sigma(8)q^6 + \cdots\right\},$$

что эквивалентно (1), если заменить q^3 на q. Доказательство завершено. $\square$

Следствие 1. *Для любого* $m \in \mathbb{N}$ *положим*

$$\sigma\left(\frac{3m-2}{3}\right) = 0, \quad \sigma\left(\frac{3m-1}{3}\right) = 0.$$

Кроме этого пусть

$$\sigma(0) = -\frac{1}{24}.$$

Тогда для неотрицательных целых n *справедлива формула:*

$$\sigma_3(3n+2) = 36 \cdot \sum_{k=0}^{n} \left\{\sigma(k) - 3\sigma\left(\frac{k}{3}\right)\right\} \sigma(3n-3k+2). \tag{17}$$

Доказательство. Формула (17) следует из равенства (1) и [1, с. 100, (2.37)]. □

Следствие 2. *Справедливы числовые равенства:*

$$\sigma_3(2)+\sigma_3(5)e^{-\pi}+\sigma_3(8)e^{-2\pi}+\cdots$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{48}\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)\left(1+\sqrt{2}\sqrt[4]{3}\right)^2\left(1-\sqrt{2}\sqrt[4]{3}+\sqrt{3}\right)\frac{\pi^2e^{2\pi/3}}{\Gamma^8(3/4)},$$

$$\sigma_3(2)-\sigma_3(5)e^{-\pi}+\sigma_3(8)e^{-2\pi}-\sigma_3(11)e^{-3\pi}+\cdots=\frac{\sqrt{3}}{6}\frac{\pi^2e^{2\pi/3}}{\Gamma^8(3/4)},$$

$$\sigma_3(2)+\sigma_3(5)e^{-2\pi}+\sigma_3(8)e^{-4\pi}+\sigma_3(11)e^{-6\pi}+\cdots=\frac{\sqrt{3}}{24}\frac{\pi^2e^{4\pi/3}}{\Gamma^8(3/4)}.$$

Доказательство. Для проверки первого соотношения полагаем в формуле (1) $q=e^{-\pi}$. Далее применяем первое равенство следствия 1 [5, с. 568], а также формулу

$$a\left(e^{-\pi}\right)=\varphi\left(e^{-\pi}\right)\varphi\left(e^{-3\pi}\right)+\varphi\left(-e^{-\pi}\right)\varphi\left(-e^{-3\pi}\right)-a\left(-e^{-\pi}\right),$$

которая получается из [1, с. 93, (2.7)]. Здесь, как всегда, тэта-функция Рамануджана $\varphi(q)$ определяется равенством:

$$\varphi(q):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}.$$

Для проверки второго числового равенства полагаем в формуле (1) $q=-e^{-\pi}$ и вычисляем значение $a^2\left(-e^{-\pi}\right)$, пользуясь леммой 5.4 [1, с. 110] и записью 4 [1, с. 327]:

$$a^2\left(-e^{-\pi}\right)=\frac{(\sqrt{3}-1)\pi}{2^{1/2}3^{1/4}\Gamma^4(3/4)}.$$

Далее применяем вторую формулу следствия 1 [5, с. 568].

Чтобы доказать третье числовое равенство, полагаем в формуле (1) $q=e^{-2\pi}$, а значение $a\left(e^{-2\pi}\right)$ получено в монографии [1, с. 332]. □

Следствие 3. *При $q\to 1-$ верна следующая асимптотическая формула:*

$$\sigma_3(2)+\sigma_3(5)q+\sigma_3(8)q^2+\sigma_3(11)q^3+\cdots\sim\frac{4}{3}\pi^2\frac{a^2(q)}{(1-q)^2}\sim\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{1}{1-q}\right)^4.$$

Доказательство. Указанная асимптотика следует из формулы (1) и следствия 2 ([5, с. 568]), а также из того, что

$$a(q) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{1}{1-q} + O\left(\frac{e^{-2\pi/(1-q)}}{1-q}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{1}{1-q} + o(1) \quad \text{при } q \to 1-.$$

Последняя асимптотическая формула следует из функционального уравнения для кубической тэта-функции (аналога формулы Пуассона для одномерной тэта-функции):

$$a(e^{-2\pi x}) = \frac{1}{\sqrt{3}x} a(e^{-2\pi/(3x)}), \qquad x > 0. \quad \square$$

Следствия 1, 2 и 3 теоремы демонстрируют значение формулы (1).

Перейдем к обобщению полученных результатов и рассмотрим сумму следующего вида:

$$\Delta_{2k-1}(q) := \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(3n-1)q^{n-1}.$$

Возникает вопрос: как выразить $\Delta_{2k-1}(q)$ через кубические тэта-функции Рамануджана? Предложенный элементарный метод, которым были получены базовая формула работы [5] для $\Delta_1(q)$ и формула (2) для $\Delta_3(q)$, позволяет найти столь простые закономерности не только в этих двух случаях. Далее будут выведены явные выражения для $\Delta_5(q)$, $\Delta_7(q)$, $\Delta_9(q)$, $\Delta_{11}(q)$ и $\Delta_{13}(q)$, но для этого понадобится привлечение фундаментальных теорем теории эллиптических функций альтернативных базисов, а также общей теоремы Рамануджана, касающейся рядов Эйзенштейна. Модулярные уравнения третьей степени лежат в основе формул для $\Delta_1(q)$ и $\Delta_3(q)$. Тэта-биномиальный метод вывода формул для $\Delta_{2k-1}(q)$ в целом несколько громоздкий, но простой по сути, так как основывается на классической формуле бинома Ньютона. В работе метода принимают участие фундаментальные результаты Рамануджана и его последователей. Запишем формулы для $\Delta_5(q)$, $\Delta_7(q)$, $\Delta_9(q)$, $\Delta_{11}(q)$ и $\Delta_{13}(q)$:

$$\begin{aligned}&\sigma_5(2) + \sigma_5(5)q + \sigma_5(8)q^2 + \cdots \\ &\qquad = 33a^4(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^6}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^2}\end{aligned}$$

$$+\,2268qa(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{15}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^5}, \quad (18)$$

$$\sigma_7(2)+\sigma_7(5)q+\sigma_7(8)q^2+\cdots = 129a^6(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{6}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^2}$$
$$+73224qa^3(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{15}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^5}$$
$$+349920q^2\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{24}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^8}. \quad (19)$$

Используя [1, с. 93, (2.5)] и [1, с. 109, (5.4) и (5.5)], равенство (19) можно переписать следующим образом:

$$\sigma_7(2)+\sigma_7(5)q+\sigma_7(8)q^2+\sigma_7(11)q^3+\cdots = 129\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{16}$$
$$+80190q\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^4\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{12}$$
$$+2421009q^2\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{24}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^8}. \quad (20)$$

$$\sigma_9(2)+\sigma_9(5)q+\sigma_9(8)q^2+\cdots = 513a^8(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{6}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^2}$$
$$+1927476qa^5(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{15}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^5}$$
$$+66449808q^2a^2(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{24}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^8}, \quad (21)$$

$$\sigma_{11}(2)+\sigma_{11}(5)q+\sigma_{11}(8)q^2+\cdots = 2049a^{10}(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{6}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^2}$$
$$+48701088qa^7(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{15}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^5}$$
$$+6301604304q^2a^4(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{24}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^8}$$
$$+35580565440q^3a(q)\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{33}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{11}}, \quad (22)$$

$$\sigma_{13}(2)+\sigma_{13}(5)q+\sigma_{13}(8)q^2+\cdots = 8193\frac{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{34}}{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^6}$$
$$+1220981688q\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^6\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{22}$$
$$+576680210370q^2\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{18}\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{10}$$
$$+40034368860048q^3\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{30}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^2}$$
$$+694882425536757q^4\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{42}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{14}}. \tag{23}$$

Заметим, что правые части формул для $\Delta_1(q)$, $\Delta_7(q)$ и $\Delta_{13}(q)$ записаны в терминах лишь эйлерова произведения. Очевидно, что подобная ситуация возникает при записи формул для $\Delta_{6n+1}(q)$.

Лемма 2. *Введем оператор $\Re$, действующий на функцию $g(q)$ следующим образом:*

$$\Re[g(q)] = g(q)+\omega g(\omega q)+\omega^2 g(\omega^2 q).$$

Тогда для кубической тэта-функции $a(q)$ справедливы тождества:

$$\Re[a^4(q)] = 3\cdot 24a^2(q^3)c^2(q^3),$$

$$\Re[a^5(q)] = 120a^3(q^3)c^2(q^3)+96c^5(q^3),$$

$$\Re[a^6(q)] = 180a^4(q^3)c^2(q^3)+576a(q^3)c^5(q^3),$$

$$\Re[a^7(q)] = 252a^5(q^3)c^2(q^3)+2016a^2(q^3)c^5(q^3),$$

$$\Re[a^8(q)] = 336a^6(q^3)c^2(q^3)+5376a^3(q^3)c^5(q^3)+768c^8(q^3),$$

$$\Re[a^9(q)] = 432a^7(q^3)c^2(q^3)+12096a^4(q^3)c^5(q^3)+6912a(q^3)c^8(q^3),$$

$$\Re[a^{10}(q)] = 540a^8(q^3)c^2(q^3)+24192a^5(q^3)c^5(q^3)+34560a^2(q^3)c^8(q^3),$$

$$\Re[a^{11}(q)] = 660a^9(q^3)c^2(q^3)+44352a^6(q^3)c^5(q^3)+126720a^3(q^3)c^8(q^3)+6144c^{11}(q^3),$$

$$\Re[a^{12}(q)] = 792a^{10}(q^3)c^2(q^3)+76032a^7(q^3)c^5(q^3)+380160a^4(q^3)c^8(q^3)+73728a(q^3)c^{11}(q^3).$$

Пусть теперь $n\in\mathbb{N}$. Тогда для кубической тэта-функции $a(q)$ справедлива общая формула:

$$\Re[a^n(q)] = 3\sum_{l=1}^{[\frac{n+1}{3}]}\binom{n}{3l-1}2^{3l-1}a^{n-3l+1}(q^3)c^{3l-1}(q^3).$$

Доказательство. Сначала покажем, как работает биномиальный тэта-рекур-сивный метод. Первое соотношение леммы вытекает из формул (7) и (13). Остальные получаются рекурсивно. Обе части равенства (3) возводятся в соответствующую степень, причем правая - по формуле бинома Ньютона. На полученное равенство действуют оператором $\mathfrak{R}$. При этом $\mathfrak{R}[a^n(q)]$ можно выразить через вычисленные последовательно $\mathfrak{R}[a(q)]$, $\mathfrak{R}[a^2(q)]$,..., $\mathfrak{R}[a^{n-2}(q)]$, $\mathfrak{R}[a^{n-1}(q)]$, используя линейность оператора. Рассуждая по индукции, мы можем доказать формулу для $\mathfrak{R}[a^n(q)]$. Имеем $\mathfrak{R}[a(q)] = 0$, $\mathfrak{R}[a^2(q)] = 12c^2(q^3)$, $\mathfrak{R}[a^3(q)] = 36a(q^3)c^2(q^3)$, $\mathfrak{R}[a^4(q)] = 72a^2(q^3)c^2(q^3), \ldots$ &C.

При дальнейших вычислениях мы будем рассматривать q как альтернативную базу тэта-функции:

$$q = \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3};1;1-x\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3};1;x\right)}\right),$$

где $0 < x < 1$.

Рассмотрим действие параметрического метода, позволяющего наиболее просто вывести общий результат. Введем параметр $k_1 := k_1(q) = c(q^3)/a(q^3)$, а также функцию $\lambda(q) := a(q)/a(\omega q)$. Справедливы следующие равенства

$$a^2(q) + \omega a^2(\omega q) + \omega^2 a^2(\omega^2 q) = 12c^2(q^3)$$

и

$$a^2(q) + \omega^2 a^2(\omega q) + \omega a^2(\omega^2 q) = 12a(q^3)c(q^3),$$

где второе получается из того, что $\left\{a(q) + \omega a(\omega q) + \omega^2 a(\omega^2 q)\right\}^4 = 0$. Поэтому будем иметь следующую систему нелинейных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda(q) + \omega + \dfrac{\omega^2}{\lambda(\omega q)} & = & 0 \\ \dfrac{\lambda^2(q) + \omega + \dfrac{\omega^2}{\lambda^2(\omega q)}}{\lambda^2(q) + \omega^2 + \dfrac{\omega}{\lambda^2(\omega q)}} & = & k_1. \end{array}\right.$$

Решая эту систему, получим параметрическое представление:

$$\lambda(q) = \frac{2k_1 + 1}{2k_1\omega + 1}.$$

Поэтому мы можем записать

$$a(\omega q) = \frac{2\omega k_1 + 1}{2k_1 + 1} a(q),$$

$$a(\omega^2 q) = \frac{2\omega^2 k_1 + 1}{2k_1 + 1} a(q).$$

Учитывая, что $a(q)/a(q^3) = 2k_1 + 1$, и, используя формулу бинома Ньютона, получаем общее выражение для оператора $\Re[a^n(q)]$. Заметим, что искомый результат выведен фактически лишь средствами элементарной алгебры. □

В источниках [15, стр. 124-175] и [16, стр. 326, Запись 12] приведен аналитический метод модулярных форм, который может применяться для доказательства знаменитых теорем Рамануджана, касающихся рядов Эйзенштейна, хотя сам Рамануджан использовал элементарные методы.

Формулы (18)-(23) для $\sigma_5(3n-1)$, $\sigma_7(3n-1)$, $\sigma_9(3n-1)$, $\sigma_{11}(3n-1)$ и $\sigma_{13}(3n-1)$, полученные автором, по своему внешнему виду напоминают тождество Рамануджана для функции числа разбиений на арифметической прогрессии с разностью 7 [3, с. 130, (6.7.2)], хотя при их доказательстве используется совсем иной подход.

Теперь мы в состоянии доказать следующее утверждение, представляющее основной результат данной статьи.

Теорема 2. *Справедлива общая формула для* $\Delta_{2k-1}(q^3)$*:*

$$\begin{aligned}\Delta_{2k-1}(q^3) = \frac{1}{q^2} \sum_{3n+2m=k} \kappa_{m,n} \sum_{\alpha=0}^{m} \sum_{n_3=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_3} \frac{(-1)^{n_2+n_3} \binom{m}{\alpha} n!}{(n-n_2-n_3)! n_2! n_3!} 20^{n_2} \frac{9^{\alpha+n_2+2n_3}}{8^{n_2+n_3}} \times \\ \times \sum_{t=0}^{\alpha+n_2+2n_3} \sum_{s=0}^{\alpha+n_2+2n_3} (-1)^t \binom{\alpha+n_2+2n_3}{t} \binom{\alpha+n_2+2n_3}{s} 3^s \times \\ \times \sum_{l=1}^{\left[\frac{2k-t-2s+1}{3}\right]} \binom{2k-t-2s}{3l-1} 2^{3l-1} a^{2k-3l+1}(q^3) c^{3l-1}(q^3).\end{aligned} \tag{24}$$

Здесь $\kappa_{m,n}$ *- числовые коэффициенты из теоремы Рамануджана о следующем представлении рядами Эйзенштейна:*

$$\frac{1}{2}\zeta(-s) + \Phi_{0,s}(q) = \sum \kappa_{m,n} M^m(q) N^n(q),$$

где

$$\Phi_{0,s}(q)=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_s(n)q^n,$$

ζ - дзета-функция Римана, а m и n пробегают целые неотрицательные числа так, что $6n+4m=s+1$.

Доказательство. Из общей формулы Рамануджана [4, с. 141, равенство (26)], теорем 4.2 и 4.3 [1, с. 106], элегантных формул братьев Борвейнов (2.5) и (2.8) [1, с. 93] и рассуждений, используемых при доказательстве леммы 2, следует, что $\Delta_{2k-1}(q)$ выражается через кубические тэта-функции $a(q)$ и $c(q)$. Отсюда также следует алгоритм построения формул для $\Delta_{2k-1}(q)$ при любом натуральном k. Действие оператора $\mathfrak{R}$ можно распространять лишь на формулу из общей теоремы Рамануджана, предварительно выразив ряды Эйзенштейна $M(q)$ и $N(q)$ через $a(q)$ и $a(q^3)$, следуя альтернативной теории. Такова схема доказательства, теперь перейдем к конкретике.

Пусть $x=c^3(q)/a^3(q)$. Поэтому

$$x=\frac{9}{8}\frac{(a(q)-a(q^3))(a^2(q)+3a^2(q^3))}{a^3(q)}$$

и

$$x^p=\frac{9^p}{8^p}\frac{(a(q)-a(q^3))^p(a^2(q)+3a^2(q^3))^p}{a^{3p}(q)}.$$

Далее будем иметь

$$\mathfrak{R}\left[a^{2k}(q)x^p\right]=\frac{9^p}{8^p}\sum_{t=0}^{p}\sum_{s=0}^{p}(-1)^t\binom{p}{t}\binom{p}{s}3^s a^{t+2s}(q^3)\mathfrak{R}\left[a^{2k-t-2s}(q)\right].$$

Поскольку

$$\Delta_{2k-1}(q^3)=\frac{1}{3q^2}\sum_{3n+2m=k}\kappa_{m,n}\mathfrak{R}\left[a^{2k}(q)(1+8x)^m(1-20x-8x^2)^n\right]$$

то, раскрыв скобки, используя формулу бинома Ньютона и факториально-муль-тиномиальную теорему, мы приходим к искомому результату (24). $\square$

Следствие. *Справедлива следующая формула:*

$$\frac{\sigma_9(2)+\sigma_9(5)q+\sigma_9(8)q^2+\sigma_9(11)q^3+\cdots}{\sigma_3(2)+\sigma_3(5)q+\sigma_3(8)q^2+\sigma_3(11)q^3+\cdots} = 57\frac{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{18}}{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^6}$$
$$+217242q\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^6\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^6$$
$$+13207293q^2\frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)\cdots\}^{18}}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^6}. \tag{25}$$

Доказательство. Утверждение (25) следует из равенств (2) и (21). □

Теперь покажем, как тэта-биномиальный метод может применяться для изучения свойств τ-функции Рамануджана. Теоретико-числовая функция $\tau(n)$ определяется следующим образом [3, с. 228]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n = q\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\}^{24}.$$

Теорема 3. *Справедлива следующая формула:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(3n-1)q^{n-1} = \frac{2}{3}a(q)\frac{c^2(q)}{q^{2/3}}b^3(q)\{27a^3(q)c^3(q)-4b^6(q)\}. \tag{26}$$

Доказательство. Теорема 3.3 [1, с. 103] утверждает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n = \frac{1}{27}b^9(q)c^3(q). \tag{27}$$

С помощью формул (2.5) и (2.8) [1, с. 93] правая часть равенства (27) выразится через $a(q)$ и $a(q^3)$. На полученную громоздкую формулу действуем оператором $\mathfrak{R}$. Используя лемму 2, после упрощений, мы приходим к следующему тождеству:

$$\begin{aligned} 3\sum_{n=1}^{\infty}\tau(3n-1)q^{3n-1} &= -8a^{10}(q^3)c^2(q^3)+78a^7(q^3)c^5(q^3) \\ &\quad -78a^4(q^3)c^8(q^3)+8a(q^3)c^{11}(q^3). \end{aligned} \tag{28}$$

Путем несложных алгебраических преобразований и замены q^3 на q, равенство (28) переходит в требуемое утверждение (26). Теорема доказана. □

Следствие. *Для любого натурального n справедливо следующее сравнение:*

$$\tau(3n-1) \equiv 0 \pmod 6.$$

Доказательство. Утверждение следствия вытекает из формулы (26) и формулы (5.5) [1, с. 109]. □

Автор надеется, что в данной небольшой заметке удалось продемонстрировать красоту теории эллиптических функций альтернативных базисов, открытую Рамануджаном, а также обосновать роль этой теории для дальнейших исследований. Предложенный тэта-биномиальный метод, а также уточненный вариант параметрического метода являются элементарным дополнением к ней.

Формулы, подобные (20) и (23), возникают при изучении бесконечномерных алгебр Ли [17]. Это граничное направление в математике берет начало с работы И. Г. Макдональда [18], а теория q-рядов начинается с пентагональной теоремы Эйлера. Интересно, что даже Леонард Эйлер сумел доказать свою пентагональную теорему не сразу, а через достаточно большой промежуток времени после того, как угадал общую закономерность. Историческая связь теории от Эйлера до Макдональда приведена в [19].

Свойства цепной дроби Роджерса-Рамануджана и кубической цепной дроби представлены в [2]. Тематика обобщенной функции суммы делителей, связанная с непрерывными дробями, рассматривалась в работе [20].

Своеобразный и удивительный мир формул, который Рамануджан успел построить за свою короткую жизнь, фактически не имея достаточного количества литературы, образования и общения, не угасает вот уже на протяжении 100 лет и имеет большое значение для всей математики.

Список литературы

1. B. C. Berndt, *Ramanujan Notebooks, Part V*, Springer-Verlag, New York, 1998.
2. G. E. Andrews, B. C. Berndt, *Ramanujan's Lost Notebook, Part I*, Springer-Verlag, New York, 2005.
3. Г. Харди, *Двенадцать лекций о Рамануджане*, Институт компьютерных исследований, М., 2002.

4. G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar, B. M. Wilson, *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, Cambridge, 1927.

5. S. E. Gladun, *A Generating Function for* $\sigma(3n-1)$*, Mathematical Notes, Vol. 95, No. 4 (2014), 565-569.*

6. G. A. Lomadze, *Representation of numbers by sums of the quadratic forms* $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ *(Russian), Acta Arith. 54 (1989), 9-36.*

7. A. S. Merzlyakov, *The problem of G. A. Lomadze on the representation of numbers by the sum of binary quadratic forms of the kind* x^2+xy+y^2*. (Russian) Deposited in VINITI (Vsesoyuzn. Inst. Nauch. Tekh. Inform. Acad. Nauk SSSR), 26.04.89, No. 2753-B89.*

8. N. Kachakhidze, *On the representation of numbers by the direct sums of some binary quadratic forms, Georgian Mathematical Journal. Vol. 5, No. 1 (1998), 55-70.*

9. M. D. Schmidt, *Combinatorial sums and identities involving generalized sum-of-divisors functions with bounded divisors, INTEGERS 20 (2020).*

10. Zhi-Guo Liu, *The Borweins' cubic theta function identity and some cubic modular identities of Ramanujan, Ramanujan Journal (2000).*

11. Nayandeep Deka Barauh, *Modular equations for Ramanujan cubic continued fraction, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 268, 244-255 (2002).*

12. Jinhee Yi, *Theta-functions identities and the explicit formulas for theta-functions and their applications, J. Math. Anal. Appl., 292 (2004), 381-400.*

13. J. M. Borwein, P. B. Borwein, *A cubic counterpart of Jacobi's identity and the AGM, Trans. Amer. Math. Soc. 323 (1991), 691-701.*

14. B. C. Berndt, *Ramanujan Notebooks, Part III*, Springer-Verlag, New York, 1991.

15. Ж.-П. Серр, *Курс арифметики*, Мир, М., 1972.

16. B. C. Berndt, *Ramanujan Notebooks, Part II*, Springer-Verlag, New York, 1989.

17. В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, М., 1993.

18. I. G. Macdonald, *Affine root systems and Dedekind's* η*-function, Matematika, 1972, Volume 16, Issue 4, 3-49.*

19. V. G. Kac, *Infinite-Dimensional Algebras, Dedekind's* η*-function, Classical Möbius Function and the Very Strange Formula, Advances in Mathematics, 30, 85-136, 1978.*

20. M. D. Schmidt, *Continued fractions and* q*-series generating functions for the generalized sum-of-divisors functions, Journal of Number Theory (2017).*

Гладун С. Є.

Кубічні степеневі ряди, добуток Ейлера та тета-функції Рамануджана

Резюме

У статті розглядається елементарний метод, який базується на властивостях кубічних тета-функцій, у зв'язку з отриманням нових формул, в яких через добуток Ейлера виражаються степеневі ряди з коефіцієнтами, які дорівнюють значенням функції суми непарних степенів дільників (або з коефіцієнтами, які дорівнюють значенням теоретико-числової тау-функції) на арифметичній прогресії з різницею 3. У якості наслідків отримані декілька числових рівностей у стилі Рамануджана, а також асимптотична формула поведінки степеневого ряду поблизу кінця інтервалу збіжності. Приведена загальна формула для так званого кубічного степеневого ряду через кубічні тета-функції Рамануджана, і проведений аналіз випадків, коли в цю залежність входить раціонально лише нескінченний добуток Ейлера. Для отримання цієї залежності використана знаменита теорема Рамануджана про ряди Ейзенштейна, а також застосований варіант параметричного методу, у якому одну з головних ролей грає вираз параметру через кубічну тета-функцію.

Ключові слова: кубічні степеневі ряди, добуток Ейлера, тета-функції Рамануджана, ряди Ейзенштейна.

Gladun S. E.

Cubic power series, Euler product and Ramanujan's theta-functions

Summary

The article discusses an elementary method based on the properties of cubic theta-functions, in connection with the derivation of new formulas, in which power series with coefficients, equal to the values of the function of the sum of odd powers of the divisors (or with coefficients, equal to the values of the number-theoretic tau-function) on an arithmetic progression with a difference of 3, are expressed through the Euler product. As a consequence, several numerical equalities in the Ramanujan style, as well as the power series behaviour asymptotic formula near the end of the convergence interval are obtained. The general formula for the so-called cubic power series in terms of Ramanujan's cubic theta-functions and an analysis of the cases when this dependence contains rationally only an infinite Euler product are given. To obtain this dependence, the famous Ramanujan theorem on the Eisenstein series is used. In a variant of the parametric method, one of the main roles is played by the expression of the parameter in terms of the cubic theta function.

Key words: cubic power series, Euler product, Ramanujan's theta-functions, Eisenstein series.

References

1. B. C. Berndt, *Ramanujan Notebooks, Part V*, Springer-Verlag, New York, 1998.

2. G. E. Andrews, B. C. Berndt, *Ramanujan's Lost Notebook, Part I*, Springer-Verlag, New York, 2005.

3. Г. Харди, *Двенадцать лекций о Рамануджане*, Институт компьютерных исследований, М., 2002.

4. G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar, B. M. Wilson, *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, Cambridge, 1927.

5. S. E. Gladun, *A Generating Function for $\sigma(3n-1)$, Mathematical Notes, Vol. 95, No. 4 (2014), 565-569.*

6. G. A. Lomadze, *Representation of numbers by sums of the quadratic forms $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ (Russian), Acta Arith. 54 (1989), 9-36.*

7. A. S. Merzlyakov, *The problem of G. A. Lomadze on the representation of numbers by the sum of binary quadratic forms of the kind x^2+xy+y^2. (Russian) Deposited in VINITI (Vsesoyuzn. Inst. Nauch. Tekh. Inform. Acad. Nauk SSSR), 26.04.89, No. 2753-B89.*

8. N. Kachakhidze, *On the representation of numbers by the direct sums of some binary quadratic forms, Georgian Mathematical Journal. Vol. 5, No. 1 (1998), 55-70.*

9. M. D. Schmidt, *Combinatorial sums and identities involving generalized sum-of-divisors functions with bounded divisors, INTEGERS 20 (2020).*

10. Zhi-Guo Liu, *The Borweins' cubic theta function identity and some cubic modular identities of Ramanujan, Ramanujan Journal (2000).*

11. Nayandeep Deka Barauh, *Modular equations for Ramanujan cubic continued fraction, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 268, 244-255 (2002).*

12. Jinhee Yi, *Theta-functions identities and the explicit formulas for theta-functions and their applications, J. Math. Anal. Appl., 292 (2004), 381-400.*

13. J. M. Borwein, P. B. Borwein, *A cubic counterpart of Jacobi's identity and the AGM, Trans. Amer. Math. Soc. 323 (1991), 691-701.*

14. B. C. Berndt, *Ramanujan Notebooks, Part III*, Springer-Verlag, New York, 1991.

15. Ж.-П. Серр, *Курс арифметики*, Мир, М., 1972.

16. B. C. Berndt, *Ramanujan Notebooks, Part II*, Springer-Verlag, New York, 1989.

17. В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, М., 1993.

18. I. G. Macdonald, *Affine root systems and Dedekind's η-function, Matematika, 1972, Volume 16, Issue 4, 3-49.*

19. V. G. Kac, *Infinite-Dimensional Algebras, Dedekind's η-function, Classical Möbius Function and the Very Strange Formula, Advances in Mathematics, 30, 85-136, 1978.*

20. M. D. Schmidt, *Continued fractions and q-series generating functions for the generalized sum-of-divisors functions, Journal of Number Theory (2017).*